

工科数学分析（上）学习笔记

lamaper

2024 年 10 月 11 日

1 前置知识

1.1 常用数列求和

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

1.2 和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

1.3 积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

2 函数、极限与连续

2.1 常用定理与推论

2.1.1 一些简单的极限

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 (|q| < 1)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

2.1.2 归并性

例如要证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 不存在, 可以使用归并性证明。

证明如下:

令 $f(x) = \sin x$, 如果取 $x_n = n\pi$ (x_n 单调增加趋于正无穷大), 则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin n\pi = 0$$

然后又取 $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (x_n 单调增加趋于正无穷大), 则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 不存在。

2.1.3 一种证明极限的思路

要证明 $f(x)$ 极限, 则要证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

那么设 $f(x) = A + a(x)$, 那么就要证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 0$

这是一种利用无穷小性质来证明极限的方法。

2.1.4 无穷小定理

- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小
- 有限个无穷小的和是无穷小
- 有限个无穷小的乘积是无穷小

需要注意的是, 无穷小是变量, 而不是一个很小的数。

显然的, 若 $f(x)$ 是无穷小, $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大, 反之亦然。

2.1.5 夹逼定理

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 且 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$

利用夹逼定理可以证明一些不好直接说明的极限, 它常与无穷小定理一起使用, 同时伴有数学归纳法。

2.1.6 两个重要极限和常用等价无穷小

两个重要极限实际上代表两种特殊的极限形式:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ($\frac{0}{0}$ 类型)
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (1^∞ 类型)

在求解极限时, 所看到的式子进行分析, 确定类型, 然后朝向这两个重要极限进行转化。

重要极限也有一些扩展, 如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ($a \neq 0$).

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有以下等价无穷小:

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \arcsin x$;
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$;
- $\ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x$;
- $(1+x)^a - 1 \sim ax$ (a 是非零常数);
- $\frac{a^x - 1}{x} \sim \ln a$;

2.2 典型例题

2.2.1 例题 1: 利用数学归纳法证明

证明下列数列有极限且求出极限:

- (1) $y_1 = 10, y_n + 1 = \sqrt{6 + y_n}, (n = 1, 2, \dots)$;
- (2) $y_1 = \sqrt{2}, y_n + 1 = \sqrt{2y_n}, (n = 1, 2, \dots)$;

解:

- (1) 先证明 y_n 有界, 再证明 y_n 单调, 最后说明 y_n 有极限。

由表达式知道 $y_n > 0$, $y_1 = 10, y_2 = \sqrt{6+10} = 4, y_3 = \sqrt{6+4} = \sqrt{10}$

观察猜测 y_n 应当不断减小, 且减小趋势越来越小, 所以 y_n 应当有下界且单调递减。

接下来先证明有界:

$$y_1 = 10 > 3, y_2 = 4 > 3, y_3 = \sqrt{10} > 3, \text{ 从而猜测 } y_n > 3,$$

由数学归纳法, 假设 $y_n > 3$, 则 $y_{n+1} = \sqrt{6+y_n} > \sqrt{6+3} = 3$,

从而证明了 y_n 有下界。

再证明 y_n 单调:

$$y_{n+1} - y_n = \sqrt{6+y_n} - y_n = \frac{6+y_n-y_n^2}{\sqrt{6+y_n}+y_n} = \frac{(2+y_n)(3-y_n)}{\sqrt{6+y_n}+y_n}$$

由于 $y_n > 3$, 所以 $y_{n+1} - y_n < 0$, 从而证明了 y_n 单调递减。

(技巧: 面对根式相减, 可以利用平方差公式构造恒正的分母, 用无根号的分子来判断整个式子的正负)

最后求极限:

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A, \text{ 则有 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6+y_n} = \sqrt{6+A}$$

即 $A = \sqrt{A+6}$, 通过解方程可得 $A = 3$ 或 $A = -2$,

但是由于 $y_n > 3 > 0$, 所以舍去负根

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 3$

(2) 仿照 (1) 的方法, 先证明 y_n 有界, 再证明 y_n 单调, 最后说明 y_n 有极限。

$$y_1 = \sqrt{2} < 2, y_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} < 2, \text{ 猜测 } y_n < 2,$$

由数学归纳法, 则 $y_{n+1} = \sqrt{2y_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$,

从而证明了 y_n 有上界。

再证明 y_n 单调:

$$y_{n+1} - y_n = \sqrt{2y_n} - y_n = \frac{2y_n - y_n^2}{\sqrt{2y_n} + y_n} = \frac{y_n(2-y_n)}{\sqrt{2y_n} + y_n}$$

由于 $y_n < 2$, 所以 $y_{n+1} - y_n > 0$, 从而证明了 y_n 单调递增。

最后求极限:

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A, \text{ 则有 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2y_n} = \sqrt{2A}$$

即 $A = \sqrt{2A}$, 通过解方程可得 $A = 2$