

# Linear Algebra Notes

lamaper

2024 年 10 月 17 日

## 摘要

这是线性代数B这门课的学习笔记，主要记录一些关键的习题和知识点，以及做题时的一些思路。同时也是对Latex的一次练习。

## 1 常用定理与推论

### 1.1 矩阵的秩rank

对于一个矩阵 $A$ ，如果 $A$ 的秩为 $r$ ，则有：

$r(A) = \text{行阶梯型矩阵的非零行行数} = \text{有效方程的个数} = \text{独立向量的个数} = \text{非零子式的最高阶数}$

从行的角度来看，矩阵是线性方程组；而从列的角度来看，矩阵是列向量的集合。如此，从不同的角度我们都可以理解rank这个概念。

### 1.2 分块矩阵

#### 1.2.1 对角线的可逆矩阵

设 $A$ 是 $m$ 阶的方阵， $D$ 是 $n$ 阶的方阵。如果 $A$ 和 $D$ 都是可逆的，那么  $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$  是可逆矩阵。进一步地， $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$ 。然而，这个结论不适用于反对角线矩阵。

#### 1.2.2 反对角线矩阵的可逆矩阵

设 $A$ 是 $m$ 阶的方阵， $D$ 是 $n$ 阶的方阵。如果 $A$ 和 $D$ 都是可逆的，那么  $\begin{bmatrix} 0 & A \\ D & 0 \end{bmatrix}$  是可逆矩阵。进一步地， $\begin{bmatrix} 0 & A \\ D & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & D^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ 。可以观察到，这里矩阵 $A$ 与 $D$ 在取逆矩阵的时候进行了“对调”，这是一个很有意思的现象，在实际应用中也需要格外注意。

## 2 典型例题

### 2.1 矩阵

- 例题1: 设 $\mathbf{A}$ 是一个 $n$ 阶的方阵, 且 $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$ , 求 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$

类似的提醒一般都需要因式分解, 且常用待定系数法来解决问题

解:

$$\text{设 } (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})(\mathbf{A} + n_1\mathbf{I}) = n_2\mathbf{I},$$

$$\text{展开并整理可以得到: } \mathbf{A}^2 + (n_1 - 2)\mathbf{A} + (-2n_1 - n_2)\mathbf{I} = \mathbf{0}, \text{ 其中 } \begin{cases} n_1 - 2 = -2 \\ -2n_1 - n_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

$$\text{所以 } (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{A}, \text{ 证毕。}$$

在这个题中, 用待定系数法显得比较繁琐, 可以直接通过移项看出结果, 但是这里介绍的是通法, 是一种思想, 其理论基础是:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

---

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/266267223>

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \end{array}$$

<https://www.zhihu.com/question/362654946/answer/2364047739>