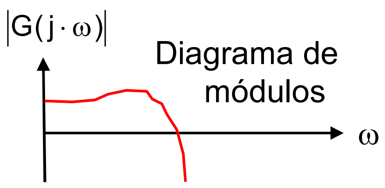
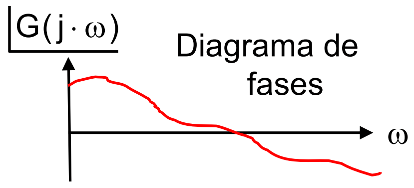
Respuesta en frecuencia

- Se puede representar completamente el comportamiento en frecuencia que tiene un circuito (o sistema cualquiera) de función de transferencia conocida mediante dos diagramas:
- a) Uno que represente la amplitud o ganancia en función de la frecuencia (f) o de la pulsación (ω)
- b) Otro que represente el ángulo de fase en función de la frecuencia (f) o de la pulsación (ω)





- Nota: es indiferente utilizar la pulsación o la frecuencia en abscisas: puesto que $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, la representación es semejante

El decibelio (dB)

- Unidad de medida de ganancias respecto de un punto de referencia en el circuito
- Definición de ganancia de potencia en decibelios (dB) :

$$|A_P|(dB) = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_A}{P_B}$$

B = Punto referencia del circuito
A = Punto donde se mide la ganancia respecto de B

Si la potencia se entrega sobre cargas iguales:

$$|A_P|(dB) = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_A}{P_B} = 10 \cdot \log_{10} \frac{\frac{V_A^2}{R_{LOAD}}}{\frac{V_B^2}{R_{LOAD}}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^2 = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

- Definición de ganancia de tensión en dB: $|A_u|(dB) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_A}{V_B}\right)$
- Definición de ganancia de corriente en dB: $|A_i|(dB) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_A}{I_B}\right)$

Diagrama de Bode

- Representación de módulo y fase de una función de transferencia o ganancia, en función de la frecuencia (f) o la pulsación (ω)
  - ◆ La frecuencia (o pulsación) se representa en escala logaritmica
  - ◆ El diagrama de módulos se representa en decibelios (escala logarítmica)
  - ◆ El diagrama de fases se representa linealmente
  - ◆ Ejemplo:

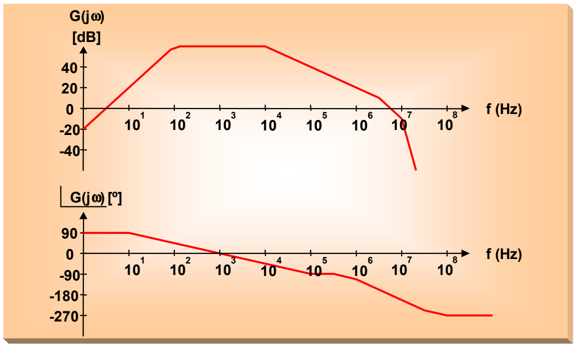


Diagrama de Bode

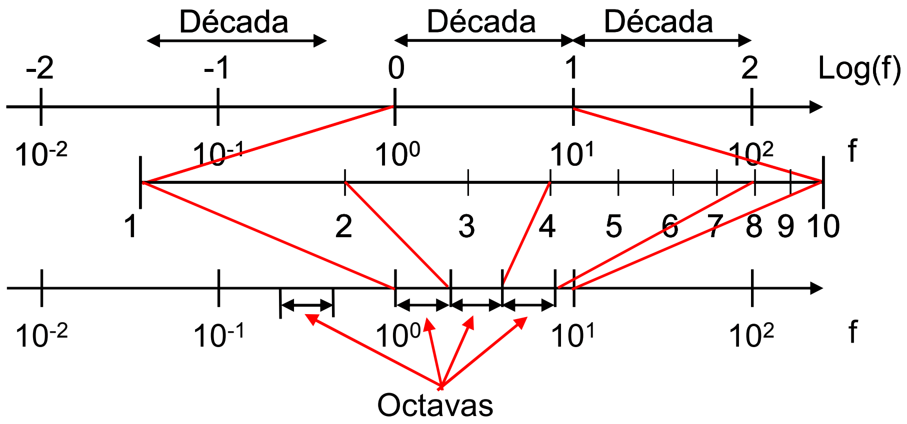
- Ventajas de la representación logarítmica:
  - ◆ Se convierte el producto de amplitudes en suma:

$$\log(A \cdot B) = \log A + \log B$$

  - ◆ Existe un método de trazado del logaritmo de la amplitud, basado en una aproximación mediante rectas (asintótica).
  - ◆ Permite ver fácilmente la respuesta del sistema a baja y alta frecuencia en el mismo diagrama.
- DEFINICIÓN DE DÉCADAS Y OCTAVAS:
  - ◆ Década: banda de frecuencias (o pulsaciones) comprendidas entre f_0 y $10 \cdot f_0$.
  - ◆Octava: banda de frecuencias (o pulsaciones) comprendidas entre f_0 y $2 \cdot f_0$.
  - ◆ Sobre el diagrama, la distancia entre frecuencias (o pulsaciones) que guardan igual relación es constante

Diagrama de Bode

- DEFINICIÓN DE DÉCADAS Y OCTAVAS:
  - Década: banda de frecuencias entre f_0 y $10 \cdot f_0$.
  - Octava: banda de frecuencias entre f_0 y $2 \cdot f_0$.



Trazado del Bode asintótico

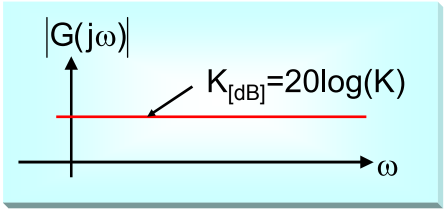
- En general, una función de transferencia será de la forma:

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\text{ (Laplace)} \qquad G(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}\text{ (Regimen senoidal)}$$

- $N(j\omega)$ y $D(j\omega)$ se pueden factorizar siempre en factores de grado 2 como máximo
- Factores posibles:
  - K — Ganancia constante, y real
  - $(j\omega)^{\pm 1}$ — Factores derivativos e integrales
  - $(1+j\omega T)^{\pm 1}=(1+j\dfrac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$ — Factores de primer orden
  - $\left[1+2\zeta\cdot j\dfrac{\omega}{\omega_n}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$ — Factores de segundo orden

Trazado del Bode asintótico

- Factores de ganancia K
- AMPLITUD
  - Si $|K| > 1 \Rightarrow |K|_{[dB]} = 20\log|K| > 0$
  - Si $|K| < 1 \Rightarrow |K|_{[dB]} = 20\log|K| < 0$
- Representación en función de la frecuencia: Recta horizontal, de valor $K_{[dB]}$

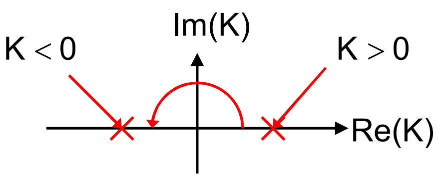


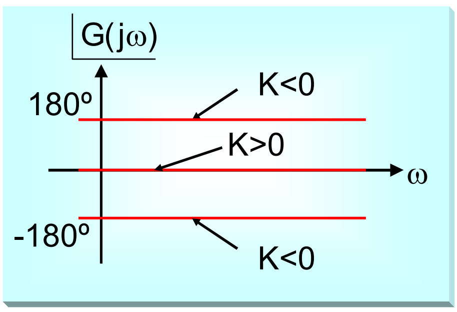
- NOTA: al multiplicar la ganancia por 10, el valor en dB aumenta en 20 dB

Ganancia K	Ganancia K [dB]
$0{,}01=10^{-2}$	$20\cdot\log(10^{-2})= -40$
$0{,}1=10^{-1}$	$20\cdot\log(10^{-1})= -20$
$1=10^{0}$	$20\cdot\log(10^{0})= 0$
$10=10^{1}$	$20\cdot\log(10^{1})= 20$
$100=10^{2}$	$20\cdot\log(10^{2})= 40$

Trazado del Bode asintótico

- Factores de ganancia K
- FASE
  - Si $K > 0 \Rightarrow \varphi = 0^{o}$
  - Si $K < 0 \Rightarrow \varphi = 180^{o} = \pi$





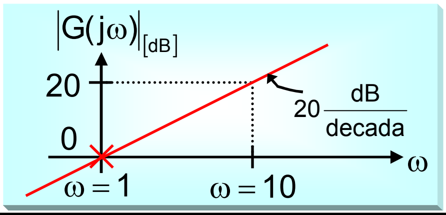
Trazado del Bode asintótico

- Factores derivativos e integrales: $(j\omega)^{\pm 1}$
  - Caso 1: Factor en el numerador: $G_1(j\omega) = j\omega$

- AMPLITUD $\quad |G_1|_{[dB]} = 20 \cdot \log|G_1| = 20 \cdot \log|j\omega| = 20\log\omega$
  - Para $\omega = 1 = 10^0 \Rightarrow |G_1|_{[dB]} = 20 \cdot \log 10^0 = 0$
  - Si se aumenta la frecuencia una década, pasando de $\omega = \omega_1$ a $\omega = 10 \cdot \omega_1$

$$20 \cdot \log(10 \cdot \omega_1) = 20 \cdot \log 10 + 20 \cdot \log\omega_1 = (20 \cdot \log\omega_1 + 20)_{[dB]}$$

- Representación en función de la frecuencia: Recta
  - Pasa por $\omega = 1, |G_1|_{[dB]} = 0$
  - Pendiente: $20 \dfrac{dB}{decada}$

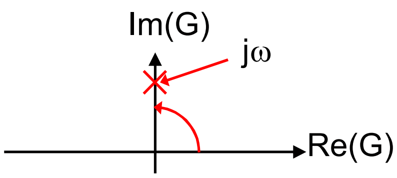


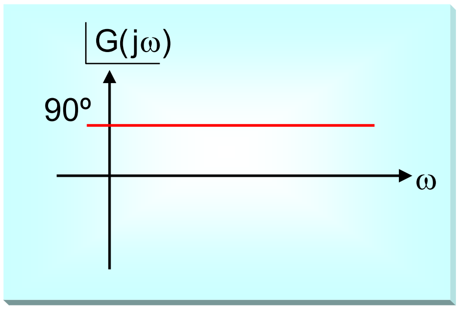
Trazado del Bode asintótico

- Factores derivativos e integrales: $(j\omega)^{\pm 1}$
  - Caso 1: Factor en el numerador: $G_1(j\omega) = j\omega$

- FASE $\quad \varphi = \angle G_1 = \angle j\omega = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$

- Representación en función de la frecuencia: Recta $\varphi = 90^\circ$





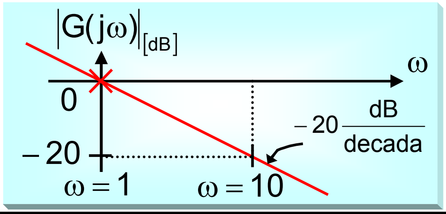
Trazado del Bode asintótico

- Factores derivativos e integrales: $(j\omega)^{\pm 1}$
  - Caso 2: Factor en el denominador: $G_2(j\omega) = (j\omega)^{-1} = \dfrac{1}{j\omega} = \dfrac{-j}{\omega}$

- AMPLITUD $\left|G_2\right|_{[dB]} = 20 \cdot \log\left|\dfrac{1}{j\omega}\right| = 20\log 1 - 20\log\omega = -20\log\omega$
  - Para $\omega = 1 = 10^0 \Rightarrow \left|G_2\right|_{[dB]} = -20 \cdot \log 10^0 = 0$
  - Si se aumenta la frecuencia una década: $\omega = \omega_1 \rightarrow \omega = 10 \cdot \omega_1$

$$-20 \cdot \log(10 \cdot \omega_1) = -20 \cdot \log 10 - 20 \cdot \log\omega_1 = (-20 \cdot \log\omega_1 - 20)_{[dB]}$$

- Representación en función de la frecuencia: Recta
  - Pasa por $\omega = 1, \left|G_2\right|_{[dB]} = 0$
  - Pendiente: $-20 \dfrac{dB}{decada}$

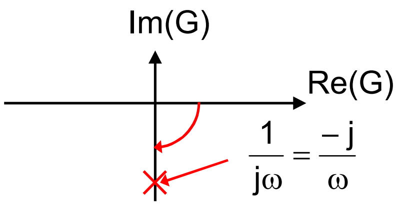


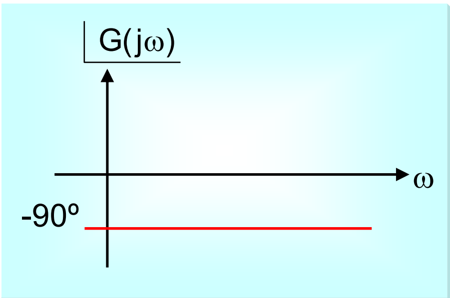
Trazado del Bode asintótico

- Factores derivativos e integrales: $(j\omega)^{\pm 1}$
  - Caso 2: Factor en el denominador: $G_2(j\omega) = (j\omega)^{-1} = \dfrac{1}{j\omega} = \dfrac{-j}{\omega}$

- FASE $\varphi = \angle G_2 = \angle \dfrac{1}{j\omega} = 0^\circ - 90^\circ = -90^\circ = -\dfrac{\pi}{2}$

- Representación en función de la frecuencia: Recta φ=-90º





Trazado del Bode asintótico

- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1} = (1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 3: Factor en el numerador: $G_3(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_n}$
- AMPLITUD

$$\left|G_3\right|_{[dB]} = 20\cdot\log\left|G_3\right| = 20\cdot\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_n}\right| = 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

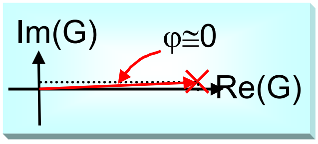
- FASE

$$\underline{\left|G_3\right.} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{1}$$

◆ Si

$$\frac{\omega}{\omega_n} << 1 \Rightarrow \left|G_3\right|_{[dB]} = 20\cdot\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cong 20\cdot\log 10^0 = 0$$

$$\underline{\left|G_3\right.} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{1} \cong \operatorname{arctg} 0 = 0º$$



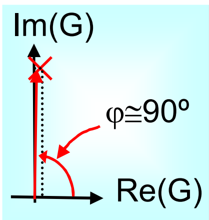
Trazado del Bode asintótico

- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1} = (1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 3: Factor en el numerador: $G_3(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_n}$

◆ Si

$$\frac{\omega}{\omega_n} >> 1 \Rightarrow \left|G_3\right|_{[dB]} = 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cong 20\log\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\underline{\left|G_3\right.} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{1} \cong \operatorname{arctg}(\infty) = 90º$$



Si se aumenta la frecuencia una década:

$\omega = \omega_1 \to \omega = 10\cdot\,\omega_1$

$$20\cdot\log\left(10\cdot\frac{\omega_1}{\omega_n}\right) = 20\cdot\log 10 + 20\cdot\log\frac{\omega_1}{\omega_n} = \left(20\cdot\log\frac{\omega_1}{\omega_n} + 20\right)_{[dB]}$$

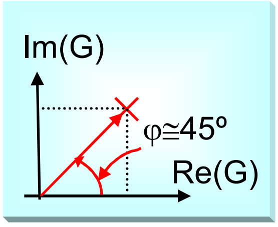
La ganancia aumenta en 20 dB por década

Trazado del Bode asintótico

- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1}=(1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 3: Factor en el numerador: $G_3(j\omega)=1+j\frac{\omega}{\omega_n}$
    - ◆ Transición entre ambos casos: si $\frac{\omega}{\omega_n}=1\Leftrightarrow\omega=\omega_n$
    - ◆ Si

$$\frac{\omega}{\omega_n}=1\Rightarrow\left|G_3\right|_{[dB]}=20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}=20\log\sqrt{2}=3[dB]$$

$$\angle G_3=\operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{1}=\operatorname{arctg}(1)=45^\circ$$



Trazado del Bode asintótico

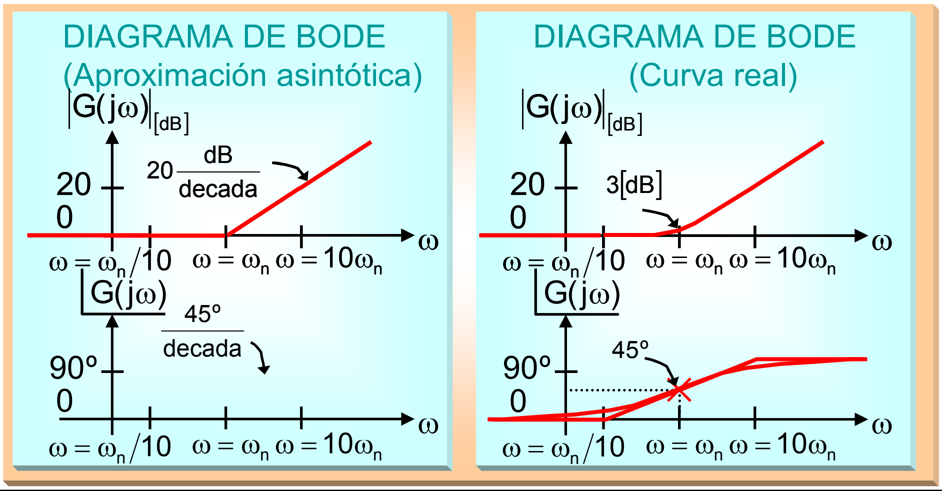
- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1}=(1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 3: Factor en el numerador: $G_3(j\omega)=1+j\frac{\omega}{\omega_n}$

DIAGRAMA DE BODE (Conclusión)

	MÓDULOS	FASES
$\frac{\omega}{\omega_n}<<1$	$\left\|G_3(j\omega)\right\|\cong 0[dB]$ Recta horizontal	$\angle G_3(j\omega)=0^\circ$
$\frac{\omega}{\omega_n}>>1$	$\left\|G_3(j\omega)\right\|$ crece a 20[dB/dec] Recta de pendiente 20 dB/dec	$\angle G_3(j\omega)=90^\circ$
$\frac{\omega}{\omega_n}=1$	$\left\|G_3(j\omega)\right\|=3[dB]$	$\angle G_3(j\omega)=45^\circ$

Trazado del Bode asintótico

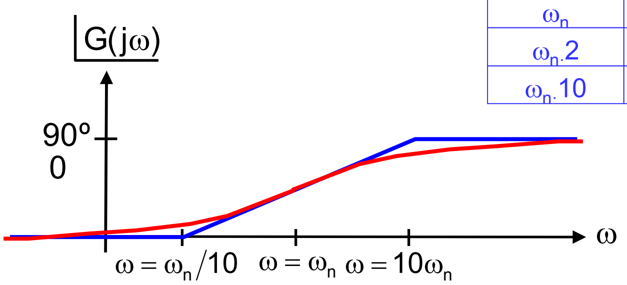
- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1} = (1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 3: Factor en el numerador: $G_3(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_n}$



Trazado del Bode asintótico

- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1} = (1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 3: Factor en el numerador: $G_3(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_n}$
- NOTA:Comparación entre desfases reales y aproximados

Pulsación (ω)	Desfase (º)	
	Real	Aprox.
$\omega_n\cdot(1/10)$	φ= 5,7º	φ= 0º
$\omega_n\cdot(1/2)$	φ=26,0º	φ=31,4º
ω_n	φ=45,0º	φ=45,0º
$\omega_n\cdot 2$	φ=63,5º	φ=58,5º
$\omega_n\cdot 10$	φ=84,5º	φ=90º



Trazado del Bode asintótico

- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1}=(1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 4: Factor en el denominador: $G_4(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_n}}$

- AMPLITUD

$$|G_4|_{[dB]}=20\cdot\log|G_4|=-20\cdot\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_n}\right|=-20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

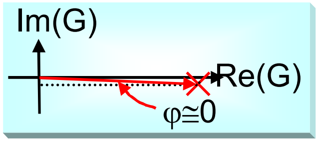
- FASE

$$\angle G_4=0-\operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{1}$$

◆ Si

$$\frac{\omega}{\omega_n}<<1\Rightarrow|G_4|_{[dB]}=-20\cdot\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cong-20\cdot\log 10^0=0$$

$$\angle G_4=-\operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{1}\cong-\operatorname{arctg}0=0^\circ$$



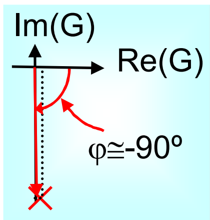
Trazado del Bode asintótico

- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1}=(1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 4: Factor en el denominador: $G_4(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_n}}$

◆ Si

$$\frac{\omega}{\omega_n}>>1\Rightarrow|G_4|_{[dB]}=-20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cong-20\log\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\angle G_4=-\operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{1}\cong-\operatorname{arctg}(\infty)=-90^\circ$$



Si se aumenta la frecuencia una década:

$\omega=\omega_1\rightarrow\omega=10\cdot\omega_1$

$$-20\cdot\log\left(10\cdot\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)=-20\cdot\log10-20\cdot\log\frac{\omega_1}{\omega_n}=\left(-20\cdot\log\frac{\omega_1}{\omega_n}-20\right)_{[dB]}$$

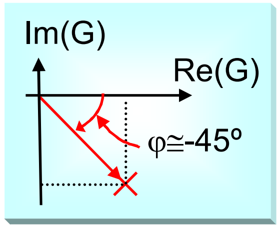
La ganancia decrece en 20 dB por década

Trazado del Bode asintótico

- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1} = (1+j\dfrac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 4: Factor en el denominador: $G_4(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_n}}$
  - Transición entre ambos casos: si $\dfrac{\omega}{\omega_n} = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_n$
  - Si

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow |G_4|_{[dB]} = -20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -20\log\sqrt{2} = -3[dB]$$

$$\angle G_4 = -\mathrm{arctg}\frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{1} = -\mathrm{arctg}(1) = -45^o$$



Trazado del Bode asintótico

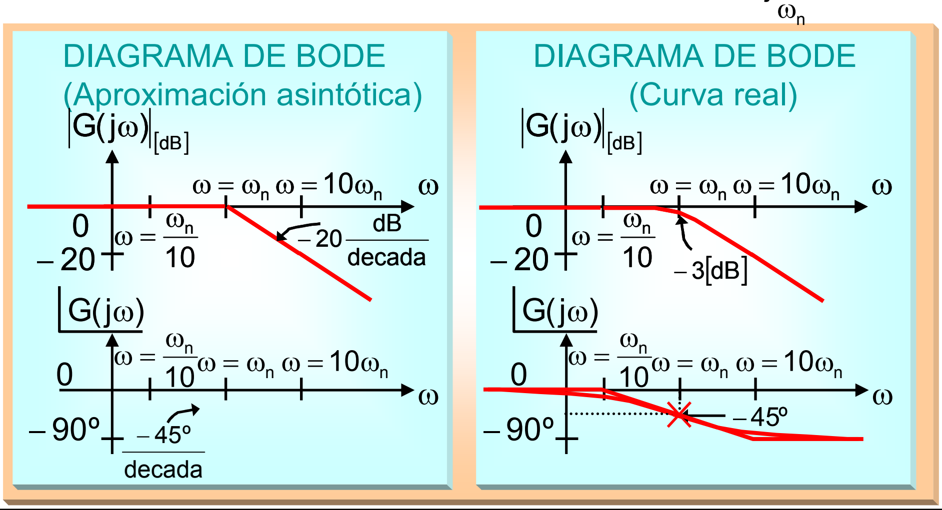
- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1} = (1+j\dfrac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 4: Factor en el denominador: $G_4(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_n}}$

DIAGRAMA DE BODE (Conclusión)

	MÓDULOS	FASES
$\dfrac{\omega}{\omega_n} << 1$	$\lvert G_4(j\omega)\rvert \cong 0[dB]$ Recta horizontal	$\angle G_4(j\omega) = 0^o$
$\dfrac{\omega}{\omega_n} >> 1$	$\lvert G_4(j\omega)\rvert$ decrece a 20[dB/dec] Recta de pendiente -20 dB/dec	$\angle G_4(j\omega) = -90^o$
$\dfrac{\omega}{\omega_n} = 1$	$\lvert G_4(j\omega)\rvert = -3[dB]$	$\angle G_4(j\omega) = -45^o$

Trazado del Bode asintótico

- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1} = (1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 4: Factor en el denominador: $G_4(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_n}}$



Trazado del Bode asintótico

- Factores de segundo orden: $\left[1+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$
  - Si $\zeta > 1$ se descompone en dos factores reales de grado 1
  - Si $0 < \zeta < 1$ no existen raíces reales (caso a analizar)
- Caso 5: Factor en el denominador $G_5(j\omega) = \left(1+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{-1} = \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$
- AMPLITUD $|G_5| = \dfrac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\cdot\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$

$$|G_5|_{[dB]} = 20\cdot\log|G_5| = -20\cdot\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Trazado del Bode asintótico

- Factores de segundo orden: $\left[1+2\zeta\cdot j\dfrac{\omega}{\omega_n}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$
- Caso 5:
  Factor en el denominador $G_5(j\omega)=\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\zeta\cdot j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$

- FASE

$$\angle G_5=\angle\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\zeta\cdot j\dfrac{\omega}{\omega_n}}=0-\angle\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

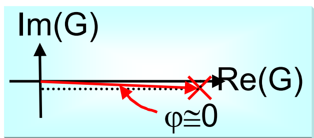
$$\angle G_5=-\mathrm{arctg}\left[\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

Trazado del Bode asintótico

- Factores de segundo orden: $\left[1+2\zeta\cdot j\dfrac{\omega}{\omega_n}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$
- Caso 5:
  Factor en el denominador $G_5(j\omega)=\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\zeta\cdot j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$
  - Si $\dfrac{\omega}{\omega_n}<<1\Rightarrow$

$$|G_5|_{[\mathrm{dB}]}=-20\cdot\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cong-20\cdot\log\sqrt{(1)^2}=-20\log 1=0$$

$$\angle G_5=-\mathrm{arctg}\left[\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right]\cong-\mathrm{arctg}\frac{0}{1}=0^{\circ}$$



Trazado del Bode asintótico

- Factores de segundo orden: $\left[1+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

- Caso 5:

  Factor en el denominador $G_5(j\omega)=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$

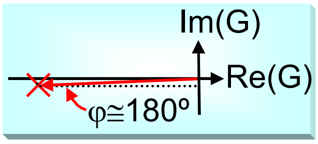
  - Si $\frac{\omega}{\omega_n}>>1\Rightarrow$

$$|G_5|_{[dB]}=-20\cdot\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cong-20\cdot\log\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cong$$

$$\cong-20\cdot\log\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}\cong-20\cdot\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=-40\log\frac{\omega}{\omega_n}$$

Decrece a 40 dB/década

$$\angle G_5=-\text{arctg}\left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right]=-\text{arctg}\left[\frac{2\zeta\cdot\omega_n}{-\omega}\right]=-180^\circ$$



Trazado del Bode asintótico

- Factores de segundo orden: $\left[1+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

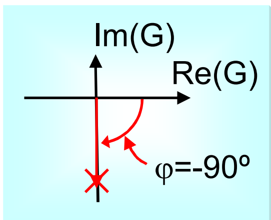
- Caso 5:

  Factor en el denominador $G_5(j\omega)=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$

  - Transición entre ambos casos: si $\frac{\omega}{\omega_n}=1\Leftrightarrow\omega=\omega_n$
  - Si $\frac{\omega}{\omega_n}=1\Rightarrow|G_5|_{[dB]}=-20\cdot\log(2\zeta)$ $\quad 0<\zeta<1$

  Depende de los valores de ζ

$$\angle G_5=\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j\right)^{-1}\Rightarrow G_5=-\text{arctg}\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j\right]=-90^\circ$$



Trazado del Bode asintótico

- Factores de primer orden: $(1+j\omega T)^{\pm 1}=(1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$
  - Caso 4: Factor en el denominador: $G_5(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_n}}$

DIAGRAMA DE BODE (Conclusión)

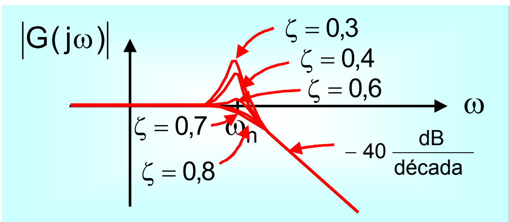
	MÓDULOS	FASES
$\frac{\omega}{\omega_n}<<1$	$\lvert G_5(j\omega)\rvert\cong 0[\text{dB}]$ Recta horizontal	$\angle G_5(j\omega)=0^o$
$\frac{\omega}{\omega_n}>>1$	$\lvert G_5(j\omega)\rvert$ decrece a 40[dB/dec] Recta de pendiente -40 dB/dec	$\angle G_5(j\omega)=-180^o$
$\frac{\omega}{\omega_n}\cong 1$	$\lvert G_5(j\omega)\rvert=$ Depende de ζ	$\angle G_5(j\omega)=-90^o$

Trazado del Bode asintótico

- Factores de segundo orden: $\left[1+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$
- Caso 5:
  Factor en el denominador $\quad G_5(j\omega)=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$
  - Si $\frac{\omega}{\omega_n}=1$

$$\left|G_5\right|_{[\text{dB}]}=-20\cdot\log(2\zeta) \qquad 0<\zeta<1$$

- Si $\zeta\to 0 \quad \Rightarrow \left|G_5\right|_{[\text{dB}]}\to -(-\infty)=\infty$
- Si $\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}70 \Rightarrow \left|G_5\right|_{[\text{dB}]}\to -20\log\sqrt{2}=-3[\text{dB}]$
- Si $\zeta\to 1 \quad \Rightarrow \left|G_5\right|_{[\text{dB}]}\to -20\log 2=-6[\text{dB}]$



Trazado del Bode asintótico

- Una función de transferencia cualquiera será de la forma:

$$G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{N_1(j\omega)\cdot N_2(j\omega)\cdot \ldots \cdot N_n(j\omega)}{D_1(j\omega)\cdot D_2(j\omega)\cdot \ldots \cdot D_m(j\omega)}$$

- Factores: $K,\ (j\omega)^{\pm 1},\ (1+j\omega T)^{\pm 1} = (1+j\frac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1},\ \left[1+2\zeta\cdot j\frac{\omega}{\omega_n}+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

- En dB, el producto pasa a ser una suma:

$$|G(j\omega)|_{[dB]} = 20\log\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} =$$

$$= 20\log[N_1(j\omega)] + \ldots + 20\log[N_n(j\omega)] - 20\log[D_1(j\omega)] - 20\log[D_m(j\omega)]$$

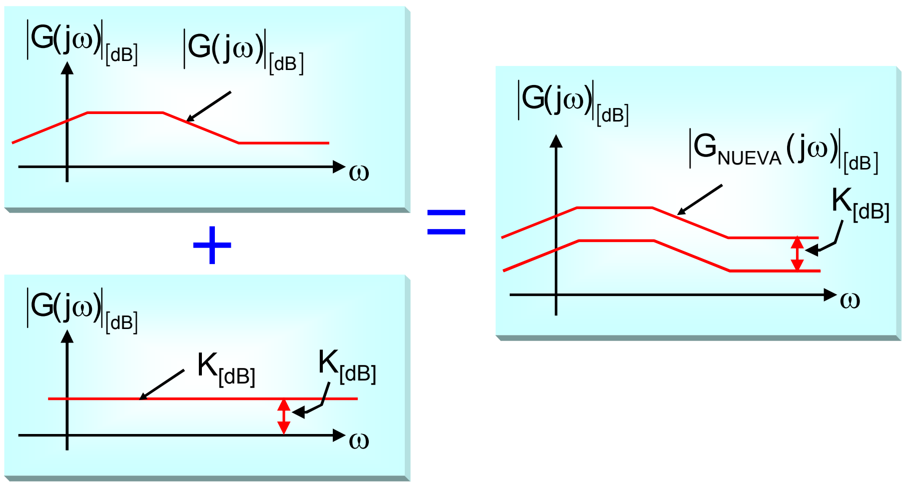
¿Cómo afecta cada factor agregado a $G(j\omega)$?

$$|G_N(j\omega)| = |Factor|\cdot|G(j\omega)| \Rightarrow |G_N(j\omega)|_{[dB]} = 20\log|Factor| + |G(j\omega)|_{[dB]}$$

Trazado del Bode asintótico

- Diagrama de MÓDULOS

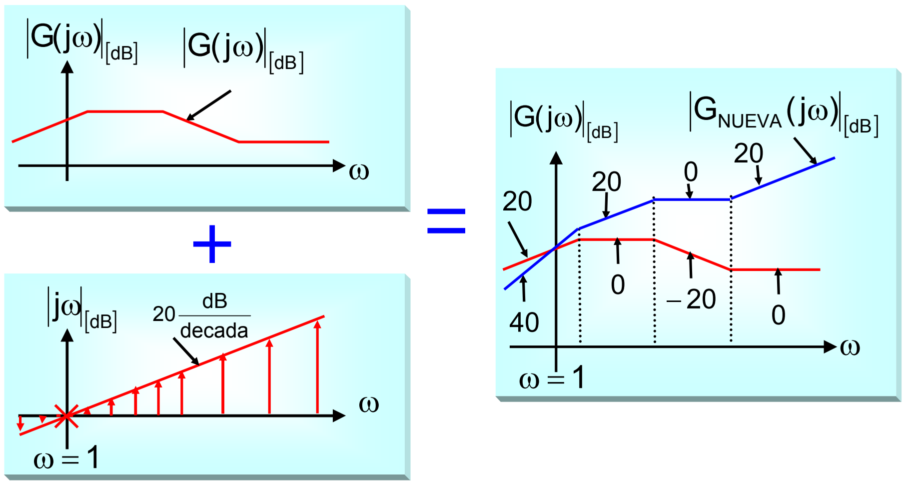
- Factor $K(j\omega)$=cte $\Rightarrow$ Suma una constante



Trazado del Bode asintótico

- Diagrama de MÓDULOS

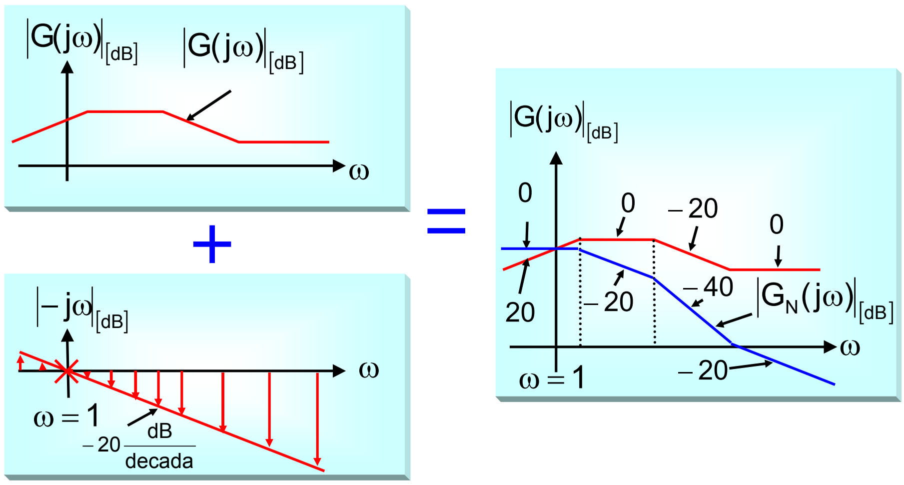
- Factor en el numerador: jω ⇒ Suma 20dB/decada



Trazado del Bode asintótico

- Diagrama de MÓDULOS

- Factor en el denominador: $(j\omega)^{-1}$ ⇒ Resta 20dB/decada



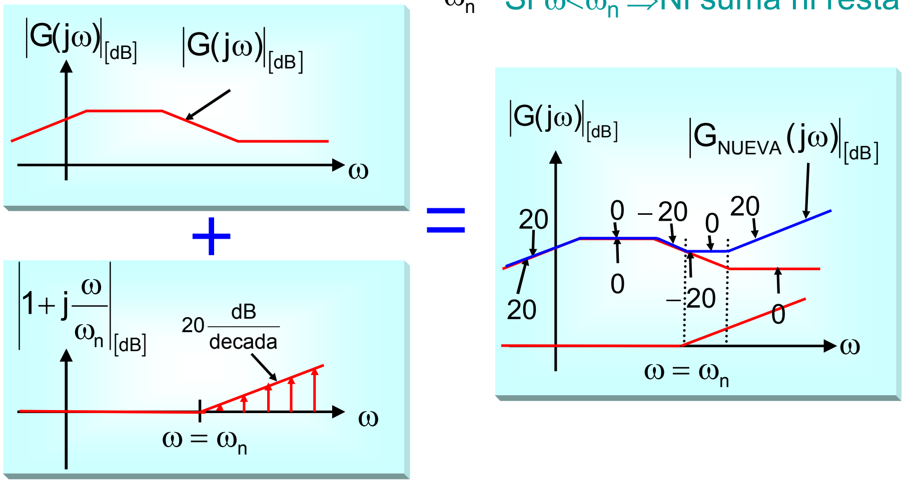
Trazado del Bode asintótico

- Diagrama de MÓDULOS

- Factor en el numerador: $1 + j\dfrac{\omega}{\omega_n}$

Si $\omega > \omega_n \Rightarrow$ Suma 20dB/dec

Si $\omega < \omega_n \Rightarrow$ Ni suma ni resta



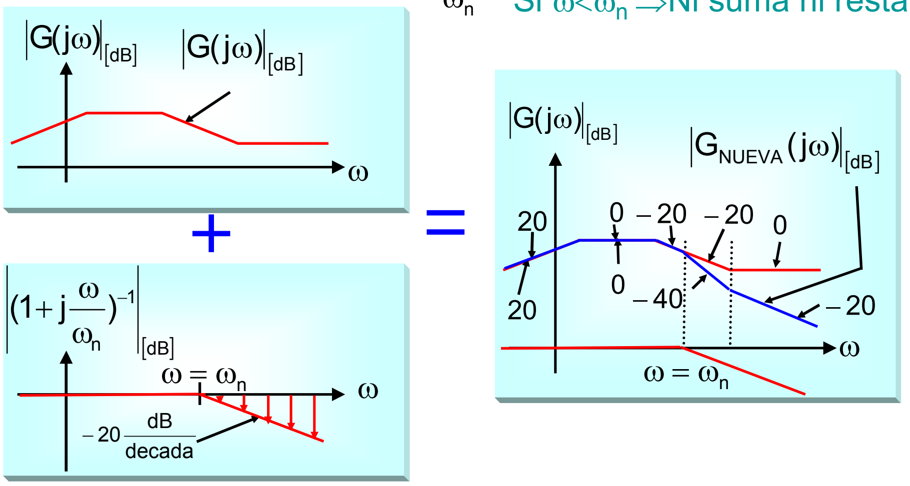
Trazado del Bode asintótico

- Diagrama de MÓDULOS

- Factor en denominador: $(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_n})^{-1}$

Si $\omega > \omega_n \Rightarrow$ Resta 20dB/dec

Si $\omega < \omega_n \Rightarrow$ Ni suma ni resta



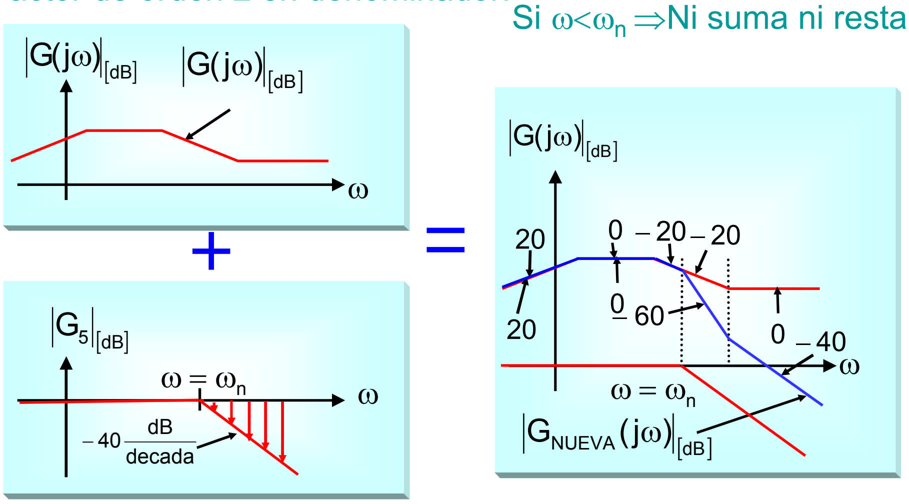
Trazado del Bode asintótico

Diagrama de MÓDULOS

Factor de orden 2 en denominador:

Si $\omega > \omega_n \Rightarrow$ Resta 40dB/dec

Si $\omega < \omega_n \Rightarrow$ Ni suma ni resta



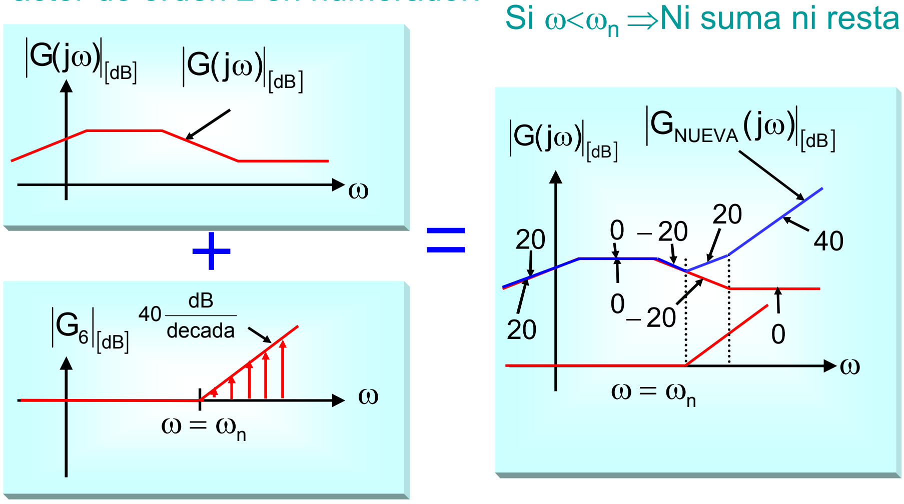
Trazado del Bode asintótico

Diagrama de MÓDULOS

Factor de orden 2 en numerador:

Si $\omega > \omega_n \Rightarrow$ Suma 40dB/dec

Si $\omega < \omega_n \Rightarrow$ Ni suma ni resta



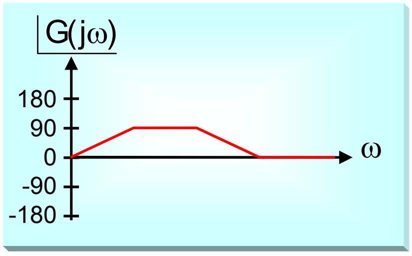
Trazado del Bode asintótico

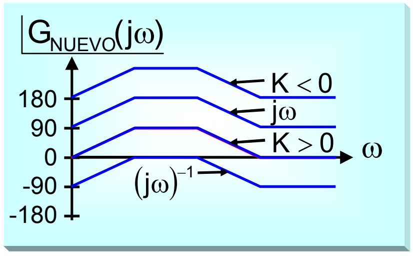
Diagrama de FASES

- Factores K, $j\omega$ y $(j\omega)^{-1}$

  Suman una fase constante en todas las frecuencias

  - Factor K>0 Suma 0º
  - Factor K<0 Suma/Resta 180º
  - Factor $j\omega$ Suma 90º
  - Factor $(j\omega)$-1 Suma -90º (o resta 90º)





Trazado del Bode asintótico

Diagrama de FASES

Factores de primer orden: $(1+j\dfrac{\omega}{\omega_n})^{\pm 1}$

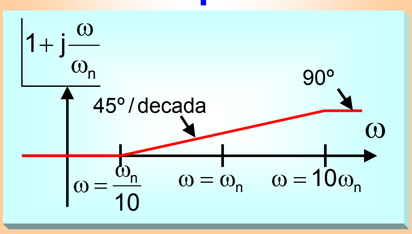
- Factor en el numerador:

$$1+j\frac{\omega}{\omega_n}$$

Suma una fase de 90º

entre $\omega=\omega_n/10$ y $\omega=10\cdot\omega_n$

+



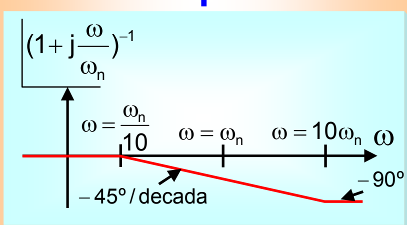
- Factor en denominador:

$$\left(1+j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$$

Resta una fase de 90º

entre $\omega=\omega_n/10$ y $\omega=10\cdot\omega_n$

+



Trazado del Bode asintótico

- Diagrama de FASES

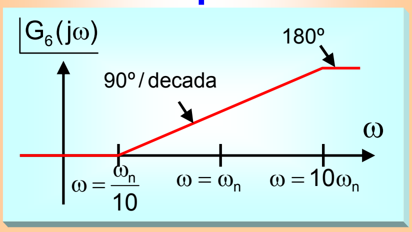
Factores de segundo orden:

- Factor en el numerador:

$$G_6(j\omega) = \left[1 + 2\zeta \cdot j\frac{\omega}{\omega_n} + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

Suma una fase de 180º entre $\omega=\omega_n/10$ y $\omega=10\cdot\omega_n$

+

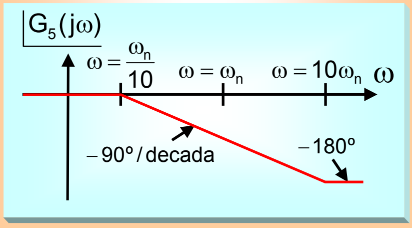


- Factor en denominador:

$$G_5(j\omega) = \left[1 + 2\zeta \cdot j\frac{\omega}{\omega_n} + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{-1}$$

Resta una fase de 180º entre $\omega=\omega_n/10$ y $\omega=10\cdot\omega_n$

+



Trazado del Bode asintótico

- Método de trazado

- Paso 1: Ordenar las frecuencias de transición f_n (o ω_n)
- Paso 2: Empezar a dibujar los diagramas empezando por las frecuencias menores
  - Diagrama de módulos
    - a) Se parte de la pendiente dada por los factores K y $(j\omega)^{\pm 1}$
    - b) Cada frecuencia de transición cambia la pendiente en ω_n
    - c) El cálculo del módulo a cualquier ω fija la posición
  - Diagrama de fases
    - a) Se parte de la fase dada por los factores K y $(j\omega)^{\pm 1}$
    - b) Cada frecuencia de transición cambia la fase entre $\omega_n/10$ y $10\cdot\omega_n$