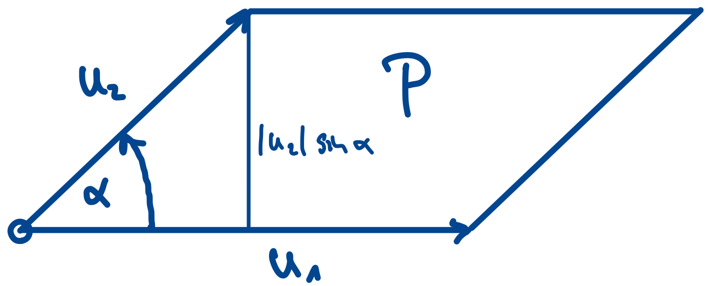
Determinanten

Anschaulich geometrische Behandlung

Für eine Matrix $A = (u_1\ u_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Spalten $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\det A = \pm(\text{Flächeninhalt des von } u_1 \text{ und } u_2 \text{ aufgespannten Parallelogramms } P).$$

$$P = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]\}.$$



Dabei ist

$\det(A) > 0$, wenn u_2 „links von" u_1 ist,

$\det(A) < 0$, wenn u_2 „rechts von" u_1 ist,

$\det(A) = 0$, wenn u_1 und v_2 linear abhängig sind.

- $\det(u_1\, u_2) = \text{Grundseite} \cdot (\text{orientierte Höhe})$

$$= |u_1| \cdot |u_2| \cdot \sin\alpha$$

α = orientierter Winkel von u_1 nach u_2 gegen den Uhrzeigersinn.

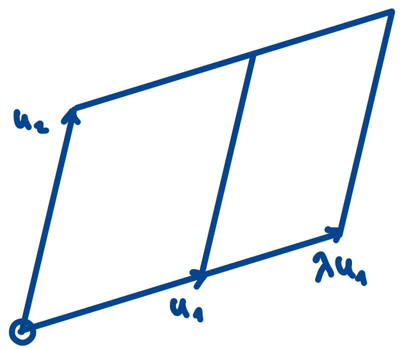
- Sinus ist eine tanszendente Funktion von α, und α ist eine transzendente Funktion von u_1 und u_2, aber det ist ein Polynom in den Einträgen von A.

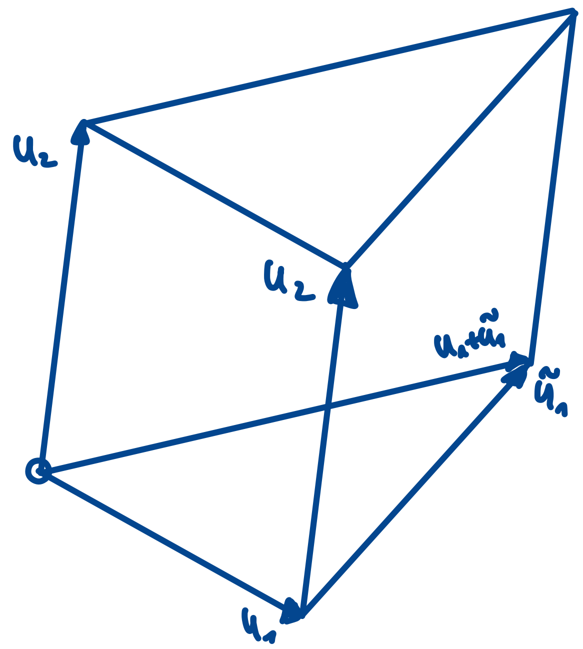
Algebraische Eigenschaften von det:

- $\det(\lambda u_1, u_2) = \lambda \det(u_1, u_2) = \det(u_1, \lambda u_2)$
- $\det(u_1 + \tilde{u}_1, u_2) = \det(u_1, u_2) + \det(\tilde{u}_1, u_2)$
- $\det(u_1, u_2 + \tilde{u}_2) = \det(u_1, u_2) + \det(u_1, u_2 + \tilde{u}_2)$

det ist in beiden Spalten linear

- $\det(u_1, u_2) = 0$, wenn u_1, u_2 linear abhängig.
- $\det(u_2, u_1) = -\det(u_1, u_2)$
- $\det(e_1, e_2) = 1$





- Wenn man diese Eigenschaft kennt, kann man 2x2 Determinanten berechnen:

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = u_{11} e_1 + u_{21} e_2$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = u_{12} e_1 + u_{22} e_2$$

$$\det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \det (u_1 \ u_2) = \det (u_{11} e_1 + u_{21} e_2, \ u_2)$$

$$= u_{11} \det (e_1 \ \underbrace{u_2}_{u_{12} e_1 + u_{22} e_2}) + u_{21} \det (e_2 \ u_2)$$

$$= u_{11} \Big(u_{12} \underbrace{\det (e_1 \ e_1)}_{=0} + u_{22} \underbrace{\det (e_1 \ e_2)}_{=1} \Big) + u_{21} \Big(u_{12} \underbrace{\det (e_2 \ e_1)}_{=-1} + u_{22} \underbrace{\det (e_2 \ e_2)}_{=0} \Big)$$

$$= u_{11} u_{22} - u_{21} u_{12}$$

Determinantenformel für 2x2-Matrizen:

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$+ \qquad -$

Für eine Matrix $A = (u_1\ u_2\ u_3) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit Spalten u_1, u_2, u_3 ist

$$\det A = \pm\left(\text{Volumen des von } u_1, u_2, u_3 \text{ aufgespannten Parallelepipeds } P\right).$$

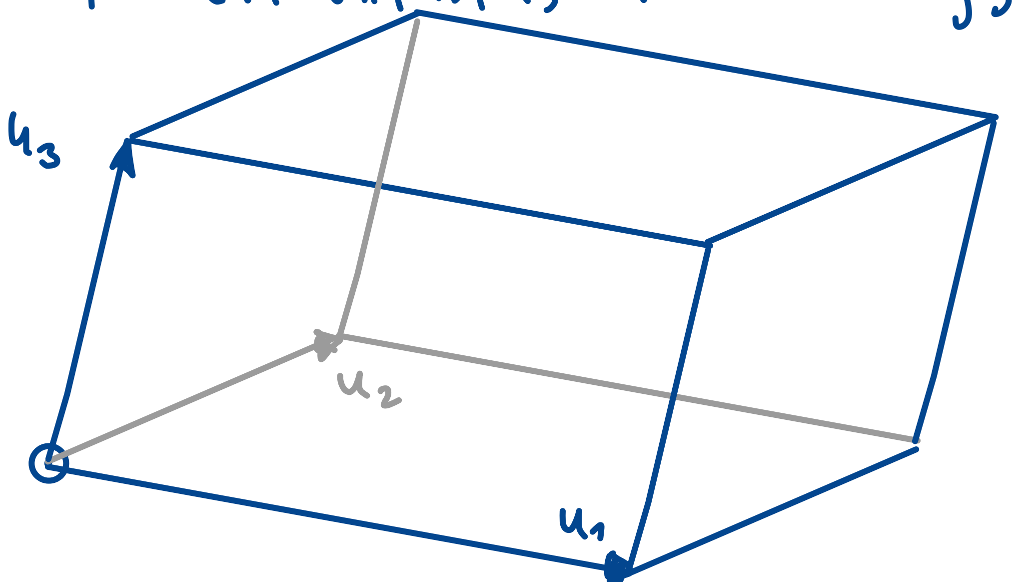
$$P = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]\}$$

Dabei ist

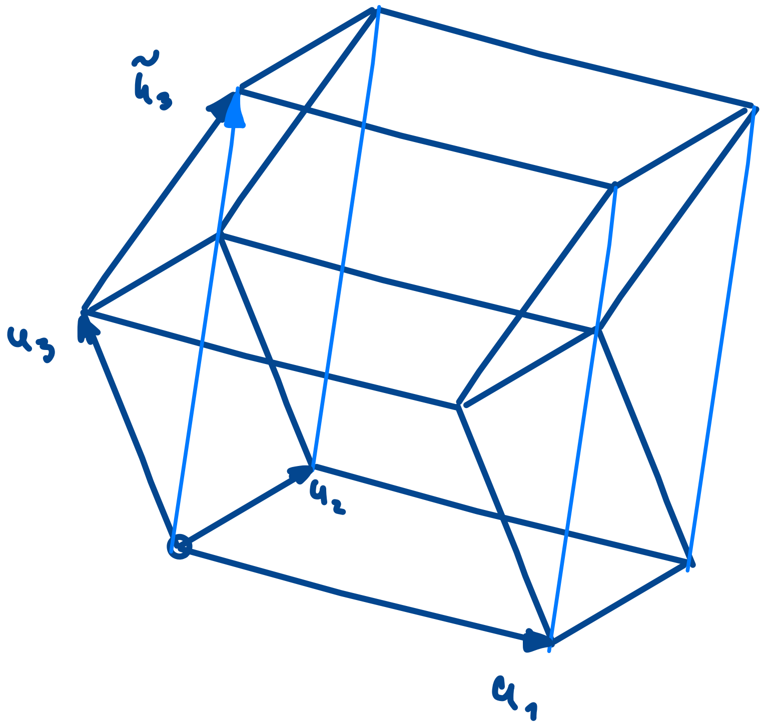
$\det A > 0$, wenn u_1, u_2, u_3 eine positiv orientierte Basis bilden (rechte Hand Regel)

$\det A < 0$, wenn u_1, u_2, u_3 eine negativ orientierte Basis bilden

$\det A = 0$, wenn u_1, u_2, u_3 linear abhängig.



- $\det(u_1\ u_2\ u_3)$ ist linear in jeder Spalte.



$$\det(u_1\ u_2\ u_3+\tilde{u}_3) = \det(u_1\ u_2\ u_3) + \det(u_1\ u_2\ \tilde{u}_3)$$

- $\det(u_1\ u_2\ u_3) = 0$ wenn u_1, u_2, u_3 linear abhängig.
- $\det(u_1\ u_2\ u_3) = \det(u_2\ u_3\ u_1) = \det(u_3\ u_1\ u_2)$
  $= -\det(u_1\ u_3\ u_2) = -\det(u_3\ u_2\ u_1) = -\det(u_2\ u_1\ u_3)$
- $\det(e_1\ e_2\ e_3) = 1.$

- Wenn man diese algebraische Eigenschaften kennt, kann man 3x3 Determinanten berechnen. Wie im 2x2-Fall erhält man durch stures Ausmultiplizieren die Formel für 3x3-Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

- **Achtung**. Dieses Schema setzt sich nicht fort. Schon die Formel für 4x4-Matrizen hat $4! = 24$ Terme, aber es gibt nur $4+4=8$ "Diagonale".