LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO

- García, L.(2012).**Control Digital Teoría y Práctica**. Medellín: Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid.
- Capítulo 3.

- Adoptaremos las siguientes definiciones para diferenciar distintos términos que usaremos a lo largo del curso:

a) **Sistema Discreto:** sistema en el que las señales que intervienen en él son discretas, y sus relaciones se expresan en términos de ecuaciones de diferencias.

b) **Sistema Muestreado:** sistema en el que las señales discretas conviven con señales continuas.

c) **Sistema Digital:** sistema muestreado en el cual hay un proceso de cuantización de señales para convertir señales analógicas a binarias.

SECCIONES DE LA UNIDAD

3.1 Procedimiento para hallar la función de transferencia de pulso.

3.2 F.T. de pulso de un sistema con ZOH.

3.3 F.T. de pulso de un sistema con elementos en cascada.

3.4 Sistemas en lazo abierto con filtros digitales incluidos.

3.5 F.T. de pulso para sistemas en lazo cerrado.

3.6 Procedimiento para hallar la F.T. de pulso en lazo cerrado.

- La forma clásica para **modelar sistemas** de control lineales es utilizar el concepto de **función de transferencia** para representar la relación entrada-salida entre variables.
- Para un sistema continuo LTI, la función de transferencia se define como la relación entre la Transformada de Laplace de la salida y la Transformada de Laplace de la entrada, asumiendo las condiciones iniciales iguales a cero.
- De acuerdo con la definición, la función de transferencia del sistema mostrado en el diagrama de bloques de la figura 3.1 es:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} \qquad 3.1$$

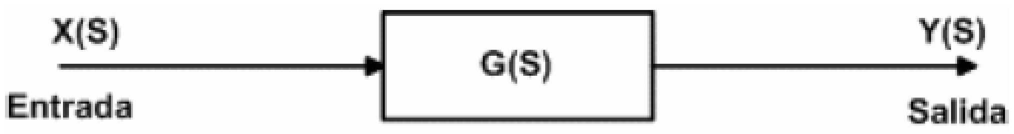


Figura 3.1 Función de transferencia para sistemas continuos.

- Por analogía con los sistemas continuos, en un **sistema discreto**, la **función de transferencia de pulso** relaciona la salida pulsante con la entrada pulsante del sistema.
- Como se ha visto, las **señales muestreadas** (pulsantes) se trabajan convenientemente utilizando la **transformada z**.
- Si se considera a $X(z)$ como la transformada z de la entrada al sistema y a $Y(z)$ como la transformada z de la salida del mismo, la función de transferencia de pulso del sistema es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad 3.2$$

3.1 PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA FT. DE PULSO

- La función de transferencia de pulso de un sistema, se puede obtener utilizando diferentes métodos así.

i. Si se tiene una ***tabla*** con las expresiones de $X(z)$ y de $Y(z)$ para una $x(t)$ dada, el procedimiento para obtener la función de transferencia de pulso es sencillo: primero se obtiene la función de transferencia $G(s)$ del sistema, luego se expande $G(s)$ en ***fracciones parciales*** de modo que, en la tabla, se pueda encontrar la transformada z de cada uno de los términos obtenidos en la expansión de las fracciones parciales.

➢ La suma algebraica de los términos de la transformada z hallados, da la función de transferencia de pulso.

ii. Un segundo método consiste en utilizar la ***respuesta del sistema a la función*** Delta de Kronecker (***Impulso Unitario***), en este caso:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Como la entrada es $x(t) = \delta(t)$ y $Z\{\delta(t) = 1\}$, se obtiene que $G(z) = Y(z)$.
- Por lo tanto, $G(z)$ se puede obtener a partir de $G(s)$ o a partir de $y(t)$ utilizando la definición de transformada z, es decir:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\, z^{-k} \qquad 3.9$$

iii. Un tercer ***método es el computacional***, el cual con un software especializado permite, mediante la utilización de comandos sencillos, la obtención de la función de transferencia de pulso $G(z)$ a partir de la función de transferencia $G(s)$.

- En este caso pueden citarse programas como el MATLAB.

Ejemplo 3.1

- Hallar la función de transferencia de pulso del sistema mostrado en la figura 3.3, con T=0.5 s, utilizando los tres métodos expuestos.

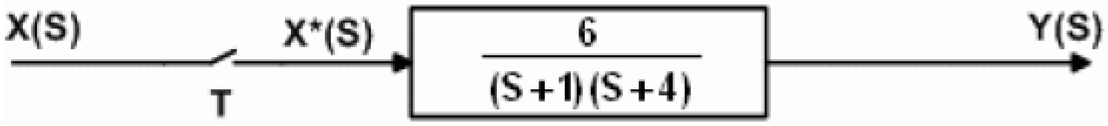


Figura 3.3 Sistema para el ejemplo 3.1

Solución

- La función de transferencia para el sistema continuo es

$$G(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{6}{(S+1)(S+4)}$$

a) Expandiendo en fracciones parciales resulta:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{2}{S+1} - \frac{2}{S+4}$$

- De tablas se obtiene:

$$\Im\left\{\frac{2}{S+1}\right\} = \frac{2z}{z-0.60653} \qquad \Im\left\{\frac{2}{S+4}\right\} = \frac{2z}{z-0.13533}$$

- Así, la función de transferencia de pulso para el sistema es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z}{z-0.60653} - \frac{2z}{z-0.13533} = \frac{0.94239z}{(z-0.60653)(z-0.13533)}$$

b) Asumiendo que la entrada $x(t)$ es la función Delta de Kronecker $\delta(t)$entonces:

$$G(S) = Y(S) = \frac{6}{(S+1)(S+4)} = \frac{2}{S+1} - \frac{2}{S+4}$$

- De tablas, la transformada inversa de Laplace para la expresión anterior es:

$$g(t) = 2e^{-t} - 2e^{-4t}$$

- Aplicando la definición de transformada z:

$$G(z) = \Im\{g(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} [2e^{-0.5k} - 2e^{-2k}]\, z^{-k}$$

$$G(Z) = 2\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-0.5k} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k} z^{-k}\right]$$

$$G(z) = 2[(1 + e^{-0.5}z^{-1} + e^{-1}z^{-2} + \cdots) - (1 + e^{-2}z^{-1} + e^{-4}z^{-2} + \cdots)]$$

$$G(z) = \frac{2}{1 - e^{-0.5}z^{-1}} - \frac{2}{1 - e^{-2}z^{-1}} = \frac{0.94239z}{(z - 0{,}60653)(z - 0{,}13533)}$$

c) Método computacional.

```
clc
syms s k T              %Definición de los símbolos a utilizar
disp('EJEMPLO 3.1')
disp('Método 1.')
G=6/((s+1)*(s+4));      %Se ingrésa la F.T. (G) en el domínio de s
disp('G(s)=')
pretty(G)
g=ilaplace(G);          %Se calcula la L-1 de G
disp('g(t)=')
pretty(g)
gkT=compose(g,k*T);     %Se "discretiza" g(t)
disp('g(kT)=')
pretty(gkT)
GZ=ztrans(gkT);         %Se calcula la transformada Z de g(kT)
disp('G(z)=')
pretty(GZ)
GZ=subs(GZ,T,0.5);
GZ=vpa(simplify(GZ),5); %Se muestra el resultado simplificado
                        %y con 5 cifras flotantes significativas
disp('G(z) con T=0.5 =')
pretty(GZ)

disp('Método 2. Aproximación')
Gs=tf(6,conv([1 1],[1 4]))  %Se introduce la F.T.
Gz=c2d(Gs,0.5,'impulse')    %Se utiliza la instrucción c2d con la
                            %función impulse (impulse)
```

```
EJEMPLO 3.1
Método 1.
G(s)=
       6
---------------
(s + 1) (s + 4)

g(t)=
2 exp(-t) - exp(-4 t) 2

g(kT)=
2 exp(-T k) - exp(-4 T k) 2

G(z)=
    2 z             2 z
----------- - -------------
z - exp(-T)   z - exp(-4 T)

G(z) con T=0.5 =
   2.0 z         2.0 z
----------- - -----------
z - 0.60653   z - 0.13534
```

```
Método 2. Aproximación

Gs =


        6
  -------------
  s^2 + 5 s + 4

Continuous-time transfer function.


Gz =

    0.4712 z + 1.635e-18
  ------------------------
  z^2 - 0.7419 z + 0.08208

Sample time: 0.5 seconds
Discrete-time transfer function.
```

3.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO DE UN SISTEMA CON ZOH

- La figura 3.4 muestra un sistema en el cual se incluye, además del muestreador, un **retenedor de orden cero (ZOH)** precediendo a la función continua G(s).

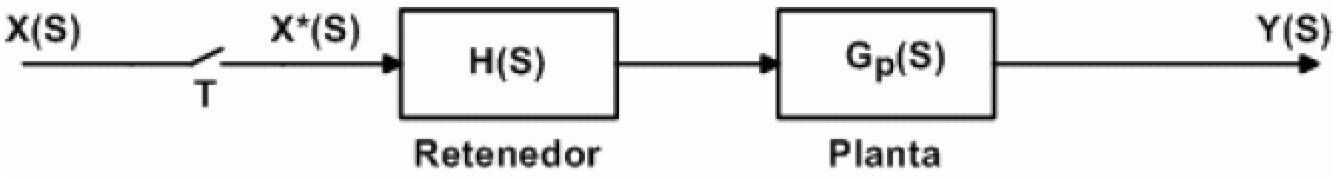


Figura 3.4 Sistema con retenedor de orden cero

- De acuerdo con la ecuación 3.2, la función de transferencia de pulso para el sistema de la figura 3.3 (ejemplo 3.1) está dada por:

$$HG(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \Im\{H(S)G_p(S)\} \qquad 3.10$$

- Según la ecuación 1.8 la función de transferencia del retenedor de orden cero es:

$$H(S) = \frac{1 - e^{-ST}}{S}$$

- Reemplazando esta ecuación en la 3.10 se obtiene:

$$HG(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \Im\left\{\frac{1 - e^{-ST}}{S} G_p(S)\right\} = \Im\left\{(1 - e^{-ST})\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

$$HG(z) = \Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} - \Im\left\{\frac{G_p(S)}{S} e^{-ST}\right\} = \Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} - z^{-1}\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

- Es decir

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

Ejemplo 3.2

a) Hallar la función de transferencia de pulso para el sistema de la figura 3.5. Asuma que el periodo de muestreo es $T=1$ s y que el retenedor $H(s)$ es de orden cero.

b) Comprobar el resultado usando MATLAB.

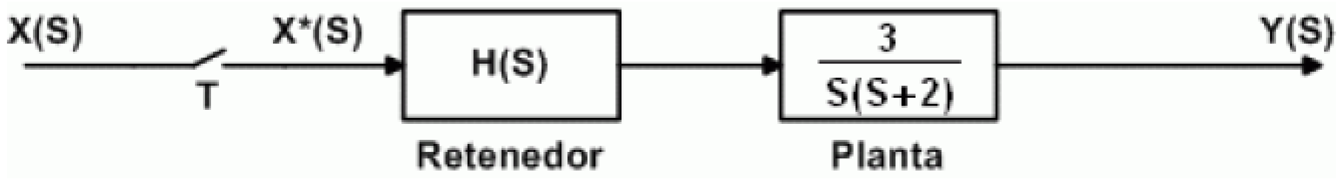


Figura 3.5 Sistema para el ejemplo 3.2

Solución

a) La función de transferencia de pulso para un sistema con retenedor de orden cero, está dada por la ecuación 3.11:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\mathfrak{I}\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} \qquad \text{con} \qquad G(S) = \frac{3}{S(S+2)}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\mathfrak{I}\left\{\frac{3}{S^2(S+2)}\right\}$$

- Utilizando tablas se encuentra que:

$$\mathfrak{I}\left\{\frac{a^2}{S^2(S+a)}\right\} = \frac{[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]z}{(z-1)^2(z - e^{-aT})}$$

- Con $a = 2$ y $T = 1$ s resulta, después de simplificar:

$$HG(z) = \frac{0.75(1.13533z + 0.59401)}{(z-1)(z-0.13533)} = \frac{0.8549(z + 0.5232)}{(z-1)(z-0.13533)}$$

b) Para hallar la función de transferencia de pulso utilizando el MATLAB se puede utilizar el siguiente programa:

```
% Programa para hallar la función de transferencia de pulso para sistemas
% con retenedor de orden cero sin retardo.
n=[0 0 3];
d=[1 2 0];
[nd,dd]=c2dm(n,d,1,'zoh');
printsys(nd,dd,'z')
```

- Obteniendo como resultado

```
>> Cap_3_Ej2

num/den =

      0.8515 z + 0.4455
   ------------------------
   z^2 - 1.1353 z + 0.13534
```

- Método 2:

```
clc
disp('Ejemplo 3.2')
GS=tf(3,[1 2 0])
T=1;
disp('con T = 1s')
GZ=c2d(GS,T,'zoh')
```

```
Ejemplo 3.2

GS =

      3
  ---------
  s^2 + 2 s

Continuous-time transfer function.

con T = 1s

GZ =

    0.8515 z + 0.4455
  ----------------------
  z^2 - 1.135 z + 0.1353

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

3.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO DE UN SISTEMA CON ELEMENTOS EN CASCADA

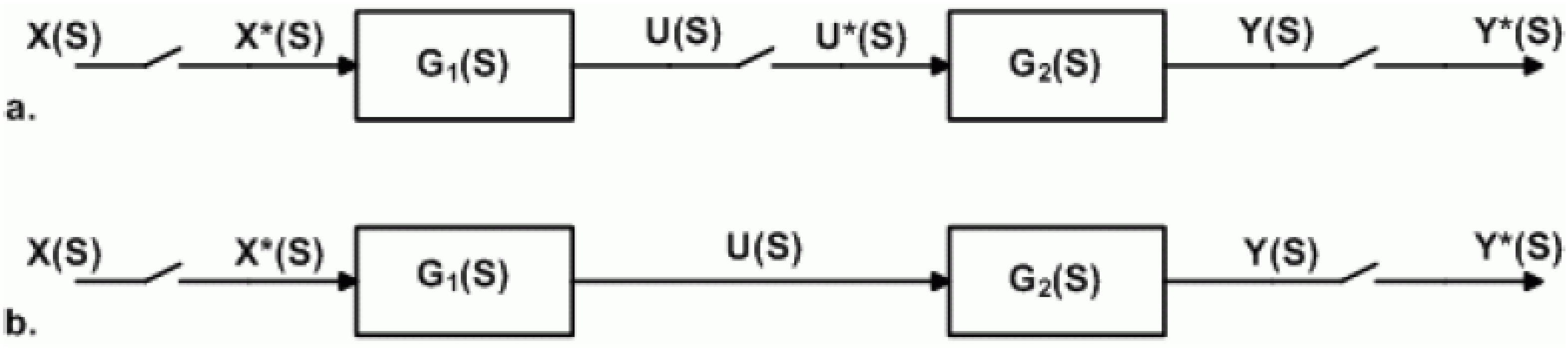


Figura 3.6 a) Sistema muestreado con muestreador entre dos elementos en cascada b) Sistema muestreado sin muestreador entre los elementos

- Considerando el sistema que se muestra en la **figura 3.6a** en el cual cada una de las funciones $G_1(s)$ y $G_2(s)$ están precedidas por un muestreador y, asumiendo que estos trabajan en forma sincronizada y que tienen el mismo periodo de muestreo, resulta:

$$U(S) = G_1(S)X^*(S)$$

$$Y(S) = G_2(S)U^*(S)$$

- De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$U^*(S) = G_1^*(S)X^*(S)$$

$$Y^*(S) = G_2^*(S)U^*(S)$$

- Por lo tanto:

$$Y^*(S) = G_2^*(S)G_1^*(S)X^*(S)$$

- Entonces, la función de transferencia de pulso que relaciona la salida $y^*(t)$ con la entrada $x^*(t)$ es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1(z)G_2(z) = \Im\{G_1(S)\} * \Im\{G_2(S)\} \qquad 3.12$$

- Ahora bien, si se considera el sistema de la **figura 3.6b**, en la cual los elementos en cascada $G_1(s)$ y $G_2(s)$ no presentan muestreador entre ellos, se obtiene:

$$Y(S) = G_1(S)G_2(S)X^*(S) = G_1G_2(S)X^*(S)$$

- En donde:

$$G_1G_2(S) = G_1(S)G_2(S)$$

- De la ecuación anterior se obtiene:

$$Y^*(S) = [G_1G_2(S)]^*X^*(S)$$

- Escribiendo la ecuación anterior en términos de la transformada z resulta:

$$Y(z) = G_1G_2(z)X(z)$$

- Finalmente, la función de transferencia de pulso que relaciona la salida $y^*(t)$ con la entrada $x^*(t)$ es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1G_2(z) = \Im[G_1G_2(S)] \qquad 3.13$$

- **De las ecuaciones 3.12 y 3.13 se concluye que:**

$$G_1(z)G_2(z) \neq G_1G_2(z)$$

I. Para casos como el de la figura 3.6(a), muestreador entre dos F.T. se realizan las transformadas Z de manera individual y luego se multiplican.

II. Para casos como el de la figura 3.6(b), no hay muestreador entre dos F.T. se multiplican primero las F.T en el dominio de S y a este resultado se le encuentra la transformada Z.

Ejemplo 3.3

- Determinar la respuesta $b(kT)$ del sistema discreto de la figura 3.7.
- Asuma que $m(t)$ es un escalón unitario y que el periodo de muestreo es $T = 0.5\ s$. $H(s)$ es un retenedor de orden cero.

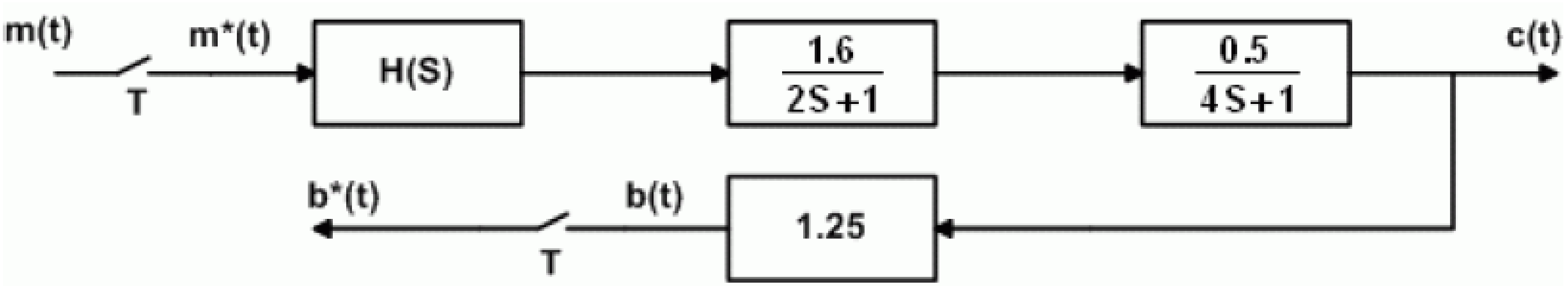


Figura 3.7 Sistema para el ejemplo 3.3

Solución:

- Debido a la presencia del retenedor de orden cero, la función de transferencia de pulso del sistema está dada por:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} \qquad\qquad G(S) = \frac{1}{(2S+1)(4S+1)}$$

- G(s) se puede escribir como:

$$G(S) = \frac{0{,}125}{(s+0{,}5)(S+0{,}25)}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{0{,}125}{S(S+0{,}5)(S+0{,}25)}\right\}$$

- Expandiendo en fracciones parciales se obtiene:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{1}{S} + \frac{1}{S + 0.5} - \frac{2}{S + 0.25}\right\}$$

- Utilizando las tablas de transformada z y teniendo en cuenta que el periodo de muestreo es $T = 0.5\ s$, resulta:

$$HG(z) = \frac{z - 1}{z}\left[\frac{z}{z - 1} + \frac{z}{z - 0.7788} - \frac{2z}{z - 0.8825}\right]$$

- Pero: $$HG(z) = \frac{B(z)}{M(z)} \qquad B(z) = HG(z).M(z)$$

- Dado que la entrada m(t) es un escalón unitario, se tiene que $M(z) = {}^{z}/_{(z-1)}$ entonces:

$$B(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0.7788} - \frac{z}{z-0.8825}$$

- Tomando la transformada inversa z a la expresión anterior se obtiene:

$$b(kT) = 1 + (0.7788)^k - 2(0.8825)^k \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

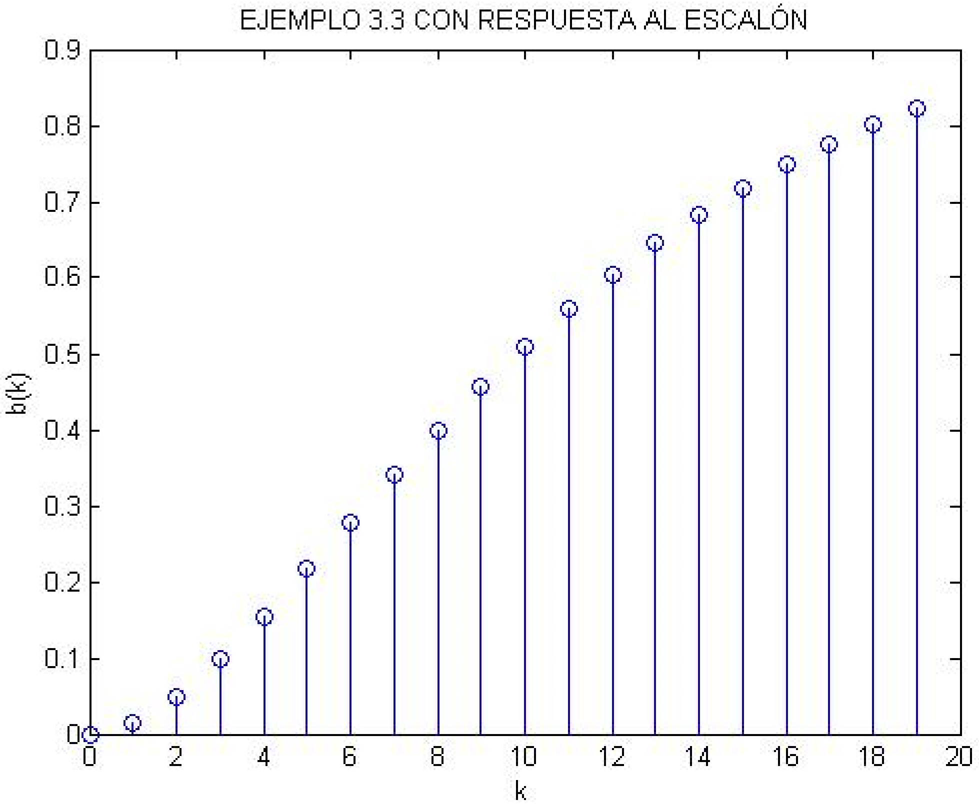
- Si se utiliza MATLAB, el programa que resuelve el problema es el siguiente:

```
% Ejemplo 3.3 Respuesta al escalón unitario
clc
clf
n=[0 0.125];     %Numerador equivalente (multiplicando los numeradores)
d1=[1 0.5];      %Denominador de la F.T 1
d2=[1 0.25];     %Denominador de la F.T 2
d=conv(d1,d2);   %Calculo del denominador equivalente
[nd,dd]=c2dm(n,d,0.5,'zoh');     %Conversión de continuo a discreto
m=ones(1,20);    %Señal escalón de entrada
b=filter(nd,dd,m)    %Realización de la Transformada Z-1
k=0:19;          %Vector de tiempo(discreto) o muestras
stem(k,b)        %Grafica en el dominio del tiempo discreto
title('EJEMPLO 3.3 CON RESPUESTA AL ESCALÓN')
xlabel('k');
ylabel('b(k)');
```

- Al ejecutar el programa se obtiene:

```
b =

  Columns 1 through 10

         0    0.0138    0.0489    0.0978    0.1548    0.2160    0.2784    0.3400    0.3996    0.4561

  Columns 11 through 20

    0.5091    0.5582    0.6035    0.6450    0.6826    0.7168    0.7476    0.7754    0.8003    0.8226
```

➢ Si en la respuesta obtenida utilizando tablas, se reemplaza $k = 0, 1, 2, \ldots$ se obtienen los valores para $b(kT)$ generados en el programa de MATLAB.



Ejemplo 3.4

- Hallar la salida $x(kT)$ para el sistema mostrado en la figura 3.8.
- Asuma un periodo de muestreo $T = 1\ s$ y que la entrada $e(t)$ es un escalón unitario.

$$G_1(S) = \frac{8}{5S+1} \qquad G_2(S) = \frac{3}{6S+1}$$

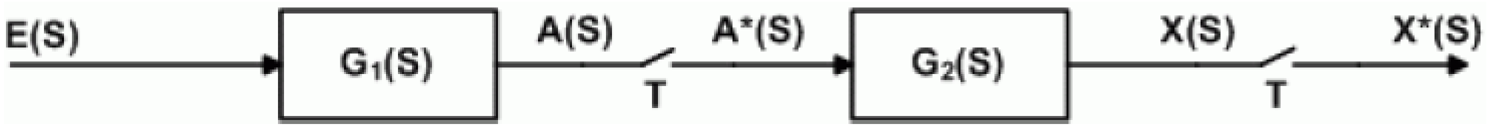


Figura 3.8 Sistema para el ejemplo 3.4

Solución:

- Para el sistema de la figura 3.8 se cumple:

$$X(S) = G_2(S)A^*(S)$$

$$A(S) = G_1(S)E(S) = G_1E(S)$$

$$A^*(S) = [G_1E(S)]^*$$

- Por lo tanto:

$$X(S) = G_2(S)[G_1E(S)]^*$$

$$X^*(S) = G_2^*(S)[G_1E(S)]^*$$

- Es decir:

$$X(z) = G_2(z)G_1E(z)(z)$$

- En este caso no es posible hallar la función de transferencia $X(z)/Y(z)$, puesto que $E(z)$ no se puede sacar como factor común.
- Entonces:

$$G_1E(z) = \Im\{G_1E(S)\} = \Im\left\{\frac{8}{S(5S+1)}\right\} = \frac{1.4z}{(z-1)(z-0{,}81873)}$$

$$G_2(z) = \Im\{G_2(S)\} = \Im\left\{\frac{3}{6S+1}\right\} = \frac{0{,}5z}{z-0{,}84648}$$

$$X(z) = \frac{0.5z}{(z-0{,}84648)} * \frac{1.4z}{(z-1)(z-0{,}81873)} = \frac{0.725z^2}{(z-1)(z-0{,}84648)(z-0{,}81873)}$$

- Expandiendo X(z)/z en fracciones parciales, se obtiene:

$$X(z) = \frac{26.05z}{z-1} + \frac{118z}{z-0.81873} - \frac{144.05z}{z-0.84648}$$

- Finalmente, la transformada inversa z, permite obtener la salida $x(kT)$ del sistema :

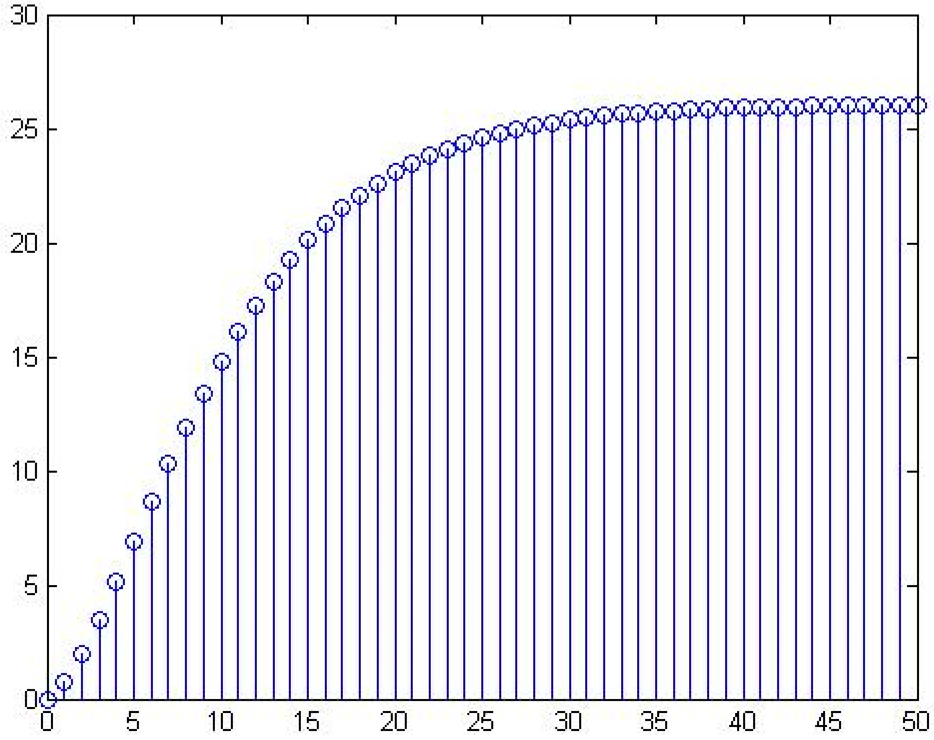
$$x(kT) = 26.05 + 118(0.81873)^k - 144.05(0.84648)^k \qquad k = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

- Al evaluar $x(kT)$ para algunos valores de k se obtiene:

$x(0) = 0{,}00000$	$x(5) = 6{,}85870$	$x(10) = 14{,}81630$
$x(1) = 0{,}72523$	$x(6) = 8{,}60107$	. . . . .
$x(2) = 1{,}93275$	$x(7) = 10{,}29432$	. . . . .
$x(3) = 3{,}44091$	$x(8) = 11{,}90643$	. . . . .
$x(4) = 5{,}11545$	$x(9) = 13{,}41792$	$x(\infty) = 26{,}0555$

```
clc
syms s k T z
disp('Ejemplo 3.4')
G1=8/(s*(5*s+1));
G2=3/(6*s+1);

g1=ilaplace(G1);
g2=ilaplace(G2);

gk1=compose(g1,k*T);
gk2=compose(g2,k*T);

Gz1=ztrans(gk1);
Gz2=ztrans(gk2);

Gz1=subs(Gz1,T,1);
Gz2=subs(Gz2,T,1);

Gz1=vpa(Gz1,5);
disp('G1E(z)=')
pretty(Gz1)
Gz2=vpa(Gz2,5);
disp('G2(z)')
pretty(Gz2)

Geq=Gz1*Gz2;
disp('Geq(z)=')
pretty(vpa(Geq,5))

disp('Transformada Inversa Z=')
Gt=iztrans(Geq)
disp('a partir del resultado anterior se grafica')
n=0:50;
xt=26.05+118*(0.81873).^n-144.05*(0.84648).^n;
stem(n,xt)
```

```
Ejemplo 3.4
G1E(z)=
 8.0 z       8.0 z
------- - -----------
z - 1.0   z - 0.81873

G2(z)
   0.5 z
-----------
z - 0.84648

Geq(z)=
    /     8.0 z         8.0 z   \
  z | ----------- - ------- | 0.5
    \ z - 0.81873   z - 1.0 /
- -------------------------------
           z - 0.84648

Transformada Inversa Z=

Gt =

26.05552985239133059423844931202 6*1.0^n + 118.

a partir del resultado anterior se grafica
```


30
25
20
15
10
5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

3.4 SISTEMAS DE LAZO ABIERTO CON FILTROS DIGITALES INCLUIDOS

- La figura 3.9a representa un sistema de lazo abierto en el cual, el convertidor A/D convierte la señal de tiempo continuo $e(t)$ en un secuencia de números $e(kt)$, el filtro digital procesa esa secuencia de números y genera otra secuencia de números $m(kt)$, la cual es convertida en una señal continua en el convertidor D/A.

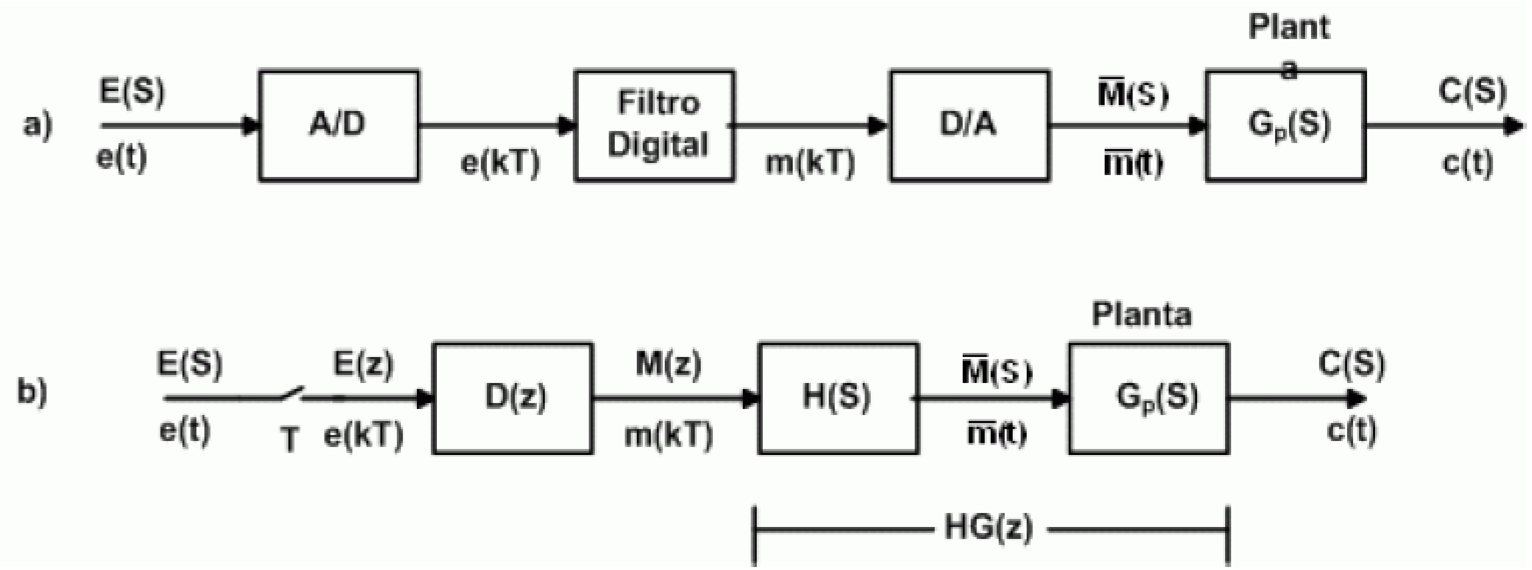


Figura 3.9 a) Sistema en lazo abierto con un filtro digital b) Modelo equivalente de la figura 3.9a

- Un filtro digital que resuelve una ecuación de diferencias lineal y con coeficientes constantes, se puede representar por una función de transferencia de pulso tal que:

$$M(z) = D(z)E(z) \qquad 3.14$$

- De 3.14 se obtiene:

$$M^*(S) = D^*(S)E^*(S) \qquad 3.15$$

- Usualmente el convertidor D/A tiene, a la salida, la característica de un retenedor de orden cero por lo tanto:

$$\bar{M}(S) = \left(\frac{1 - e^{-ST}}{S}\right) M^*(S)$$

- Entonces

$$C(S) = G_p(S)\bar{M}(S) = G_p(S)\left(\frac{1-e^{-ST}}{S}\right)M^*(S)$$

- Teniendo en cuenta la ecuación 3.15 resulta:

$$C(S) = \left[\left(\frac{1-e^{-ST}}{S}\right)G_p(S)\right]D^*(S)E^*(S) \qquad 3.16$$

- En donde:

$$G(z) = (1-z^{-1})\Im\left[\frac{G_p(S)}{S}\right]$$

- La figura 3.9b muestra el sistema equivalente del correspondiente a la figura 3.9 a

Ejemplo 3.5

- Determinar la respuesta del sistema de la figura 3.9 ante una entrada en escalón unitario.
- Asumir que el periodo de muestreo es $T = 0.2\ s$, que el filtro digital está descrito por la ecuación de diferencias:

$$m(k) = 2e(k) - e(k-1) \qquad \text{y que} \qquad G_p(S) = \frac{1}{S+1}$$

Solución:

- De acuerdo con la figura 3.9a $D(z) = M(z)/E(z)$. Tomando la transformada z a la ecuación que describe el filtro:

$$M(z) = (2 - z^{-1})E(z)$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = 2 - z^{-1} = \frac{2z - 1}{z}$$

- Ahora bien:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathfrak{Z}\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

- Es decir:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{S(S+1)}\right\} = \frac{0.18127}{z - 0.81873}$$

- Como la entrada es un escalón unitario:

$$E(z) = \frac{z}{z-1}$$

- Reemplazando $D(z), G(z)\ y\ E(z)$ en la ecuación 3.17 se obtiene:

$$C(z) = D(z)G(z)E(z) = \frac{2z-z}{z} * \frac{0.18127}{z-0.81873} * \frac{z}{z-1}$$

$$C(z) = \frac{0.18127(2z-1)}{(z-1)(z-0.81873)}$$

- Expandiendo C(z) en fracciones parciales resulta:

$$C(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{0.63746}{z-0.81873}$$

- Tomando la transformada inversa z a la expresión anterior se obtiene:

$$c(kT) = \begin{cases} 1 - 0.6376(0.81873)^{k-1} & k = 1, 2, 3 \ldots \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

- A continuación se presentan valores de $c(kt)$ para $0 \leq k \leq 10$,obtenidos utilizando MATLAB.

$$
\begin{array}{llll}
c(0) = 0.0000 & c(3) = 0.6500 & c(6) = 0.8079 & c(9) = 0.8946 \\
c(1) = 0.4779 & c(4) = 0.7135 & c(7) = 0.8427 & c(10) = 0.9137 \\
c(2) = 0.5726 & c(5) = 0.7654 & c(8) = 0.8712 & c(\infty) = 1.000
\end{array}
$$

- La ganancia DC del sistema está dada por:

$$K_{DC} = \lim_{z \to 1} D(z) * \lim_{S \to 0} G_p\,(S)$$

$$K_{DC} = \lim_{z \to 1} \frac{2z - 1}{z} * \lim_{S \to 0} \frac{1}{S + 1} = 1$$

3.5 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO PARA UN SISTEMA EN LAZO CERRADO.

- La figura 3.10a muestra el diagrama en bloques de un sistema de control digital en lazo cerrado, en el cual se asume que la dinámica de todos los elementos es significativa; sin embargo, a éste sistema se le pueden efectuar algunas simplificaciones.
- Por ejemplo, **si el modelo del sistema fue obtenido experimentalmente**, la función de transferencia del proceso $G_p(s)$ incluye la dinámica del elemento final de control y la del sistema de medición.
- En este caso, el diagrama de bloques de la figura 3.10a se reduce al dado en la figura 3.10b.

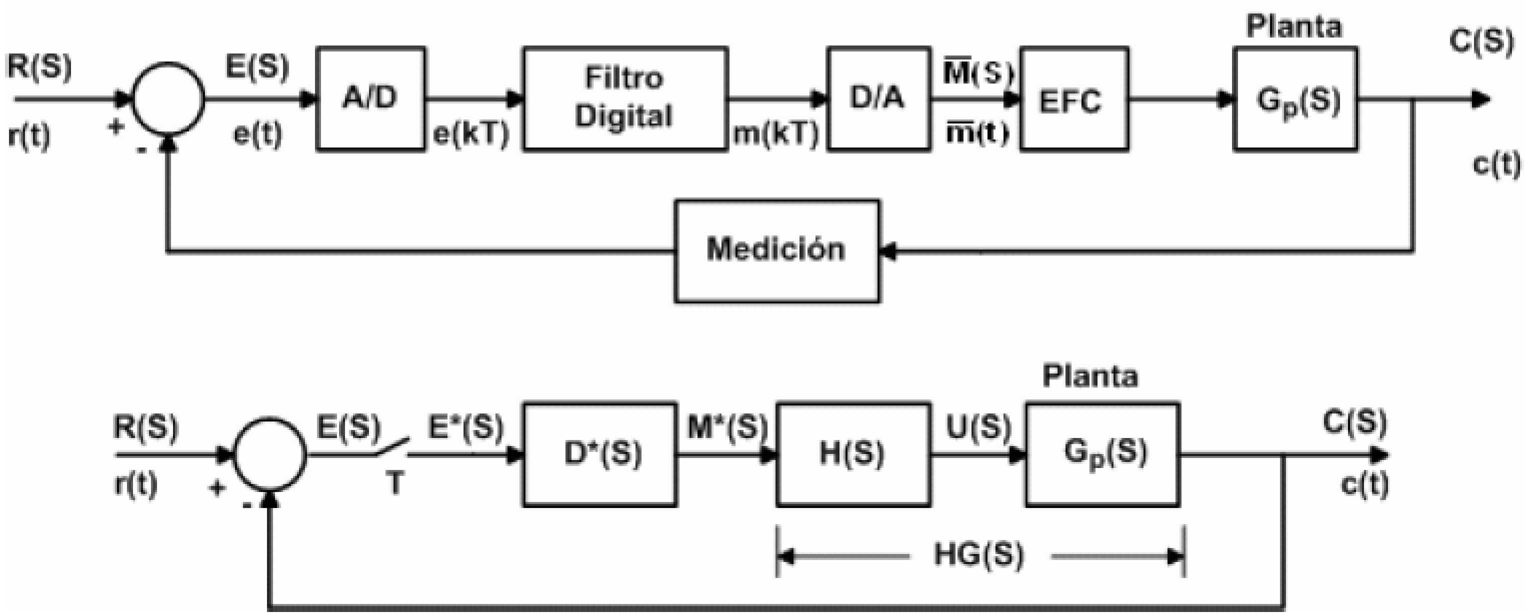


Figura 3.10 a) Sistema de control con todas las dinámicas incluidas.

b) Sistema simplificado

- Para obtener la función de transferencia de pulso en lazo cerrado de un sistema de control digital como el que se muestra en la figura 3.10b, se utiliza un procedimiento similar al empleado para obtener la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema continuo, es decir:

$$HG(S) = H(S)G_p(S)$$

$$C(S) = HG(S)D^*(S)E^*(S)$$

$$C^*(S) = HG^*(S)D^*(S)E^*(S)$$

- Tomando la transformada z:

$$C(z) = HG(z)D(z)E(z)$$

$$E(z) = R(z) - C(z)$$

$$C(z) = HG(z)D(z)[R(z) - C(z)]$$

- Por lo tanto, la función de transferencia de pulso de lazo cerrado, para el sistema de la figura 3.10b es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} \qquad 3.18$$

- En donde:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad 3.19$$

- Cuando el retenedor es de orden cero y:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad 3.20$$

- Cuando Gp(S) presenta retardo o tiempo muerto; en este caso, para evaluar la transformada z modificada, se utiliza el procedimiento expuesto en la sección 2.4

Ejemplo 3.6

- Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 3.11, hallar

a) La función de transferencia de pulso en lazo cerrado.

b) La respuesta $c(kT)$ si $r(t)$ es un escalón unitario.

- Asuma que el periodo de muestreo es $T = 1\ s$, que $H(s)$ es un retenedor de orden cero y que $D(z)$ es un controlador digital con función de transferencia:

$$D(z) = \frac{1{,}5z - 1{,}2}{z - 1}$$

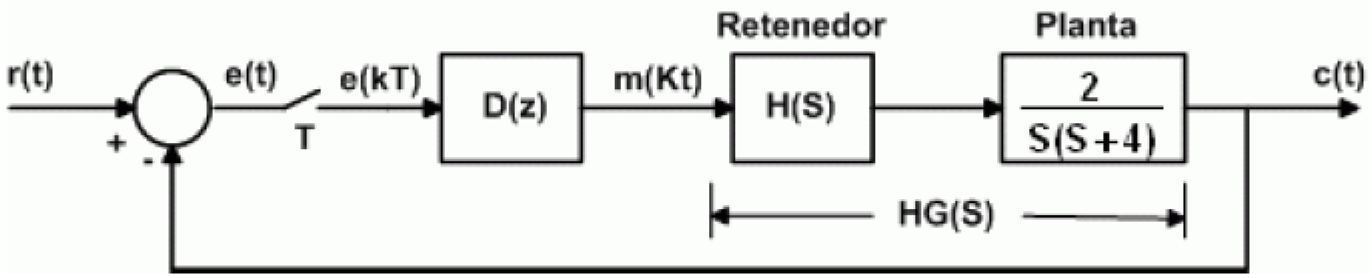


Figura 3.11 Sistema de control para el ejemplo 3.6

a) **Solución analítica:**

- La función de transferencia de pulso para el sistema planta-retenedor está dada por la ecuación 3.19:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{2}{S^2(S+4)}\right\}$$

- De tablas se encuentra que:

$$\Im\left\{\frac{a^2}{S^2(S+a)}\right\} = \frac{[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]z}{(z-1)^2(z - e^{-aT})}$$

- Con $T = 1\ s$ y $a = 4$ se obtiene, después de simplificar:

$$HG(z) = \frac{0.37728(z + 0.30096)}{(z-1)(z - 0.01831)}$$

- La función de transferencia del sistema en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\frac{0.37728(z+0.30096)}{(z-1)(z-0.01831)} * \frac{(1.5z-1.2)}{z-1}}{1 + \frac{0.37728(z+0.30096)}{(z-1)(z-0.01831)} * \frac{(1.5z-1.2)}{z-1}}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.37728(z+0.30096)(1.5z-1.2)}{z^3 - 1.45238z^2 + 0.75421z - 0.15457}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.37728(z+0.30096)(1.5z-1.2)}{(z-0.67298)(z^2 - 0.77939 + 0.22969)}$$

- Si $r(t)$ es un escalón unitario, $R(z) = z/(z-1)$, por lo tanto:

$$C(z) = G_w(z)R(z) = \frac{0.37728z(z+0.30096)(1.5z-1.2)}{(z-1)(z-0.67298)(z^2-0.77939z+0.22969)}$$

- Al expandir $C(z)/z$ en fracciones parciales se obtiene:

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{2.354z-0.48948}{z^2-0.77939z+0.22969} + \frac{1.3544}{z-0.67298}$$

- Utilizando tablas se obtiene la transformada inversa z de $C(z)$ así:

$$c(kT) = 1 + 1.3544(0.67298)^k - [2.3542\cos(0.621k) + 1.5339\sin(0.621k)](0.4792)^k$$

b) **Solución utilizando MATLAB:**

```
% Entrar la planta continua
n=[2];
d=[1 4 0];
% Discretizar la planta continua
[nd,dd]=c2dm(n,d,1,'zoh');
%  Entrar el controlador discreto
nc=[1.5 -1.2];
dc=[1 -1];
% Multiplicar planta discreta por el controlador
[ns,ds]=series(nc,dc,nd,dd);
% Función de transferencia de lazo cerrado
[nw,dw]=cloop(ns,ds,-1);
% Mostrar función de transferencia de pulso en lazo cerrado
printsys(nw,dw,'z')
pause
% Evaluar la respuesta del sistema
k=0:39;
r=ones(1,40);
y=filter(nw,dw,r);
c=y'
```

- Al ejecutar el programa se obtiene:

$c(0) = 0.0000$	$c(7) = 1.0594$	$c(14) = 1.0036$
$c(1) = 0.5659$	$c(8) = 1.0372$	$c(15) = 1.0024$
$c(2) = 1.1055$	$c(9) = 1.0244$	$c(16) = 1.0016$
$c(3) = 1.3260$	$c(10) = 1.0165$	$c(17) = 1.0011$
$c(4) = 1.2421$	$c(11) = 1.0113$	$c(18) = 1.0007$
$c(5) = 1.1599$	$c(12) = 1.0078$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$
$c(6) = 1.0979$	$c(13) = 1.0053$	$c(40) = 1.0000$

- Ver secciones 5.4 y 5.5 de *Nise, N. (2006). Sistemas de control para ingeniería. México D.F.: Continental*.
- Ver sección 13.4 y 13.5 de *Nise, N. (2006). Sistemas de control para ingeniería. México D.F.: Continental*.

3.6 PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA FT. DE PULSO EN LAZO CERRADO

- La determinación de la función de transferencia de pulso de lazo cerrado, en sistemas de datos muestreados, es compleja pues **no existe una función de transferencia para el muestreador**.
- Un procedimiento útil para determinar la función de transferencia de pulso en lazo cerrado, consiste en elaborar su **diagrama de flujo** de señales original omitiendo en él la representación del muestreador como se indica en las figuras 3.12a y 3.12b.

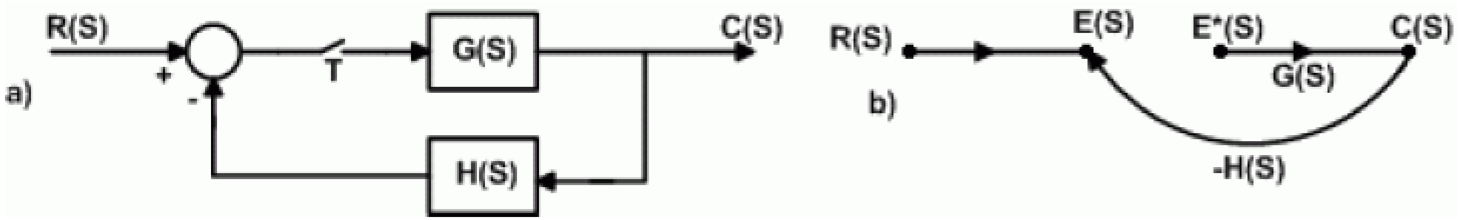


Figura 3.12 a) Sistema de control de datos muestreados. b) Diagrama de flujo equivalente del sistema.

- La señal de salida muestreada se puede obtener siguiendo paso a paso el procedimiento que se presenta a continuación:

1. Construir el diagrama original de flujo de señales del sistema. Inicialmente se considera que los muestreadores están abiertos.
2. Asignar una variable a la entrada de cada muestreador. La salida de muestreador será la misma variable con asterisco. $[E(s)\ y\ E^*(s)]$
3. Considerar la salida de cada muestreador como un nodo fuente (Nodo de entrada) y expresar la entrada a cada muestreador y la salida del sistema en función de la salida de cada muestreador. Para el sistema de la figura 3.12 b se tiene:

$$E(S) = R(S) - GH(S)E^*(S) \qquad 3.21$$

$$C(S) = G(S)E^*(S) \qquad 3.22$$

- Se hace notar que en la ecuación 3.21

$$GH(S) = G(S).H(S)$$

4. Tomar la "transformada asterisco" a las ecuaciones obtenidas y resolverlas por el método conveniente con el fin de evaluar $C^*(s)$. Para el ejemplo que se analiza resulta:

$$E^*(S) = R^*(S) - GH^*(S)E^*(S) \qquad 3{,}23$$

$$C^*(S) = G^*(S)E^*(S) \qquad 3.24$$

- De la ecuación 3.23 se obtiene:

$$E^*(S) = \frac{R^*(S)}{1 + GH^*(S)} \qquad 3.25$$

- Reemplazando la ecuación 3.25 en la 3.24 se obtiene:

$$C^*(S) = \frac{G^*(S)R^*(S)}{1 + GH^*(S)}$$

$$G_w^*(S) = \frac{C^*(S)}{R^*(S)} = \frac{G^*(S)}{1 + GH^*(S)} \qquad 3.26$$

- En términos de la transformada z resulta:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \qquad 3.27$$

- La ecuación 3.27 corresponde entonces, a la función de transferencia en lazo cerrado del sistema discreto.

Ejemplo 3.7

- Para el sistema que se da en la figura 3.13, determinar la salida en función de la entrada y las funciones de transferencia dadas.

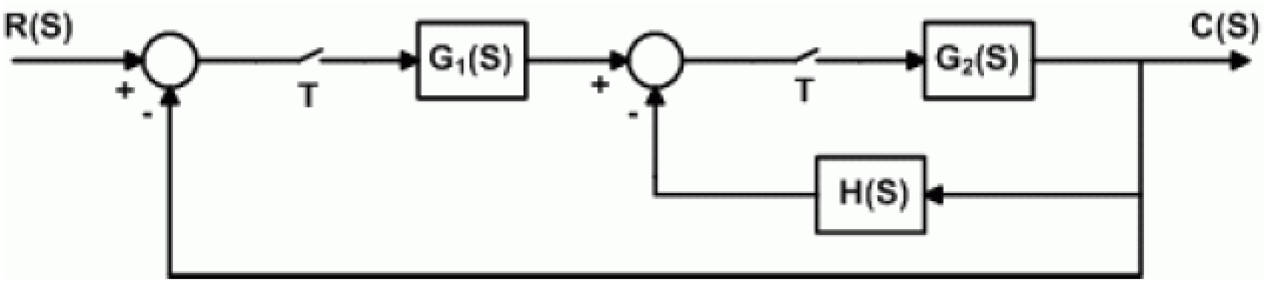


Figura 3.13 sistema de control para el ejemplo 3.7

Solución:

- La figura 3.14 muestra el diagrama de flujo original correspondiente al sistema dado en la figura 3.13:

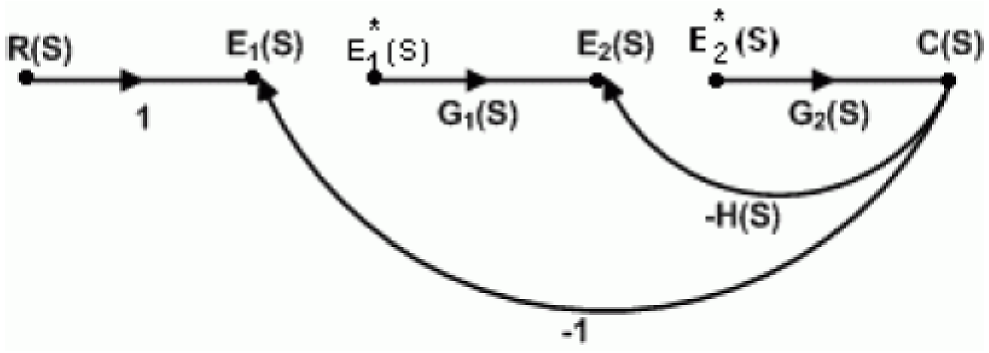


Figura 3.14 diagrama de flujo para el sistema de la figura 3.13

- Del diagrama de la figura 3.14 se obtiene:

$$E_1(S) = R(S) - G_2(S)E_2^*(S)$$

$$E_2(S) = G_1(S)E_1^*(S) - G_2H(S)E_2^*(S)$$

$$C(S) = G_2(S)E_2^*(S)$$

- De las ecuaciones anteriores resulta que:

$$E_1^*(S) = R^*(S) - G_2^*(S)E_2^*(S)$$

$$E_2^*(S) = G_1^*(S)E_1^*(S) - G_2H^*(S)E_2^*(S)$$

$$C^*(S) = G_2^*(S)E_2^*(S)$$

- A partir de estas ecuaciones, se puede obtener el diagrama de flujo de las señales muestreadas como se indica en la figura 3.15.
- Para hallar la función de transferencia de pulso se utiliza, en este caso, la **fórmula de ganancia de Mason**.

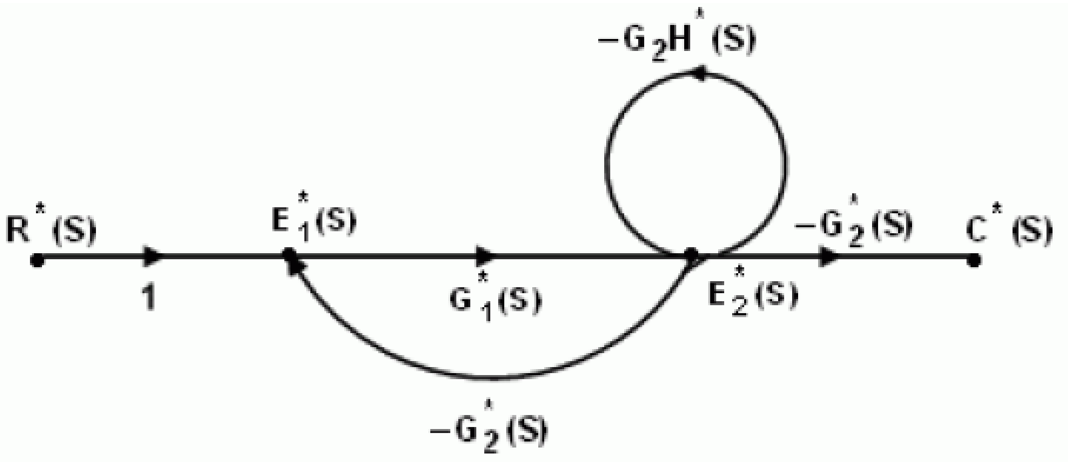


Figura 3.15 Diagrama de flujo de señales muestreadas para el ejemplo 3.6

- Utilizando la fórmula de ganancia de Mason:

Lazos directos:

$$L_1 = G_1^*(S)G_2^*(S) \qquad \Delta_1 = 1$$

Ganancias de lazo:

$$M_1 = -G_1^*(S)G_2^*(S)$$

$$M_2 = -G_2H^*(S)$$

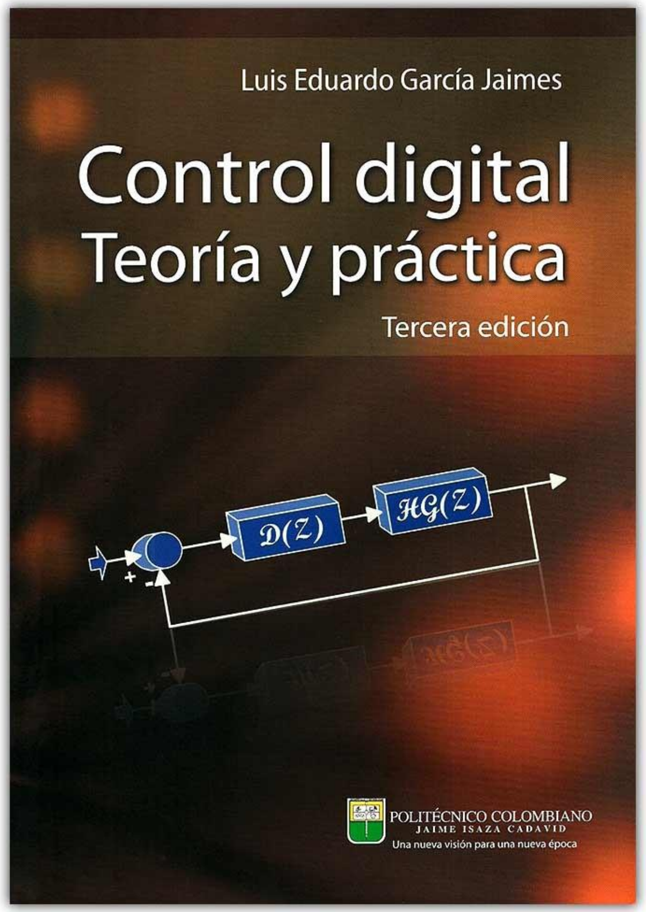
$$\Delta = 1 + G_1^*(S)G_2^*(S) + G_2H^*(S)$$

$$G_w^*(S) = \frac{1}{\Delta}\sum L_i\,\Delta_i$$

- En términos de la transformada z resulta:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z) + G_2H(z)}$$

BIBLIOGRAFÍA



- García, L.(2012). ***Control digital teoría y práctica;*** *capítulo 3. Función de transferencia de pulso.* Medellín: Politécnico Colombiano "Jaime Isaza Cadavid"

- *Signatura en la Biblioteca central Francisco Mora Díaz (USTA-TUNJA; campus centro histórico):* ***629.895 G21co***