

Linear Algebra Answers

Omniporent-ys

2024 年 10 月 17 日

摘要

63012409班一名同学对北京理工大学《线性代数B》的答案编写

1 习题一答案

2 习题二答案

3 习题三答案

3.1

$$3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 25 \\ 36 \end{bmatrix}$$

3.2

$$2\vec{\alpha}_1 + 2\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}_2 - 3\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}_3 + 2\vec{\beta}$$
$$\vec{\beta} = \frac{2}{3}\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 - \frac{2}{3}\vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

3.3

$$\text{取 } \vec{\alpha} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{V}$$
$$\vec{\beta} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in \mathbf{V} \text{ 则有 } \vec{\alpha} + \vec{\beta} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]^T \in \mathbf{V}$$

设 $x_i - a_i = c_x, y_i - a_i = c_y, x_i + y_i - a = c_{xy}$

则有 $a_i = c_{xy} - c_x - c_y$, 即 a_i 的值与 i 无关

这说明 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

$k\vec{\alpha} \in \mathbf{V}$ 请自行验证

3.4

(1) 取 $\vec{\alpha} = 1, 1^T \in \mathbf{V}_1$

设 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})(\mathbf{A} + n_1\mathbf{I}) = n_2\mathbf{I}$,

展开并整理可以得到: $\mathbf{A}^2 + (n_1 - 2)\mathbf{A} + (-2n_1 - n_2)\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 其中 $\begin{cases} n_1 - 2 = -2 \\ -2n_1 - n_2 = -1 \end{cases}$

解得: $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{A} = \mathbf{I}$,

所以 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{A}$, 证毕。

对于一个矩阵 \mathbf{A} , 如果 \mathbf{A} 的秩为 r , 则有:

$r(\mathbf{A}) = \text{行阶梯型矩阵的非零行行数} = \text{有效方程的个数} = \text{独立向量的个数} = \text{非零子式的最高阶数}$

从行的角度来看, 矩阵是线性方程组; 而从列的角度来看, 矩阵是列向量的集合。如此, 从不同的角度我们都可以理解 rank 这个概念。

3.5 分块矩阵

3.5.1 对角线的可逆矩阵

设 \mathbf{A} 是 m 阶的方阵, \mathbf{D} 是 n 阶的方阵。如果 \mathbf{A} 和 \mathbf{D} 都是可逆的, 那么 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵。进一步地, $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}$ 。然而, 这个结论不适用于反对角线矩阵。

3.5.2 反对角线矩阵的可逆矩阵

设 \mathbf{A} 是 m 阶的方阵, \mathbf{D} 是 n 阶的方阵。如果 \mathbf{A} 和 \mathbf{D} 都是可逆的, 那么 $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵。进一步地, $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 。可以观察到, 这里矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{D} 在取逆矩阵的时候进行了“对调”, 这是一个很有意思的现象, 在实际应用中也需要格外注意。

4 典型例题

4.1 矩阵

- 例题1: 设 \mathbf{A} 是一个 n 阶的方阵, 且 $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, 求 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$

类似的提醒一般都需要因式分解, 且常用待定系数法来解决问题

解:

$$\text{设 } (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})(\mathbf{A} + n_1\mathbf{I}) = n_2\mathbf{I},$$

$$\text{展开并整理可以得到: } \mathbf{A}^2 + (n_1 - 2)\mathbf{A} + (-2n_1 - n_2)\mathbf{I} = \mathbf{0}, \text{ 其中 } \begin{cases} n_1 - 2 = -2 \\ -2n_1 - n_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

$$\text{所以 } (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{A}, \text{ 证毕。}$$

在这个题中, 用待定系数法显得比较繁琐, 可以直接通过移项看出结果, 但是这里介绍的是通法, 是一种思想, 其理论基础是:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/266267223>

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \end{array}$$

<https://www.zhihu.com/question/362654946/answer/2364047739>