Liner Algebra Notes

lamaper

2024 年 10 月 14 日

摘要

这是线性代数B这门课的学习笔记，主要记录一些关键的习题和知识点，以及做题时的一些思路。同时也是对Latex的一次练习。

1 常用定理与推论

1.1 矩阵的秩rank

对于一个矩阵A，如果A的秩为r，则有：

r(A) = 行阶梯型矩阵的非零行行数 = 有效方程的个数 = 独立向量的个数 = 非零子式的最高阶数

从行的角度来看，矩阵是线性方程组；而从列的角度来看，矩阵是列向量的集合。如此，从不同的角度我们都可以理解rank这个概念。

1.2 分块矩阵

1.2.1 对角线的可逆矩阵

设$\mathbf{A}$是m阶的方阵，$\mathbf{D}$是n阶的方阵。如果A和D都是可逆的，那么 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix}$是可逆矩阵。进一步地，$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}$。然而，这个结论不适用于反对角线矩阵。

1.2.2 反对角线矩阵的可逆矩阵

设$\mathbf{A}$是m阶的方阵，$\mathbf{D}$是n阶的方阵。如果A和$\mathbf{D}$都是可逆的，那么 $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix}$是可逆矩阵。进一步地，$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$。可以观察到，这里矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{D}$在取逆矩阵的时候进行了“对调”，这是一个很有意思的现象，在实际应用中也需要格外注意。

2 典型例题

2.1 矩阵

- **例题1**：设$\mathbf{A}$是一个n阶的方阵，且$\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$,求$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$

  类似的提醒一般都需要因式分解，且常用待定系数法来解决问题

  解：
  设$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})(\mathbf{A}+n_1\mathbf{I}) = n_2\mathbf{I}$,
  展开并整理可以得到: $\mathbf{A}^2+(n_1-2)\mathbf{A}+(-2n_1-n_2)\mathbf{I}=\mathbf{0}$, 其中$\begin{cases} n_1-2=-2 \\ -2n_1-n_2=-1 \end{cases}$
  解得：$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{A}=\mathbf{I}$,
  所以$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}=\mathbf{A}$，证毕。

在这个题中，用待定系数法显得比较繁琐，可以直接通过移项看出结果，但是这里介绍的是通法，是一种思想，其理论基础是：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

---

https://zhuanlan.zhihu.com/p/266267223

$$\begin{array}{c|c:c} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \end{array}$$

https://www.zhihu.com/question/362654946/answer/2364047739