02.02.2024

Bemerkung. Für eine lineare Abbildung $F: V \to W$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen gleicher Dimension sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) F ist injektiv.
(ii) F ist surjektiv.
(iii) F ist bijektiv.

Äquivalenz schon mit Hilfe der Dimensionsformel gezeigt

(iv) Es gibt eine lineare Abbildung $G: W \to V$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_V$.

(v) Es gibt eine lineare Abbildung $\tilde{G}: W \to V$ mit $F \circ \tilde{G} = \mathrm{id}_W$

In diesem Fall sind G und $\tilde{G}$ eindeutig bestimmt und es gilt $G = \tilde{G} = F^{-1}$.

Betrachte nun eine quadratische Matrix

$$A \in M(n \times n, K)$$

und wende die Bemerkung auf die Abbildung

$$F: K^n \longrightarrow K^n, \quad F(x) = A \cdot x$$

an. Das ergibt:

Für eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt eine Matrix B mit $B \cdot A = E_n$.

(ii) Es gibt eine Matrix $\tilde{B}$ mit $A \cdot \tilde{B} = E_n$.

In diesem Fall sind B und $\tilde{B}$ eindeutig bestimmt und es gilt $B = \tilde{B} = A^{-1}$.