Liner Algebra Answers

Omniporent-ys

2024 年 10 月 15 日

摘要

63012409班一名同学对北京理工大学《线性代数B》的答案编写

1 习题一答案

2 习题二答案

3 习题三答案

3.1

$$3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} = 3\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\2\\4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\\9\\12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\8\\16\\24\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\14\\25\\36\end{bmatrix}$$

3.2

$2\vec{\alpha}_1 + 2\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}_2$ - $3\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}_3 + 2\vec{\beta}$

$\vec{\beta} = \frac{2}{3}\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$ - $\frac{2}{3}\vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{7}{3}\\\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\end{bmatrix}$

3.3

取$\vec{\alpha} = \left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]^T \in \mathbf{V}$

$\vec{\beta} = \left[y_1, y_2, \cdots, y_n\right]^T \in \mathbf{V}$ 则有$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \left[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n\right]^T \in \mathbf{V}$

设$x_i - a_i = c_x, y_i - a_i = c_y$, $x_i + y_i - a = c_{xy}$
则有$a_i = c_{xy} - c_x - c_y$,即a_i的值与i无关
这说明$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$
$k\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$请自行验证

3.4

(1)取$\vec{\alpha}$=$1, 1^T \in \mathbf{V_1}$

设$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})(\mathbf{A} + n_1\mathbf{I}) = n_2\mathbf{I}$,

展开并整理可以得到: $\mathbf{A}^2 + (n_1 - 2)\mathbf{A} + (-2n_1 - n_2)\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 其中$\begin{cases} n_1 - 2 = -2 \\ -2n_1 - n_2 = -1 \end{cases}$

解得：$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{A} = \mathbf{I}$,

所以$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{A}$，证毕。

对于一个矩阵A，如果A的秩为r，则有：

r(A) = 行阶梯型矩阵的非零行行数 = 有效方程的个数 = 独立向量的个数 = 非零子式的最高阶数

从行的角度来看，矩阵是线性方程组；而从列的角度来看，矩阵是列向量的集合。如此，从不同的角度我们都可以理解rank这个概念。

3.5 分块矩阵

3.5.1 对角线的可逆矩阵

设$\mathbf{A}$是m阶的方阵，$\mathbf{D}$是n阶的方阵。如果A和D都是可逆的，那么$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix}$是可逆矩阵。进一步地，$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}$。然而，这个结论不适用于反对角线矩阵。

3.5.2 反对角线矩阵的可逆矩阵

设$\mathbf{A}$是m阶的方阵，$\mathbf{D}$是n阶的方阵。如果A和$\mathbf{D}$都是可逆的，那么$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix}$是可逆矩阵。进一步地，$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$。可以观察到，这里矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{D}$在取逆矩阵的时候进行了“对调”，这是一个很有意思的现象，在实际应用中也需要格外注意。

4 典型例题

4.1 矩阵

- **例题1**：设$\mathbf{A}$是一个n阶的方阵，且$\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$,求$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$

类似的提醒一般都需要因式分解，且常用待定系数法来解决问题

解：

设$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})(\mathbf{A}+n_1\mathbf{I}) = n_2\mathbf{I}$,

展开并整理可以得到: $\mathbf{A}^2+(n_1-2)\mathbf{A}+(-2n_1-n_2)\mathbf{I}=\mathbf{0}$, 其中$\begin{cases} n_1-2=-2 \\ -2n_1-n_2=-1 \end{cases}$

解得：$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{A}=\mathbf{I}$,

所以$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}=\mathbf{A}$，证毕。

在这个题中，用待定系数法显得比较繁琐，可以直接通过移项看出结果，但是这里介绍的是通法，是一种思想，其理论基础是：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

---

https://zhuanlan.zhihu.com/p/266267223

$$\begin{array}{c|c:c} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \end{array}$$

https://www.zhihu.com/question/362654946/answer/2364047739