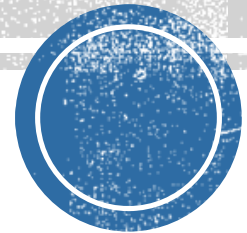


MÉTODO DE ANÁLISIS PARA SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO

- García, L.(2012). **Control Digital Teoría y Práctica**. Medellín: Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid.
- Capítulo 4.



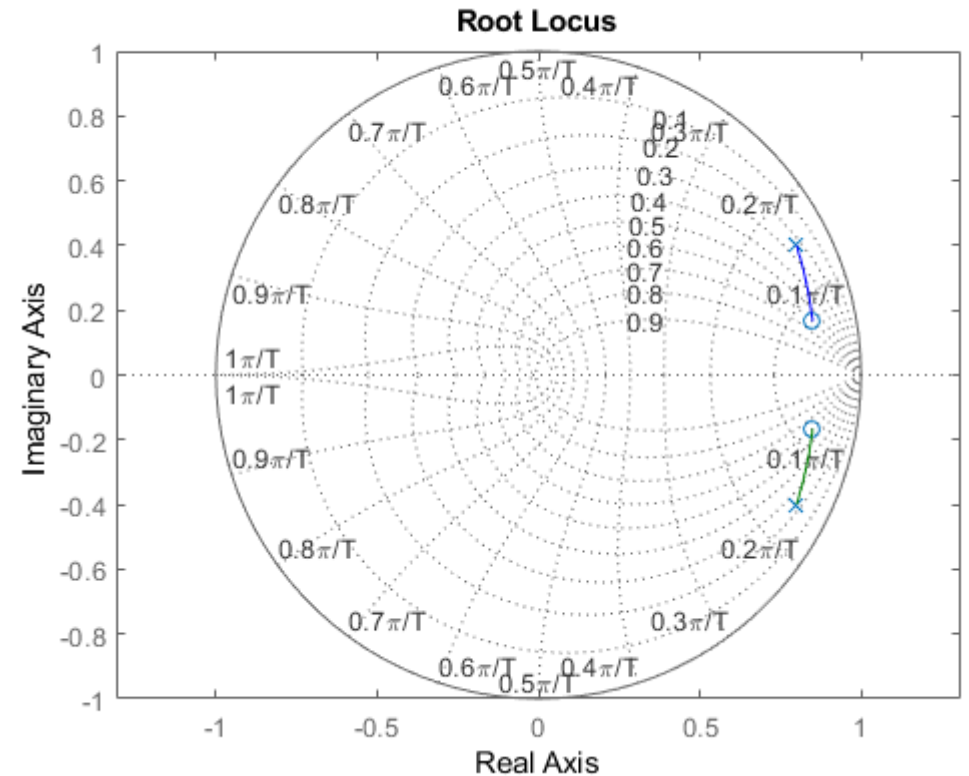
SECCIONES DE LA UNIDAD

4.1 El Plano z y su relación con el plano s .

4.2 Análisis de estabilidad de sistemas discretos.

4.3 Análisis de la respuesta transitoria y de estado estable

4.4 El método del Lugar Geométrico de las raíces.



- En este capítulo se presentan los métodos básicos para el análisis de sistemas de control en tiempo discreto.
- Se esboza, inicialmente, la **correspondencia entre el plano S y el plano z** , luego se plantea el análisis de **estabilidad** de los sistemas de control en lazo cerrado en el plano z así como las características de **respuesta transitoria y de estado permanente** y por último, se exponen los temas correspondientes al método del **lugar geométrico de las raíces**, utilizando configuraciones de polos y ceros en el plano z .



4.1 EL PLANO Z Y SU RELACIÓN CON EL PLANO S

- En los sistemas de control en tiempo continuo, la localización de los polos y de los ceros en el plano S permite establecer el comportamiento dinámico del sistema.
- Por analogía, en los sistemas discretos, la ubicación de los polos y de los ceros en el plano Z posibilita analizar el desempeño del sistema discreto.
- Cuando en el proceso se involucra un muestreo por impulsos, las variables complejas Z y S se relacionan, como se vio en el capítulo dos (transformada Z), mediante la ecuación:

$$z = e^{ST} \quad 4.1$$

- La ecuación 4.1 significa que un polo en el plano S se puede ubicar en el plano z utilizando la transformación $z = e^{ST}$.



- Teniendo en cuenta que la variable compleja S está formada por una parte real y una parte imaginaria, es decir: $S = \sigma \pm j\omega$, la ecuación 4.1 se puede escribir como:

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad 4.2$$

- Pero:

$$e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j\sin(\omega T) \quad 4.3$$

- Reemplazando la ecuación 4.3 en la 4.2 se obtiene:

$$z = e^{\sigma T} (\cos \omega T + j\sin \omega T) \quad 4.4$$

- De la ecuación 4.4 resulta que:

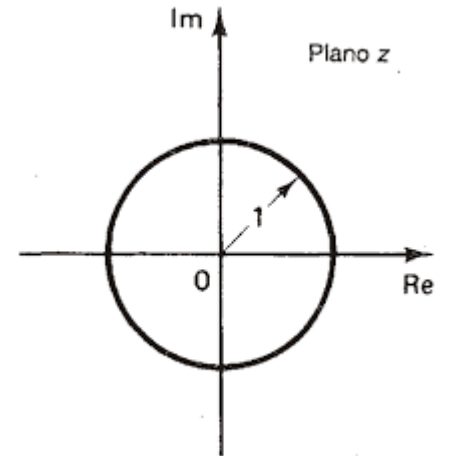
$$z = e^{\sigma T} \angle \omega T \quad 4.5$$



- Dado que σ es negativo en el semiplano izquierdo del plano, **el plano izquierdo del semiplano S corresponde a:**

$$|z| = e^{\sigma T} < 1 \quad 4.6$$

- **El eje imaginario $j\omega$ en el plano S corresponde a $|z| = 1$.**
- Es decir, **el eje imaginario en el plano (la línea $\sigma = 0$), corresponde al contorno del círculo unitario en el plano z y el interior del círculo unitario en el plano z corresponde al semiplano izquierdo del plano S.**



- Para un sistema de segundo orden, con función de transferencia dada por:

$$G(S) = \frac{w_n^2}{S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2} \quad 4.7$$

- Las raíces de la ecuación característica: $S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2 = 0$ son:

$$S_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad 4.8$$

- En donde ξ es el coeficiente de amortiguamiento y ω_n es la frecuencia natural del sistema.



- Utilizando la ecuación 4.1 se obtiene:

$$z = e^{-\xi w_n T} \angle \pm w_n T \sqrt{1 - \xi^2} = |z| \angle \pm \theta \quad 4.9$$

- Haciendo $w_d = w_n \sqrt{1 - \xi^2}$, la ecuación 4.9 se transforma en:

$$z = e^{-\xi w_n T} \angle \pm w_d T \quad 4.10$$

- El ángulo $\omega_d T$ está dado en radianes.
- Si se quiere expresar en grados, la ecuación 4.9 se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} |z| &= e^{-\xi w_n T} \\ \theta &= 57.3 w_n T \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned} \quad 4.11$$



- **En resumen:**

- La relación $z = e^{sT}$ se puede utilizar para obtener la función discreta $G(z)$ a partir de la función continua $G(s)$.
- La única dificultad se presenta con los **ceros** de $G(s)$ y con la **ganancia DC** de $G(z)$.
- Pero, esta dificultad se puede obviar así: sea $G(s) = P(s)/Q(s)$ y supóngase que el orden de los polinomios $P(s)$ y $Q(s)$ son m y n respectivamente.
- El sistema es realizable físicamente si $m \leq n$.
- Si $m < n$ se puede asumir que $G(s)$ tiene $n - m$ ceros en el infinito.
- Para obtener $G(z)$ se debe tener en cuenta que cada cero de $G(s)$ en el infinito, representa un cero en $z = -1$ en $G(z)$.
- La ganancia DC necesaria para se puede determinar haciendo cumplir la ecuación:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K \cdot \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

4.12



Ejemplo 4.1

- Dada la función de transferencia:

$$G(S) = \frac{S + 1}{(S + 2)(S + 3)(S + 5)}$$

- Determinar la función discreta equivalente $G(z)$ utilizando la transformación $z = e^{ST}$ con $T = 0.1\text{s}$.



Solución:

- En este caso, $m = 1$ y $n = 3$ pues $G(s)$ tiene un cero en $s = -1$ y tres polos en $s = -2$, $s = -3$, y $s = -5$.
- Por lo tanto, $G(s)$ tiene $n - m = 2$ ceros en el infinito y $G(z)$ tendrá dos ceros en $z = -1$.
- Entonces:

$$G(z) = \frac{(z + 1)^2(z - e^{-0.1})}{(z - e^{-0.2})(z - e^{-0.3})(z - e^{-0.5})} = \frac{(z + 1)^2(z - 0.9048)}{(z - 0.8187)(z - 0.7408)(z - 0.6065)}$$



- El valor de k necesario para ajustar la ganancia DC de $G(z)$ se obtiene a partir de la ecuación 4.12:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)(s + 5)} = K, \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z + 1)^2(z - 0.9048)}{(z - 0.8187)(z - 0.7408)(z - 0.6065)}$$

$$\frac{1}{30} = 20.593 \cdot K \quad K = 0.001618$$

- Así, la función de transferencia discreta es, en definitiva:

$$G(z) = \frac{0.001618(z + 1)^2(z - 0.9048)}{(z - 0.8187)(z - 0.7408)(z - 0.6065)}$$



- La figura 4.1 muestra las respuestas de $G(s)$ y $G(z)$ de a un escalón unitario.
- Como puede verse, las dos respuestas son similares.
- Este hecho da una idea de lo útil de éste método para obtener $G(z)$ a partir de $G(s)$.

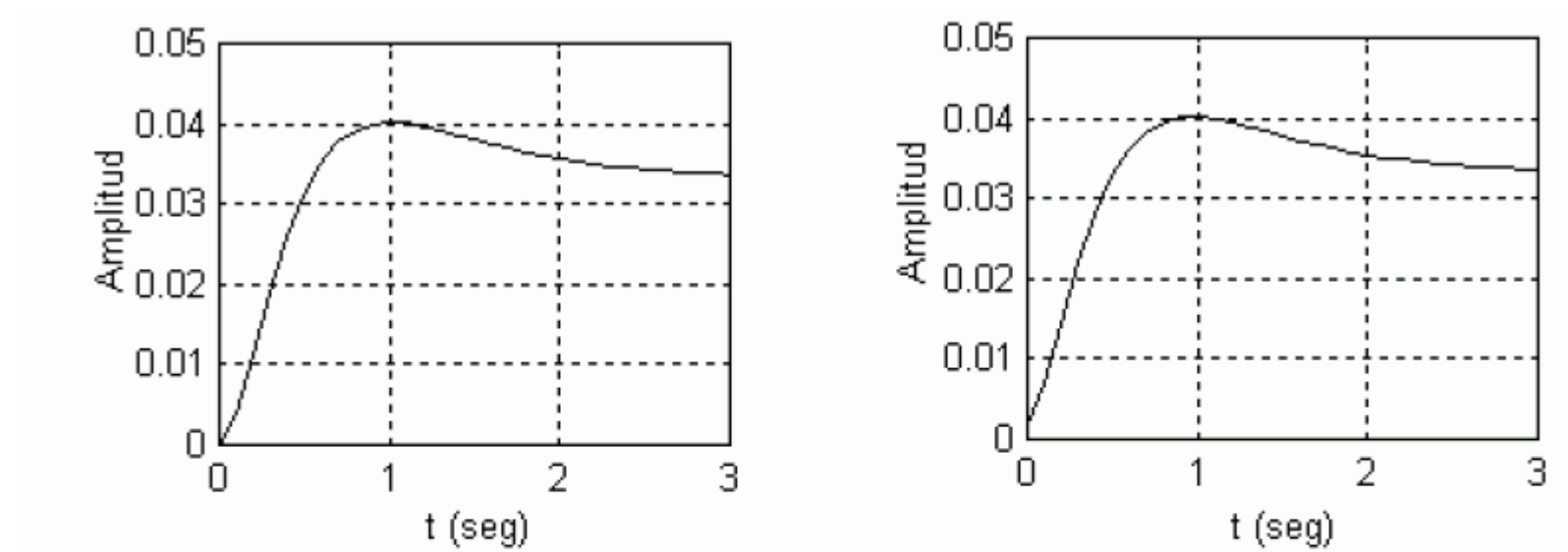


Figura 4.1 a) Respuesta de $G(s)$ al escalón unitario b) Respuesta de $G(z)$ al escalón unitario



```

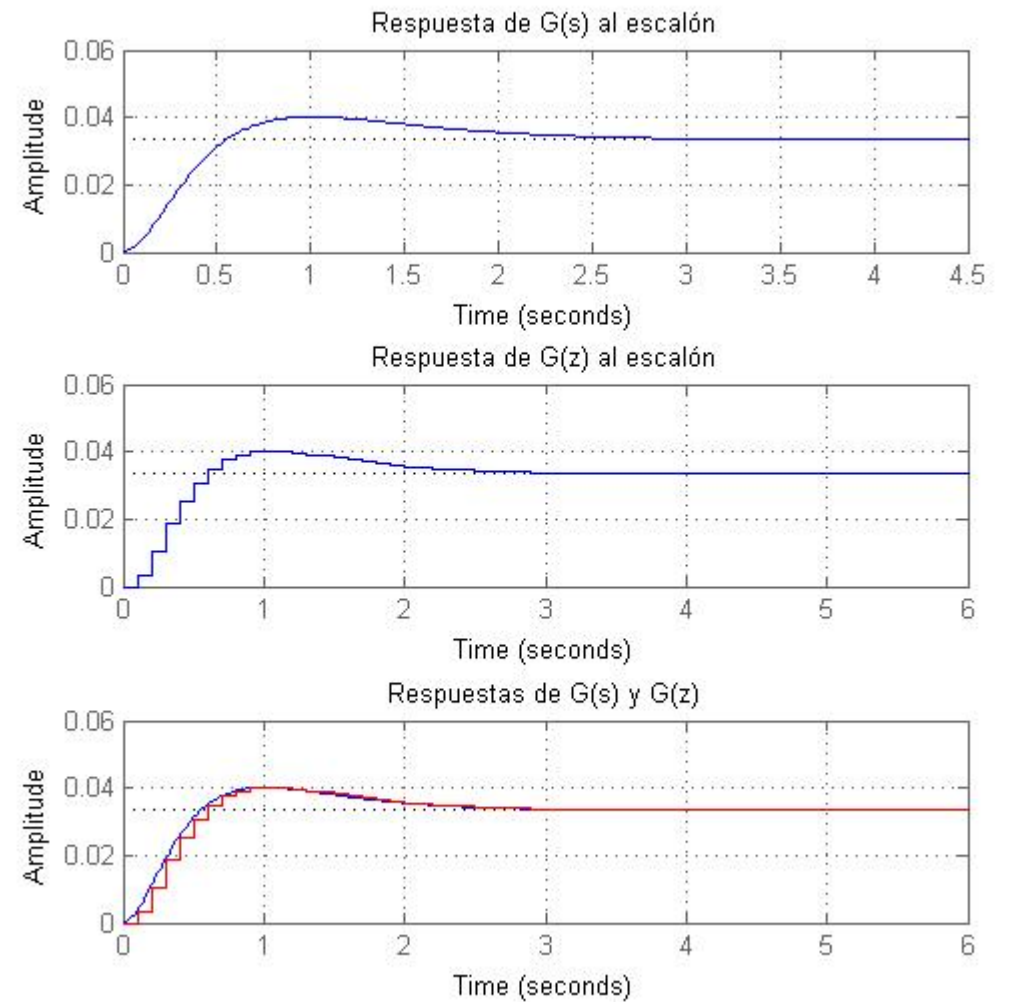
clc
s=tf('s');
Gs=(s+1)/((s+2)*(s+3)*(s+5));
T=0.1;
Gz=c2d(Gs,T,'matched')

clf
subplot(3,1,3)
step(Gs)
title('Respuestas de G(s) y G(z)')
hold on
grid on
step(Gz,'r')

subplot(3,1,1)
step(Gs)
title('Respuesta de G(s) al escalón')
grid on

subplot(3,1,2)|
step(Gz)
title('Respuesta de G(z) al escalón')
grid on

```



4.2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DISCRETOS

- Para el sistema de control en tiempo discreto que se muestra en la figura 4.2, la función de transferencia de pulso en lazo cerrado está dada por:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad 4.13$$

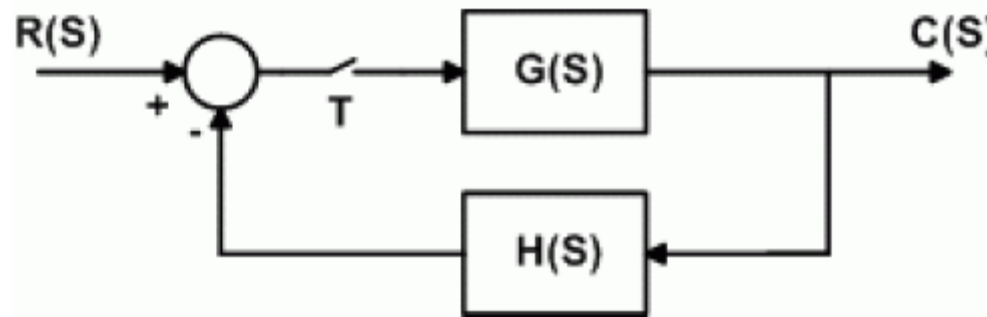


Figura 4.2 Sistema de control discreto



- La **estabilidad** del sistema discreto definido por la ecuación 4.13 se puede determinar mediante la **ubicación de los polos de lazo cerrado** en el plano z es decir, por las raíces de la ecuación característica:

$$Q(z) = 1 + GH(z) = 0 \quad 4.14$$

- En la siguiente forma:
 - a) El sistema es **estable** si **todos sus polos** de lazo cerrado o las todas la raíces de su ecuación característica están **ubicados dentro del círculo** unitario del plano z .
 - **Cualquier polo** de lazo cerrado **localizado fuera del círculo** unitario genera un sistema **inestable**.



- b) **Un polo simple localizado sobre el círculo unitario** , hace que el sistema sea **críticamente estable**, igual cosa sucede **si existe un solo par de polos** complejos conjugados ubicados **sobre el círculo unitario**.
- Cualquier **polo múltiple** ubicado sobre el círculo unitario hace que el sistema sea **inestable**.
- c) Los **ceros de lazo cerrado no afectan la estabilidad** del sistema y, por lo tanto, pueden estar localizados en cualquier parte del plano z .



- La estabilidad absoluta de un sistema discreto se puede determinar por diferentes métodos aplicables a la ecuación característica del sistema sin necesidad de encontrar sus raíces.
- Dos de estos métodos son la **prueba de estabilidad de Jury** y el **criterio de estabilidad de Routh**, basado en la transformación bilineal (transformación de Tustin).
- La figura 4.3 representa las regiones de estabilidad y de inestabilidad de un sistema discreto tomando como referencia la ubicación de sus polos con respecto al círculo unitario.

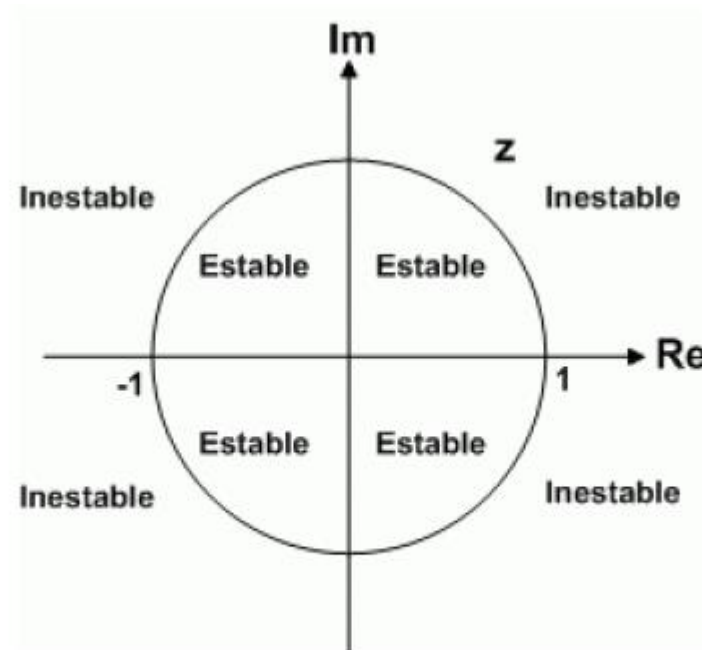


Figura 4.3 El círculo unitario y la estabilidad de sistemas discretos



4.2.1 Prueba de estabilidad de Jury:

- Para aplicar esta prueba a la ecuación característica $Q(z) = 0$, se construye una tabla cuyos elementos están determinados por los coeficientes de $Q(z)$.
- Para iniciar la prueba, se debe escribir la ecuación característica en la forma:

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots a_1 z + a_0 = 0 \quad 4.15$$

- En donde: $a_n > 0$.
- El arreglo de Jury se construye como se indica en la tabla 4.1:
 - Los coeficientes de la primera fila del arreglo son los coeficientes de $Q(z)$ dispuestos en orden de potencias ascendentes de z .
 - Los elementos de la segunda fila son los coeficientes de $Q(z)$ dispuestos en orden de potencias descendentes de z .
 - Los elementos correspondientes a las filas 3 hasta $2n - 3$ se obtienen mediante los determinantes dados en la ecuación 4.16

$$b_j = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-j} \\ a_n & a_j \end{bmatrix} \quad b_j = \begin{bmatrix} b_0 & b_{n-1-j} \\ b_{n-1} & b_j \end{bmatrix} \quad p_j = \begin{bmatrix} p_0 & p_{3-j} \\ p_3 & p_j \end{bmatrix} \quad 4.16$$



Tabla 4.1 Forma general del arreglo de Jury

j	Fila	z^0	z^1	z^2	\dots	z^{n-j}	\dots	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
0	1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-j}	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
	2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_j	\dots	a_2	a_1	a_0
1	3	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-j}	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
	4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_{j-1}	\dots	b_1	b_0	
2	5	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-j}	\dots	c_{n-2}		
	6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	c_{j-2}	\dots	c_0		
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots			
$n-3$	$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3					
	$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0					
$n-2$	$2n-3$	q_0	q_1	q_2	\dots					



- Para que $Q(z) = 0$ no tenga raíces fuera o sobre el círculo unitario en el plano z , es decir, para que el sistema sea estable, se requiere el cumplimiento de $n + 1$ condiciones, en donde n es el orden de la ecuación característica.
- Dichas condiciones se pueden resumir así:

$$1. \quad Q(1) > 0$$

$$2. \quad (-1)^n Q(-1) > 0$$

$$3. \quad |a_0| < a_n$$

$$4. \quad |b_0| > |b_{n-1}|$$

$$5. \quad |c_0| > |c_{n-2}|$$

.

$$n + 1. \quad |q_0| > |q_2|$$



- El procedimiento para efectuar la prueba es el siguiente:
- **Paso 1:** Determinar si se cumplen las condiciones 1, 2 y 3. Si no se cumplen, el sistema es inestable, si se cumplen se efectúa el paso 2
- **Paso 2:** Determinar el máximo valor de j , así:

$$j_{max} = n - 2 \quad 4.18$$

- Si $j_{max} = 0$, no se continúa el procedimiento pues la información del paso 1 es suficiente para determinar la estabilidad del sistema.
- **Paso 3:** El máximo número de filas que ha de tener el arreglo está dado por:

$$F_{max} = 2j_{max} + 1 = 2n - 3 \quad 4.19$$

- **Paso 4:** Se completa el arreglo; A cada fila se le aplica la restricción; Si ésta no se cumple, no se continúa y el sistema es inestable.



EJEMPLO 4.2

- Determinar la estabilidad del sistema de control discreto cuya función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z^2(z + 0.5)}{z^4 - 0.8z^3 + 0.5z^2 + 0.2z - 0.1}$$



SOLUCIÓN:

- La ecuación característica del sistema es:

$$z^4 - 0.8z^3 + 0.5z^2 + 0.2z - 0.1 = 0$$

$$a_4 = 1 \quad a_3 = -0.8 \quad a_2 = 0.5 \quad a_1 = 0.2 \quad a_0 = -0.1$$

- Para evaluar la estabilidad el procedimiento se inicia así:
- Paso 1:** Verificación de las condiciones 1, 2 y 3.

$$1. \quad Q(1) > 0 \quad Q(1) = 1 - 0.8 + 0.5 + 0.2 - 0.1 = 0.8 > 0$$

$$2. \quad (-1)^4 Q(-1) > 0 \quad Q(-1) = 1 + 0.8 + 0.5 - 0.2 - 0.1 = 2 > 0$$

$$3. \quad |a_0| < a_n \quad |-0.1| < 1$$

- Las condiciones 1, 2 y 3 se cumplen.



- **Paso 2.** Máximo valor de j .

$$j_{max} = n - 2 = 4 - 2 = 2$$

- **Paso 3:** Máximo número de filas del arreglo:

$$F_{max} = 2j_{max} + 1 = 2n - 3 = 5$$

- **Paso 4:** Se completa el arreglo de Jury chequeando para cada etapa las condiciones respectivas. (Ver tabla 4.2)
- Dado que se cumplen todas las condiciones el sistema es estable.



Tabla 4.2 Arreglo de Jury para el ejemplo 4.2

j	Fila	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
0	1	-0.1	0.2	0.5	-0.8	1
	2	1	-0.8	0.5	0.2	-0.1
1	3	-0.99	0.78	-0.55	-0.12	
	4	-0.12	-0.55	0.78	-0.99	
2	5	0.9657	-0.8382	0.6831		

$$b_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix} = -0.99 \quad b_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.8 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix} = 0.78$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} = -0.55 \quad b_3 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 1 & -0.8 \end{bmatrix} = -0.12$$

$$|b_0| > |b_3| \quad |-0.99| > |-0.12| \quad \text{Cumple}$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} -0.99 & -0.12 \\ -0.12 & -0.99 \end{vmatrix} = 0.9657 \quad c_1 = \begin{vmatrix} -0.99 & -0.55 \\ -0.12 & 0.78 \end{vmatrix} = -0.8382$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} -0.99 & 0.78 \\ -0.12 & -0.55 \end{vmatrix} = 0.6381$$

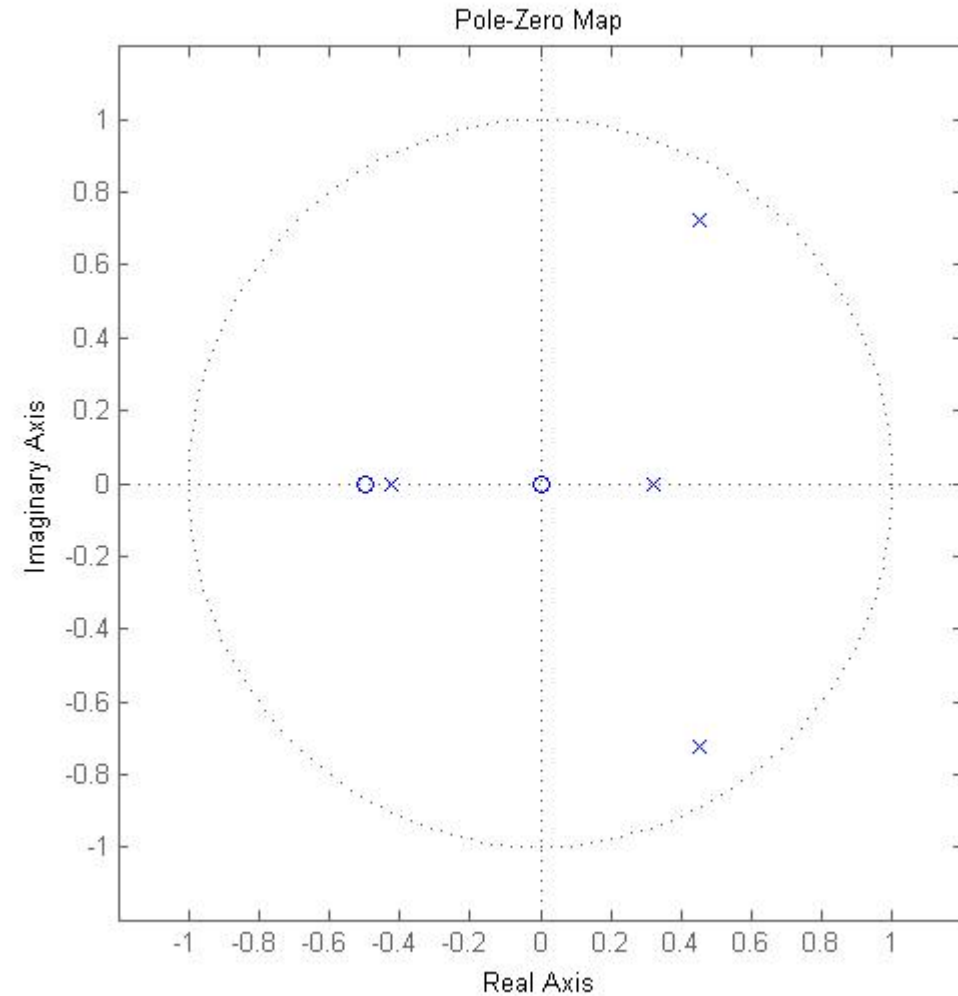
$$|c_0| > |c_2| \quad |0.9657| > |0.6381| \quad \text{Cumple}$$



```

clc
z=tf('z');
Gw=((z^2)*(z+0.5))/(z^4-0.8*z^3+0.5*z^2+0.2*z-0.1)
[pz,cz]=pzmap(Gw)    %Obtención numérica de las posiciones de los polos y los ceros
clf
pzmap(Gw)    %Gráfica de polos y ceros de Gw(z)
axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2])

```



EJEMPLO 4.3

- Para el sistema de control discreto de la figura 4.4, determinar el valor o valores de la ganancia K para los cuales el sistema es estable.
- Asumir como periodo de muestreo $T=1$ seg y que $H(S)$ es un retenedor de orden cero.

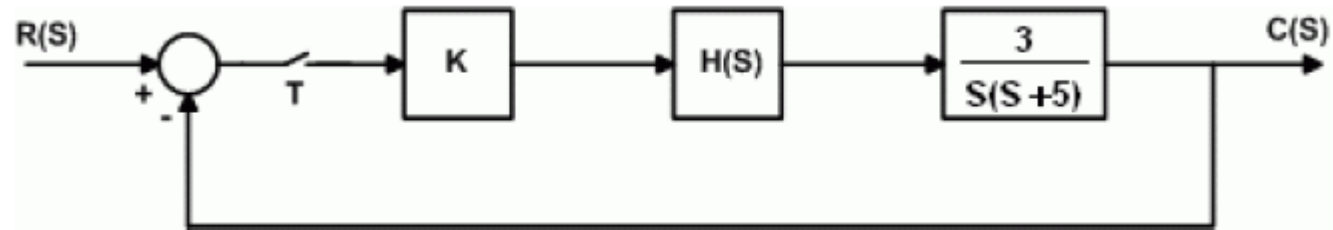


Figura 4.4 Sistema de control para el ejemplo 4.3



- **SOLUCIÓN:** La función de transferencia de pulso para el sistema está dada por la ecuación 3.11.

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\mathfrak{I}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})\mathfrak{I}\left\{\frac{3}{s^2(s + 5)}\right\}$$

- Con un periodo de muestreo $T = 1s$ se obtiene:

$$HG(z) = \frac{0.4808(z + 0.2394)}{(z - 1)z - 0.00673}$$

- La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K \cdot HG(z)}{1 + K \cdot HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.4808K(z + 0.2394)}{(z - 1)(z - 0.00673) + 0.4808K(z + 0.2394)}$$



```

clc
s=tf('s');
Gs=3/(s*(s+5))
T=1;
HGz=c2d(Gs,T,'zoh')

```



Command Window

Gs =

$$\frac{3}{s^2 + 5s}$$

Continuous-time transfer function.

HGz =

$$\frac{0.4808z + 0.1151}{z^2 - 1.007z + 0.006738}$$

Sample time: 1 seconds

Discrete-time transfer function.



- La ecuación característica del sistema es:

$$(z - 1)(z - 0.00673) + 0.4808K(z + 0.2394) = 0$$

- Reorganizando términos:

$$(z - 1)(z - 0.00673) + 0.4808K(z + 0.2394) = 0$$

- Aplicando las condiciones de la prueba de Jury se obtiene:

$$\begin{aligned} 1. \quad Q(1) &= 1 - (1.00673 - 0.4808K) + 0.00673 + 0.1151K > 0 \\ 0.5959K &> 0 \quad K > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad (-1)^2 Q(-1) &= 1 - (1.00673 - 0.4808K)(-1) + 0.00673 + 0.1151K > 0 \\ 2.01346 - 0.3657K &> 0 \quad K < 5.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad |a_0| &< |a_n| \quad |0.00673 + 0.1151K| < 1 \\ -8.7446 &< K < 8.6296 \end{aligned}$$

- Los resultados obtenidos indican que el sistema es estable si: $0 < K < 5.5$.



4.3 ANÁLISIS DE RESPUESTA TRANSITORIA Y DE ESTADO ESTABLE

- En gran número de casos prácticos las características de funcionamiento deseadas para un sistema de control se especifican en términos de parámetros en el dominio del tiempo.
- Con frecuencia, las características de funcionamiento del sistema se especifican en términos de su respuesta transitoria ante una **entrada en escalón unitario**, ya que éste tipo de entrada es fácil de generar y resulta muy adecuada para obtener información útil, tanto de las características de **respuesta transitoria** como de respuesta de **estado estable** del sistema.



- **4.3.1 Especificaciones de respuesta transitoria:**

- Así como los sistemas continuos, la respuesta transitoria de un sistema en tiempo discreto se caracteriza por el **tiempo de pico**, el **tiempo de crecimiento** (levantamiento), el **tiempo de establecimiento** (asentamiento) y el **máximo sobreimpulso** (sobrepaso – sobreelongación).
- Las especificaciones de respuesta anteriores, se relacionan directamente con el factor o **coeficiente de amortiguamiento** y con la **frecuencia natural** del sistema.



- La figura 4.6 muestra las especificaciones de respuesta transitoria, de un sistema de segundo orden subamortiguado, ante una entrada en escalón unitario.

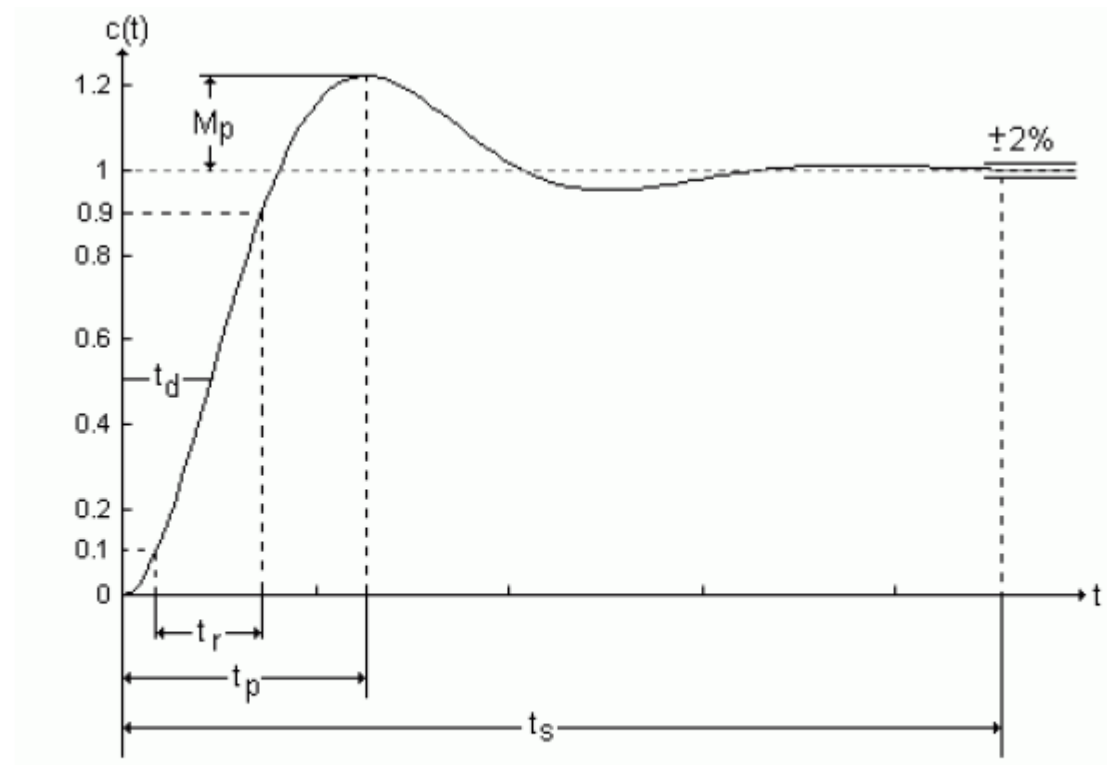


Figura 4.6 Respuesta al escalón unitario y especificaciones de respuesta transitoria



- **Tiempo de retardo (t_d):**
- Es el tiempo necesario para que la respuesta del sistema alcance por primera vez, el 50% de su valor final.
- Para un sistema de segundo orden, el tiempo de retardo está dado por:

$$t_d = \frac{1 + 0.7\xi}{w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.25$$

$$t_d = \frac{1.1 + 0.125\xi + 0.46\xi^2}{w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.25a$$

- La ecuación 4.25a da una mejor aproximación para el tiempo de retardo.



- **Tiempo de crecimiento (t_r):**
- Es el tiempo que requiere la respuesta al escalón para pasar del 10% al 90% de su valor final.
- Para sistemas de segundo orden, el tiempo de crecimiento está dado por:

$$t_r = \frac{0.8 + 2.5\xi}{w_n} \quad 0 < \xi < 1 \quad 4.26$$

$$t_r = \frac{1 - 0.4167\xi + 2.9\xi^2}{w_n} \quad 0 < \xi < 1 \quad 4.26a$$

- La ecuación 4.26a da una mejor aproximación para el tiempo de crecimiento.



- **Tiempo de pico (t_p):**
- Es el tiempo necesario para que la respuesta al escalón alcance su máximo sobreimpulso.
- Para un sistema de segundo orden subamortiguado, el tiempo de pico se calcula mediante la ecuación:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$0 < \xi < 1$$

4.27



- **Máximo sobreimpulso (M_p):**
- Es el valor máximo de la curva de respuesta al escalón medido partir del valor de estado estable.

$$\text{Maximo sobreimpulso} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} * 100\% \quad 4.28$$

- En donde $c(t_p)$ representa el valor máximo alcanzado por la respuesta y $c(\infty)$ representa el valor de estado estable de la misma.
- En términos de ξ y ω_n el valor del máximo sobreimpulso está dado por:

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad 0 < \xi < 1 \quad 4.29$$

- Y, en forma porcentual:

$$M_p \% = 100e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad 0 < \xi < 1 \quad 4.30$$



- **Tiempo de establecimiento (t_s):**

- Es el tiempo requerido para que la curva de respuesta al escalón alcance y se quede variando, alrededor de su valor final dentro de un rango especificado en función de un porcentaje absoluto de su valor final.

- Este valor es por lo general el 5% ó el 2%.

- Para establecimiento al 5%:

$$t_s = \frac{3}{\xi w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.31$$

- Para establecimiento al 2%:

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.32$$

- Para sistemas con $\xi \geq 1$, el tiempo de establecimiento está dado por:

$$t_s = \frac{8\xi}{w_n} \qquad \xi \geq 1 \qquad 4.33$$



- **4.3.2 Análisis de error en estado permanente en sistemas discretos:**
- Teniendo en cuenta que las señales de entrada y salida de un sistema de control en tiempo discreto son funciones en tiempo continuo, como se muestra en el diagrama de bloques la figura 4.7, la señal de error actuante $e(t)$, está dada por:

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad 4.34$$

- En donde $r(t)$ es la señal de entrada y $c(t)$ es la señal de salida.

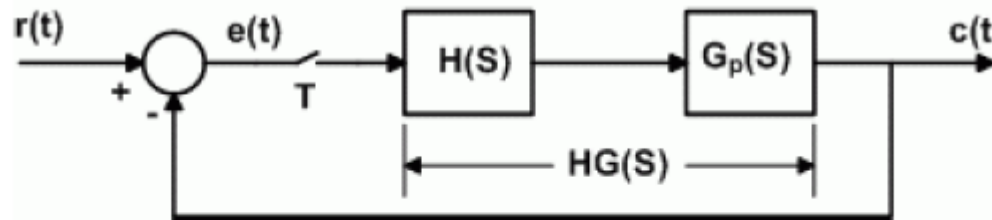


Figura 4.7 Diagrama en bloques de un sistema de control en tiempo discreto



- Si se toma la transformada z a la ecuación 4.34 se obtiene:

$$E(z) = R(z) - C(z) \quad 4.35$$

- La función de transferencia de pulso de lazo cerrado para el sistema de la figura 4.7 es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{HG(z)}{1 + HG(z)} \quad 4.36$$

- Al despejar $C(z)$ de la ecuación 4.36 y llevar el resultado a la ecuación 4.35 se obtiene:

$$\begin{aligned} E(z) &= R(z) - \frac{HG(z) \cdot R(z)}{1 + HG(z)} \\ E(z) &= \frac{R(z)}{1 + HG(z)} \end{aligned} \quad 4.37$$



- El error actuante en estado estable se puede evaluar aplicando el **teorema del valor final**:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{R(z)}{1 + HG(z)} \quad 4.38$$

- A continuación se deducen las ecuaciones para calcular el error de estado estable de un sistema en tiempo discreto ante entradas de prueba típicas: la entrada en escalón, la entrada en rampa y la entrada en parábola.



- **Entrada escalón:**
- Para una entrada en escalón $r(t) = A$ se tiene:

$$R(z) = \frac{Az}{z-1}$$

- Entonces:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{Az}{(z-1)(1+HG(z))} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{A}{1+HG(z)} \right]$$

- Si se define la **Constante de error de posición estática** como:

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} HG(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (FTPLA) \quad 4.39$$

- En donde **FTPLA es la función de transferencia de lazo abierto**, el error actuante en estado permanente ante una entrada en escalón es:

$$e_{ss} = \frac{A}{1+k_p} \quad 4.40$$



- **Entrada rampa:**

- Para una entrada rampa $r(t) = At$ se tiene:

$$R(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2}$$

- Entonces:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{ATz}{(z-1)^2 [1 + HG(z)]} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{AT}{(z-1)HG(z)} \right]$$

- Si se define la **Constante de error de velocidad estática** como:

$$k_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) HG(z) = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot FTPLA \quad 4.41$$

- El error actuante en estado permanente ante una entrada en rampa es:

$$e_{ss}(kT) = \frac{A}{k_v} \quad 4.43$$



- **Entrada parábola:** Para una entrada de aceleración o parábola $r(t) = At^2/2$, se tiene:

$$R(z) = \frac{AT^2(z+1)}{2(z-1)^3}$$

- Entonces:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3 [1 + HG(z)]} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{AT^2}{(z-1)^2 [HG(z)]} \right]$$

- Si se define la **Constante de error de aceleración estática** como:

$$k_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 HG(z)] = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 \cdot FTPLA] \quad 4.43$$

- El error actuante en estado permanente ante una entrada de aceleración es:

$$e_{ss}(kT) = \frac{A}{k_a} \quad 4.44$$



Tabla 4.3 Error de estado estable de acuerdo al tipo de sistema

<i>Tipo</i>	<i>Escalón</i>	<i>Rampa</i>	<i>Parábola</i>
0	$\frac{A}{1 + k_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{A}{k_v}$	∞
2	0	0	$\frac{A}{k_a}$



EJEMPLO 4.5

- Considerando el sistema de control de lazo cerrado que se muestra en la figura 4.8.
- a) Calcular y dibujar la respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario con $D(z) = 1$ y $T = 0.5s$.
- b) Calcular y dibujar sobre la misma gráfica, la respuesta del sistema continuo al escalón unitario (es decir, removiendo el muestreador, el controlador digital y el retenedor).
- c) Calcular el error de estado estable del sistema discreto ante entradas escalón, rampa y parábola unitarias.

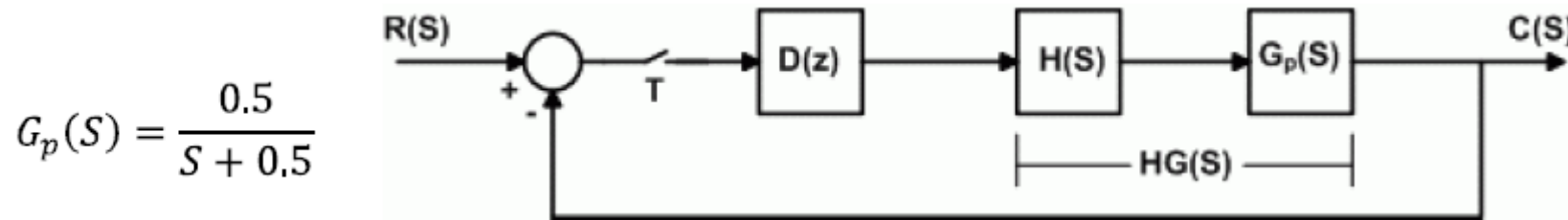


Figura 4.8 Sistema de control para los ejemplos 4.5 y 4.6



- **SOLUCIÓN:**

a) La función de transferencia de pulso para la planta es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1})\Im \left\{ \frac{0.5}{s(s + 0.5)} \right\} = \frac{0.2212}{z - 0.7788}$$

- La función de transferencia de pulso de lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} = \frac{0.2212}{z - 0.5576}$$

- Si la entrada es un escalón unitario:

$$R(z) = \frac{z}{z - 1} \quad \text{y} \quad C(z) = G_w(z) \cdot R(z)$$

- Es decir:

$$C(z) = \frac{0.2212z}{(z - 1)(z - 0.5576)}$$



- Si se expande $C(z)/z$ en fracciones parciales se obtiene al despejar $C(z)$:

$$C(z) = \frac{0.5z}{z-1} - \frac{0.5z}{z-0.5576}$$

- De tablas se obtiene:

$$c(kT) = 0.5 - 0.5(0.5576)^k$$

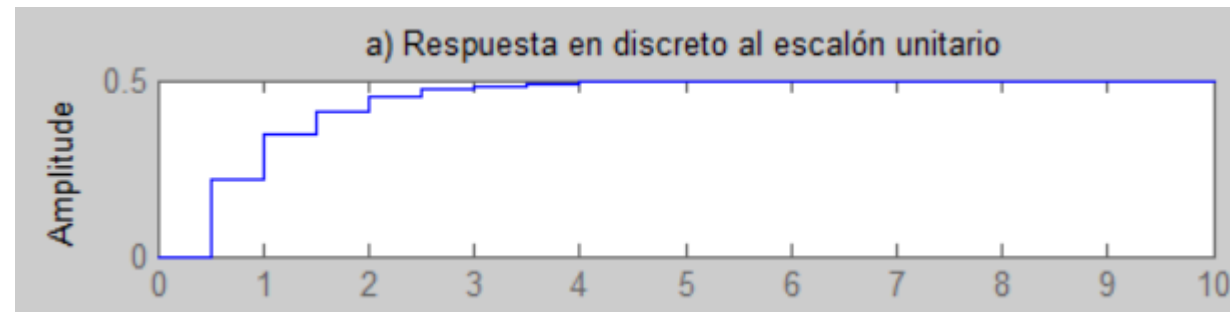


```

disp('Ejemplo 4.5')
clc
T=0.5;
s=tf('s');
z=tf('z',T);
Gp=0.5/(s+0.5);
Gz=c2d(Gp,T,'zoh');
Ge=feedback(Gz,1);

Rz=z/(z-1);
Cz=Rz*Ge;
clf
subplot(3,1,1)
step(Ge)
title('a) Respuesta en discreto al escalón unitario')

```



```

syms z
Cz1=(0.2212*z)/(z^2-1.5576*z+0.5576);
Ct=iztrans(Cz1);
disp('a) Respuesta en discreto al escalón unitario')
disp('c(kT)=')
pretty(vpa(Ct,4))

```



```

a) Respuesta en discreto al escalón unitario
c(kT)=
                                     n
0.5 - 0.5 0.5576

```



b) La función de transferencia de lazo cerrado para el sistema continuo es:

$$G_w(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1 + G(S)} = \frac{0.5}{S + 1}$$

- Si la entrada es un escalón unitario $R(s) = 1/s$ y es decir $C(s) = G_w(s) \cdot R(s)$ es:

$$C(S) = G_w(S)R(S) = \frac{0.5}{S(S + 1)} = \frac{0.5}{S} - \frac{0.5}{S + 1}$$

- Al evaluar la transformada inversa de Laplace resulta:

$$c(t) = 0.5 - 0.5e^{-t}$$



- En la tabla 4.4 se dan las respuestas del sistema discreto y del sistema continuo para diferentes valores de t y su correspondiente instante de muestreo kT .
- En la figura 4.9 se muestra la respuesta del sistema discreto y del sistema continuo al escalón unitario (ver programa en MATLAB al final del ejemplo).

Tabla 4.4 Valores de la respuesta $c(t)$ y $c(kT)$

t	0	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0	10.0
kT	0	1	2	4	6	8	12	20
$C(t)$	0	0.1967	0.3160	0.4323	0.4751	0.4908	0.4987	0.4999
$c(kT)$	0	0.2211	0.3445	0.4516	0.4849	0.4953	0.4995	0.4999



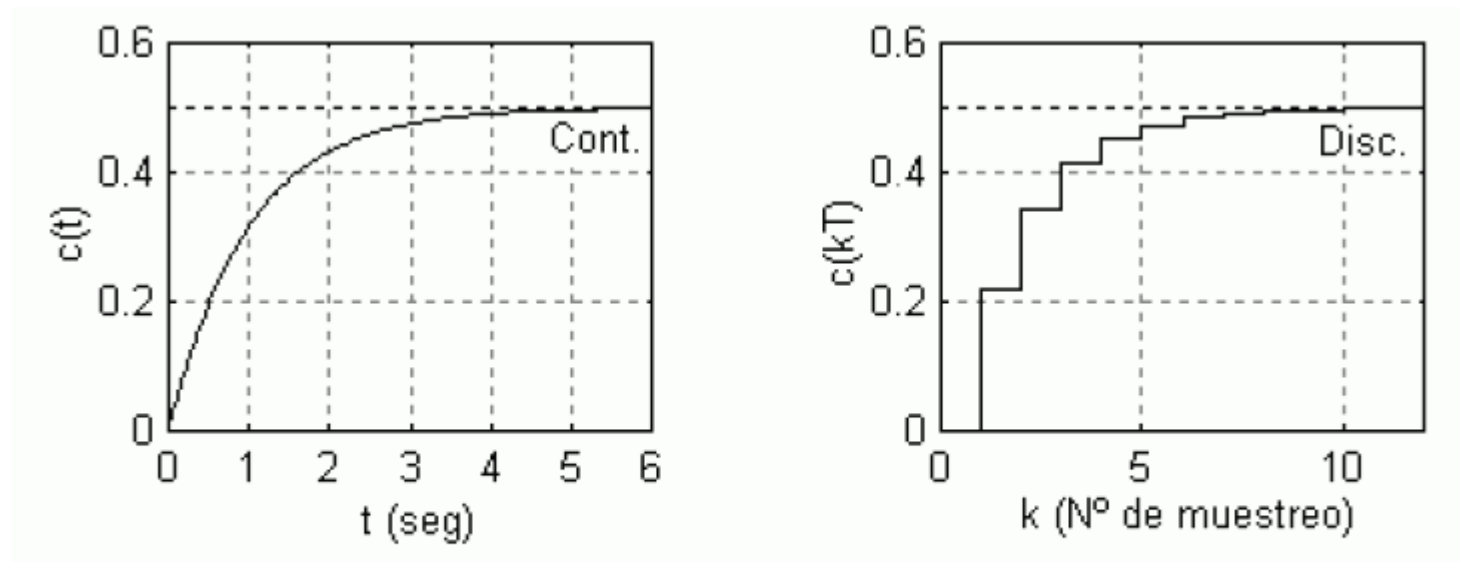


Figura 4.9 Respuesta del sistema del ejemplo 4.5 al escalón unitario





```
Gs=feedback(Gp,1);  
Rs=1/s;  
Ges=Rs*Gs;  
subplot(3,1,2)  
step(Gs)  
title('b) Respuesta en continuo al escalón unitario')
```

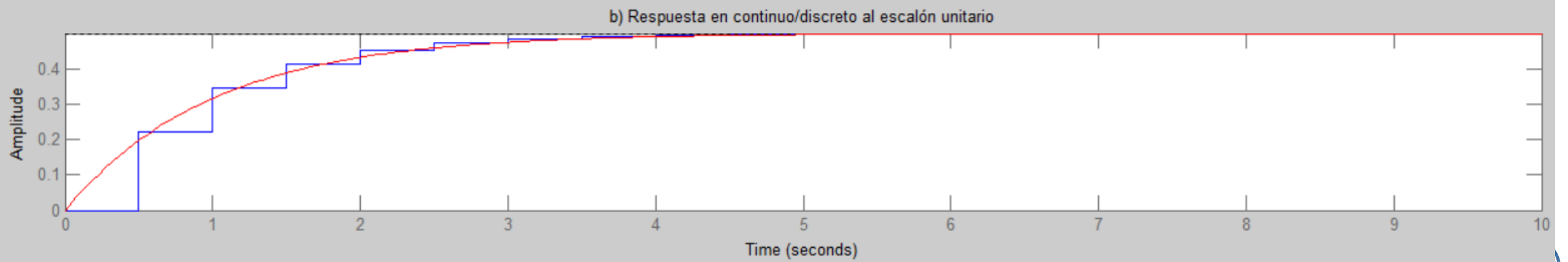
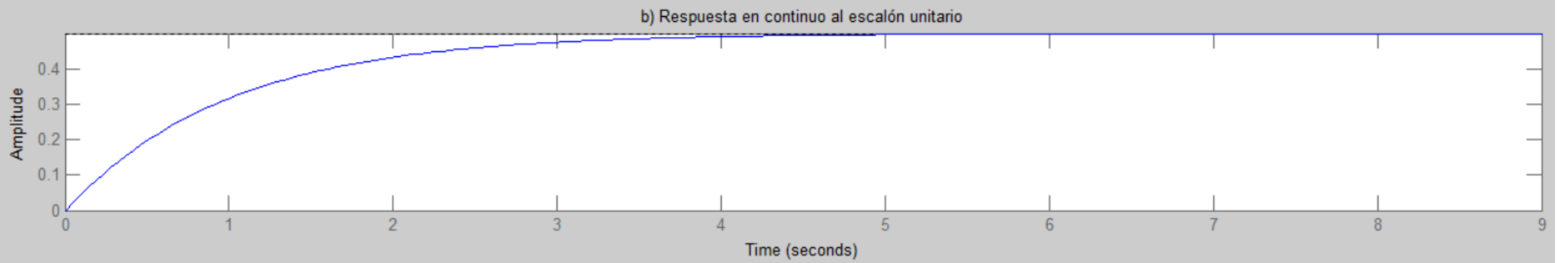
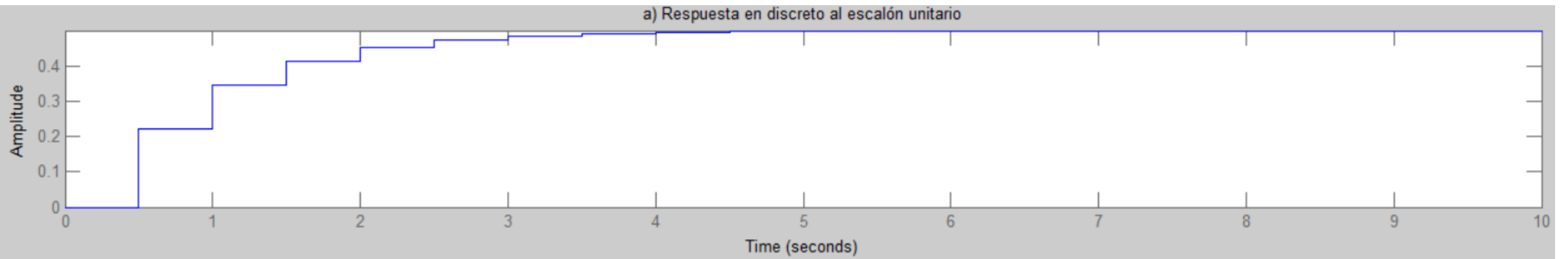
```
syms s  
Csl=0.5/(s^2+s);  
Ctt=ilaplace(Csl);  
disp('b) Respuesta en continuo al escalón unitario')  
disp('c(t)=')  
pretty(vpa(Ctt,2))
```



```
b) Respuesta en continuo al escalón unitario  
c(t)=  
0.5 - exp(-1.0 t) 0.5
```

```
subplot(3,1,3)  
step(Ge)  
hold on  
step(Gs,'r')  
title('b) Respuesta en continuo/discreto al escalón unitario')
```





c) El error actuante de estado estable ante una entrada en escalón es:

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + k_p} \qquad k_p = \lim_{z \rightarrow 1} (FTPLA)$$

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + k_p} \qquad k_p = \lim_{z \rightarrow 1} FTPLA$$

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{0.2212}{z - 0.7788} \right] = 1$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + 1} \qquad e_{ss} = 0.5$$



- El error actuante de estado estable para una entrada rampa es:

$$e_{ss} = \frac{A}{k_v} \quad k_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) FTPLA$$

$$k_v = \frac{1}{0,5} \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1) \frac{0,2212}{z - 0,7788} \right] = 0 \quad e_{ss} = \infty$$

- El error actuante de estado estable para una entrada parábola es:

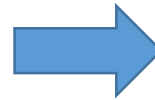
$$e_{ss} = \frac{A}{k_a} \quad k_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 FTPLA$$

$$k_a = \frac{1}{0,25} \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1)^2 \frac{0,2212}{z - 0,7788} \right] = 0 \quad e_{ss} = \infty$$





```
disp('c)Errores en estado estable')
kp=dcgain(Gz);
ee=1/(1+kp)
kv=(1/T)*dcgain((z-1)*Gz);
er=1/kv
ka=(1/T^2)*dcgain((z-1)^2*Gz);
ep=1/ka
```



c)Errores en estado estable

ee =
0.5000

er =
Inf

ep =
Inf



- A continuación se lista el programa en MATLAB que permite discretizar el sistema y graficar sus respuestas, continua y discreta, ante una entrada en escalón unitario.

```
% Programa para resolver el ejemplo 4.5
```

```
clc
```

```
n=0.5;
```

```
d=[1 0.5];
```

```
[nd,dd]=c2dm(n,d,0.5,'zoh'); % Discretización del sistema.
```

```
printsys(nd,dd,'z')
```

```
[nwc,dwc]=cloop(n,d,-1); % Lazo cerrado sist. continuo.
```

```
[nwd,dwd]=cloop(nd,dd,-1); % Lazo cerrado sist. discreto.
```

```
printsys(nwd,dwd,'z')
```

```
subplot(2,2,1)
```

```
step(nwc,dwc) % Respuesta sist. continuo.
```

```
axis([0 6 0 0.6])
```

```
grid
```

```
subplot(2,2,2)
```

```
dstep(nwd,dwd); % Respuesta sist. discreto.
```

```
axis([0 12 0 0.6])
```

```
grid
```

```
pause
```

```
t=0:0.5:12;
```

```
u=ones(1,25);
```

```
y1=lsim(nwc,dwc,u,t); % Valores de la respuesta cont.
```

```
y2=dlsim(nwd,dwd,u); % Valores de la respuesta disc.
```

```
datos=[t' y1 y2]
```



▪ EJEMPLO 4.6

- Para el sistema de control discreto de lazo cerrado mostrado en la figura 4.8 hallar:
 - a) La constante de tiempo para $T = 0.5s$
 - b) El tiempo requerido para que la respuesta del sistema, a una entrada en escalón, alcance el 98% de su valor final.
 - c) Repita las partes a y b para $T = 0.1s$
 - d) Repita las partes a y b para el sistema continuo, es decir, si se remueven el retenedor, y el controlador digital.

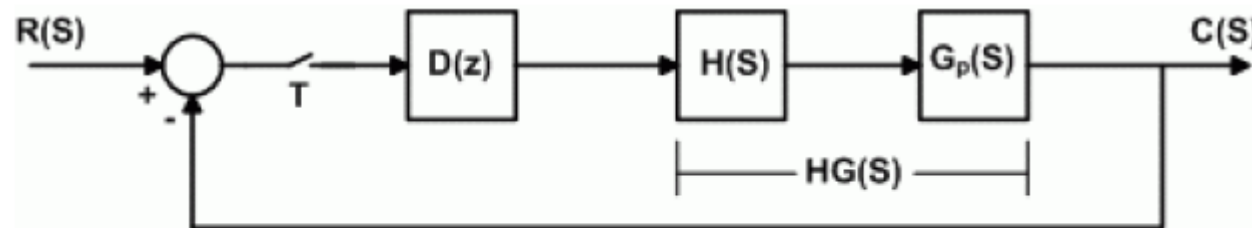


Figura 4.8 Sistema de control para los ejemplos 4.5 y 4.6



- **SOLUCIÓN:**

- a) De acuerdo con la ecuación 4.15, la ubicación de un polo en el plano z está dada por:

$$|z| = e^{-\xi \omega_n T}$$
$$\theta = 57.3 \omega_n T \sqrt{1 - \xi^2}$$

- De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\tau = \frac{1}{\xi \omega_n} = -\frac{T}{\ln|z|}$$

- La constante de tiempo τ equivalente de un polo en el plano z se define como:

$$\tau = \frac{1}{\xi \omega_n} = -\frac{T}{\ln|z|}$$

- Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el ejemplo 4.5, el sistema en lazo cerrado tiene un polo en $z = 0.5576$, entonces:

$$\tau = -\frac{0.5}{\ln|0.5576|} \qquad \tau = 0.856 \text{ s.}$$



- b) El sistema alcanza el 98% del valor final de la respuesta al escalón cuando el tiempo transcurrido es $t = 4\tau$, en este caso $t = 3.42s$.
- c) Para $T = 1s$, la función de transferencia de pulso de la planta es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im \left[\frac{0.5}{S(S + 0.5)} \right] = \frac{0.3934}{z - 0.6065}$$

- La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.3934}{z - 0.2130}$$

- Entonces:

$$\tau = -\frac{1}{\ln|0.2130|} \quad \tau = 0.646 \text{ s.}$$

- El tiempo para alcanzar el 98% de la respuesta al escalón es $t = 4\tau = 2.584s$.



d) La función de transferencia de lazo cerrado para el sistema continuo es:

$$G_w(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)} \qquad G_w(S) = \frac{0.5}{S + 1}$$

- Así $\tau = 1s$ por lo tanto, el tiempo para alcanzar el 98% del valor final de la respuesta es $t = 4\tau$, es decir: $t = 4s$.
- Considerando la planta discreta en lazo abierto se tiene:

$$\text{Para } T = 0.5 \text{ s} \qquad \tau = -\frac{0.5}{\ln|0.7788|} \qquad \tau = 2 \text{ s.}$$

$$\text{Para } T = 1 \text{ s} \qquad \tau = -\frac{1}{\ln|0.6065|} \qquad \tau = 2 \text{ s.}$$

$$\text{Para el sistema continuo:} \qquad G(S) = \frac{0.5}{S + 0.5} \qquad \tau = 2 \text{ s.}$$

- Como puede verse, la constante de tiempo de la planta en lazo abierto es la misma en todos los casos.



■ 4.3.3 Raíces dominantes:

- Como se ha visto, la ubicación de las raíces de la ecuación característica en el plano z incide directamente en la respuesta transitoria de los sistemas discretos.
- En general, algunas de las raíces, dada su ubicación en el plano z , afectan más la respuesta transitoria del sistema que otras.
- Estas raíces son llamadas “Raíces dominantes”.
- En el plano S , las raíces más cercanas al eje imaginario en el semiplano izquierdo son las raíces dominantes, pues generan respuestas que decaen lentamente en el tiempo.
- Las raíces que están más alejadas del eje imaginario corresponden a raíces no dominantes y generan respuestas que decaen rápidamente en el tiempo.
- En el plano z las raíces dominantes están dentro del círculo unitario y más cercanas a éste.
- Las raíces cercanas al origen del plano z son raíces no dominantes.



- Para el diseño se recomienda seleccionar las raíces dominantes con coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.707$.
- La ubicación de raíces dominantes dentro de la región izquierda del círculo unitario debe evitarse en lo posible pues la respuesta temporal correspondiente a dichas raíces es oscilatoria y con alternancia de signo.
- La figura 4.10 muestra las regiones en las que se recomienda ubicar las raíces dominantes y las no dominantes para el diseño de sistemas continuos y de sistemas discretos.

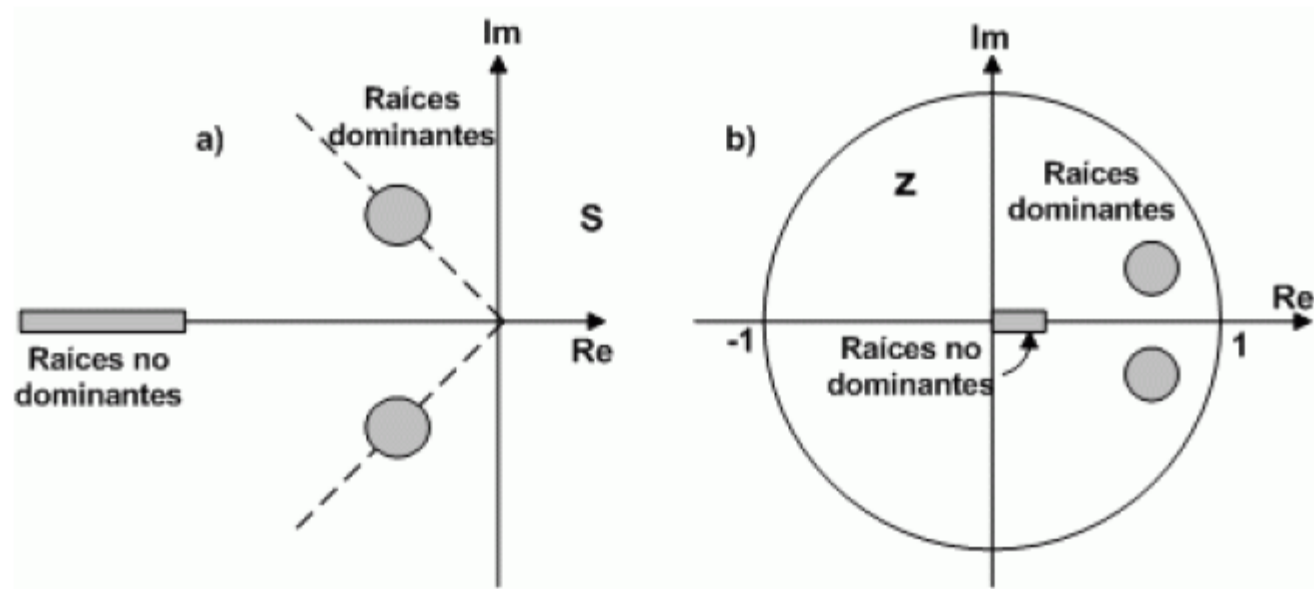


Figura 4.10 Ubicación de raíces dominantes: a) En el plano S b) En el plano z



4.4 EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

- El método del lugar geométrico de las raíces permite encontrar los polos de la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de control a partir de la función de transferencia de lazo abierto del sistema.
- La aplicación del método del lugar geométrico de las raíces en el diseño de sistemas de control es muy útil, ya que indica la forma en que se debe modificar la posición de los ceros y de los polos de lazo abierto para que la respuesta de lazo cerrado cumpla con las especificaciones de comportamiento establecidas para el sistema. (Coeficiente de amortiguamiento, frecuencia natural no amortiguada, máximo sobreimpulso etc.).



- El método del lugar geométrico de las raíces desarrollado para los sistemas continuos, se puede extender al diseño de sistemas discretos sin modificaciones fundamentales, excepto que en el análisis de estabilidad se cambia del eje imaginario en el plano S al círculo unitario en el plano z .



4.4.1 Condición de ángulo y condición de módulo:

- Para un sistema de control discreto invariante en el tiempo, como el que se muestra en la figura 4.11, la ecuación característica puede tomar una de las siguientes formas:

$$1 + G(z) = 0$$

$$1 + GH(z) = 0$$

4.47

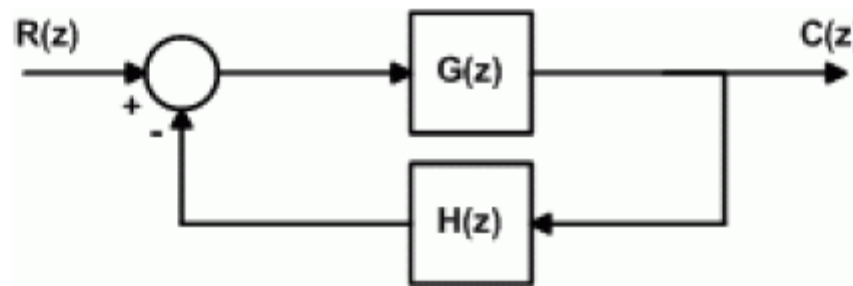


Figura 4.11 Sistema de control discreto en lazo cerrado



- Para generalizar, se asume que la ecuación característica es:

$$1 + F(z) = 0 \quad 4.48$$

- Siendo, por lo tanto la función $F(z)$ de transferencia de lazo abierto del sistema.
- La ecuación característica dada por 4.48 se puede escribir en la forma:

$$F(z) = -1 \quad 4.49$$

- Dado que $F(z)$ es una cantidad compleja, la ecuación 4.49 debe cumplir dos condiciones a saber:



- **Condición de ángulo:** se utiliza para determinar las trayectorias del lugar geométrico en el plano z .

$$\angle F(z) = \theta = \pm 180(2q + 1) \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad 4.50$$

- **Condición de módulo:** permite calcular la ganancia asociada a los polos de lazo cerrado especificados.

$$|F(z)| = 1 \quad 4.51$$

- Los valores de z que cumplen simultáneamente las dos condiciones anteriores, son las raíces de la ecuación característica, es decir, son los polos de lazo cerrado del sistema.



4.4.2 Reglas para construir el lugar de las raíces en sistemas discretos:

- Para trazar el lugar de las raíces de un sistema discreto se obtiene primero la ecuación característica o sea: $1 + F(z) = 0$ y se reescribe esta ecuación de modo que el parámetro de interés (la ganancia K por lo general), aparezca como un factor de multiplicación en la forma:

$$1 + \frac{K(z + z_1)(z + z_2) \cdots (z + z_m)}{(z + p_1)(z + p_2) \cdots (z + p_n)} \quad 4.52$$

- A continuación se ubican los polos y ceros de en el plano z y se procede a la aplicación de las siguientes reglas que permiten, de manera relativamente fácil, construir el lugar de las raíces de un sistema discreto.



- **Regla 1:** El lugar geométrico de las raíces comienza en los polos de $F(z)$ para $K = 0$ y termina en los ceros de $F(z)$ para $K = \infty$.
- **Regla 2:** El número de ramas del lugar geométrico de las raíces es igual al mayor entre P y Z siendo P el número de polos y Z el número de ceros de $F(z)$.
- **Regla 3:** El lugar geométrico de las raíces es simétrico con respecto al eje real del plano z .
- **Regla 4:** El número de asíntotas que presenta el lugar geométrico de las raíces de una ecuación es $N = P - Z$.
- Las asíntotas convergen en un punto localizado sobre el eje real, este punto se denomina “centro de gravedad” y su localización está dada por:

$$C.G = \frac{\sum \text{coord. de polos} - \sum \text{coord. de ceros}}{P - Z} \quad 4.53$$



- **Regla 5:** El ángulo que cada asíntota forma con el eje real, está dado por:

$$\varphi_q = \frac{180(2q + 1)}{P - Z} \quad 4.54$$

- **Regla 6:** El lugar geométrico de las raíces sobre el eje real, sólo existe a la izquierda de un número impar de raíces ubicadas sobre dicho eje.
- **Regla 7:** Cuando se presentan raíces complejas conjugadas, es necesario calcular el ángulo de partida del polo o el ángulo de llegada al cero. Así:



□ **Angulo de partida del polo** (ver figura 4.12)

$$\phi = 180^\circ - \sum \angle \text{de los otros polos} + \sum \angle \text{de los ceros} \quad 4.55$$

□ **Angulo de llegada al cero** (ver figura 4.13)

$$\beta = 180^\circ + \sum \angle \text{de los polos} - \sum \angle \text{de los otros ceros} \quad 4.56$$

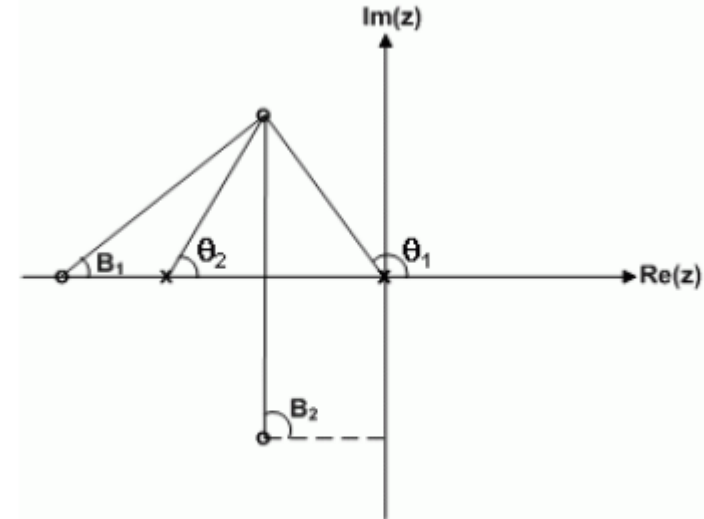
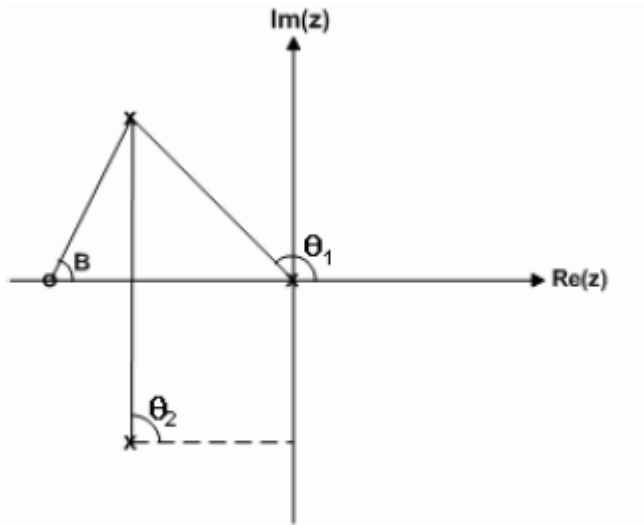


Figura 4.12 Cálculo del ángulo de partida del polo. Figura 4.13 Cálculo del ángulo de llegada al cero



- **Regla 8:** Si existen dos polos adyacentes sobre el eje real, el lugar geométrico de las raíces abandona el eje, si existen dos ceros adyacentes sobre el eje real, el lugar geométrico de las raíces converge en el eje.
- El punto en el cual el lugar geométrico de las raíces abandona o converge en el eje real se denomina “punto de ruptura” o “punto de silla” y su ubicación se puede determinar resolviendo la ecuación:

$$\frac{dK}{dz} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dGH(z)}{dz} = 0 \quad 4.57$$

- **Regla 9:** Los puntos en los cuales el lugar geométrico de las raíces corta al eje imaginario se determinan haciendo $z = jv$ en la ecuación característica, igualando la parte real y la parte imaginaria a cero y resolviendo las ecuaciones resultantes para v y K . Los valores obtenidos, dan la localización del punto de corte con el eje imaginario y la ganancia K en dicho punto.
- **Regla 10:** El valor de la ganancia K en cualquier punto z_0 ubicado sobre el lugar geométrico de las raíces se obtiene al resolver la ecuación:

$$|KGH(z_0)| = 1$$



EJEMPLO 4.7

- Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 4.14, trazar el lugar geométrico de las raíces para tiempos de muestreo $T = 1s$, $T = 2s$ y $T = 3s$.
- A partir de los resultados obtenidos, ¿qué se puede concluir con respecto a la ganancia crítica y al tiempo de muestreo?

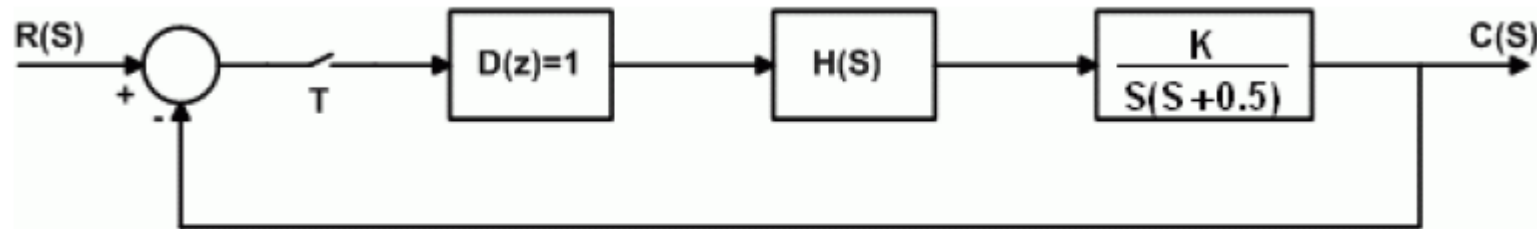


Figura 4.14 Sistema de control para el ejemplo 4.7



- **SOLUCIÓN:**

- Primero que todo se debe obtener la función de transferencia de pulso del sistema.

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\mathfrak{I}\left\{\frac{K}{s^2(s + 0.5)}\right\}$$

- Para $T = 1s$.

$$HG(z) = \frac{0.4261K(z + 0.8467)}{(z - 1)(z - 0.6065)}$$

- La ecuación característica del sistema es: $1 + HG(z) = 0$ es decir:

$$1 + F(z) = 1 + \frac{0.4261K(z + 0.8467)}{(z - 1)(z - 0.6065)} = 0$$



- **Regla 1:** Polos de $F(z)$: $P = 2$ ubicados en $z = 1$ y $z = 0.6065$
Ceros de $F(z)$ $Z = 1$ ubicado en $z = -0.8467$
- **Regla 2:** El número de ramas del lugar es igual al mayor entre P y Z. Ramas=2
- **Regla 3:** El lugar geométrico de las raíces es simétrico respecto al eje real.
- **Regla 4:** El número de asíntotas es $N = P - Z$ $N = 1$

$$C.G = \frac{\sum \text{coord. de polos} - \sum \text{coord. de ceros}}{P - Z}$$

$$C.G = \frac{(1 + 0.6065) - (-0.8467)}{2 - 1} \qquad C.G = 2.45$$



- **Regla 5:** Angulo de las asíntotas con el eje real

$$\varphi_q = \frac{180^\circ(2q + 1)}{P - Z} \quad \varphi_o = \frac{180^\circ}{2 - 1} \quad \varphi_o = 180^\circ$$

- **Regla 6:** El lugar geométrico de las raíces solo existe a la izquierda de un número impar de raíces ubicadas sobre dicho eje (ver figura 4.15)
- **Regla 7:** No se aplica pues no existen polos ni ceros complejos conjugados.
- **Regla 8:** Existen polos adyacentes sobre el eje real, el lugar geométrico de las raíces abandona el eje real en el punto que cumple la condición:

$$\frac{dK}{dz} = 0$$



- De la ecuación característica: $K = -\frac{(z-1)(z-0.6065)}{0.4261(z+0.8467)}$

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{1}{0.4261} * \frac{z^2 + 1.6934z - 1.9667}{(z+0.8467)^2} = 0$$

- Es decir: $z^2 + 1.6934z - 1.9667 = 0$
- Resolviendo para z se obtiene: $z = 0.791$ y $z = -2.48$.
- Como los polos adyacentes son $z=1$ y $z=0.6065$, el lugar abandona el eje en $z=0.791$ que corresponde a un punto localizado entre los polos adyacentes. (El punto $z=-2.48$ puede considerarse como punto de convergencia en el eje real).



- **Regla 9:** Para determinar los puntos en los cuales el lugar geométrico de las corta al eje imaginario, se hace $z = jv$ en la ecuación característica se igualan a cero la parte real y la parte imaginaria y se resuelven las ecuaciones resultantes para v y K .

$$1 + \frac{0.4261K(z + 0.8467)}{(z - 1)(z - 0.6065)} = 0 \quad \text{con} \quad z = jv$$

$$(jv - 1)(jv - 0.6065) + 0.4261K(jv + 0.8467) = 0$$

- Igualando parte real y parte imaginaria a cero se obtiene:

$$0.360K + 0.6065 - v^2 = 0$$

$$0.4261Kv - 1.6065v = 0$$



- Resolviendo estas ecuaciones se obtiene: $K = 3.77 \quad v = \pm 1.4$.
- Es decir, el lugar geométrico de las raíces corta al eje imaginario en $z = \pm 1.4$ cuando $K = 3.77$.
- La figura 4.15a muestra el lugar geométrico de las raíces del sistema para .
- La parte punteada corresponde al círculo unitario y se da como referencia para obtener el valor de la ganancia crítica.



- El valor de la ganancia crítica se obtiene haciendo $|KHG(z)| = 1$. De la figura 4.15a se deduce que $|KHG(z)| = 1$ para $z = 0.54 \pm j0.86$, entonces:

$$\left| \frac{0.4261K(0.54 + j0.86 + 0.8467)}{(0.54 + j0.86 - 1)(0.54 + j0.86 - 0.6065)} \right| = 1$$

$$\left| \frac{0.4261K(1.3867 + j0.86)}{(j0.86 - 0.46)(j0.86 - 0.66)} \right| = 1 \quad 0.8265K = 1$$

- Por lo tanto, la ganancia crítica es $K = 1.21$



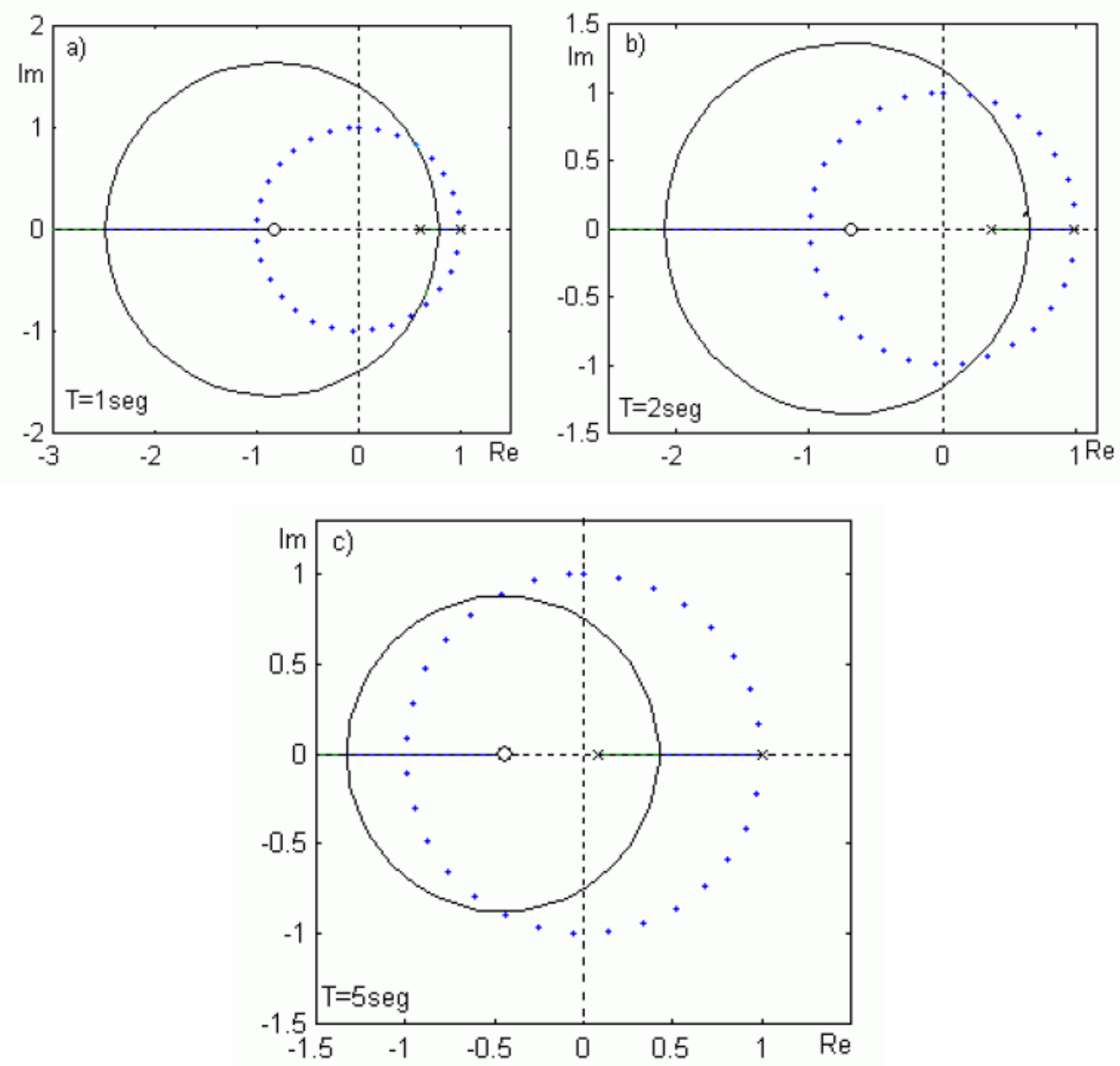


Figura 4.15 Diagramas del L.G.R. para el ejemplo 4.7



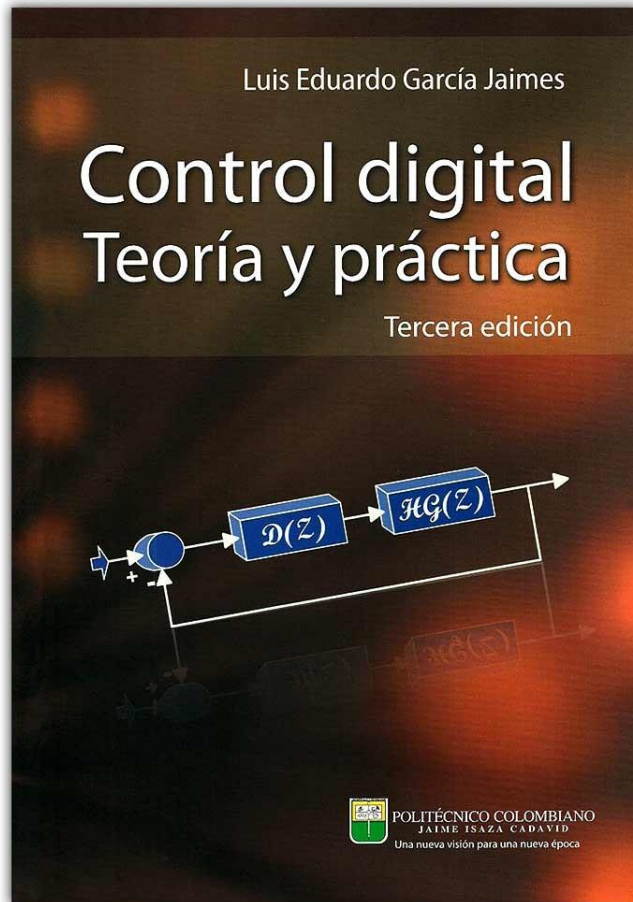
- A continuación se da un programa en Matlab® que permite obtener el lugar geométrico de las raíces para el ejemplo 4.7.

```
% Programa para obtener el LGR del ejemplo 4.7
clc
n=[1];
d=[1 0.5 0]; %Planta continua
[nd,dd]=c2dm(n,d,1,'zoh'); %Discretización con T=1 seg
[nd1,dd1]=c2dm(n,d,2,'zoh'); %Discretización con T=2 seg
[nd2,dd2]=c2dm(n,d,5,'zoh'); %Discretización con T=5 seg
x=0:0.2:2*pi;
figure(1)
plot(sin(x),cos(x),'.') %Dibuja el circulo unitario
hold
rlocus(nd,dd) %Grafica del lugar geométrico de las raíces
axis([-3 1.5 -2 2]) %Escala para los ejes
pause
```

```
figure(2)
plot(sin(x),cos(x),'.')
hold
rlocus(nd1,dd1)
axis([-2.5 1.5 -1.5 1.5])
pause
figure(3)
plot(sin(x),cos(x),'.')
hold
rlocus(nd2,dd2)
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
```



BIBLIOGRAFÍA



- García, L.(2012). **Control digital teoría y práctica; capítulo 4.** Método de análisis para sistemas de control en tiempo discreto. Medellín: Politécnico Colombiano “Jaime Isaza Cadavid”
- *Signatura en la Biblioteca central Francisco Mora Díaz (USTA-TUNJA; campus centro histórico): 629.895 G2lco*

