工科数学分析（上）学习笔记

lamaper

2024 年 10 月 15 日

1　前置知识

1.1　常用数列求和

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

1.2　和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

1.3　积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

2 函数、极限与连续

2.1 常用定理与推论

2.1.1 一些简单的极限

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0(|q|<1)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$

2.1.2 归并性

例如要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在，可以使用归并性证明。
证明如下：
令 $f(x)=\sin x$，如果取 $x_n=n\pi$（x_n 单调增加趋于正无穷大），则有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x_n)=\lim_{x\to+\infty}\sin n\pi=0$$

然后又取 $x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$（x_n 单调增加趋于正无穷大），则有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x_n)=\lim_{x\to+\infty}\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=1$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在。

2.1.3 一种证明极限的思路

要证明 $f(x)$ 极限，则要证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$
那么设 $f(x)=A+a(x)$，那么就要证明 $\lim\limits_{x\to\infty}a(x)=0$
这是一种利用无穷小性质来证明极限的方法。

2.1.4 无穷小定理

- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小
- 有限个无穷小的和是无穷小
- 有限个无穷小的乘积是无穷小

需要注意的的是，无穷小是变量，而不是一个很小的数。

显然的，若 $f(x)$ 是无穷小，$\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大，反之亦然。

2.1.5 夹逼定理

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且 $f(x)\le h(x)\le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

利用夹逼定理可以证明一些不好直接说明的极限，它常与无穷小定理一起使用，同时伴有数学归纳法。

2.1.6 两个重要极限和常用等价无穷小

两个重要极限实际上代表两种特殊的极限形式：

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$ ($\frac{0}{0}$ 类型)
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (1^{∞} 类型)

在求解极限时，所看到的式子进行分析，确定类型，然后朝向这两个重要极限进行转化。

重要极限也有一些扩展，如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a\neq 0)$.

当 $x\to 0$ 时，有以下等价无穷小：

- $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x$;
- $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$;
- $\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x$;
- $(1+x)^a-1\sim ax$(a 是非零常数);
- $\frac{a^x-1}{x}\sim\ln a$;

2.1.7 求极限策略

类型	操作	最终形式
$\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$	直接计算	
$0\cdot\infty$	恒等变化	$\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ 或者 $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$
$\infty-\infty$	通分	$\frac{\infty}{\infty}$ 或者 $\frac{0}{0}$
∞^0 或者 0^0 或者 1^{∞}	朗博同构：$\lim u^v=e^{\lim(v\ln u)}$	$\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ 或者 $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$

2.2 典型例题

2.2.1 利用数学归纳法证明

证明下列数列有极限且求出极限：

（1）$y_1 = 10, y_n + 1 = \sqrt{6 + y_n}, (n = 1, 2, ...);$

（2）$y_1 = \sqrt{2}, y_n + 1 = \sqrt{2y_n}, (n = 1, 2, ...);$

解：

（1）先证明 y_n 有界，再证明 y_n 单调，最后说明 y_n 有极限。

由表达式知道 $y_n > 0$，$y_1 = 10, y_2 = \sqrt{6 + 10} = 4, y_3 = \sqrt{6 + 4} = \sqrt{10}$

观察猜测 y_n 应当不断减小，且减小趋势越来越小，所以 y_n 应当有下界且单调递减。

接下来先证明有界：

$y_1 = 10 > 3, y_2 = 4 > 3, y_3 = \sqrt{10} > 3$，从而猜测 $y_n > 3,$

由数学归纳法，假设 $y_n > 3$，则 $y_n + 1 = \sqrt{6 + y_n} > \sqrt{6 + 3} = 3,$

从而证明了 y_n 有下界。

再证明 y_n 单调：

$y_{n+1} - y_n = \sqrt{6 + y_n} - y_n = \frac{6+y_n-y_n^2}{\sqrt{6+y_n}+y_n} = \frac{(2+y_n)(3-y_n)}{\sqrt{6+y_n}+y_n}$

由于 $y_n > 3$，所以 $y_{n+1} - y_n < 0$，从而证明了 y_n 单调递减。

(技巧：面对根式相减，可以利用平方差公式构造恒正的分母，用无根号的分子来判断整个式子的正负)

最后求极限：

设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{6 + y_n} = \sqrt{6 + A}$

即 $A = \sqrt{A + 6}$，通过解方程可得 $A = 3$ 或 $A = +2$，

但是由于 $y_n > 3 > 0$，所以舍去负根

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 3$

解：

（2）仿照（1）的方法，先证明 y_n 有界，再证明 y_n 单调，最后说明 y_n 有极限。

$y_1 = \sqrt{2} < 2, y_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} < 2,$ 猜测 $y_n < 2$，

由数学归纳法，则 $y_{n+1} = \sqrt{2y_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$，

从而证明了 y_n 有上界。

再证明 y_n 单调：

$y_{n+1} - y_n = \sqrt{2y_n} - y_n = \frac{2y_n-y_n^2}{\sqrt{2y_n}+y_n} = \frac{y_n(2-y_n)}{\sqrt{2y_n}+y_n}$

由于 $y_n < 2$，所以 $y_{n+1} - y_n > 0$，从而证明了 y_n 单调递增。

最后求极限：

设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2y_n} = \sqrt{2A}$

即 $A = \sqrt{2A}$，通过解方程可得 $A = 2$

2.2.2 已知极限值求参数

这类题通常需要到一个结论：

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0\text{，若 } \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty\text{，则 } \lim_{x\to\infty} g(x) = 0}$$

求出下列式子中 α 与 β 的值：

（1）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x - \alpha x - \beta) = 0;$

（2）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} - \alpha x - \beta) = 0;$

(1) **解：**

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x - \alpha x - \beta) = 0$, 则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\arctan x - \alpha x - \frac{\beta}{x}) = 0.$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x - \alpha x - \frac{\beta}{x}) = 0.$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\beta}{x} = 0$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{2}.$

接下来回代 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x - \frac{\pi}{2}x) = \beta.$

设 $u = \arctan x, x = \tan u$，即求 $\lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}} -\tan u(\frac{\pi}{2} - u)$. 为了方便可以再次换元 $x = \frac{\pi}{2} - u$, 即求 $\lim\limits_{x\to 0} -x\tan(\frac{\pi}{2} - x)$. 即 $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x}{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x}{\sin x}\cos x = -1.$

所以 $\beta = -1.$

综上，$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = -1.$

(2) **解：**若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} - \alpha x - \beta) = 0$, 则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} - \alpha - \frac{\beta}{x}) = 0.$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} - \alpha - \frac{\beta}{x}) = 0$, 可以求得 $\alpha = -1.$

回代 $\alpha = -1$，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \beta.$

$\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x(\sqrt[3]{1 + \frac{-1}{x^3}} - 1)$, 这里可以用等价无穷小 $(1+x)^a - 1 \sim ax$ 替换，则原式变为 $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\frac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$

综上，$\alpha = -1, \beta = 0.$

练习：

已知 $\exists c > 0$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5 + 7x^4 + 2)^c - x]$ 存在且不为 0，求 c

解：

由题意知 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]=A$，其中 $A\neq 0$.

则原式变为 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{5c}[(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})-x^{1-5c}]=A$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{5c}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})-x^{1-5c}]=0$.

（这一步在后面详细解释）

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1-5c}=0$，所以 $1-5c=0$，即 $c=\frac{1}{5}$.

接着回代 $c=\frac{1}{5}$，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^{\frac{1}{5}}-x]=A$.

进行变换 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]=\lim\limits_{x\to\infty}[x\cdot\sqrt[5]{1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}}-1]$, 利用 $(1+x)^a-1\sim ax$ 替换则有 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{5}\cdot(\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})=\frac{7}{5}$.

不难发现，在这其中我们仍然用到了无穷小与无穷大转换的思想：

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=C\text{，若 }\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty\text{，则 }\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{C}{\infty}=0}$$

因为 $\frac{C}{\infty}$ 实际上是无穷小，所以此处极限就是 0，与上文提到的题目解法相同。