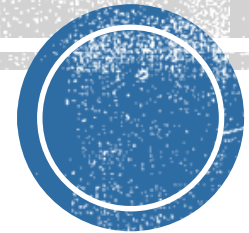


# SISTEMAS DE CONTROL

Bolton, W.(2001).***Ingeniería de Control***. México D.F.: Alfaomega.



# COMPETENCIA

- Reconoce la definición, elementos, clasificación, y parámetros asociados a los sistemas de control, con el fin de establecer la importancia de la teoría de control y su aplicación en la solución de problemáticas inherentes a la ingeniería electrónica contemporánea.



# CONTENIDO

- 1) Introducción.
- 2) Sistemas.
- 3) Modelos.
- 4) Sistemas en lazo abierto y cerrado.
- 5) Elementos básicos de un sistema en lazo abierto.
- 6) Elementos (y ejemplos) básicos de un sistema en lazo cerrado.
- 7) Estrategias de control.
- 8) Control digital.
- 9) *Modelos matemáticos para sistemas.*
- 10) Error en estado estable.
- 11) Efectos de las perturbaciones.
- 12) Sensibilidad a cambios en los componentes.
- 13) Estabilidad de los sistemas de control.
- 14) Lazo cerrado contra lazo abierto.



# INTRODUCCIÓN

- ¿Qué es un “sistema”, y en particular un “sistema de control”?
- Se puede pensar en un sistema como una caja negra que tiene una entrada y una salida.
- Se considera caja negra debido a que en realidad no es importante lo que tiene dentro, sino la **relación entre la salida y la entrada**.
- Este sistema es de control si la salida se controla de modo que pueda adoptar un valor o cambio particular de alguna manera definida.
- Así, para controlar la temperatura en un recinto a un valor específico, se diseña un sistema de control de calefacción central; mientras que una máquina herramienta se puede controlar para seguir una trayectoria dada.





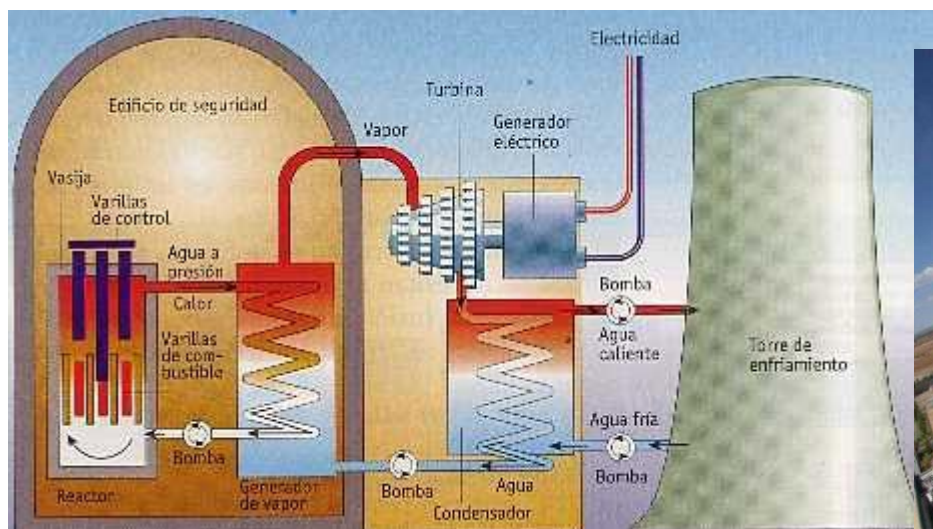
















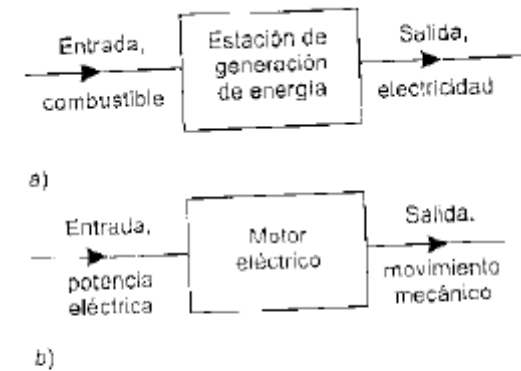






# SISTEMAS

- El término **sistema** se emplea para describir un conjunto de componentes que interactúan, sólo es de interés la interacción entre las entradas y las salidas, sin necesidad de estudiar en detalle las interacciones entre los componentes que lo forman.
- Así el aspecto importante en un sistema es la **relación entre la entradas y las salidas**.



**Figura 1.1** Sistemas: a) una estación de generación de energía, b) un motor eléctrico



- La ventaja de estudiar los sistemas de esta manera es que aunque existe una amplia variedad de sistemas posibles, la relación entre la salida y la entrada de muchos sistemas tiende a ser similar.
- Así, por ejemplo, la respuesta de un sistema eléctrico formado por un capacitor en serie con un resistor y la aplicación de un voltaje tiene el mismo tipo de relación de la respuesta de un contenedor de líquido al cual se le aplica súbitamente una entrada de calor.
- De este modo, al estudiar un **modelo** de sistema con este tipo de relación es posible determinar cómo responderán muchas formas diferentes de sistemas con la misma **relación entrada-salida**.

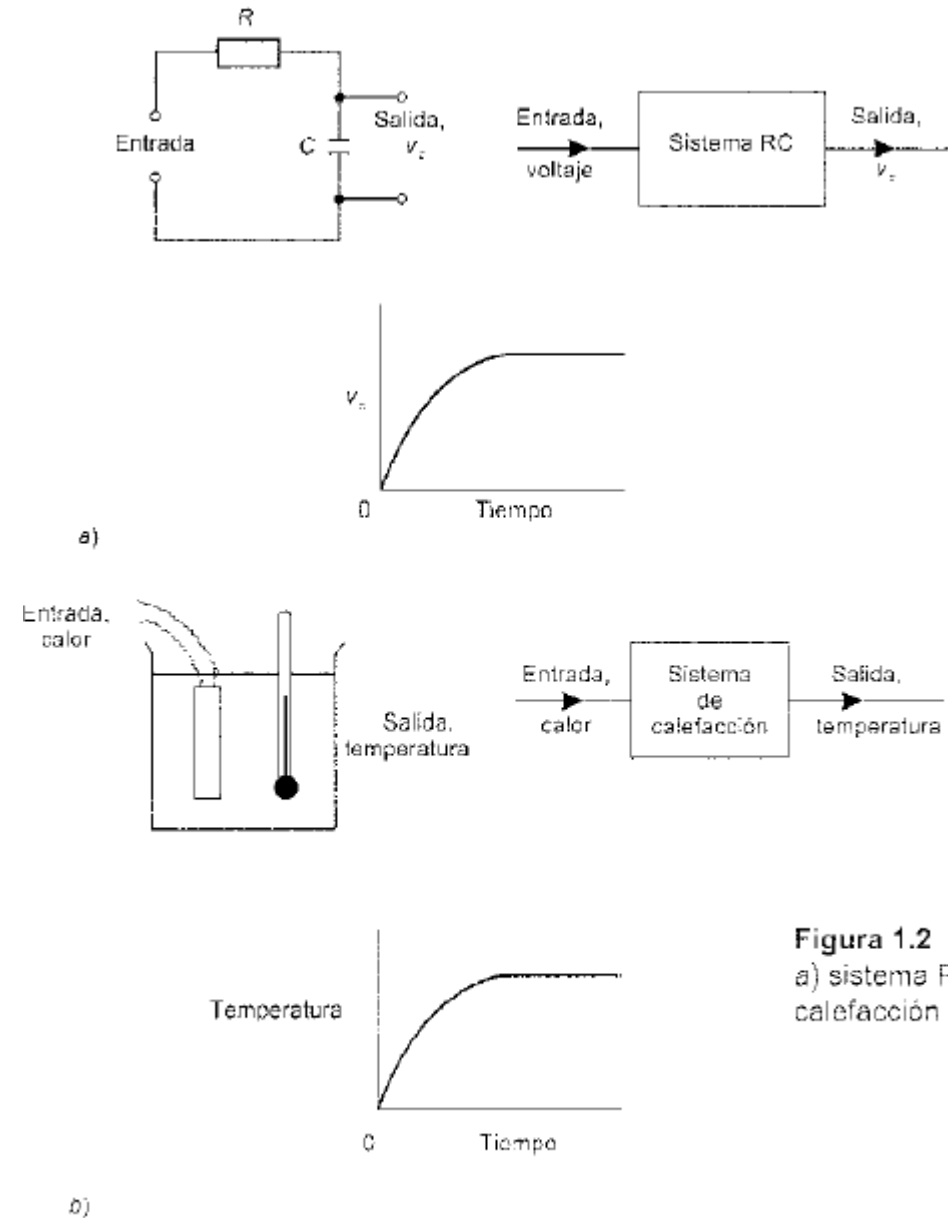


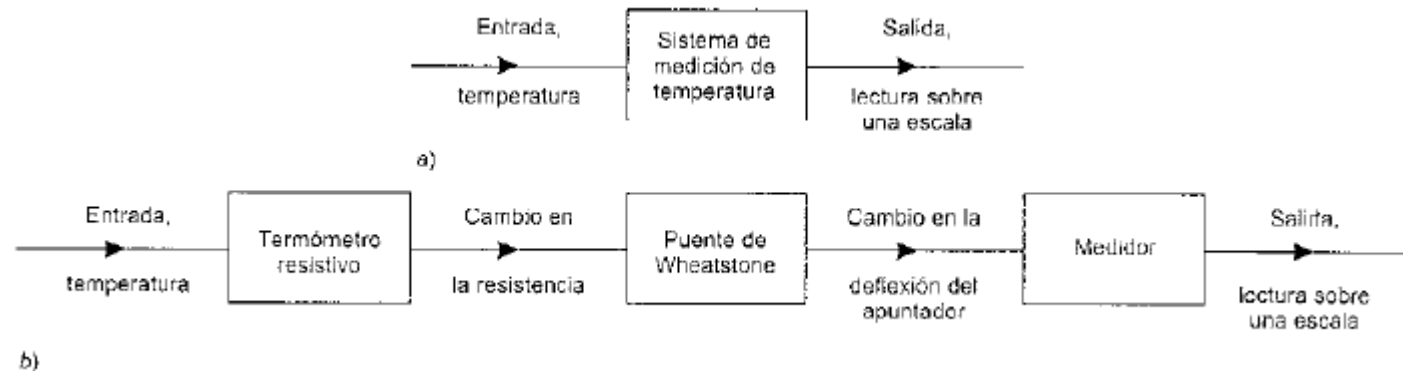
Figura 1.2 Sistemas similares:  
a) sistema RC, b) sistema de calefacción





- En algunas situaciones es conveniente particionar el sistema en **subsistemas** enlazados en serie.
- Así, por ejemplo, se puede tener un sistema de medición de temperatura que consiste en un termómetro resistivo conectado a un puente Wheatstone y la salida presentada en un medidor.
- El sistema completo se puede representar, como una entrada de temperatura y una salida de una lectura en una escala, o se puede representar como formado por un subsistema de termómetro resistivo, conectado a un subsistema puente y conectado a un subsistema medición.

**Figura 1.3** a) Sistema de medición de temperatura y b) sus subsistemas



- Un **sistema de control** es aquél en el que la salida del sistema se controla para tener un valor específico o cambiarlo, según lo determina la entrada al sistema.
- De este modo, un sistema de control de temperatura, por ejemplo, un sistema de calefacción central de una casa, puede tener en su entrada un termostato o panel de control en el que se fija la temperatura requerida y su salida es la temperatura real producida.
- Esta temperatura se ajusta mediante el sistema de control, de modo que se obtenga el valor fijado por la entrada al sistema.



**Figura 1.4** Sistema de calefacción central





# MODELOS

- Un modelo de un barco es una versión a escala de un barco de tamaño real; asimismo, el modelo de un aeroplano es una versión a escala de un aeroplano de tamaño real.
- Los modelos conservan el mismo tipo de relaciones entre las longitudes de las diferente partes que los objetos o sistemas de tamaño real.
- Un mapa es un modelo de un país, las distancias y ubicaciones de las ciudades en el mapa tienen justo las mismas proporciones que el país real.



- Un **modelo** es sólo un medio para transferir alguna relación de su versión real a otra versión.
- Para llevar a cabo la transferencia sólo se consideran las relaciones de interés.
- Así, el mapa se usa nada más para transferir relaciones que involucran distancias y, por lo tanto, ubicaciones; no se transfieren los olores o ruidos del país.





- Al dibujar una caja con líneas y flechas para las entradas y salidas se dibuja un modelo para el sistema.
- Las relaciones que se transfieren del sistema real al dibujo son las relaciones entrada-salida.
- De ningún modo se sugiere que el dibujo formado por una caja con líneas con flechas se vea como el sistema en la realidad.



- Se puede emplear para realizar modelos de casas, autos, grúas, etc.. El juego de bloques funcionales de construcción de un niño.
- Es posible construir algunos modelos a partir de un juego (kit) básico; de igual manera se puede emplear un kit básico para construir modelos de sistemas.
- Los **bloques fundamentales** son subsistemas o elementos de sistemas con características entrada-salida particulares.



- Así, por ejemplo, es posible representar muchos sistemas electrónicos que tienen un amplificador como subsistema, el cual es un dispositivo que toma a la entrada una señal y produce a la salida una versión más grande de la misma señal.
- Asimismo, con los sistemas de control existe un buen número de **bloques funcionales básicos** usados para formar sistemas, cada bloque cumple con una función particular.





# SISTEMAS DE CONTROL EN LAZO ABIERTO Y CERRADO

- Existen dos formas básicas de sistemas de control, una es la denominada en **lazo abierto**, y la otra en **lazo cerrado**.
- Con un sistema en lazo abierto la entrada se elige con base en la experiencia que se tiene con dichos sistemas para producir el valor de salida requerido.
- Esta salida, sin embargo, no se ve modificada por en cambio en las condiciones de operación externas.
- Así, por ejemplo, un calefactor eléctrico (figura 1.5) puede tener un selector que permite elegir una disipación en el elemento calefactor de 1kW o 2kW; de este modo la entrada al sistema está determinada por la posición del selector.

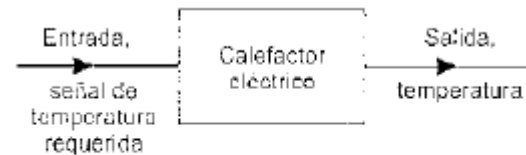


Figura 1.5 Ejemplo de un sistema de control en lazo abierto

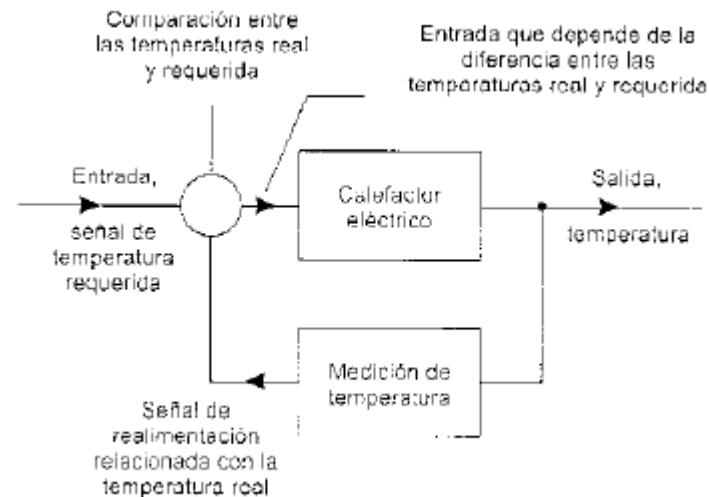


- La temperatura producida en la habitación esta determinada únicamente por el hecho de que se haya elegido la disipación de 1kW en el selector y no en 2 kW.
- Si se presentan cambios en la condiciones de operación, quizá alguien abre la ventana, la temperatura cambiará debido a que no hay modo de que el calor de salida se ajuste para **compensar** dicha condición.
- Este es un ejemplo de sistema de control en lazo abierto en el que no existe información que alimente de regreso (**realimentación**) al elemento calefactor para ajustarlo y mantener la temperatura constante.
- Los sistemas que operan mediante mecanismos de temporización preestablecidos son sistemas en lazo abierto.



- Con un sistema de control en lazo cerrado se tiene una señal de realimentación hacia la entrada desde la salida, la cual se utiliza para modificar la entrada de modo que la salida se mantenga constante a pesar de los cambios en las condiciones de operación (figura 1.6).

**Figura 1.6** Ejemplo de un sistema de control en lazo cerrado





- El sistema de calefacción con el calefactor eléctrico se puede transformar en un sistema en lazo cerrado si alguien con un termómetro monitorea la temperatura en la habitación y enciende o apaga los elementos calefactores de 1kW o 2kW para mantener la temperatura de la habitación constante.
- En esta situación existe la realimentación de una señal a la entrada referente a la temperatura, con lo que la entrada al sistema se ajusta según si su salida es la temperatura.
- Así, la entrada al calefactor depende de la **desviación** de la temperatura real con la temperatura requerida.



- Para ilustrar las diferencias adicionales entre los sistemas en lazo abierto y en lazo cerrado, considere un motor CC.
- Con un sistema en lazo abierto, la velocidad angular en el eje del motor se podrá determinar sólo por la posición inicial de la perilla de selección de velocidad, que afecta al voltaje aplicado al motor.
- Aquí **no se compensan** los cambios en el voltaje de alimentación, ni en las características del motor debidas a variaciones en la temperatura o los cambios de velocidad en el eje debidos a variación de **carga mecánica**, ya que no existe lazo de realimentación.
- En un sistema en lazo cerrado la posición inicial de la perilla de control tiene una velocidad específica del eje y ésta se mantiene mediante realimentación, a pesar de los cambios en el voltaje de alimentación, las características de motor o de la carga.



- En un sistema de control en lazo abierto la salida del sistema no tiene efecto sobre la señal de entrada.
- En un sistema en lazo cerrado la salida sí tiene un efecto sobre la señal de entrada, y la modifica para mantener una señal de salida en el valor requerido.
- Los sistemas en lazo abierto tienen la ventaja de ser bastante sencillos y en consecuencia de bajo costo, y con buena confiabilidad; sin embargo, con frecuencia son inexactos, porque no hay corrección de errores.
- Los sistemas en lazo cerrado tienen la ventaja de ser capaces de igualar los valores reales a los requeridos; no obstante, si existen retrasos en el sistema pueden surgir problemas, dichos retrasos propician que la acción correctiva requerida llegue demasiado tarde, y como consecuencia, se obtienen oscilaciones en la entrada e inestabilidad.
- Los sistemas en lazo cerrado son más complicados que aquellos en lazo abierto y más costosos con una gran posibilidad de descompostura debidas a la gran cantidad de componentes.





## **EJEMPLO 1**

- Identifique las entradas y salidas globales y sugiera el tipo de sistema de control que se puede utilizar con:
  - a) Un tostador de pan automático.
  - b) Una lavadora de ropa automática.
  - c) Un sistema de calefacción central doméstico.



# ELEMENTOS BÁSICOS DE UN SISTEMA DE CONTROL EN LAZO ABIERTO

- Se puede considerar que un sistema en lazo abierto consiste en algunos subsistemas básicos arreglados como se muestra en la figura 1.7.
- Estos elementos pueden ser distintos, equipos separados, pero todas las funciones que cumple cada subsistema se deben preservar.
- La entrada global al sistema es una señal, que, basada en experiencias anteriores, es probable que conduzca a la salida requerida.

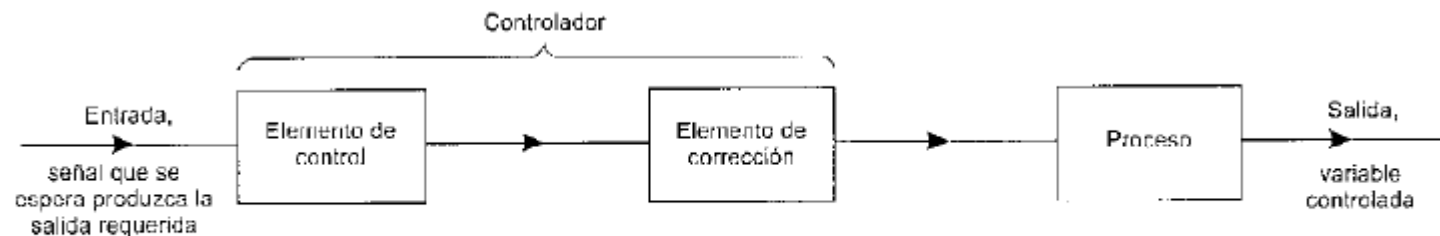


Figura 1.7 Subsistemas en un sistema de control en lazo abierto



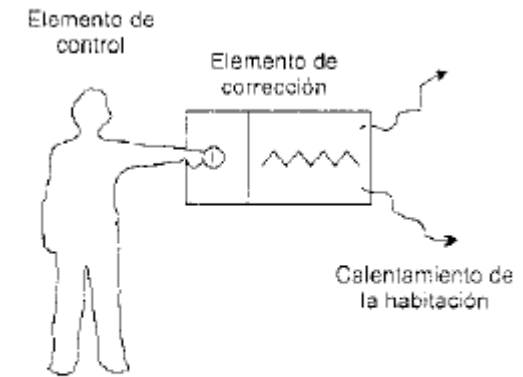
- Los subsistemas son:
  1. **Elemento de control.** Este elemento determina qué acción se va a tomar dada una entrada al sistema de control.
  2. **Elemento de corrección.** Este elemento responde a la entrada que viene del elemento de control e inicia la acción para producir el cambio en la variable controlada al valor requerido.
  3. **Proceso.** El proceso o **planta** es el sistema en el que se va a controlar la variable.
- Los dos primeros subsistemas a menudo se unen para formar un elemento denominado **controlador**.





- Un ejemplo de un sistema en lazo abierto es un calefactor eléctrico utilizado para calentar una habitación (figura 1.8).

- Variable controlada: temperatura de la habitación.
- Elemento de control: una persona toma las decisiones basadas en la experiencia de la temperaturas producidas mediante la conmutación del elemento calefactor.
- Elemento de corrección: el interruptor y el elemento calefactor.
- Proceso: la habitación.



**Figura 1.8** Sistema de control en lazo abierto de la temperatura de la habitación



- Muchos sistemas de control en lazo abierto utilizan un elemento de control que envía una señal para iniciar la acción después de algún periodo o una secuencia de señales para iniciar una secuencia de acciones en tiempos diferentes.
- En tales sistemas el controlador es en esencia un dispositivo de conmutación operado por un reloj.
- Un ejemplo de un sistema de control de este tipo es el ciclo básico de operación de la lavadora de ropa doméstica (figura 1.9).

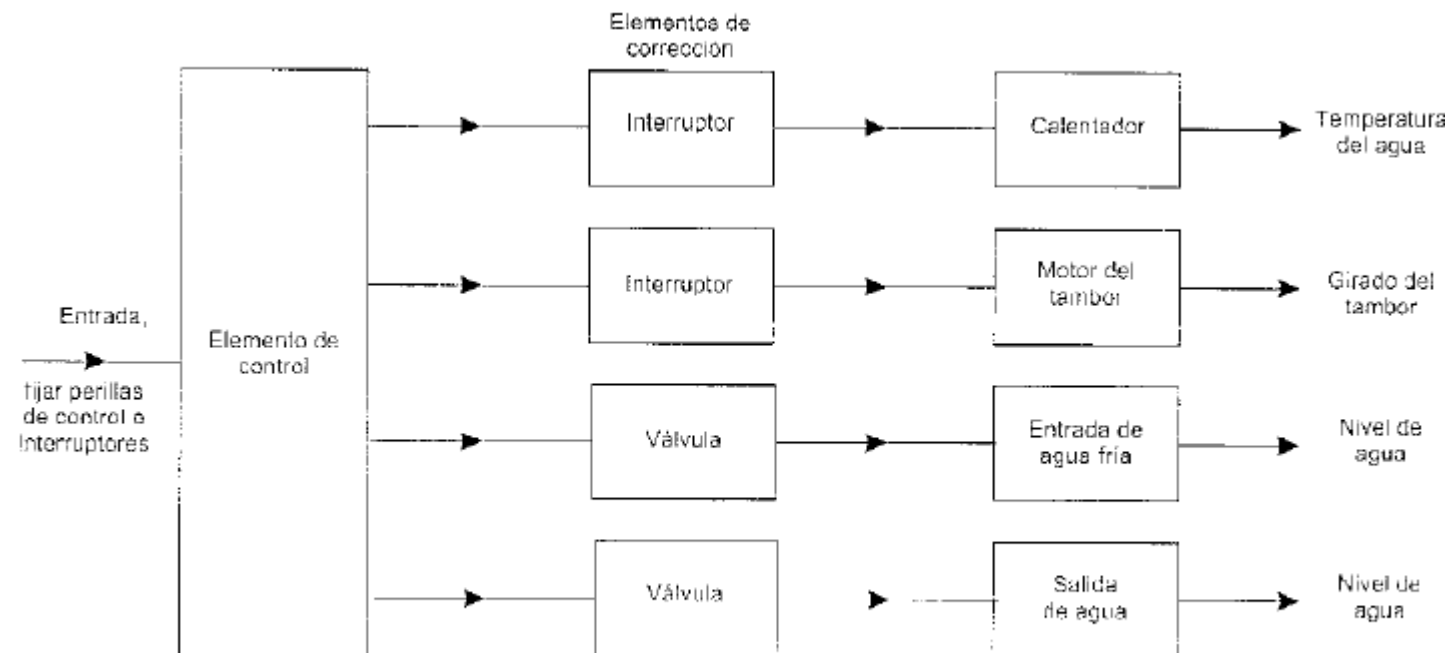


Figura 1.9 Lavadora de ropa doméstica



## **EJEMPLO 2**

- Identifique los subsistemas en un sistema en lazo abierto de un motor de velocidad controlada.

## **RESPUESTA**

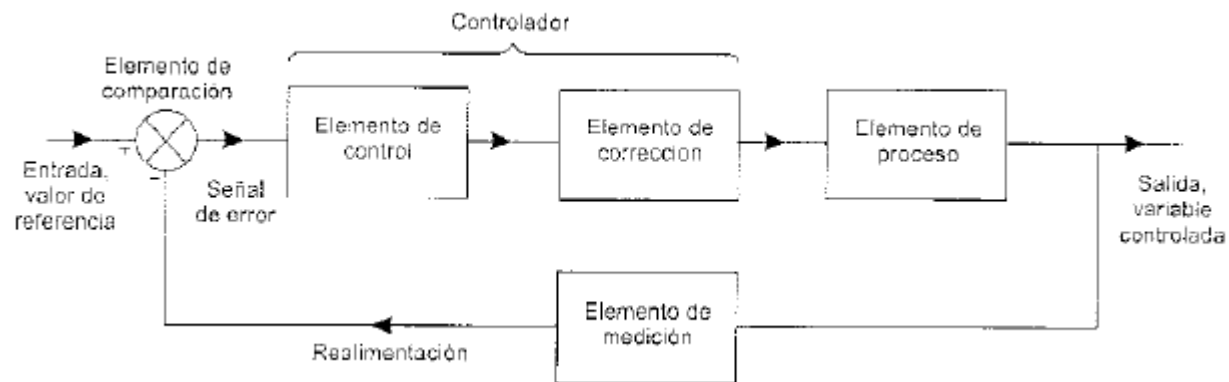
- Variable controlada: velocidad del motor.
- Elemento de control: una persona toma las decisiones basadas en la experiencia de la velocidades producidas al encender el motor.
- Elemento de corrección: el interruptor (electrónica de potencia asociada).
- Proceso: el motor.



# ELEMENTOS BÁSICOS DE UN SISTEMA EN LAZO CERRADO

- Se puede considerar que un sistema en lazo cerrado consiste en algunos subsistemas básicos ordenados como muestra la figura 1.10.
- La entrada global al sistema de control es el valor requerido de la variable, y la salida es el valor real de la variable.

Figura 1.10 Subsistemas en un sistema de control en lazo cerrado





1. Elemento de comparación. Este elemento compara el valor requerido o de referencia de la variable por controlar con el valor medido de lo que se obtiene a la salida, y produce una señal de error la cual indica la diferencia del valor obtenido a la salida y el valor requerido.

$$\text{Señal de error} = \text{señal del valor de referencia} - \text{señal del valor medido}$$

2. Elemento de control. Este elemento decide que acción tomar cuando se recibe una señal de error. A menudo se utiliza el término **controlador** para un elemento que incorpora el elemento de control y la unidad de corrección.
3. Elemento de corrección. Este elemento se utiliza para producir un cambio en el proceso al eliminar el error, y con frecuencia se denomina **actuador**.
4. Elemento proceso. El proceso, o planta es el sistema donde se va a controlar la variable.
5. Elemento de medición. Este elemento produce una señal relacionada con la condición de la variable controlada, y proporciona la señal de realimentación al elemento de comparación para determinar si hay o no error.



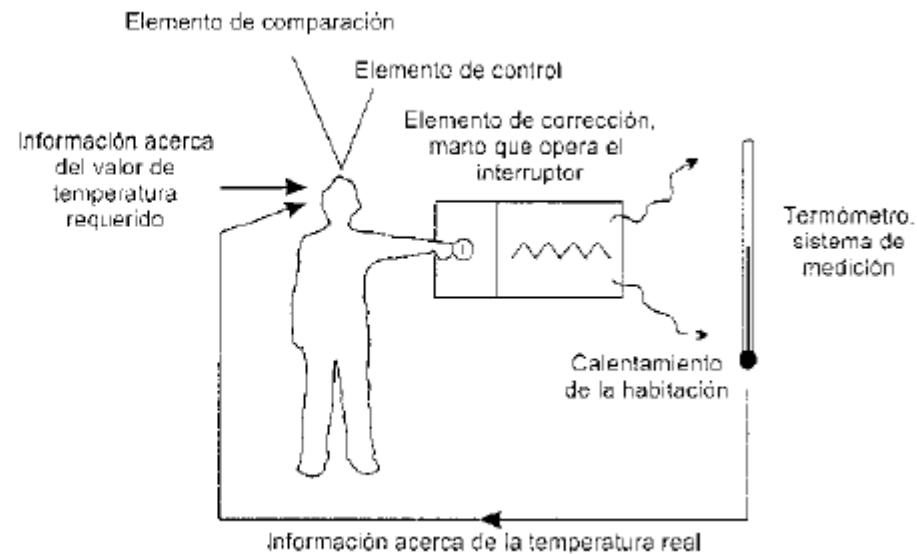
- Una característica necesaria de un sistema de control en lazo cerrado es el **lazo de realimentación**.
- Este es el medio a través del cual una señal relacionada con la variable real obtenida se realimenta para compararse con la señal de referencia.
- Se dice que se tiene **realimentación negativa** cuando la señal realimentada se sustrae del valor de referencia, esto es,

$$\text{Señal de error} = \text{valor de referencia} - \text{señal de realimentación}$$

- En la figura 1.10 la señal de realimentación se combina con el valor de referencia en el elemento de comparación; el elemento de comparación se indica mediante un círculo con una cruz, éste es el símbolo genérico para indicar un elemento de suma
- Cuando en el elemento de comparación hay realimentación negativa, el valor de referencia se marca con una señal positiva y la señal de realimentación como negativa de modo que la salida del elemento de comparación es la diferencia entre las señales.



- Para ilustrar esta presentación de los elementos de un sistema de control, considere el sistema de control de la figura 1.11.



**Figura 1.11** Sistema de control en lazo cerrado para la temperatura de una habitación



- Los elementos de este sistema de control son:
  - Variable controlada: temperatura de la habitación.
  - Valor de referencia: temperatura requerida en la habitación.
  - Elemento de comparación: persona que compara el valor medido y la temperatura requerida.
  - Señal de error: diferencia entre la temperatura requerida y la medida.
  - Elemento de control: la persona.
  - Elemento de corrección: mano que opera el encendido del elemento calefactor.
  - Proceso: habitación.
  - Dispositivo de medición: termómetro.





## EJEMPLO 3

- El tostador doméstico es un sistema en lazo abierto (ejemplo 1), sugiera los medios que permiten hacerlo un sistema de control en lazo cerrado.

## RESPUESTA

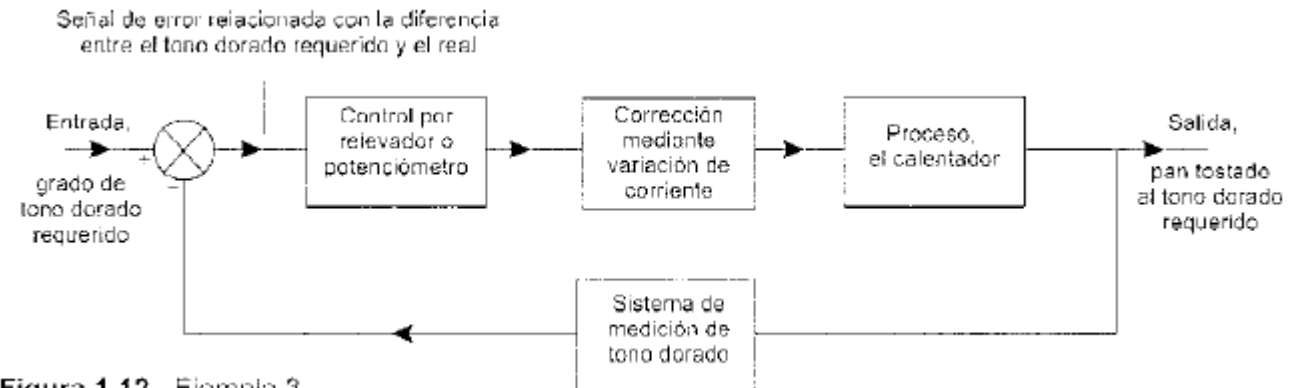


Figura 1.12 Ejemplo 3



# EJEMPLOS DE SISTEMAS DE CONTROL EN LAZO CERRADO

1. La figura 1.13 muestra un ejemplo de un sistema de control sencillo utilizado para mantener constante el nivel de agua en un tanque.
  - El valor de referencia es la posición inicial en el brazo (flotador), de modo que cierra el suministro de agua en el nivel requerido.
  - Cuando el agua sale del tanque, el flotador baja con el nivel del agua; esto propicia que el brazo del flotador se mueva y permita que el agua entre al tanque.
  - Este flujo continúa hasta que el flotador sube a una altura tal, que haya movido el brazo del flotador y cerrado el suministro de agua.

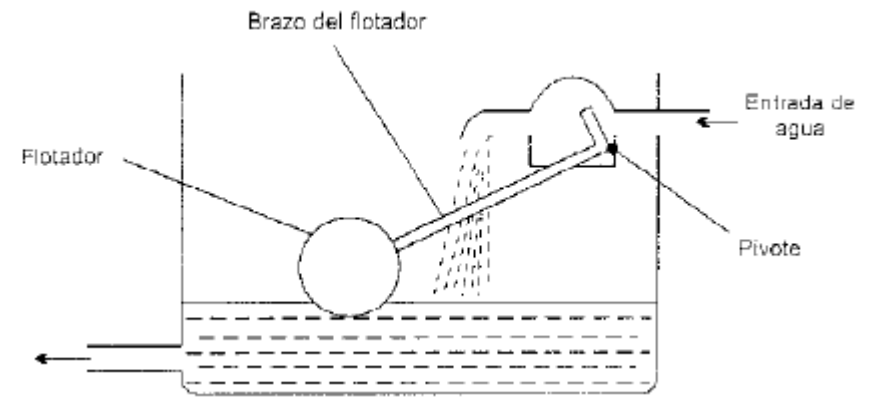


Figura 1.13 Control automático del nivel de agua en un tanque

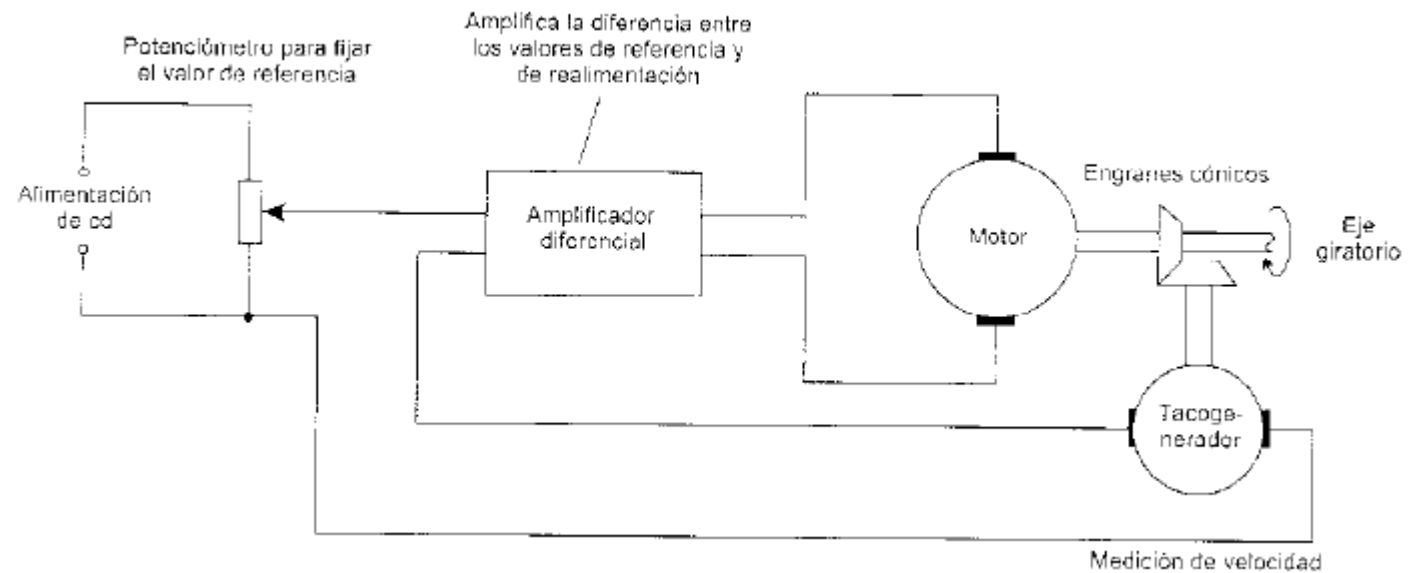


- Éste es un sistema de control en lazo cerrado y sus elementos son:
  - Variable controlada: nivel de agua en el tanque.
  - Valor de referencia: posición inicial en el brazo del flotador.
  - Elemento de comparación: brazo del flotador.
  - Señal de error: diferencia entre la posición real del brazo y su posición inicial.
  - Elemento de control: brazo pivoteado.
  - Elemento de corrección: aleta de apertura o cierre del suministro de agua.
  - Proceso: agua en el tanque.
  - Dispositivo de medición: el flotador y el brazo que lo sostiene.



2. La figura 1.14 muestra un sistema de control automático sencillo para la velocidad angular de un eje.
- Se utiliza un potenciómetro para fijar el valor de referencia, es decir, qué voltaje se aplica al amplificador diferencial como valor de referencia para la velocidad angular requerida.
  - El amplificador diferencial se usa tanto para comparar como para amplificar la diferencia entre los valores de referencia y realimentación, esto es, amplifica la señal de error.
  - Después, la señal de error amplificada se aplica al motor que, a su vez, ajusta la velocidad del eje giratorio.
  - La velocidad angular del eje se mide con un tacogenerador, conectado al eje por medio de un par de engranes cónicos; la señal que viene del tacogenerador se realimenta al amplificador diferencial.

Figura 1.14 Control automático de la velocidad de un eje





- El sistema esta formado por:
  - Variable controlada: velocidad angular del eje.
  - Valor de referencia: voltaje especificado para la velocidad requerida.
  - Elemento de comparación: amplificador diferencial.
  - Señal de error: diferencia entre el voltaje del valor de referencia y el voltaje de realimentación.
  - Elemento de control: amplificador.
  - Elemento de corrección: motor.
  - Proceso: eje giratorio.
  - Dispositivo de medición: tacogenerador.



3. En la vida diaria existen muchos sistemas de control sencillos; el acto de intentar levantar una tasa de café de la mesa requiere de un sistema de control con realimentación.
- La mano que levanta la tasa se debe mover al lugar correcto, sorteando obstáculos en el camino, y debe quedar en la posición adecuada para que los dedos puedan asir la oreja de a tasa justo en la forma apropiada y levantarla.
  - Para controlar la mano se llevan a cabo dos tareas de realimentación: visión y tacto (figura 1.15).



Figura 1.15 Movimiento para levantar una tasa de café



- Así, para el sistema de control utilizado al mover la mano al lugar donde se localiza la tasa, se tiene:
  - Variable controlada: ubicación de la mano en relación a la tasa.
  - Valor de referencia: ubicación de la tasa.
  - Elemento de comparación: la persona.
  - Señal de error: diferencia entre la ubicaciones real y requerida de la mano.
  - Elemento de control: la persona.
  - Unidad de corrección: el brazo y la muñeca.
  - Proceso: dinámica de la mano.
  - Dispositivo de medición: observación visual.



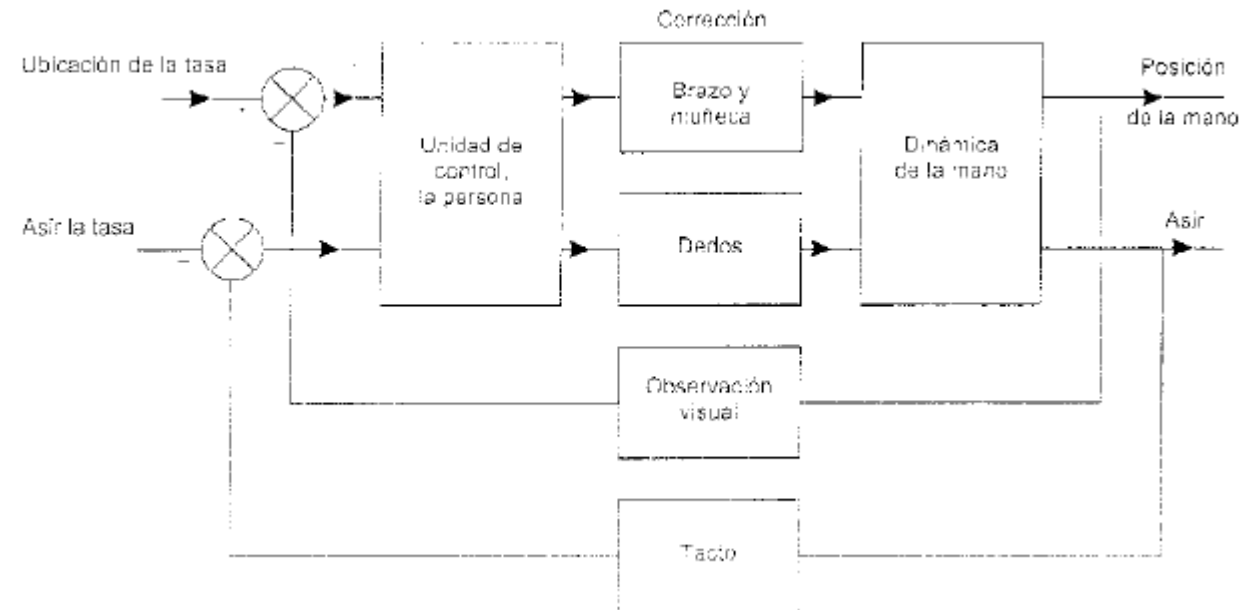
4. En muchos sistemas de control se tiene sólo una variable que controlar, por ejemplo, el nivel de agua en un tanque, la velocidad angular de un eje o la ubicación de la mano.
- Sin embargo, existen algunos sistemas de control en los que debe controlarse más de una variable.
  - Un ejemplo es el acto de levantar una tasa de café, puesto que no sólo se debe controlar la ubicación de la mano si también la presión ejercida por los dedos al momento de asir la oreja de la tasa.





- Aquí, se tienen dos lazos de realimentación, uno concerniente con la ubicación, el cual utiliza la visión como medio de medición, y el otro relativo a la presión, que emplea el tacto como medio de medición (figura 1.16).
- Esto se puede considerar como una forma básica de un brazo robótico con una pinza de sujeción diseñado para levantar objetos en una línea de producción.

Figura 1.16 Levantar una tasa de café



5. Otro ejemplo de un sistema de control con dos variables por controlar es manejar un automóvil, éstas son, la dirección y la velocidad del automóvil (figura 1.17).

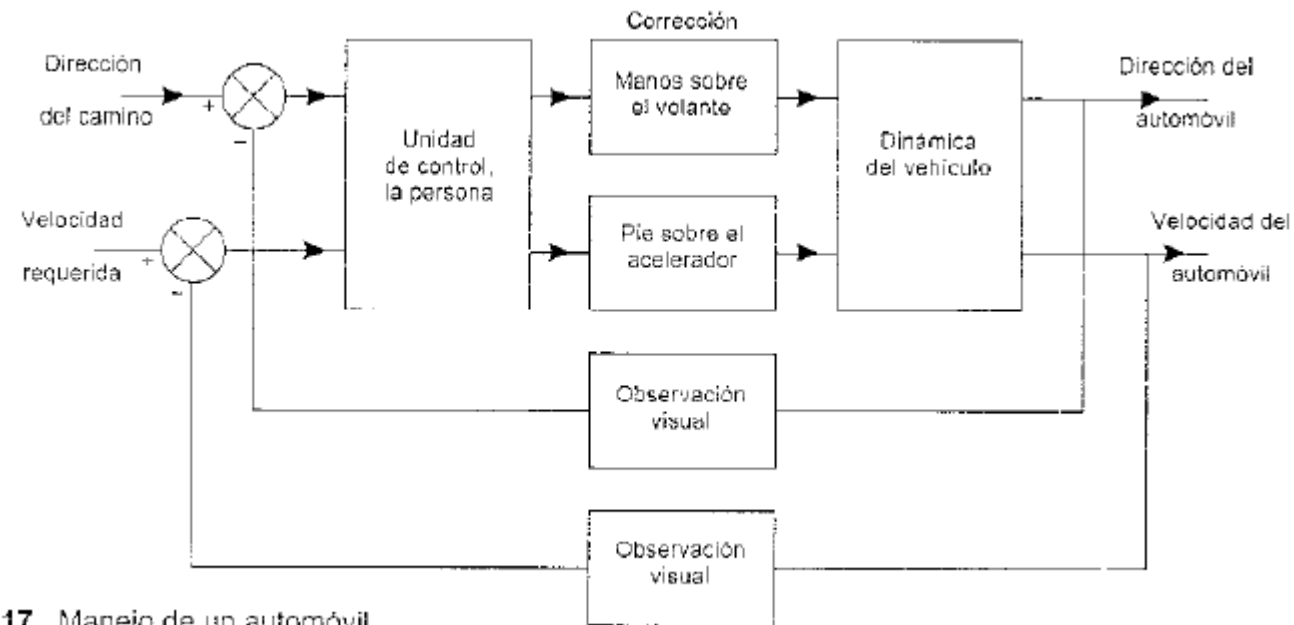


Figura 1.17 Manejo de un automóvil



- Variable controlada: dirección del automóvil en el camino – velocidad del automóvil en el camino.
- Valor de referencia: dirección requerida a lo largo del camino – velocidad requerida en el camino.
- Elemento de comparación: la persona.
- Señal de error: diferencia entre la dirección requerida y la dirección real – diferencia entre la velocidad requerida y la velocidad real.
- Elemento de control: la persona.
- Elemento de corrección: manos sobre el volante – pies sobre los pedales del acelerador o freno.
- Proceso: el vehículo.
- Dispositivo de medición: observación visual.



## EJEMPLO 4

- Un trabajador mantiene el nivel de líquido de un contenedor a un nivel constante.
- Para esto observa el nivel a través de una mirilla de vidrio en una de las paredes del tanque, y ajusta la cantidad de líquido que sale del tanque con la apertura o cierre de una válvula (figura 1.18).
- Para dicho sistema de control, ¿Cuáles son: a) la variable controlada, b) el valor de referencia, c) el elemento de comparación, d) la señal de error, e) el elemento de control, f) el elemento de corrección, g) el proceso y h) el dispositivo de medición?

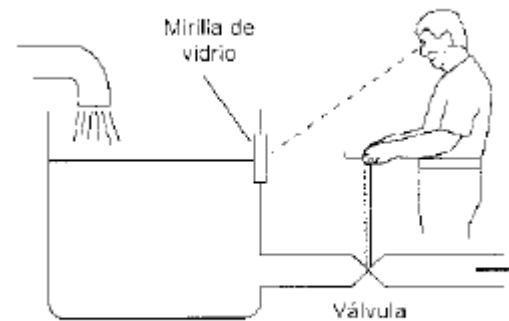


Figura 1.18 Ejemplo 4



# ESTRATEGIAS DE CONTROL

- El elemento de control tiene como entrada la señal de error y como salida una señal que se convierte en la entrada a la unidad de corrección de modo que pueda iniciar la acción para eliminar el error.
- Existen varias formas para que el elemento de control reaccione ante una señal de error.
- Con sistemas de control en **lazo abierto** los tipos de control más probables son el de **1) dos posiciones** (encendido- apagado o mejor conocido como *on-off*) o secuencias o **2) acciones conmutadas por tiempo**.
- Un ejemplo de secuencia conmutada por tiempo es la operación de una lavadora de ropa doméstica.





- Con sistemas de **control en lazo cerrado** los tipos de control son a menudo el **1) control de dos posiciones**, el **2) control proporcional** o el **3) control proporcional combinado** con algún otro refinamiento.

- 1) Con el modo de control de dos posiciones, la señal de error de entrada al elemento de control es una salida de encendido o apagado, que se utiliza para encender o apagar al elemento de corrección (figura 1.19)
  - ❑ Así, en el caso del sistema de calefacción central doméstico controlado por un termostato, éste produce una salida que enciende o apaga el calefactor según el error.
  - ❑ Si la temperatura de la habitación baja de cierto valor, entonces el termostato enciende el calefactor; si por el contrario, la temperatura rebasa el valor fijado, el calefactor se apaga.

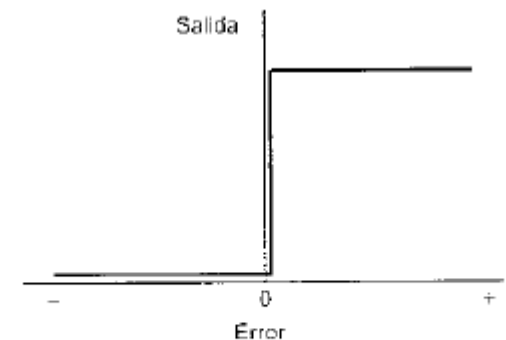


Figura 1.19 Modo de control de dos posiciones



- 2) Con el control proporcional la salida del elemento de control es una señal, la cual es proporcional al error: cuanto mayor sea el error mayor será la salida (figura 1.20).
- ❑ Esto significa que el elemento de corrección recibirá una señal que depende de la magnitud de la corrección que se necesite.

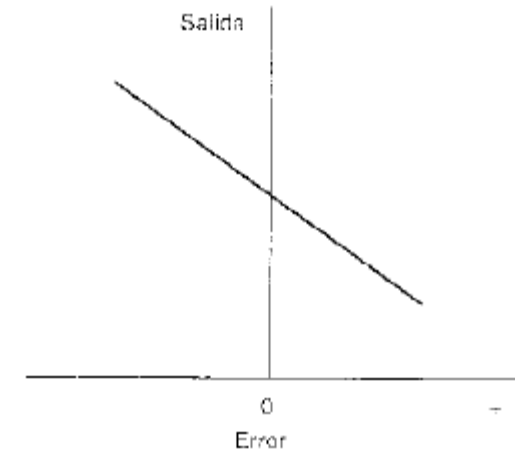


Figura 1.20 Control proporcional



- ❑ En la figura 1.21 se muestra un ejemplo de tal sistema de control para mantener constante el nivel de un líquido.
- ❑ Los cambios en el nivel producen un movimiento del flotador y, por lo tanto del brazo móvil que lo sostiene.
- ❑ A su vez, esto cambia la apertura de la válvula y afecta la tasa a la que el líquido sale del tanque.
- ❑ Cuanto mayor sea el error en el nivel del líquido mayor será el cambio en la apertura de la válvula.

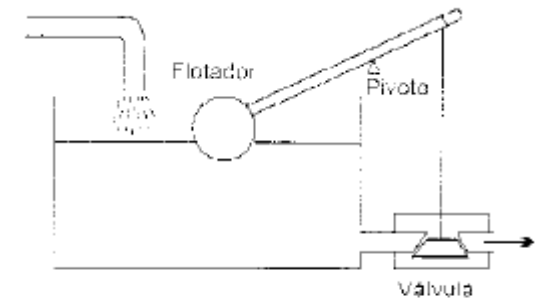


Figura 1.21 Sistema de control de nivel proporcional



- 3) Debido a que el control proporcional por sí solo puede presentar algunos problemas, con frecuencia se combina con otras formas de control.
- ❑ Existe el **control derivativo**, donde la salida es proporcional a la razón de cambio de la señal de error, y el **control integral**, donde la salida en el tiempo  $t$  es proporcional a la integral de la señal de error entre  $t=0$  y  $t$ .
  - ❑ Un ejemplo sencillo de control proporcional derivativo es un vehículo automático donde el controlador toma acciones basadas no sólo en el conocimiento de la posición del vehículo, sino también de su velocidad, es decir, la razón de cambio de la distancia.



- ❑ Con sólo el control proporcional, el controlador da nada más una respuesta en proporción a la magnitud del error de la posición requerida.
- ❑ No toma en cuenta la rapidez del cambio del error; el control derivativo si lo hace.
- ❑ Así, si el vehículo se empieza a mover alejándose rápido de la posición requerida, con el control derivativo habrá una acción correctiva mucho mayor que si el vehículo se alejara lentamente de la trayectoria requerida.
- ❑ De este modo, la combinación del control proporcional derivativo toma en cuenta más rápido las desviaciones de la trayectoria requerida y las corrige.





## EJEMPLO 5

- ¿Qué tipo de estrategia de control se usa en los siguientes sistemas de control?
  - a) Un refrigerador.
  - b) Guiado de un automóvil en un camino.

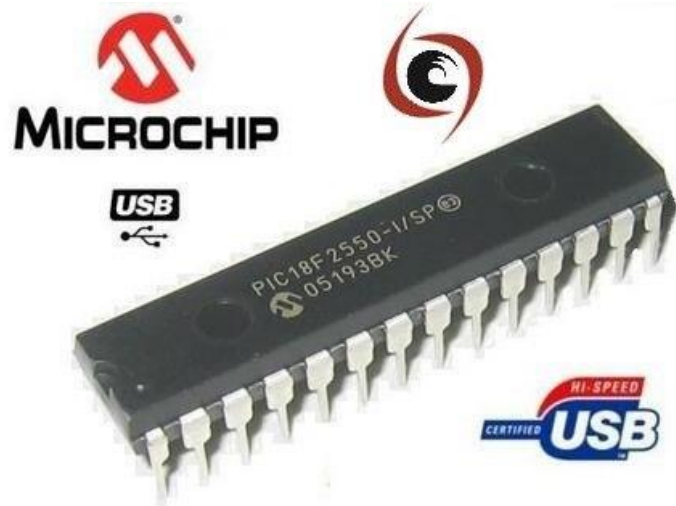
## RESPUESTA

- a) En el refrigerador un termostato controla la temperatura y es probable que sea un sistema de **control simple de dos posiciones** on-off.
- b) Tal vez sea un **control proporcional** en el que la salida del controlador, es decir el movimiento del volante por parte del conductor, puede ser proporcional al error.



# CONTROL DIGITAL

- El control digital mediante sistemas microprocesados se usa cada día más en sistemas de control.



- La figura 1.22 muestra la forma básica que puede tomar un sistema de control digital en lazo abierto, cuando la entrada es una señal continua en el tiempo, es decir, una señal que puede variar de manera continua con el tiempo y no es digital.
- La señal de entrada pasa primero a través de un convertidor analógico a digital (ADC); éste la convierte en una señal digital incorpora un reloj que envía pulsos a intervalos regulares.
- Cada vez que el ADC recibe un pulso, envía el número codificado al elemento de control digital.

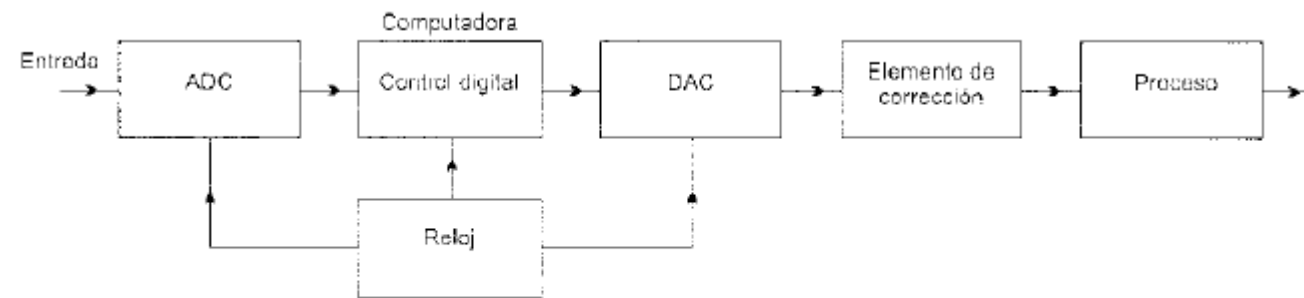


Figura 1.22 Sistema de control digital en lazo abierto para sistemas en tiempo continuo



- Como es fácil de modificar dicho programa, la estrategia de control también es sencilla de cambiar, y esta **flexibilidad** es una gran ventaja sobre los sistemas de control analógicos donde la estrategia de control está determinada por equipos físicos.
- La señal de salida del elemento de control también tiene en forma digital, un número codificado; éste se convierte a una señal analógica mediante el convertidor digital a analógico (DAC) de modo que puede accionar al elemento de corrección para producir el cambio requerido en la variable de proceso.
- Puesto que la entrada se muestrea sólo en ciertos tiempos, un sistema de este tipo con frecuencia recibe el nombre de **sistema de datos muestreados**.
- El **muestreo** es un aspecto fundamental en los sistemas controlados digitalmente.



- La figura 1.23 muestra la forma que puede tomar un sistema de control digital en lazo cerrado para sistemas de control en tiempo continuo.
- La señal de error analógica del elemento de comparación se convierte en una señal de error digital mediante un ADC, modificada por el elemento de control digital de acuerdo con la estrategia de control programada y después convierte a una señal analógica para el elemento de corrección mediante un DAC.
- **Se puede utilizar una sola computadora para controlar varias variables.**

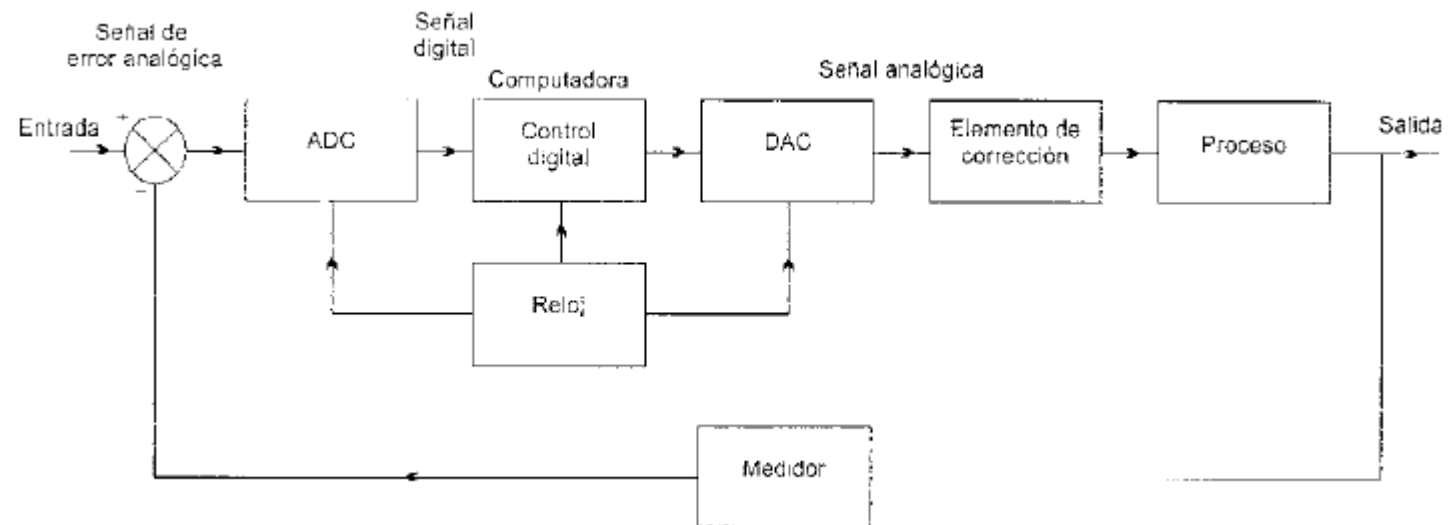


Figura 1.23 Sistema de control digital en lazo cerrado para sistemas en tiempo continuo



# MODELOS MATEMÁTICOS PARA SISTEMAS

- Con la finalidad de entender el comportamiento de los sistemas es necesario obtener los modelos matemáticos que los representan.
- El modelo de un barco es una réplica a escala de un barco de tamaño natural; en el modelo los tamaños relativos de las diferentes partes guardan las mismas proporciones que en el barco del tamaño natural, es decir, hay un escalamiento constante hacia abajo de los tamaños.
- Una fotografía se puede considerar un modelo de la escena que se fotografió.
- Un **modelo matemático** de un sistema es una “réplica” de las relaciones de entrada(s) y salida(s).
- Las relaciones reales entre la entrada y la salida de un sistema se sustituyen por expresiones matemáticas.





- Considere un motor como sistema; la entrada a motor es un voltaje  $V$  y la salida es una velocidad angular  $\omega$  del eje.
- Para muchos sistemas existen **relaciones lineales razonables** entre la entrada y la salida; esto significa que la salida es proporcional a la entrada; si la entrada se duplica, entonces la salida también se duplica, es decir, si la entrada se multiplica por una constante entonces la salida se multiplica por la misma constante.
- Esto también quiere decir que si la entrada 1 produce la salida 1 y la entrada 2 produce la salida 2, entonces una entrada igual a la suma de las entradas 1 y 2 producirá una salida igual a la suma de las salidas 1 y 2.



- De este modo, si existe una relación lineal entre la entrada y la salida para el motor, entonces el modelo matemático es:

$$\omega = G * V$$

- Donde  $G$  es la constante de proporcionalidad.
- Esta relación implica que si el voltaje cambia, entonces deberá haber un cambio inmediato correspondiente en la velocidad angular del eje.
- Éste **no** será el caso, puesto que el motor toma un tiempo para que el eje cambie a la nueva velocidad.
- Así la relación existe, sólo ente el voltaje y la velocidad cuan el sistema ha tenido el suficiente tiempo para asentarse ante cualquier cambio en la entrada, es decir, esto se refiere a lo que se denomina condición de **estado estable**.



- Entonces, para aclarar, la ecuación se puede escribir como:

$$\text{Valor en estado estable de } \omega = G * \text{Valor en estado estable de } V$$

- Por lo tanto

$$G = \frac{\text{Valor en estado estable de } \omega}{\text{Valor en estado estable de } V}$$

- La constante  $G$  se denomina **función de transferencia** del sistema.
- En general, se puede definir la función de transferencia como el cociente de salida en estado estable entre la entrada en estado estable para un sistema o subsistema.

$$\text{Funcion de transferencia } G = \frac{\text{salida en estado estable}}{\text{entrada en estado estable}} \quad [1]$$



- Un sistema de medición de temperatura puede tener una entrada de 10°C y producir una salida en estado estable de 5.0 mV.
- Este sistema tiene una G de 0.5 mV/°C.
- Si se supone que el sistema es lineal se puede **predecir** que si la entrada fuera 20°C entonces la salida en estado estable sería 10.0mV.
- El modelo matemático del sistema es

*Salida en estado estable en mV = 0.5 x entrada en estado estable en °C*



- Lo anterior es el análisis de un sistema que tiene una **relación lineal** entre la entrada y la salida.
- Sin embargo, los sistemas reales pueden exhibir un comportamiento **no lineal**; en muchos casos tales sistemas son lineales si las señales de entrada se mantienen dentro de ciertos **límites**.
- Más adelante en este libro se consideran las definiciones de función de transferencia en la que se pueden tomar en cuenta no sólo los valores en **estado estable** de la entrada y la salida, sino también los **cambios transitorios** que tienen lugar en el tiempo.
- *Así, en el resto de la unidad las discusiones se basan en el comportamiento de los sistemas en términos de los valores en estado estable, y habrá que considerarlos sólo como una representación muy simplista de los sistemas de control.*



## EJEMPLO 6

- Un motor tiene una función de transferencia de 500 rev/min por voltio. ¿Cuál será la velocidad de salida en estado estable para tal motor cuando la entrada es 12 V?

## RESPUESTA

- Si se utiliza la ecuación [1], entonces,

$$\textit{Salida en estado estable} = G * \textit{entrada en estado estable}$$

$$= 500 * 12 = 6000 \textit{ rev/min}$$





# MODELOS MATEMÁTICOS PARA SISTEMAS EN LAZO ABIERTO

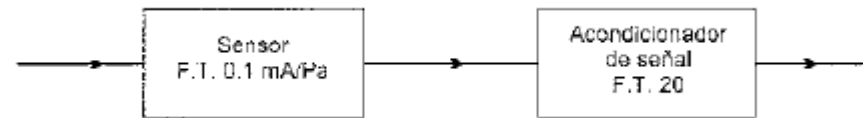
- Existen muchas situaciones donde se requiere la función de transferencia para varios elementos en serie.
- La función de transferencia global en lazo abierto es el producto de las funciones de transferencia de los elementos individuales.
- Esto se aplica a cualquier número de elementos conectados en serie.



## EJEMPLO 7

- El sistema de medición empleado en un sistema de control consta de dos elementos, un sensor y un acondicionador de señal en serie (figura 1.25)
- Si el sensor tiene una función de transferencia de  $0.1 \text{ mA/Pa}$  y el acondicionador de señal una función de transferencia de 20, ¿Cuál es la función de transferencia del sistema de medición?

Figura 1.25 Ejemplo 7



## RESPUESTA

$$G = 0.1 * 20 = 2mA/Pa$$



# MODELOS MATEMÁTICOS PARA SISTEMAS EN LAZO CERRADO

- La figura 1.26 muestra un sistema en lazo cerrado sencillo; si  $\theta_i$  es el valor de referencia, es decir la entrada, y si  $\theta_o$  es el valor real, es decir, la salida del sistema, entonces la función de transferencia del sistema completo es

$$\text{Función de transferencia} = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{\theta_i}{\theta_o}$$

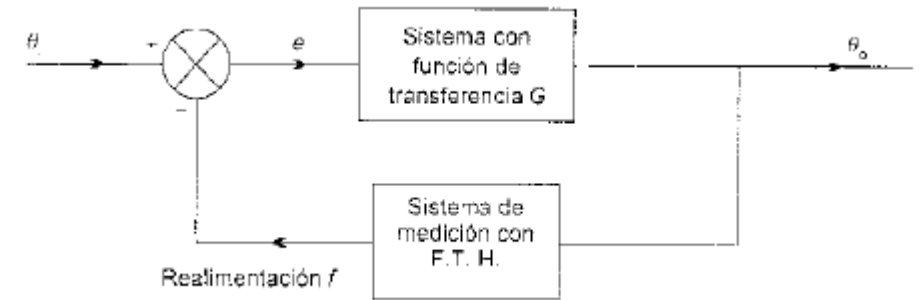


Figura 1.26 Función de transferencia de un sistema en lazo cerrado



- Cada subsistema en el sistema global tiene su propia función de transferencia.
- De este modo, si el sistema que se controla tiene una función de transferencia  $G$ , entonces,

$$G = \frac{\theta_o}{e}$$

- Si la trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia  $H$ ,

$$H = \frac{f}{\theta_o}$$

- La señal de error  $e$  es la diferencia entre  $\theta_i$  y  $f$ , la señal de realimentación  $f$  es una medida de la salida del sistema completo.

$$e = \theta_i - f$$



- Al sustituir  $e$  y  $f$ , despejándolas a partir de las dos ecuaciones anteriores,

$$\frac{\theta_o}{G} = \theta_i - H\theta_o$$

$$\theta_o \left( \frac{1}{G} + H \right) = \theta_i$$

$$\theta_o \left( \frac{1 + GH}{G} \right) = \theta_i$$

- Por lo tanto la función de transferencia global del sistema de control en lazo cerrado es

$$\text{Función de transferencia} = \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{G}{1 + GH} \quad [3]$$



- La ecuación anterior se aplica a realimentación negativa; con realimentación positiva el denominador de la ecuación anterior se convierte en  $1 - GH$ .
- En el sistema en lazo cerrado, **G** se conoce como la **función de transferencia de la trayectoria directa**, puesto que es la función de transferencia que relaciona las señales que se mueven hacia adelante a través del sistema de la entrada a la salida.
- **GH** se conoce como **función de transferencia de lazo**, ya que es el término que se presenta en la expresión como resultado del lazo de realimentación.





## EJEMPLO 8

- Un motor de velocidad controlada tiene un sistema motor-relevador-amplificador con una función de transferencia combinada de 600 rev/min por voltio y un sistema de medición en lazo de realimentación con una función de transferencia de 3mV por rev/min como se ilustra en la figura 1.27. ¿Cuál es la función de transferencia global?

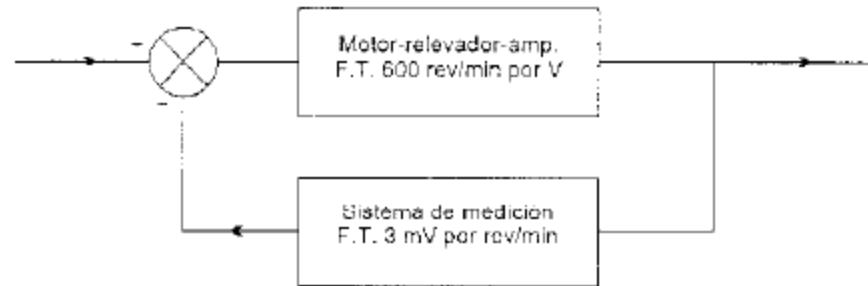


Figura 1.27 Ejemplo 8

## RESPUESTA

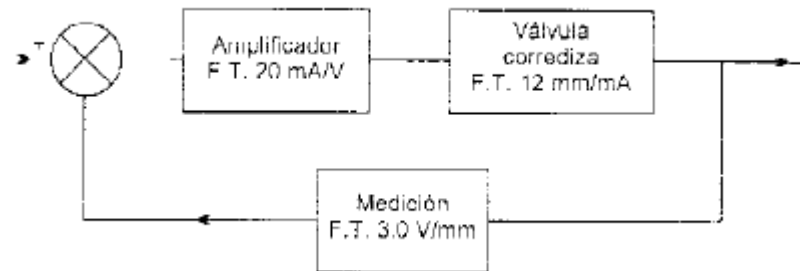
$$\begin{aligned} \text{Función de transferencia} &= \frac{G}{1 + GH} \\ &= \frac{600}{1 + (600 * 0.003)} = 214^{rev/min} * V \end{aligned}$$



## EJEMPLO 9

- Un sistema de control de posición utilizado con una máquina herramienta tiene un amplificador en serie con una válvula corrediza y un lazo de realimentación de desplazamiento (figura 1.30).
- Si la funciones de transferencia son las siguientes, ¿Cuál es la función de transferencia global para el sistema de control?

Figura 1.30 Ejemplo 9



## RESPUESTA

$$\begin{aligned} \text{Función de transferencia} &= \frac{G}{1 + GH} \\ &= \frac{240}{1 + (240 * 0.030)} = 29 \text{ mm/V} \end{aligned}$$



# ERROR EN ESTADO ESTABLE

- El ***error en estado estable***  $E$  de un sistema es la diferencia entre la salida del sistema y su entrada cuando las condiciones están en estado estable.

$$E = \theta_o - \theta_i$$

- Puesto que para un sistema con función de transferencia global.

$$G_s = \frac{\theta_o}{\theta_i}$$

- Entonces

$$E = G_s \theta_i - \theta_i = \theta_i (G_s - 1) \quad [5]$$



- Para un sistema en lazo abierto el error en estado estable se puede escribir como
$$E = \theta_i(G_1 G_2 G_3 - 1) \quad [6]$$
- Donde  $G_1, G_2, G_3$  son las funciones de transferencia de los elementos en el sistema.
- **Para que el error sea cero,  $G_1 G_2 G_3$  deben ser igual a 1.**
- **Es inevitable que se presenten errores en estado estable** debido a que la funciones de transferencia cambia como consecuencia de cambios en el medio ambiente.



- Para un sistema en lazo cerrado el error en estado estable, dado por la ecuación [5], se puede escribir empleando la ecuación [3], como

$$E = \theta_i \left( \frac{G}{1 + GH} - 1 \right) \quad [7]$$

- Donde  $G$  es la función de transferencia de los elementos de la trayectoria directa y  $H$  es la función de transferencia del sistema de medición.
- Para un error en estado estable nulo, se debe tener  $G = 1 + GH$  de modo de que  $G/(1+GH)$  tenga el valor de 1.
- Si  $GH$  es mucho mayor que 1, la ecuación [7] se aproxima a

$$E = \theta_i \left( \frac{1}{H} - 1 \right)$$

- **Así los cambios en las funciones de transferencia de los elementos de la trayectoria directa casi no tienen efecto sobre el error.**



- De esta manera, la sensibilidad del sistema en lazo cerrado para tales efectos es mucho más pequeña que para un sistema en lazo abierto.
- Ésta es una de la grandes ventajas que tienen los sistemas en lazo cerrado respecto a los sistemas en lazo abierto.





## EJEMPLO 10

- La figura 1.31 muestra un controlador con una función de transferencia de 12 y un motor con una función de transferencia de 0.10 rev/min por V.
- a) ¿Cuál será el error en estado estable cuando el sistema es un sistema de control en lazo abierto y cómo cambiará el error si, debido a los cambios ambientales, la función de transferencia cambia un 10%?
- b) ¿Cuál será el error en estado estable cuando el sistema es un sistema de control en lazo cerrado si el lazo de realimentación tiene una función de transferencia de 1.0 V por rev/min y cómo cambia el error si, debido a cambios ambientales, la función de transferencia cambia un 10%?

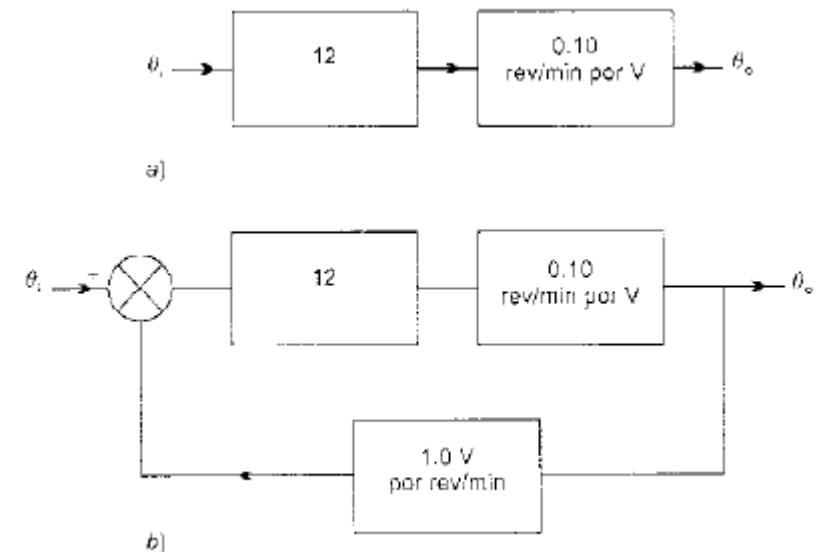


Figura 1.31 Ejemplo 10: a) lazo abierto, b) lazo cerrado



## RESPUESTA

- a) Empleando la ecuación [6], antes de que se presente cualquier cambio

$$E = \theta_i(G_1 G_2 - 1)$$
$$E = \theta_i(12 * 0.10 - 1) = 0.2\theta_i$$

- Si hay un cambio de 10% en la función de transferencia del motor, es decir, 0.11 rev/min por V, entonces

$$E = \theta_i(12 * 0.11 - 1) = 0.32\theta_i$$

- b) Con la ecuación [7] , antes de que ocurra cualquier cambio

$$E = \theta_i \left( \frac{12 * 0.10}{1 + 12 * 0.10 * 1.0} - 1 \right) = -0.45\theta_i$$

- Si hay un cambio de 10% en la función de transferencia del motor, entonces

$$E = \theta_i \left( \frac{12 * 0.11}{1 + 12 * 0.11 * 1.0} - 1 \right) = -0.43\theta_i$$



# EFFECTOS DE LAS PERTURBACIONES

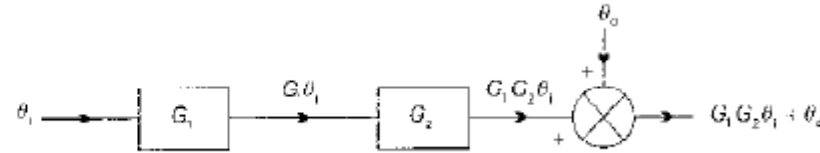
- Una consideración importante con un sistema de control es el efecto de cualquier perturbación.
- De esta manera, en un sistema de calefacción central doméstico con un sistema de control en lazo abierto involucrado, el calefactor se enciende para obtener la temperatura requerida en la habitación, ¿Qué ocurrirá si alguien abre la ventana y permite que entre el aire frío a la habitación?



- Tal perturbación se puede incorporar en el diagrama de bloques del sistema de la forma que muestra en la figura 1.32.
- En este caso, la perturbación  $\theta_d$  se suma a la salida del proceso; para tal situación se tiene

$$\theta_o = G_1 G_2 \theta_i + \theta_d \quad [8]$$

**Figura 1.32** Sistema de control en lazo abierto con una perturbación



- El término  $\theta_d$  es el error en estado estable adicionado al sistema por presencia de la de la perturbación.

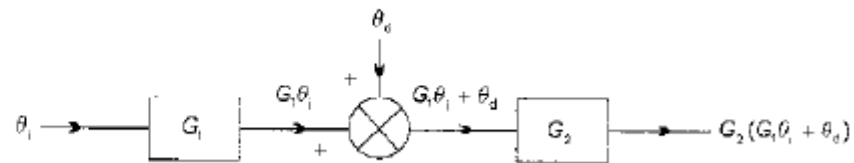


- Si la perturbación se adiciona al sistema entre los elementos 1 y 2 (como se ilustra en la figura 1.33), entonces

$$\theta_o = (G_1\theta_i + \theta_d)G_2 = G_1G_2\theta_i + G_2\theta_d \quad [9]$$

- El término  $G_2\theta_d$  es el error en estado estable adicionado al sistema por la presencia de la perturbación.

**Figura 1.33** Sistema de control en lazo abierto con una perturbación



- Con un sistema en lazo cerrado, por ejemplo, un sistema de calefacción central doméstico si el valor fijado en el termostato no se modifica y alguien abre la ventana y permite que el aire frío entre a la habitación, el sistema de control sujeto a tal perturbación se puede representar mediante un diagrama de bloques de la forma que muestra la figura 1.34.
- Así la salida  $\theta_o$  es

$$\theta_o = G_1 G_2 (\theta_i - f) + \theta_d$$

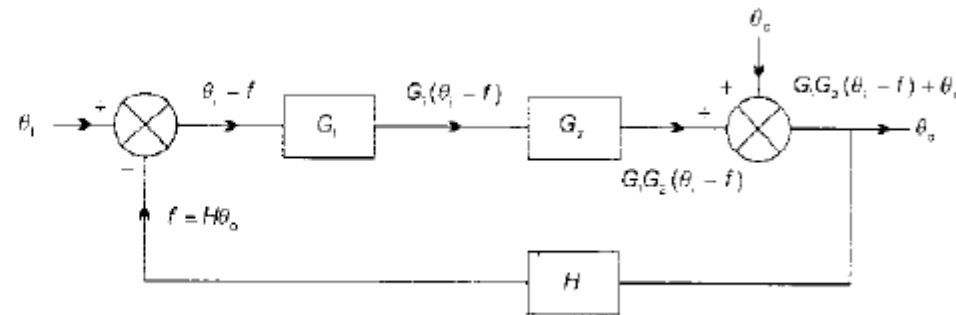


Figura 1.34 Sistema de control en lazo cerrado con una perturbación



- Pero la realimentación  $f$  es  $H\theta_o$ , por tanto

$$\theta_o = G_1 G_2 (\theta_i - H\theta_o) + \theta_d$$

- Reordenando se obtiene

$$\theta_o = \theta_i \left( \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} \right) + \theta_d \left( \frac{1}{1 + G_1 G_2 H} \right) \quad [10]$$

- El término  $\theta_d \left( \frac{1}{1 + G_1 G_2 H} \right)$  es el erro en estado estable que se incorpora al sistema mediante la perturbación.
- Si esta ecuación se compara con la situación en lazo abierto, es decir, la ecuación [8], se verá que el efecto de la perturbación se modifica por el factor  $\frac{1}{1 + G_1 G_2 H}$ .
- Esta propiedad de modificar el efecto de una perturbación se denomina **rechazo a perturbaciones**.





- La figura 1.35 muestra un sistema en lazo cerrado y la perturbación se presenta entre los dos elementos de la trayectoria directa.

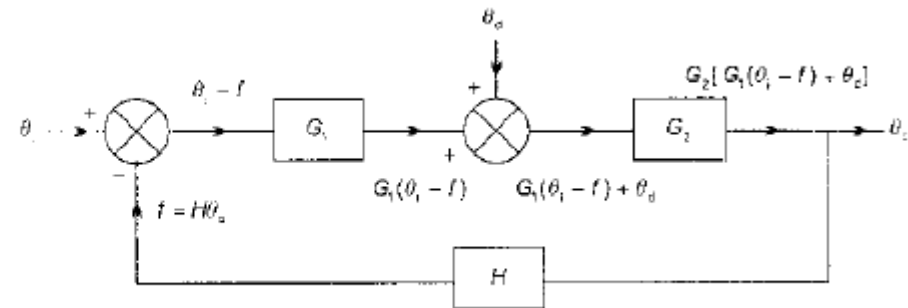


Figura 1.35 Sistema de control en lazo cerrado con una perturbación



- Así, la salida de  $\theta_o$  es

$$\theta_o = G_2[G_1(\theta_i - f) + \theta_d]$$

- Puesto que  $f = H\theta_o$ , entonces

$$\theta_o = G_2[G_1(\theta_i - H\theta_o) + \theta_d]$$

- Lo cual se puede simplificar a

$$\theta_o[1 + G_1G_2H] = G_1G_2\theta_i + G_2\theta_d$$

$$\theta_o = \theta_i \left( \frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2H} \right) + \theta_d \left( \frac{G_2}{1 + G_1G_2H} \right) \quad [11]$$



- El término  $\theta_d \left( \frac{G_2}{1+G_1G_2H} \right)$  es el error en estado estable que se introduce al sistema mediante la perturbación.
- Si esta ecuación se compara con la de la situación en lazo abierto, es decir, la ecuación [9], se verá que el efecto de la perturbación se modifica en la situación en lazo cerrado por el factor  $\frac{G_2}{1+G_1G_2H}$  y en la situación en lazo abierto sólo por  $G_2$ .
- El factor  $\frac{1}{1+G_1G_2H}$  es así una medida de que tanto se modifican los efectos de la perturbación con el lazo de realimentación.
- Esta propiedad de modificar el efecto de la perturbación se denomina **rechazo a perturbaciones**.



- De este modo, siempre que se presente una perturbación en el sistema en lazo cerrado, su efecto se reduce por el factor  $\frac{1}{1+GH}$ .
- Esta es una de las ventajas de los sistemas de control en **lazo cerrado**, éstos **son mucho mejores para aminorar los efectos de las perturbaciones al sistema**.
- Las perturbaciones se pueden presentar de varias formas, el término perturbación se puede interpretar como una señal no deseada la cual afecta al sistema.
- Las perturbaciones pueden venir de fuentes exógenas (ventana abierta) o internas (ruido eléctrico).



## EJEMPLO 12

- Un amplificador electrónico tiene una función de transferencia de 100. ¿Cuánto mejorará el amplificador el rechazo del ruido generado internamente si éste cuenta con un lazo de realimentación con una función de transferencia de 10?

## RESPUESTA

- El efecto de adicionar un lazo de realimentación es el de reducir el efecto de la perturbación en un factor de  $\frac{1}{1+GH}$ .
- De este modo, el efecto del ruido se reduce en un factor de

$$\frac{1}{1+(100*10)} = \frac{1}{1001}$$



# SENSIBILIDAD A CAMBIOS EN LOS COMPONENTES

- Con un sistema en lazo abierto la función de transferencia global está dada como

$$F.T. = G_1 * G_2 * G_3$$

- Donde  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  son la F.T. de los elementos en el sistema.
- Los cambios en la características de estos elementos con el tiempo y condiciones ambientales pueden resultar en un cambio en la función de transferencia.
- Un cambio en la F.T. del elemento 1 de  $\Delta G_1$  significa un cambio en la F.T. global para el sistema en lazo abierto de

$$\text{Cambio en la F.T.} = \Delta G_1 * G_2 * G_3 \quad [12]$$



- Con un sistema en lazo cerrado la F.T. global esta dada por

$$F.T. = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H}$$

- Donde  $G_1, G_2, G_3$  son la F.T. de los elementos en la trayectoria directa y  $H$ , la F.T. de la trayectoria de realimentación.
- Si  $G_1 G_2 G_3 H$  es mucho mayor que 1, entonces la expresión se aproxima a

$$F.T. = \frac{1}{H}$$

- Por ejemplo, cualquier cambio en la F.T del elemento  $G_1$  en la trayectoria directa, tendrá un efecto insignificante sobre la F.T global.





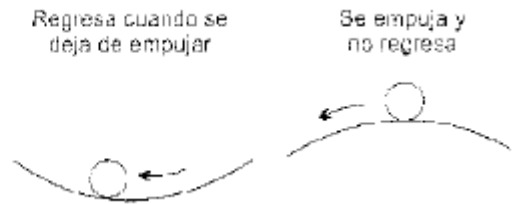
- Esto tiene un marcado contraste con la situación de un sistema en lazo abierto y esta **insensibilidad a cambios en las características de los elementos de la trayectoria directa es una de la ventajas de los sistemas en lazo cerrado.**
- Sin embargo, un cambio en la F.T de la trayectoria de realimentación producirá un correspondiente cambio en la F.T. global del sistema.
- El sistema en lazo cerrado **no** es insensible a cambios en las características de los elementos en la trayectoria de realimentación.



# ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

- En términos mecánicos se dice que un sistema está en equilibrio estable, si cuando se le da un empujón, éste regresa a su posición original cuando se deja de empujar.
- Un ejemplo de esta situación es una bola en reposo sobre un plato esférico (figura 1.36).
- Sin embargo, la posición sería inestable si la bola estuviera en reposo sobre la parte exterior del plato si éste se voltea, cualquier ligero empujón causa que la bola ruede y no regrese a su posición original cuando se deja de empujar.

Figura 1.36 a) Estable,  
c) inestable



- En general, se dice que el sistema es **estable** si cuando está sujeto a un entrada o perturbación acotada entonces la salida es acotada.
- Una entrada o salida acotada es la que tiene magnitud finita.
- Así, en el caso de la bola, la entrada es al inicio cero, seguido de un empujón que no continúa en forma indefinida sino que cesa después de un tiempo.
- La salida en la condicione estable es tal que el empujón causa el movimiento de la bola y que se desplace de su posición de reposo, pero eventualmente el movimiento de la bola cesa y el desplazamiento no continúa incrementándose o cambiando.
- En la condición inestable, el desplazamiento de la salida se va incrementando, es decir, una entrada de magnitud finita puede producir una salida que crece sin límites.
- La condición para estabilidad también se puede expresar como que un sistema es estable si al excitarlo con un impulso la salida regresa eventualmente a cero.



- **Los sistemas de control en lazo abierto son inherentemente estables.**
- Una entrada finita produce una salida finita y que en forma indefinida no cambia con el tiempo.
- Incrementar la F.T de un elemento en tales sistemas no tiene efecto en la estabilidad del propio sistema.
- Los sistemas de control en lazo cerrado pueden mostrar inestabilidad, que se puede presentar como resultado de tiempos de retardo que ocurren entre el cambio en la variable y la señal de realimentación que resulta de la respuesta del sistema.



# LAZO CERRADO CONTRA LAZO ABIERTO

- Las ventajas de tener trayectoria de realimentación y, por lo tanto, un sistema en lazo cerrado en lugar de un sistema en lazo abierto se pueden resumir de la manera siguiente:
  1. Más exacto en la igualación de los valores reales y requeridos para la variable.
  2. Menos sensible a perturbaciones.
  3. Menos sensible a cambios en las características de los componentes (de la trayectoria directa).
  4. La velocidad de respuesta se incrementa y , por lo tanto, el ancho de banda es mayor, es decir, el intervalo de frecuencias en los que el sistema responderá.



▪ Pero hay algunas desventajas:

1. Existe una gran posibilidad de inestabilidad.
2. El sistema es más complejo y, por lo tanto, no sólo más caro, sino más propenso a descomposturas.
3. Hay pérdida en la ganancia en cuanto a que la F.T. de un sistema en lazo abierto, se reduce de  $G$  a  $G/(1+GH)$  por una trayectoria de realimentación con una F.T.  $H$ .



# BIBLIOGRAFÍA

- Bolton, W.(2001). *Ingeniería de Control*. México D.F.: Alfaomega.
- ❖ Signatura: 629.8 B54

