# 工科数学分析（上）学习笔记

lamaper

2024 年 10 月 16 日

## 1　前置知识

### 1.1　常用数列求和

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

### 1.2　和差化积公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

### 1.3　积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

# 2 函数、极限与连续

## 2.1 常用定理与推论

### 2.1.1 一些简单的极限

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0(|q|<1)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$

### 2.1.2 归并性

例如要证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在，可以使用归并性证明。

证明如下：

令$f(x)=\sin x$，如果取$x_n=n\pi$（$x_n$单调增加趋于正无穷大），则有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x_n)=\lim_{x\to+\infty}\sin n\pi=0$$

然后又取$x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$（$x_n$单调增加趋于正无穷大），则有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x_n)=\lim_{x\to+\infty}\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=1$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在。

### 2.1.3 一种证明极限的思路

要证明$f(x)$极限，则要证明$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$
那么设$f(x)=A+a(x)$，那么就要证明$\lim\limits_{x\to\infty}a(x)=0$
这是一种利用无穷小性质来证明极限的方法。

### 2.1.4 无穷小定理

- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小
- 有限个无穷小的和是无穷小
- 有限个无穷小的乘积是无穷小

需要注意的的是，无穷小是变量，而不是一个很小的数。

显然的，若$f(x)$是无穷小，$\frac{1}{f(x)}$是无穷大，反之亦然。

### 2.1.5 夹逼定理

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且$f(x)\le h(x)\le g(x)$，则$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

利用夹逼定理可以证明一些不好直接说明的极限，它常与无穷小定理一起使用，同时伴有数学归纳法。

### 2.1.6 两个重要极限和常用等价无穷小

两个重要极限实际上代表两种特殊的极限形式：

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$ ($\frac{0}{0}$ 类型)
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ($1^\infty$ 类型)

在求解极限时，所看到的式子进行分析，确定类型，然后朝向这两个重要极限进行转化。

重要极限也有一些扩展，如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ \ (a\ne 0)$.

当$x\to 0$时，有以下等价无穷小：

- $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x$;
- $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$;
- $\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x$;
- $(1+x)^a-1\sim ax$(a是非零常数);
- $\frac{a^x-1}{x}\sim\ln a$;

### 2.1.7 求极限策略

| 类型 | 操作 | 最终形式 |
|---|---|---|
| $\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$ | 直接计算 | |
| $0\cdot\infty$ | 恒等变化 | $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$或者$\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ |
| $\infty-\infty$ | 通分 | $\frac{\infty}{\infty}$或者$\frac{0}{0}$ |
| $\infty^0$或者$0^0$或者$1^\infty$ | 朗博同构：$\lim u^v=e^{\lim(v\ln u)}$ | $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$或者$\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ |

## 2.2 典型例题

### 2.2.1 利用数学归纳法证明

证明下列数列有极限且求出极限：

（1）$y_1=10, y_n+1=\sqrt{6+y_n}, (n=1,2,...)$;

（2）$y_1=\sqrt{2}, y_n+1=\sqrt{2y_n}, (n=1,2,...)$;

**解：**

（1）先证明$y_n$有界，再证明$y_n$单调，最后说明$y_n$有极限。

由表达式知道$y_n>0$，$y_1=10, y_2=\sqrt{6+10}=4, y_3=\sqrt{6+4}=\sqrt{10}$

观察猜测$y_n$应当不断减小，且减小趋势越来越小，所以$y_n$应当有下界且单调递减。

接下来先证明有界：

$y_1=10>3, y_2=4>3, y_3=\sqrt{10}>3$，从而猜测$y_n>3$,

由数学归纳法，假设$y_n>3$，则$y_n+1=\sqrt{6+y_n}>\sqrt{6+3}=3$,

从而证明了$y_n$有下界。

再证明$y_n$单调：

$y_{n+1}-y_n=\sqrt{6+y_n}-y_n=\frac{6+y_n-y_n^2}{\sqrt{6+y_n}+y_n}=\frac{(2+y_n)(3-y_n)}{\sqrt{6+y_n}+y_n}$

由于$y_n>3$，所以$y_{n+1}-y_n<0$，从而证明了$y_n$单调递减。

**(技巧：面对根式相减，可以利用平方差公式构造恒正的分母，用无根号的分子来判断整个式子的正负)**

最后求极限：

设$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+y_n}=\sqrt{6+A}$

即$A=\sqrt{A+6}$，通过解方程可得$A=3$或$A=+2$，

但是由于$y_n>3>0$，所以舍去负根

所以$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=3$

**解：**

（2）仿照（1）的方法，先证明$y_n$有界，再证明$y_n$单调，最后说明$y_n$有极限。

$y_1=\sqrt{2}<2, y_2=\sqrt{2\sqrt{2}}<2$,猜测$y_n<2$，

由数学归纳法，则$y_{n+1}=\sqrt{2y_n}<\sqrt{2\cdot 2}=2$，

从而证明了$y_n$有上界。

再证明$y_n$单调：

$y_{n+1}-y_n=\sqrt{2y_n}-y_n=\frac{2y_n-y_n^2}{\sqrt{2y_n}+y_n}=\frac{y_n(2-y_n)}{\sqrt{2y_n}+y_n}$

由于$y_n<2$，所以$y_{n+1}-y_n>0$，从而证明了$y_n$单调递增。

最后求极限：

设$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，则有$\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2y_n} = \sqrt{2A}$

即$A = \sqrt{2A}$，通过解方程可得$A = 2$

### 2.2.2 已知极限值求参数

这类题通常需要到一个结论：

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0\text{，若}\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty\text{，则}\lim_{x\to\infty} g(x) = 0}$$

**求出下列式子中$\alpha$与$\beta$的值：**

（1）若$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x - \alpha x - \beta) = 0$;

（2）若$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} - \alpha x - \beta) = 0$;

(1) **解：**

若$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x - \alpha x - \beta) = 0$, 则有$\lim\limits_{x\to+\infty} x(\arctan x - \alpha x - \frac{\beta}{x}) = 0$.

由于$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,所以$\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x - \alpha x - \frac{\beta}{x}) = 0$.

由于$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\beta}{x} = 0$, 所以$\alpha = \frac{\pi}{2}$.

接下来回代$\alpha = \frac{\pi}{2}$，则有$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x - \frac{\pi}{2}x) = \beta$.

设$u = \arctan x, x = \tan u$，即求$\lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}} -\tan u(\frac{\pi}{2} - u)$. 为了方便可以再次换元$x = \frac{\pi}{2} - u$,即求$\lim\limits_{x\to 0} -x\tan(\frac{\pi}{2} - x)$. 即$\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x}{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x}{\sin x}\cos x = -1$.

所以$\beta = -1$.

综上，$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = -1$.

(2) **解：** 若$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} - \alpha x - \beta) = 0$, 则有$\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} - \alpha - \frac{\beta}{x}) = 0$.

即$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} - \alpha - \frac{\beta}{x}) = 0$, 可以求得$\alpha = -1$.

回代$\alpha = -1$，则有$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \beta$.

$\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x(\sqrt[3]{1 + \frac{-1}{x^3}} - 1)$,这里可以用等价无穷小$(1+x)^a - 1 \sim ax$替换，则原式变为$\lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

综上，$\alpha = -1, \beta = 0$.

**练习：**

已知$\exists c > 0$使得$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5 + 7x^4 + 2)^c - x]$存在且不为0，求$c$

**解：**

由题意知$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]=A$，其中$A\neq 0$.

则原式变为$\lim\limits_{x\to\infty}x^{5c}[(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})-x^{1-5c}]=A$.

由于$\lim\limits_{x\to\infty}x^{5c}=+\infty$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})-x^{1-5c}]=0$.

（这一步在后面详细解释）

由于$\lim\limits_{x\to\infty}x^{1-5c}=0$，所以$1-5c=0$，即$c=\frac{1}{5}$.

接着回代$c=\frac{1}{5}$，则有$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^{\frac{1}{5}}-x]=A$.

进行变换$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]=\lim\limits_{x\to\infty}[x\cdot\sqrt[5]{1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}}-1]$,利用$(1+x)^a-1\sim ax$替换则有$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{5}\cdot(\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})=\frac{7}{5}$.

不难发现，在这其中我们仍然用到了无穷小与无穷大转换的思想：

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=C\text{，若}\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty\text{，则}\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{C}{\infty}=0}$$

因为$\frac{C}{\infty}$实际上是无穷小，所以此处极限就是0，与上文提到的题目解法相同。

### 2.2.3 利用夹逼定理证明极限

**求下列极限：**

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4})+...+\frac{n^2}{n^3+n^2}$；

(1) **解：**

观察知$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+n\pi}+\frac{1}{n^2+n\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+\pi}+...+\frac{1}{n^2+\pi})$;

不等式前一项$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+n\pi}+\frac{1}{n^2+n\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$;

不等式后一项$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+\pi}+...+\frac{1}{n^2+\pi})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$;

即$1\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})\leqslant 1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})=1$

(2) **解：**

观察知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+n^2}+\frac{4}{n^3+n^2}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2})\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2})\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+1}+...+\frac{n^2}{n^3+1})$;

即$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3+n^2}(\sum\limits_{i=1}^{n}i^2)\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2})\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3+1}(\sum\limits_{i=1}^{n}i^2)$;

又$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3+n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3+1}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}$;

所以$\frac{1}{3} \leqslant \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2}) \leqslant \frac{1}{3}$;

即$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+4}+...+\frac{n^2}{n^3+n^2}) = \frac{1}{3}$.

### 2.2.4 直接求极限

**求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{\pi}} \tan 2x \tan(\frac{\pi}{4}-x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}$;

(1) **解：**

(2) **解：**

(3) **解：**

### 2.2.5 函数的连续性与间断点问题

(1) 若$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & (x<0) \\ 3x & (0<x<1) \\ e^{2ax}-e^{ax}+1 & (x\geqslant 1) \end{cases}$,在$x=1$处连续，求$a$的值.

(2) 设$f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(a-1)x^n-1}{x^2n-ax^n-1}$ $(a\neq 0)$:

(i) 求$f(x)$；

(ii) 当$x\geqslant 0$时，若$f(x)$在连续，求$a$的值.

(3) 设$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}} & (x<0) \\ b & (x=0) \\ \frac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)] & (x>0) \end{cases}$ ,证明$f(x)$在$x=0$处连续.

(1) **解：**

(2) **解：**

(3) **解：**

# 3 导数与微分

## 3.1 常用导数

| 函数 | 导数 |
|---|---|
| $y = a^x$ | $y' = a^x \ln a$ |
| $y = \log_a x$ | $y' = \frac{1}{x \ln a}$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ |
| $y = \tan x$ | $y' = \sec^2 x$ |
| $y = \cot x$ | $y' = -\csc^2 x$ |
| $y = \sec x$ | $y' = \sec x \tan x$ |
| $y = \csc x$ | $y' = -\csc x \cot x$ |
| $y = \arcsin x$ | $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = \arccos x$ | $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = \arctan x$ | $y' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| $y = \text{-1}\, x$ | $y' = -\frac{1}{1+x^2}$ |
| $y = \operatorname{arcsec} x$ | $y' = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$ |
| $y = \operatorname{arsh} x$ | $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $y = \ln \lvert x\rvert x$ | $y' = \frac{1}{x}$ |

特别地，$\operatorname{arsh} = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

## 3.2 导数的运算法则

### 3.2.1 反函数求导

若可导函数$y = f(x)$的反函数为$x = \Phi(y)$，则

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

或者有

$$\Phi(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

### 3.2.2 参数方程求导

若$x = x(t), y = y(t)$均可导，则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

特别地，整理出参数方程二阶导计算公式：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(\frac{y'(t)}{x'(t)}) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

### 3.2.3 极坐标求导

一般将极坐标方程化为$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$,然后利用参数方程求导法则求导。

## 3.3 高阶导数

### 3.3.1 几个重要的高阶导数

- $y = x^m$，(m是正整数)，$y^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n} & n < m \\ m! & n = m \\ 0 & n > m \end{cases}$
- $y = x^a$，(a不是正整数)，$y^{(n)} = a(a-1)(a-2)...(a-n+1)x^{a-n}$
- $y = e^x$，$y^{(n)} = e^x$
- $y = \sin x$，$y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$
- $y = \cos x$，$y^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$
- $y = \ln x$，$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$
- $y = \frac{c}{ax+b}$，$y^{(n)} = c\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$

### 3.3.2 laibunic公式

若$u(x)=f(x)g(x)$，则有

$$u^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

可以类比二项式定理。

## 3.4 微分

## 3.5 典型例题

### 3.5.1 可导性证明与分段函数的导数

(1) 利用函数$f(x)$在$x=a$处可导，证明$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}=2af(a)-a^2f'(a)$;
(2) 设$f(x)=x|\sin x|, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,求$f''(x)$;

| (1) 解： |
|---|

| (2) 解： |
|---|

### 3.5.2 隐函数求导及其二阶导

(1) $\sin y+xe^y=0$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

| (1) 解： |
|---|

### 3.5.3 参数方程和极坐标方程求导及其二阶导

(1) $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ ,求$\frac{dy}{dx}$.
(2) 求双扭线$\rho^2=2a^2\cos 2\theta$在$\theta=\frac{\pi}{12}$处的切线斜率.

| (1) 解： |
|---|

| (2) 解： |
|---|