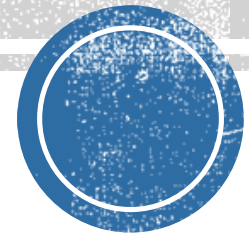


CAPÍTULO 9.

DISEÑO POR MEDIO DEL LGR

- Nise, N.(2002).**Sistemas de Control para Ingeniería.**
México D.F.: Continental.



9.1 INTRODUCCIÓN

- En el capítulo 8 vimos que el LGR mostró gráficamente información tanto de la respuesta transitoria como de la estabilidad.
- El LGR se puede trazar rápidamente para tener una idea general de los cambios en la respuesta transitoria generados por los cambios en la ganancia.
- Es posible hallar con precisión puntos específicos sobre el LGR para dar información cuantitativa de diseño.

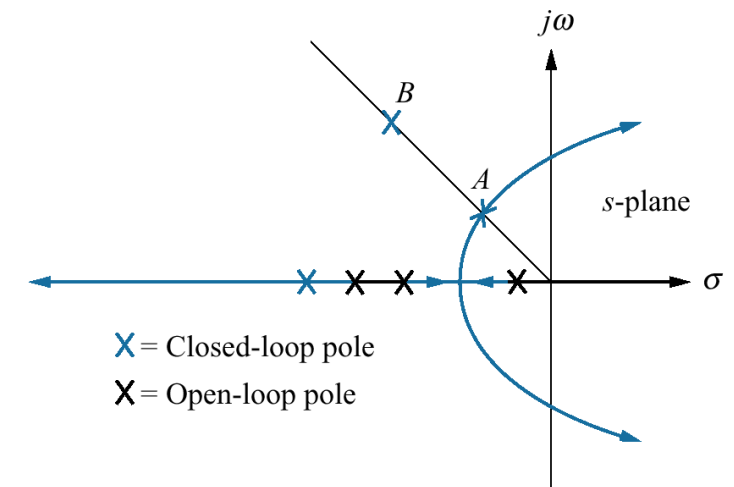


- El LGR, por lo general, nos permite escoger la ganancia de lazo adecuada para satisfacer una especificación de respuesta transitoria.
- Cuando la ganancia se hace variar, nos movemos en diferentes regiones de la respuesta.
- Establecer la ganancia en un valor particular da la respuesta transitoria dictada por los polos en el punto sobre el LGR.
- Entonces , **estamos limitados a esas respuestas que existen a lo largo del LGR.**

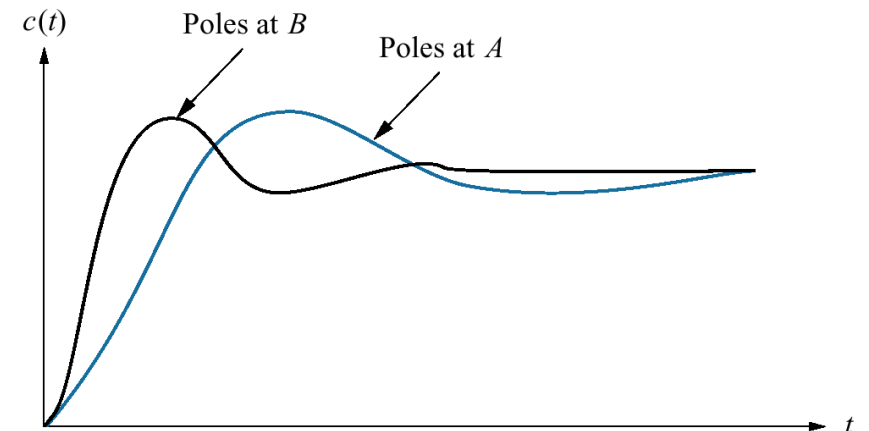


□ Mejoramiento de la respuesta transitoria

- Se puede aumentar la flexibilidad del diseño de una respuesta transitoria deseada si podemos diseñar respuestas transitorias que **no** estén en el LGR.
- La figura 9.1(a) ilustra el concepto. Supóngase que la respuesta transitoria deseada está representada por el punto B.
- Desafortunadamente, el LGR actual en el sobrepaso en porcentaje especificado, sólo podemos obtener el tiempo de asentamiento representado por el punto A.
- Por lo tanto, nuestra meta es **acelerar** la respuesta en A para igualarla a la de B, sin afectar el sobrepaso en porcentaje.



(a)



(b)

- **Figura 9.1** a) LGR de muestra, en el que se aprecian posibles puntos de diseño por medio del ajuste de ganancia (A), y un punto desde deseado de diseño que no se puede satisfacer mediante un simple ajuste de ganancia (B); b) respuestas desde polos en A y B.



- Este aumento en velocidad **no** se puede lograr con un simple **ajuste de la ganancia** (Control Proporcional), puesto que el punto B no se encuentra sobre el LGR.
- La figura 9.1(b) ilustra la mejora en la respuesta transitoria que buscamos: la respuesta más rápida tiene el mismo sobrepaso en porcentaje que la respuesta más lenta.
- Una forma de resolver nuestro problema es sustituir el sistema existente con un sistema cuyo LGR cruce por el punto de diseño deseado, B. Desafortunadamente, esta sustitución es costosa y contraproducente.
- La mayor parte de los sistemas se seleccionan por características que no son la respuesta transitoria. Por ejemplo, la plataforma de pasajeros y el motor de un elevador se seleccionan para velocidad y potencia.
- Los componentes escogidos para la respuesta transitoria de estos componentes pueden no necesariamente satisfacer, por ejemplo, los requerimientos de potencia.



- En lugar de cambiar el sistema existente, lo aumentamos, o lo **compensamos, con polos y ceros adicionales**, de modo que el sistema compensado tenga un LGR que pase por el lugar deseado de polo para algún valor de ganancia.
- Una de las ventajas de compensar un sistema en esta forma es que los polos y ceros adicionales se pueden agregar en el extremo de baja potencia del sistema antes de la planta.
- La adición de polos y ceros de compensación no interfieren con las necesidades de potencia de salida del sistema, ni presentan problemas adicionales.
- Los polos y ceros de compensación se pueden generar con una red pasiva o activa.



- Una posible desventaja de compensar un sistema con polos y ceros adicionales en lazo abierto es que el orden del sistema puede aumentar con un subsiguiente efecto sobre la respuesta deseada.
- En los capítulos 4 y 8 estudiamos los efectos de polos y ceros adicionales en lazo cerrado sobre la respuesta transitoria.
- Al principio del proceso de diseño en este capítulo, determinamos la ubicación correcta de los polos y ceros adicionales en lazo abierto para obtener los polos deseados en lazo cerrado de segundo orden.
- Sin embargo, **no conocemos** la ubicación de los **polos en lazo cerrado de orden superior** hasta el final del diseño.
- Por lo tanto, deberíamos evaluar la respuesta transitoria por medio de simulación después de que el diseño se haya completado, para estar seguros que los requerimientos se hayan satisfecho.



- Cuando estudiemos diseño en el espacio de estados (control moderno), la desventaja de hallar la ubicación de polos en lazo cerrado de orden superior, después del diseño, será eliminada por técnicas que permiten al diseñador especificar y diseñar la ubicación de todos los polos en lazo cerrado al principio del proceso de diseño.
- Un método de compensación para la respuesta transitoria consiste en insertar un **diferenciador (derivador)** en la trayectoria directa en paralelo con la ganancia.



❑ **Mejoramiento del error en estado estable**

- No sólo se usan compensadores para mejorar la respuesta transitoria de un sistema; también se emplean **independientemente** para mejorar las características en estado estable.
- Ya antes, **cuando la ganancia del sistema se ajustó para satisfacer la especificación de respuesta transitoria, el desempeño del error en estado estable se deterioró**, puesto que la respuesta transitoria y la constante de error en estado estable estaban relacionadas con la ganancia.
- Cuando mayor es la ganancia, menor es el error en estado estable, pero mayor es el sobrepaso en porcentaje. Por otra parte, reducir la ganancia para disminuir el sobrepaso aumentaba el error en estado estable.
- Si utilizamos compensadores, es posible diseñar redes de compensadores que nos permitirán satisfacer **simultáneamente** especificaciones del error en estado estable y respuesta transitoria.



- En el capítulo 7 aprendimos que el error en estado estable se puede mejorar al agregar un polo en lazo abierto en el origen en la trayectoria directa, aumentando así el tipo de sistema y llevando a cero el error en estado estable relacionado.
- Este polo adicional en el origen requiere un integrador para su construcción.
- En resumen, entonces, la respuesta transitoria se mejora con la adición de una diferenciación, y el error en estado estable, con la adición de una **integración** en la trayectoria directa.



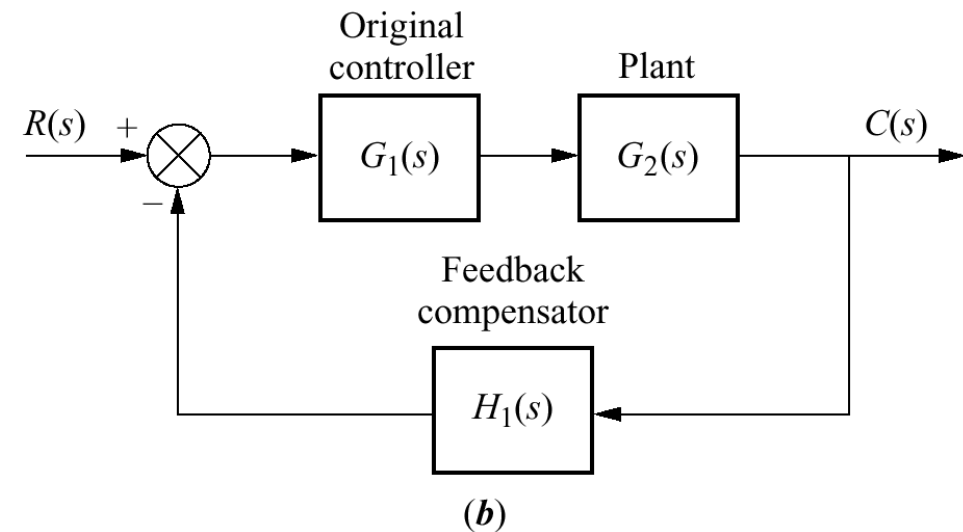
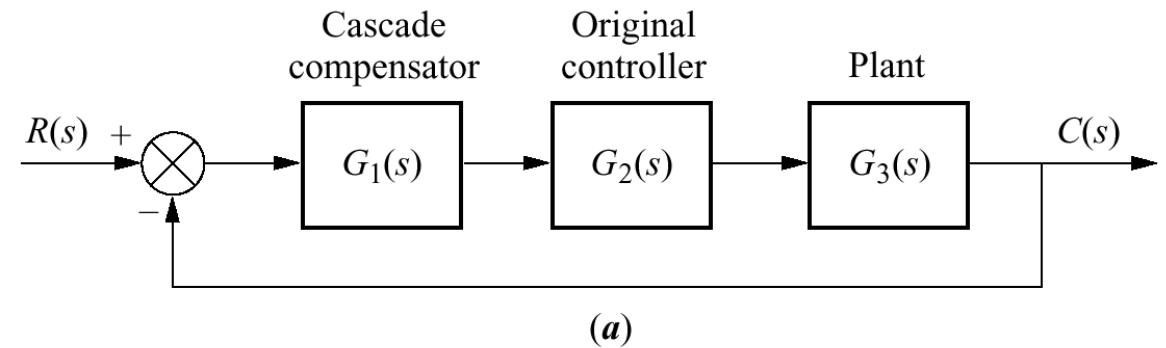
□ Configuraciones

- En este capítulo se estudian dos configuraciones de compensadores:

1) **Compensación en cascada**

2) *Compensación mediante realimentación.*

- Ambos métodos cambian los polos y ceros en lazo abierto, creando por tanto un nuevo LGR que pasa por la ubicación deseada de los polos en lazo cerrado.



- **Figura 9.2** Técnicas de compensación: a) en cascada; b) mediante realimentación



□ **Compensadores**

- Los compensadores que utilizan integración pura para mejorar el error en estado estable, o diferenciación pura para mejorar la respuesta transitoria, se definen **compensadores ideales**.
- Los compensadores ideales deben ponerse en práctica con **redes activas** que exigen el uso de **amplificadores operacionales** y posibles fuentes adicionales de energía eléctrica. (compensadores analógicos)
- Se pueden optar por otras técnicas de diseño que imposibilitan el uso de dispositivos activos para la compensación.
- Estos compensadores, que se pueden implementar con elementos pasivos como resistores y capacitores, **no son compensadores ideales**.



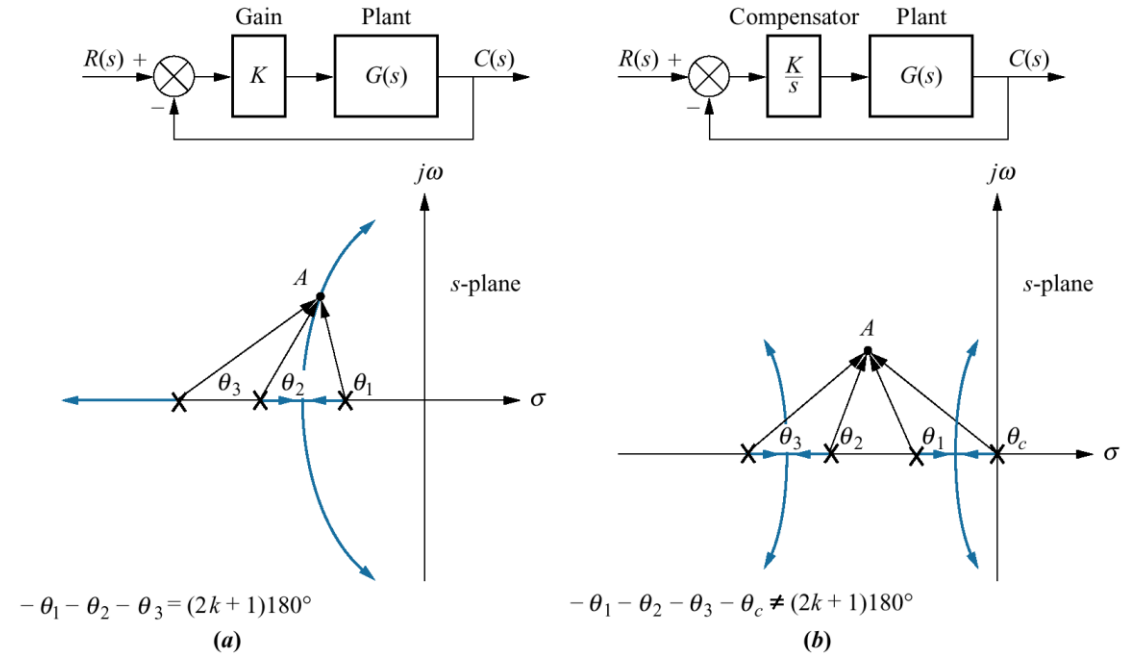
9.2 MEJORAMIENTO DEL ERROR EN ESTADO ESTABLE POR MEDIO DE COMPENSACIÓN EN CASCADA

- Un objetivo de este diseño es mejorar el error en estado estable **sin afectar** en forma apreciable la respuesta transitoria.
- Los nombres relacionados con los compensadores provienen ya sea del método de implementar el compensador o de las características del compensador.
- Los sistemas que alimentan el error en forma directa a la planta se llaman **sistemas de control proporcionales**.
- Los sistemas que alimentan la integral del error a la planta se llaman **sistemas de control integrales**.
- Por último, los sistemas que alimentan la derivada del error a la planta se llaman **sistemas de control derivativos**.
- Así, en esta sección llamamos compensador integral ideal a un **controlador Proporcional más Integral (PI)**.



■ Compensación integral ideal (PI)

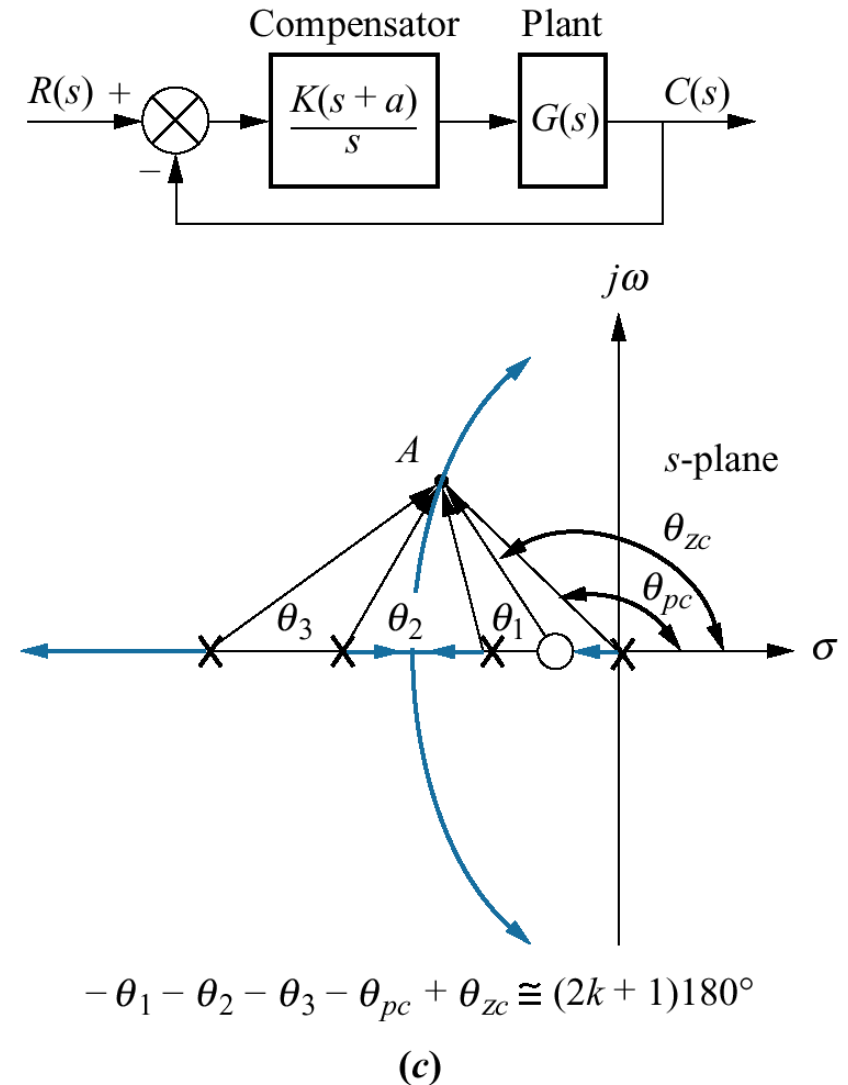
- Un error en estado estable se puede mejorar si se coloca un polo en lazo abierto en el origen, porque esto aumenta en uno el tipo de sistema.
- Por ejemplo, un sistema tipo 0 que responde a una entrada escalón con un error finito responde con error cero si el tipo de sistema se aumenta en uno.
- Para ver cómo mejorar el error en estado estable sin afectar la respuesta transitoria veamos la figura 9.3(a).
- Aquí tenemos un sistema que opera con una respuesta transitoria deseable generada por los polos en lazo cerrado en A .
- Si agregamos un polo en el origen para aumentar el tipo de sistema, la aportación angular de los polos en lazo abierto en el punto A ya no es de 180° .
- Y el LGR ya no pasa por el punto A , como se muestra en la figura 9.3(b).



■ **Figura 9.3** El polo está: a) sobre el LGR sin compensador; b) no sobre el LGR con polo de compensador agregado; (la figura continúa)



- Para resolver el problema, también agregamos un cero cerca del polo en el origen, como se ve en la figura 9.3(c).
- Ahora la aportación angular del compensador cero y el compensador se cancelan, el punto A está todavía sobre el LGR, y el tipo de sistema a aumentado.
- Además, la ganancia necesaria en el polo dominante es casi la misma que antes de la compensación, puesto que la relación de longitudes desde el polo compensador y el cero compensador es aproximadamente la unidad.
- Así, hemos mejorado el error en estado estable sin afectar de manera apreciable la respuesta transitoria.

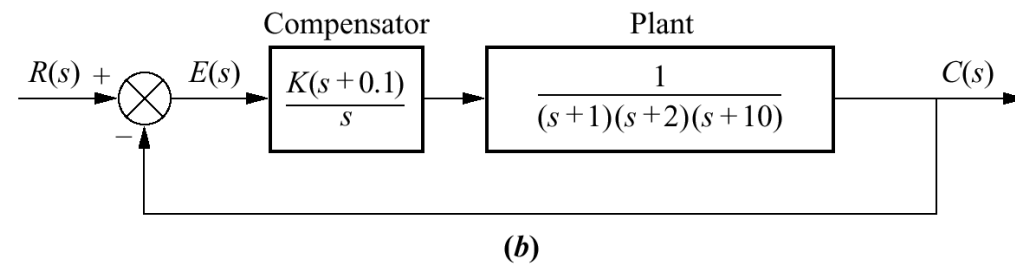
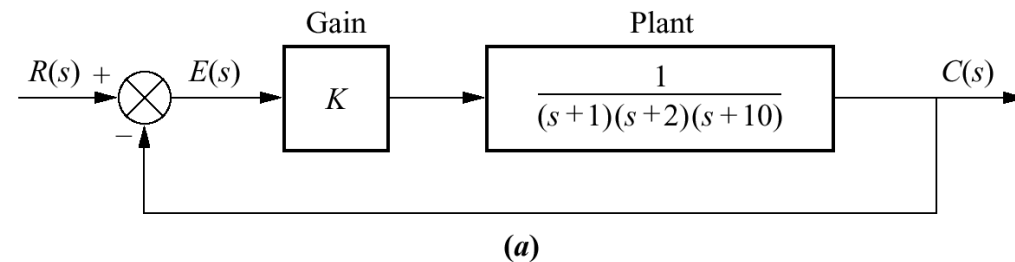


■ **Figura 9.3** (continúa) c) aproximadamente sobre el LGR con polo de compensador y cero agregados.



Ejemplo 9.1 Efecto de un compensador integral ideal

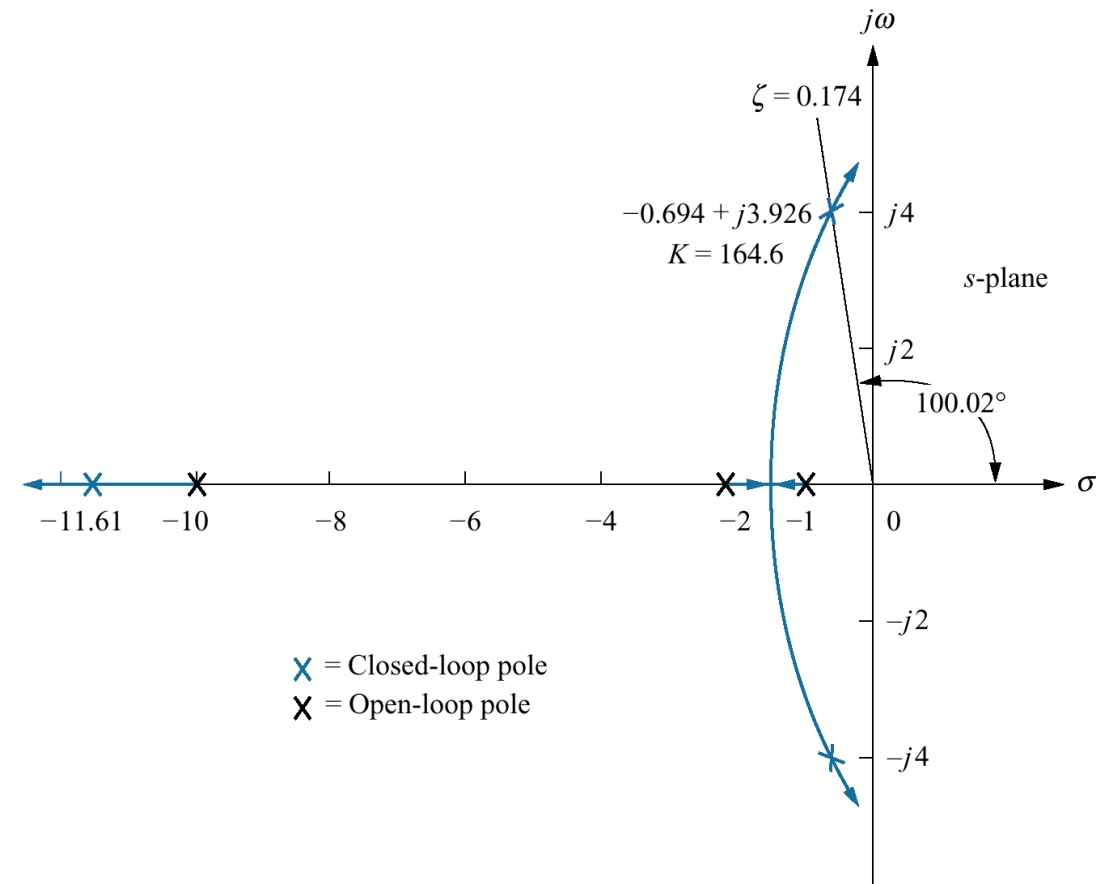
- **Problema:** Dado que el sistema de la figura 9.4(a) opera con un factor de amortiguamiento relativo de 0.174, demuestre que la adición del compensador integral ideal que se ilustra en la figura 9.4(b) reduce a cero el error en estado estable para una entrada escalón, sin afectar de manera apreciable la respuesta transitoria.



- **Figura 9.4** Sistema en lazo cerrado para el ejemplo 9.1; a) antes de compensación; b) después de compensación.



- **Solución:**
- Primero analizamos el sistema no compensado y determinamos la ubicación de los polos dominantes de segundo orden.
- A continuación, evaluamos el error no compensado en estado estable para una entrada unitaria escalón.
- El LGR para el sistema no compensado se ilustra en la figura 9.5.



▪ **Figura 9.5** LGR para el sistema no compensado.



```

>> num= [1];
>> den=poly([-1 -2 -10]);
>> G=tf(num,den)

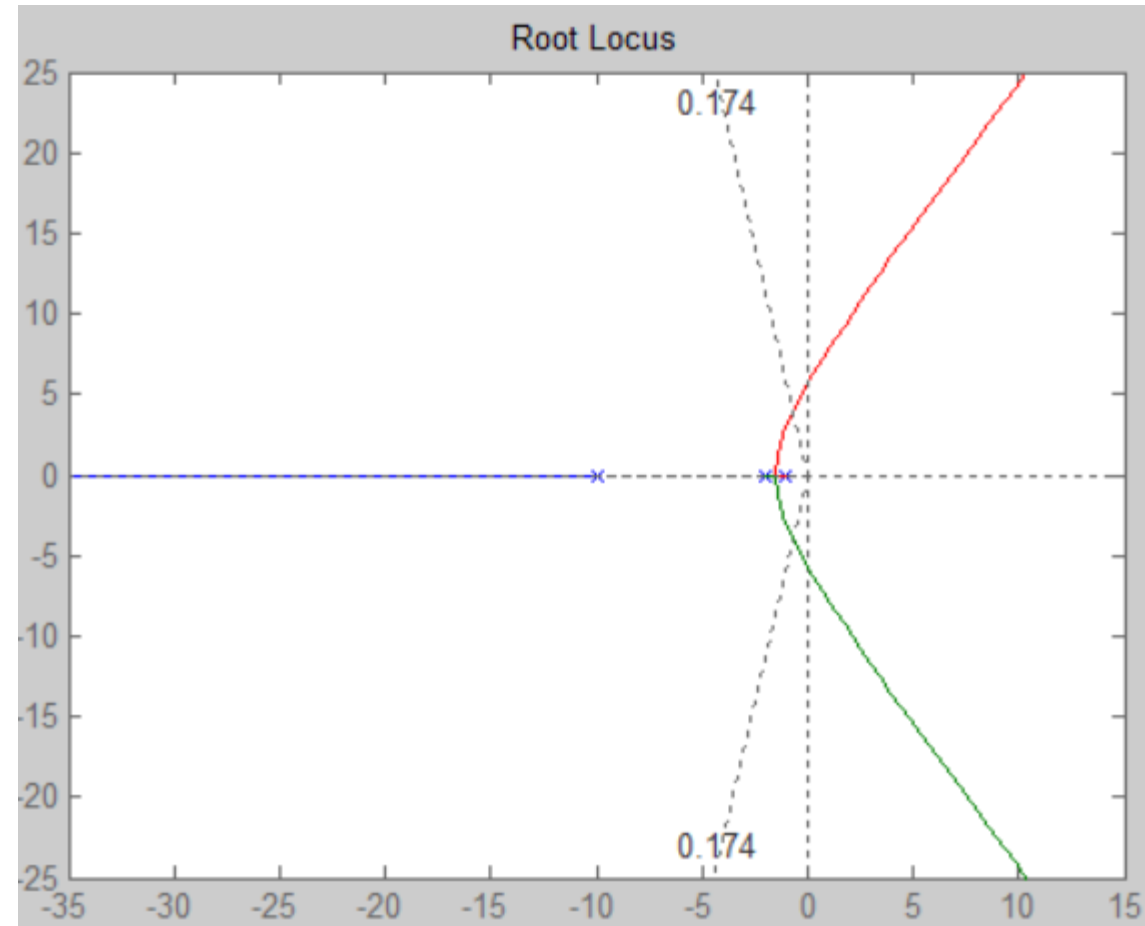
G =

          1
-----
s^3 + 13 s^2 + 32 s + 20

Continuous-time transfer function.

>> rlocus(G)
>> z=0.174;
>> sgrid(z,0)

```



- Si buscamos a lo largo de la línea de $\zeta=0.174$, encontramos que los polos dominantes son $-0.695 \pm j3.926$ para una ganancia K , de 164.5.
- Ahora buscamos el tercer polo sobre el LGR más allá de -10 sobre el eje real.
- Con la misma ganancia que la del par dominante, $K=164.5$ encontramos que el tercer polo está aproximadamente en -11,61.
- Esta ganancia K da un $K_p = 8.2$

$$\left(K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+10)} \right).$$
- El error en estado estable es

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 8.23} = 0.108 \quad (9.1)$$

```
>> [K,p]=rlocfind(G)
Select a point in the graphics window
```

```
selected_point =

    -0.6953 + 3.9261i
```

```
K =

    164.5378
```

```
p =

    -11.6128 + 0.0000i
    -0.6936 + 3.9255i
    -0.6936 - 3.9255i
```

```
>> K=164.5;
>> Gnc=K*G
```

```
Gnc =
```

```

              164.5
      -----
      s^3 + 13 s^2 + 32 s + 20
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
>> Kp=dcgain(Gnc)
```

```
Kp =
```

```

    8.2250
```

```
>> ess=1/(1+Kp)
```

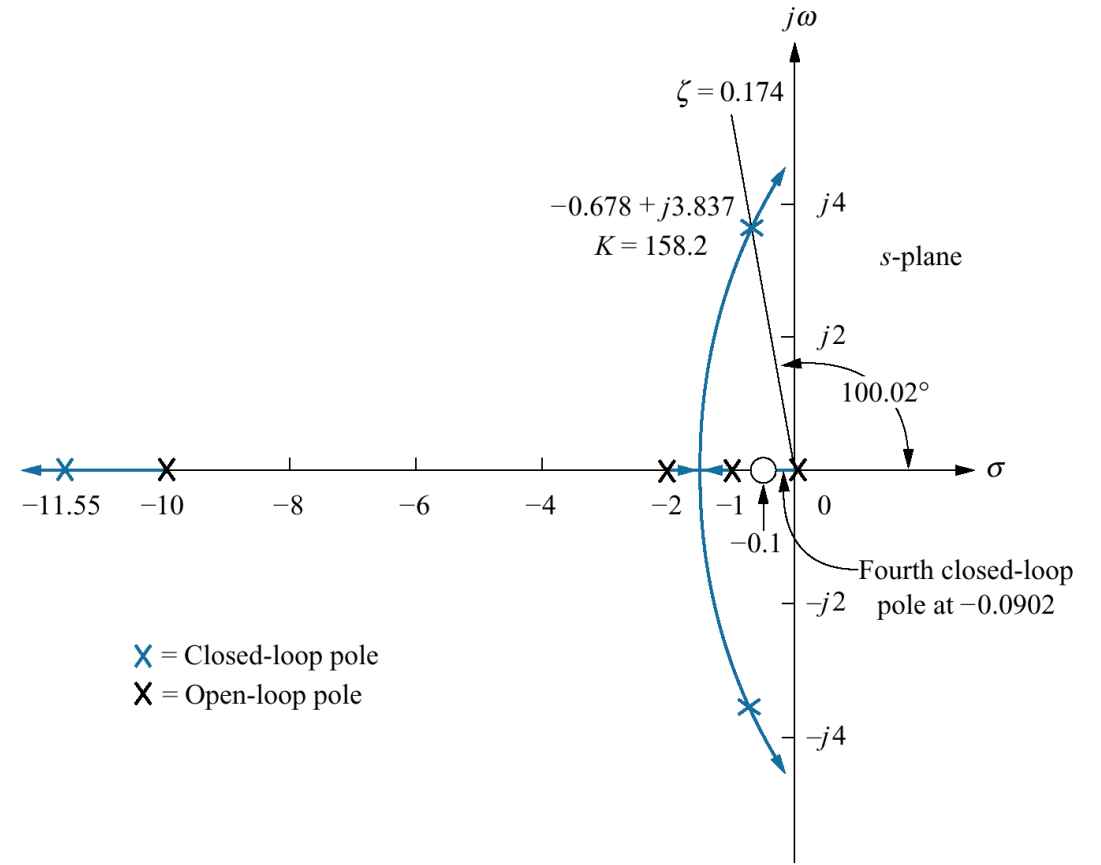
```
ess =
```

```

    0.1084
```



- Al agregar un compensador integral ideal con un cero en -0.1 , como se ve en la figura 9.4(b), obtenemos el LGR que se ilustra en la figura 9.6.



- Figura 9.6** El LGR para el sistema compensado de la figura 9.4(b).



```
>> numc=[1 0.1];
>> denc=[1 0];
>> C=tf(numc,denc)
```

C =

$$\frac{s + 0.1}{s}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> D=C*G
```

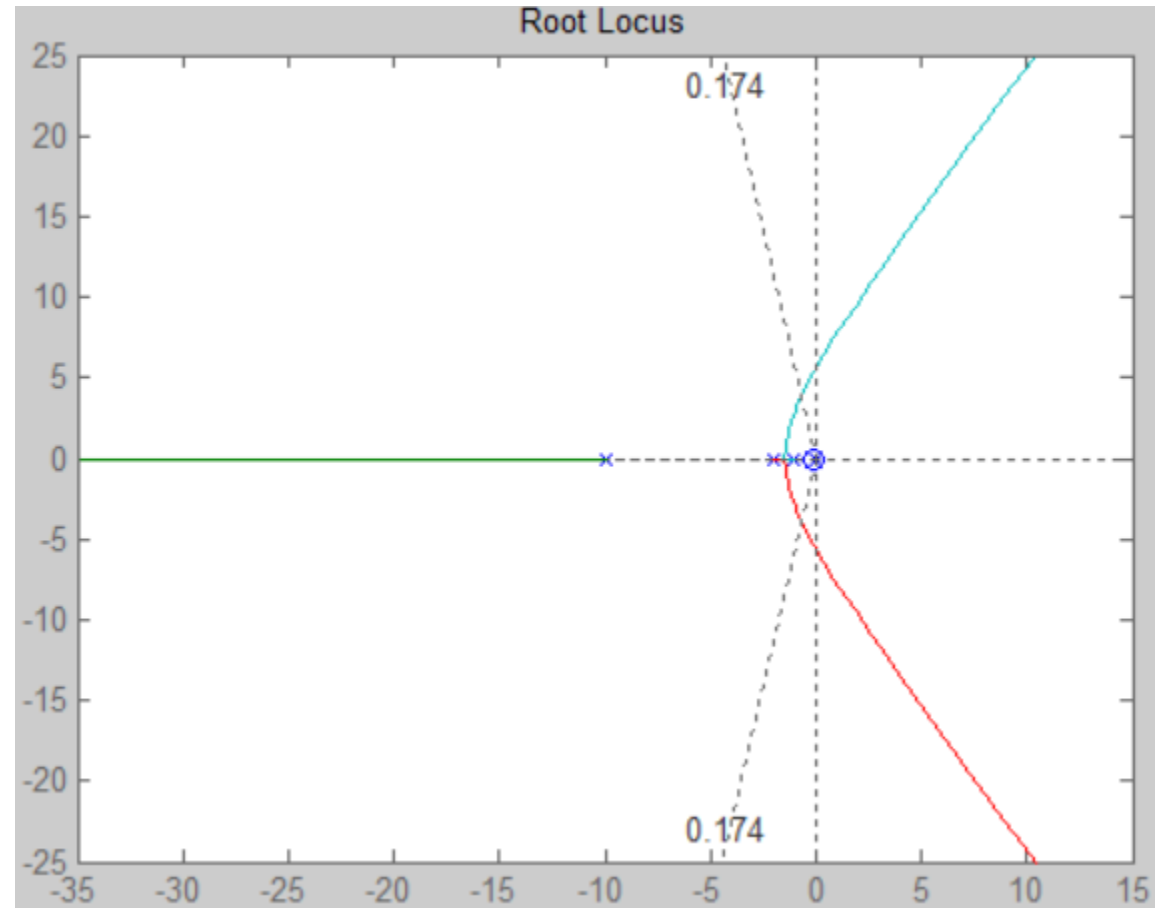
D =

$$\frac{s + 0.1}{s^4 + 13 s^3 + 32 s^2 + 20 s}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> rlocus(D)
```

```
>> sgrid(z,0)
```



- Los polos dominantes de segundo orden, el tercer polo más allá de -10, y la ganancia son aproximadamente los mismos que para el sistema no compensado.
- Otra sección del LGR compensado está entre el origen y -0.1.
- Buscando en esta región la misma ganancia del par dominante, $K=158.2$, se encuentra que el cuarto polo en lazo cerrado está en -0.0902, suficientemente cerca del cero como para causar la cancelación del polo y el cero.

```
>> [K,p]=rlocfind(D)
Select a point in the graphics window

selected_point =

    -0.6767 + 3.8253i

K =

    157.2512

p =

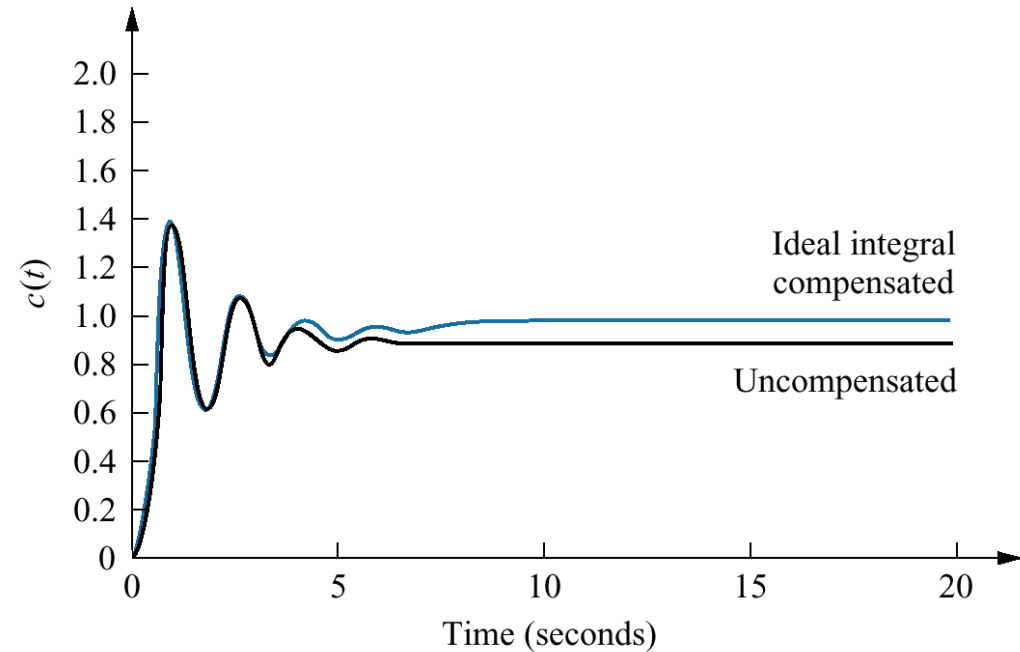
    -11.5479 + 0.0000i
    -0.6810 + 3.8269i
    -0.6810 - 3.8269i
    -0.0901 + 0.0000i
```



- De este modo, los polos en lazo cerrado del sistema compensado y la ganancia son aproximadamente iguales que los polos y la ganancia en lazo cerrado del sistema no compensado, lo que indica que la respuesta transitoria del sistema compensado es casi igual que el sistema no compensado.
- Sin embargo, el sistema compensado, con su polo en el origen, es un sistema tipo 1; diferencia del sistema no compensado, responderá a una entrada escalón con un error cero.



- La figura 9.7 compara la respuesta no compensada con la respuesta compensada integral ideal.
- La respuesta escalón del sistema compensado integral ideal se aproxima a la unidad en estado estable, mientras que el sistema no compensado se aproxima a 0.892.
- Así, el sistema compensado PI responde con cero error en estado estable.
- La respuesta transitoria tanto del sistema no compensado como del sistema PI es la misma hasta aproximadamente 3 segundos.



- **Figura 9.7** Respuesta del sistema compensado ideal y la respuesta del sistema no compensado del ejemplo 9.1




```
>> K=158.2;
```

```
>> E=K*D
```

E =

$$\frac{158.2 s + 15.82}{s^4 + 13 s^3 + 32 s^2 + 20 s}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> T=feedback(E,1)
```

T =

$$\frac{158.2 s + 15.82}{s^4 + 13 s^3 + 32 s^2 + 178.2 s + 15.82}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> K1=164.6;
```

```
>> L=K1*G
```

L =

$$\frac{164.6}{s^3 + 13 s^2 + 32 s + 20}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> T1=feedback(L,1)
```

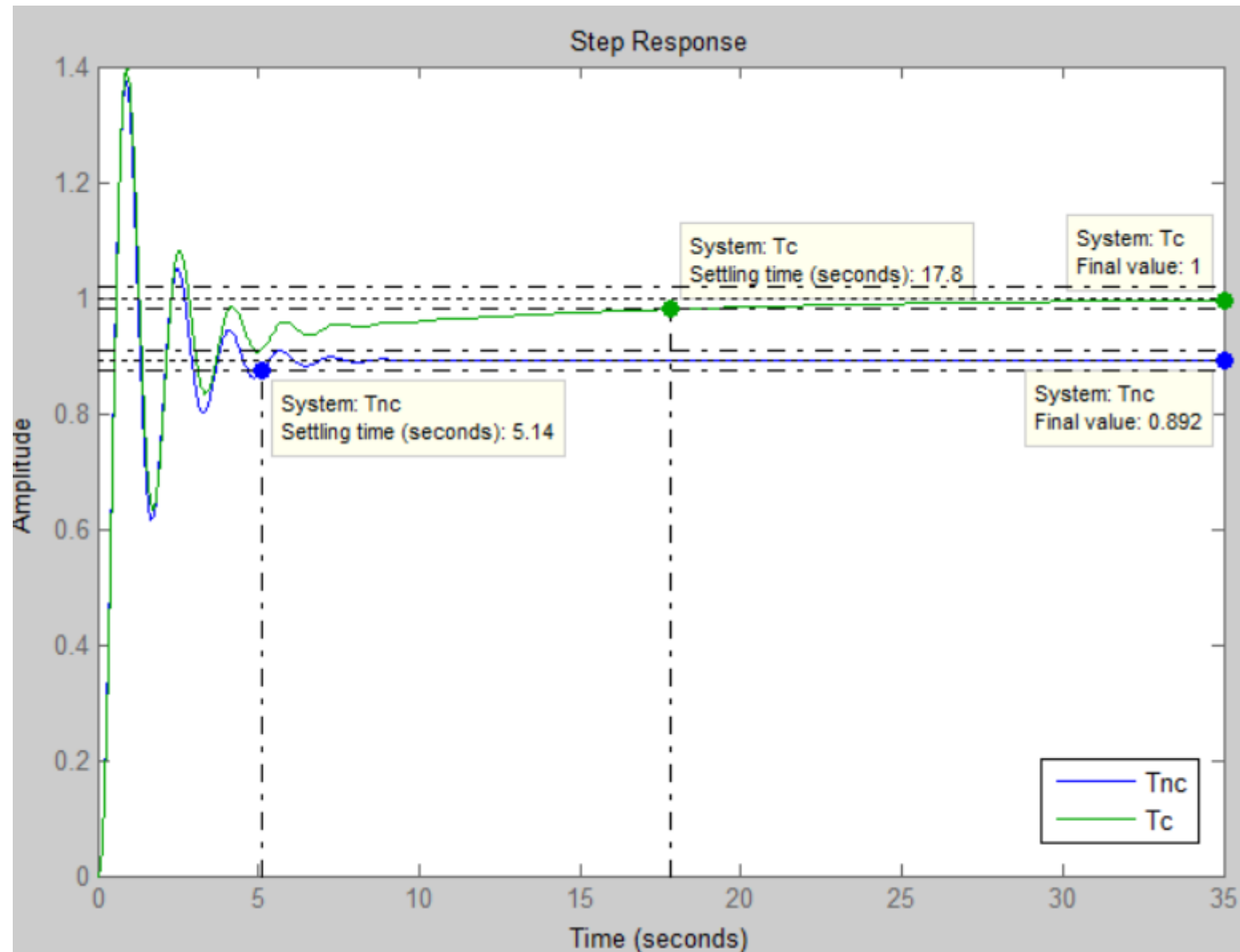
T1 =

$$\frac{164.6}{s^3 + 13 s^2 + 32 s + 184.6}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> step(T1,T)
```





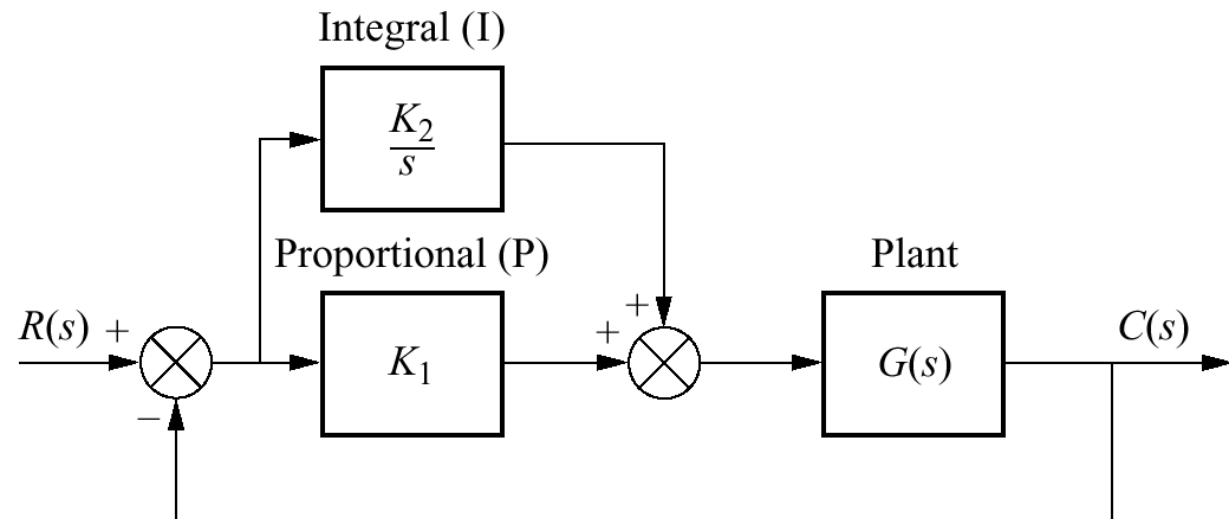
- Después de 3 segundos, el integrador del compensador lentamente compensa el error hasta que por último se alcance un error cero.
- La simulación muestra que el sistema compensado tarda **18 segundos** en llegar a estar dentro de $\pm 2\%$ del valor final unitario, en tanto que el sistema no compensado tarda unos **6 segundos** en estabilizarse a estar dentro de $\pm 2\%$ de su valor final de 0.892.
- La compensación al principio puede parecer dar deterioro en el tiempo de asentamiento, pero nótese que el sistema compensado llega al valor final del sistema no compensado alrededor del mismo tiempo.
- El tiempo restante se emplea para mejorar el error en estado estable sobre el tiempo del sistema no compensado.



- En la figura 9.8 se ilustra un método de implementar un compensador integral ideal. La red de compensación precede a $G(s)$ y es un compensador PI porque

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1 \left(s + \frac{K_2}{K_1} \right)}{s} \quad (9.2)$$

- El valor final del cero se puede ajustar al hacer variar K_2/K_1 . En esta implementación, el error y la integral del error se alimentan directos a la planta, $G(s)$.
- Como la figura 9.8 tiene control tanto proporcional como integral, al controlador integral ideal, o compensador, se la da el nombre alternativo de **controlador PI**.



■ **Figura 9.8** Controlador PI.



9.3 MEJORAMIENTO DE LA RESPUESTA TRANSITORIA POR MEDIO DE LA COMPENSACIÓN EN CASCADA

- Por lo general, el objetivo es diseñar una respuesta transitoria que tenga un sobrepaso en porcentaje deseable y un tiempo de asentamiento más corto que el sistema no compensado.
- En la compensación derivativa ideal se agrega un diferenciador puro a la trayectoria directa del sistema de control realimentado.
- Veremos que el resultado de agregar diferenciación es la **adición de un cero** en la función de transferencia de la trayectoria directa.



□ **Compensación derivativa ideal (PD)**

- La respuesta transitoria de un sistema se puede seleccionar si se escoge una ubicación apropiada del polo en lazo cerrado en el plano s .
- Si este punto está sobre el LGR, entonces un simple ajuste de ganancia es todo lo que se necesita para satisfacer la especificación de la respuesta transitoria.
- Si la ubicación del polo no está sobre el LGR, entonces debe cambiarse la forma del LGR para que el LGR compensado pase por la ubicación seleccionada del polo en lazo cerrado.
- Para lograr este último trabajo, se pueden agregar polos y ceros en la trayectoria directa para producir una nueva función en lazo abierto cuyo LGR pasa por el punto de diseño sobre el plano s .



- Una forma de acelerar el sistema original, que generalmente se usa, es agregar un solo cero a la trayectoria directa.
- Este cero puede ser representado por un compensador cuya función de transferencia es

$$G_c(s) = s + z_c \quad (9.12)$$

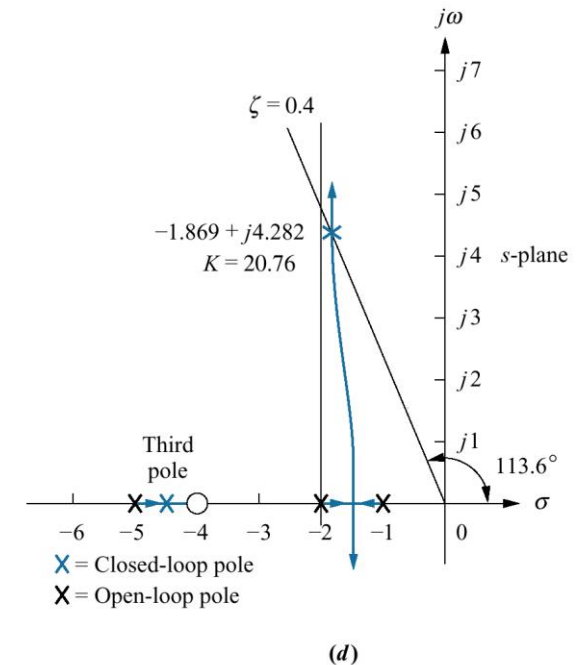
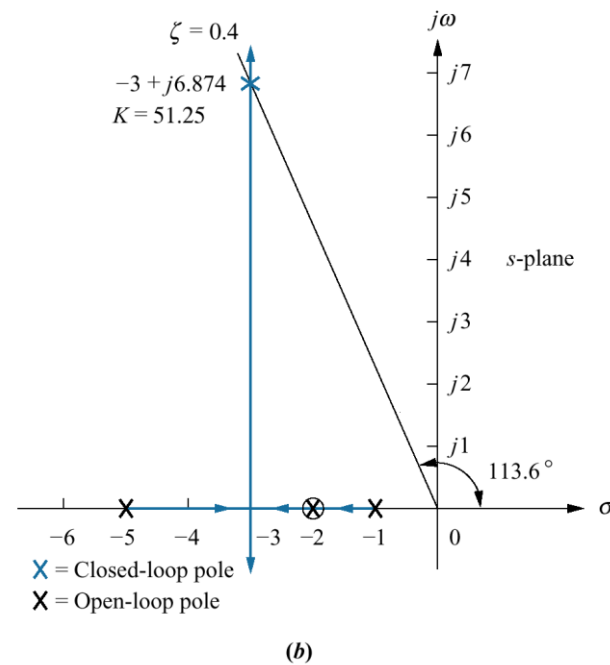
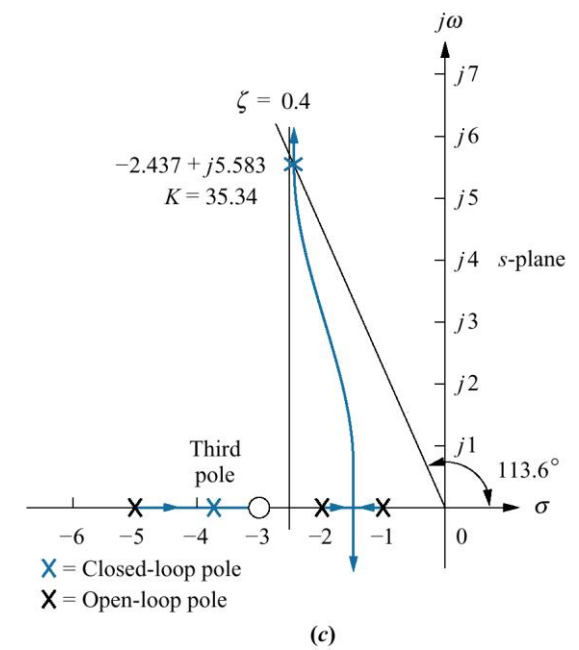
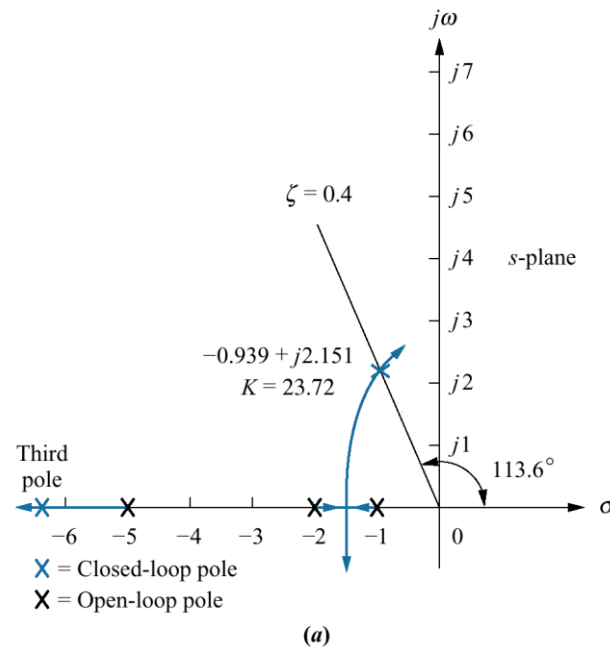
- Esta función, la suma de un diferenciador y una ganancia pura, se llama controlador PD.
- En resumen, las respuestas transitorias que no se pueden obtener por medio de un simple ajuste en la ganancia, sí se pueden obtener al aumentar los polos y ceros del sistema con un controlador PD.



- A continuación demostramos que un controlador PD acelera la respuesta de un sistema.
- En la figura 9.15 se ilustran varios ejemplos sencillos, donde el sistema no compensado de la figura 9.15(a), operando con un $\zeta = 0.4$, se convierte en un sistema compensado por la adición de un cero compensador en -2, -3 y -4 en la figuras 9.15(b), (c) y (d), respectivamente.
- En cada diseño, el cero se mueve a una posición diferente, y se muestra el LGR.
- Para cada caso compensado, los polos de segundo orden dominantes están más alejados a lo largo del línea de $\zeta = 0.4$ que el sistema no compensado.
- Cada uno de los casos compensados tiene polos dominantes con el mismo factor de amortiguamiento relativo que el caso no compensado. Así, pronosticamos que el sobrepaso en porcentaje será el mismo para cada caso.
- También, los polos en lazo cerrado compensados, dominantes, tienen partes reales más negativas que los polos en lazo abierto no compensados, dominantes. Por lo tanto, pronosticamos que los tiempo de asentamiento serán más cortos que para el caso no compensado.



- Figura 9.15** Uso de la compensación derivativa ideal; a) no compensada; b) cero de compensador en -2; c) cero del compensador en -3; d) cero del compensador en -4



- Los polos en lazo cerrado compensados, dominantes, con las partes reales más negativas tendrán los tiempos de asentamiento más cortos. El sistema de la figura 9.15(b) tendrá el tiempo de asentamiento más corto.
- Todos los sistemas compensados tendrán tiempos pico más pequeños que el sistema no compensado, porque las partes imaginarias de los sistemas compensados son más grandes. El sistema de la figura 9.15(b) tendrá el tiempo pico más pequeño.
- Obsérvese también que cuando el cero se coloca más alejado de los polos dominantes, los polos dominantes compensados en lazo cerrado se mueven más cerca del origen y de los polos en lazo cerrado no compensados, dominantes.
- En resumen, aun cuando los métodos de compensación c y d dan respuestas más lentas que el método b, la adición de un control PD acortó el tiempo de respuesta en cada caso, mientras que conservaba igual el sobrepaso en porcentaje.
- Este cambio puede verse mejor en el tiempo de asentamiento y tiempo pico, donde hay por lo menos una duplicación de la velocidad en todos los casos de compensación.



- La tabla 9.2 resumen los resultados obtenidos

	Uncompensated	Compensation b	Compensation c	Compensation d
Plant and compensator	$\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+5)}$	$\frac{K(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$	$\frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$	$\frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$
Dom. poles	$-0.939 \pm j2.151$	$-3 \pm j6.874$	$-2.437 \pm j5.583$	$-1.869 \pm j4.282$
K	23.72	51.25	35.34	20.76
ζ	0.4	0.4	0.4	0.4
ω_n	2.347	7.5	6.091	4.673
%OS	25.38	25.38	25.38	25.38
T_s	4.26	1.33	1.64	2.14
T_p	1.46	0.46	0.56	0.733
K_p	2.372	10.25	10.6	8.304
$e(\infty)$	0.297	0.089	0.086	0.107
Third pole	-6.123	None	-3.127	-4.262
Zero	None	None	-3	-4
Comments	Second-order approx. OK	Pure second-order	Second-order approx. OK	Second-order approx. OK

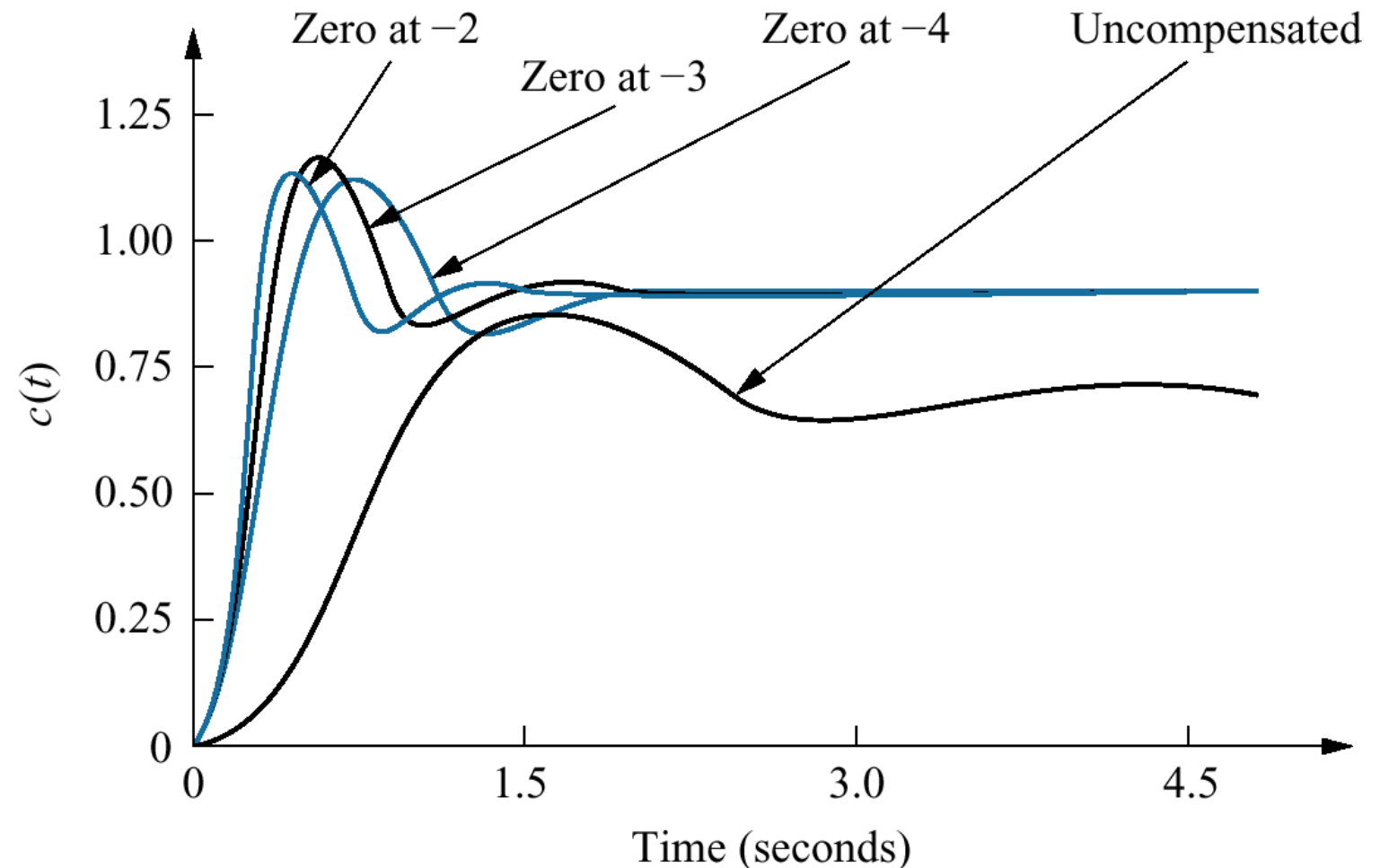
- Tabla 9.2** Características pronosticas para los sistemas de la figura 9.15



- Un beneficio agregado es la mejoría en el error en estado estable, aun cuando no se utilizo un controlador PI.
- Aquí el error ene estado estable del sistema compensado es por lo menos un tercio del error del sistema no compensado, como se ve por $e(\infty)$ y K_p .
- Todos los sistemas de la tabla 9.2 son tipo 0, y se espera algún error en estado estable.
- **El estudiante no debe suponer que, en general, la mejoría en la respuesta transitoria siempre dé una mejoría en el error en estado estable.**



- La respuesta en el tiempo de cada caso de la tabla 9.2 se muestra en la figura 9.16. Vemos que las respuestas compensadas son más rápidas y exhiben menos error que la respuesta no compensada.

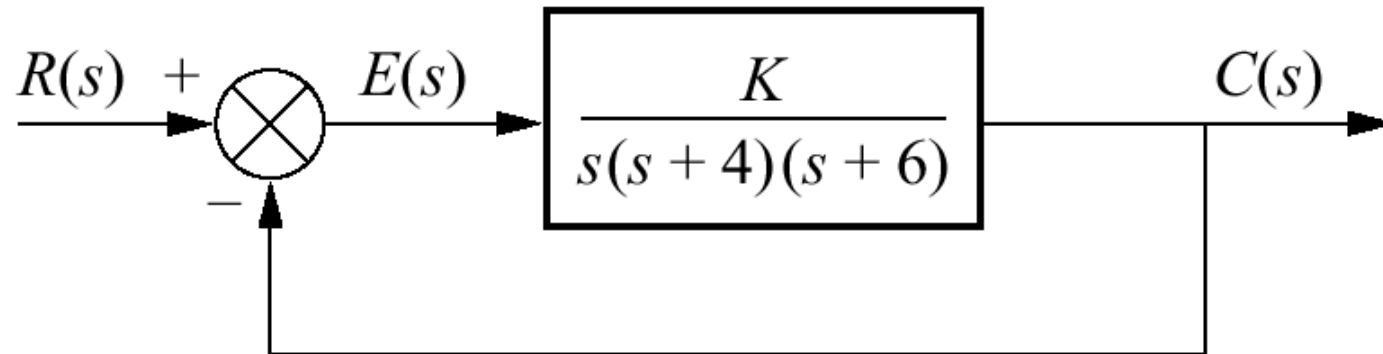


- Figura 9.16** Sistema no compensado y soluciones de compensación derivada ideal de la tabla 9.2.



Ejemplo 9.3 Diseño de un compensador derivativo ideal

- **Problema:** Dado el sistema de la figura 9.17, diseñar un compensador derivativo ideal para obtener un sobrepaso de 16%, con una reducción de **umbral (1/3)** en el tiempo de asentamiento.



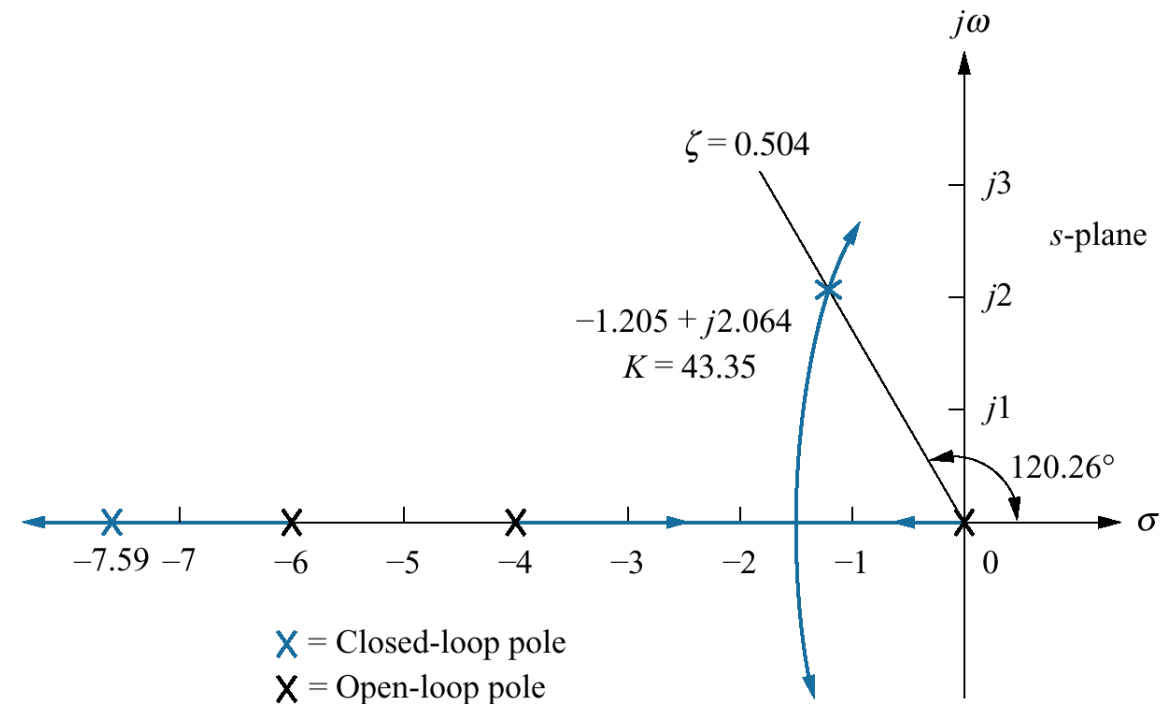
- **Figura 9.17** Sistema de control realimentado para el ejemplo 9.3.



- **Solución:** Primero vamos a evaluar la operación del sistema no compensado que opera con 16% de sobrepaso.
- El LGR para el sistema no compensado se ilustra en la figura 9.18.
- Como 16% de sobrepaso es equivalente a $\zeta=0.504$, buscamos, a lo largo de esa línea de factor de amortiguamiento relativo y encontramos que el par dominante está en $-1.205 \pm j2.064$ con una ganancia $K=43.35$.
- El ángulo se calcula como

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{\sigma_d} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2.064}{-1.205} \right) = -59.72^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 59.72^\circ = 120.26^\circ$$



- **Figura 9.18** LGR para el sistema no compensado que se ilustra en la figura 9.17.



```

>> numg=1;
>> deng=poly([0 -4 -6]);
>> G=tf(numg,deng)

G =

      1
-----
s^3 + 10 s^2 + 24 s

Continuous-time transfer function.

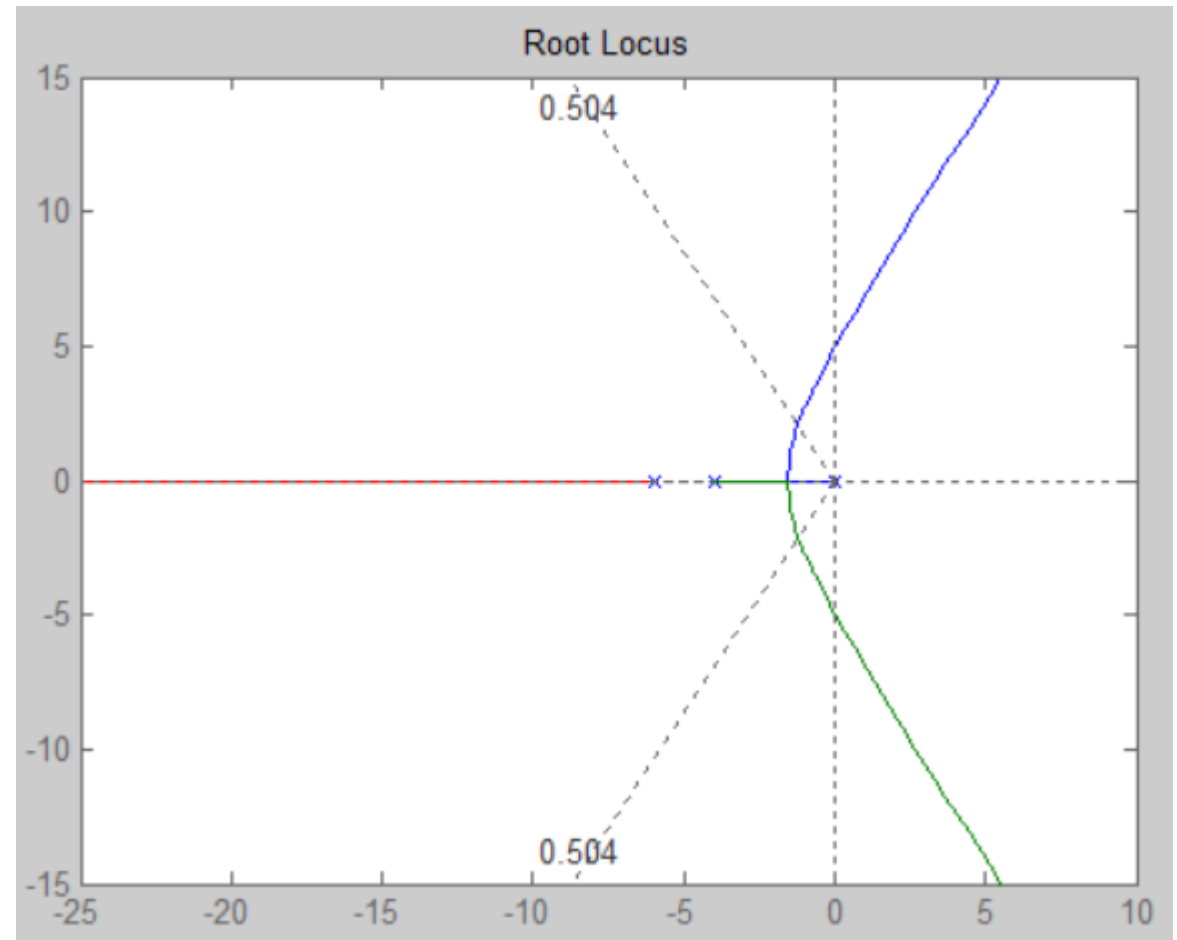
>> pos=16;
>> z=-log(pos/100)/sqrt(pi^2+[log(pos/100)]^2)

z =

    0.5039

>> rlocus(G)
>> sgrid(z,0)

```




```
>> [K,p]=rlocfind(G)
Select a point in the graphics window

selected_point =

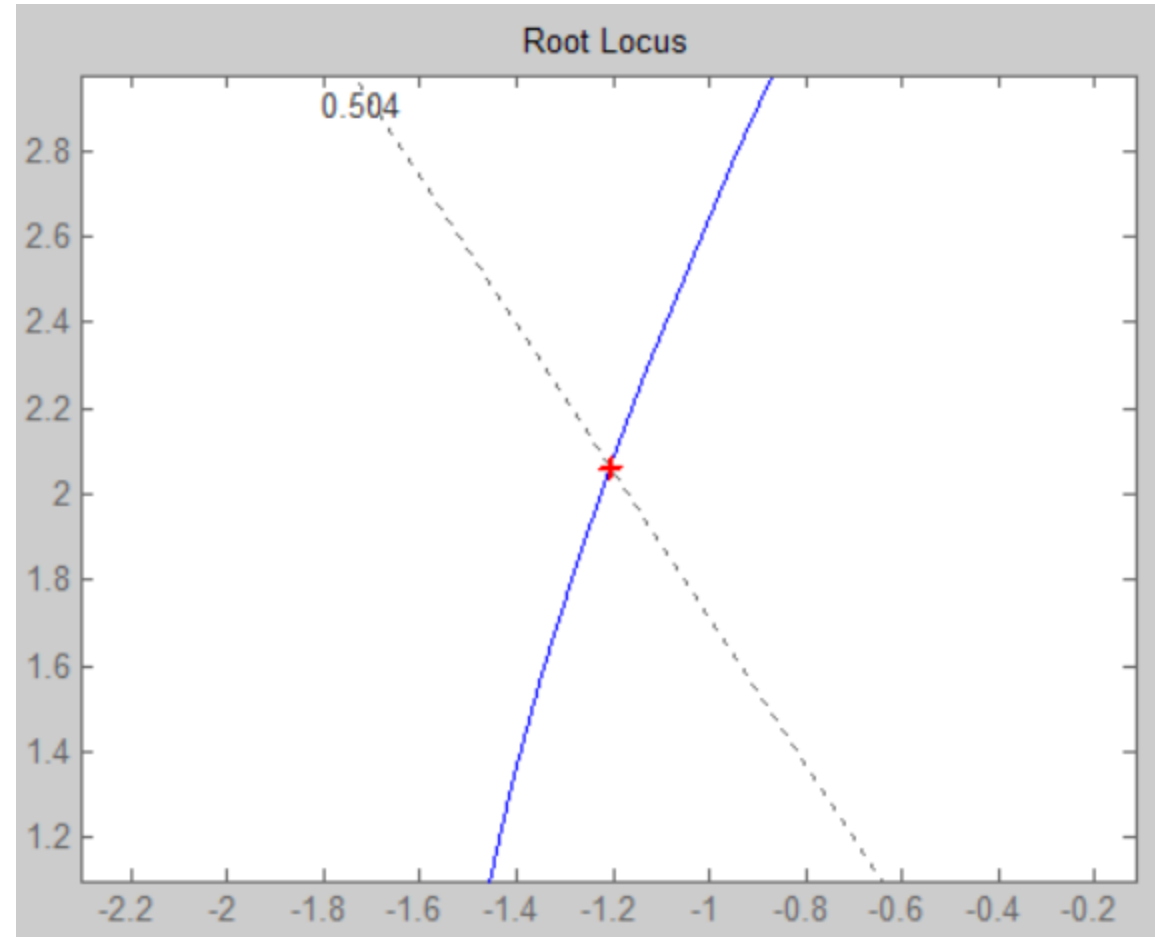
    -1.2021 + 2.0628i

K =

    43.3436

p =

    -7.5904 + 0.0000i
    -1.2048 + 2.0637i
    -1.2048 - 2.0637i
```



- Entonces, el tiempo de asentamiento del sistema no compensado es ($T_s = 4/\sigma_d$)

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{1.205} = 3.320 \quad (9.13)$$

- Como nuestra evaluación del sobrepaso en porcentaje y tiempo de asentamiento está basada en una aproximación de segundo orden, debemos verificar la suposición al hallar el tercer polo y justificar la aproximación de segundo orden.**
- Buscando más allá de -6, sobre el eje real, una ganancia igual a la ganancia del par dominante de segundo orden, 43.35, y encontrando un polo en -7,59, **que está más de seis veces lejos del eje $j\omega$ que el par dominante de segundo orden,** concluimos que nuestra aproximación es válida.



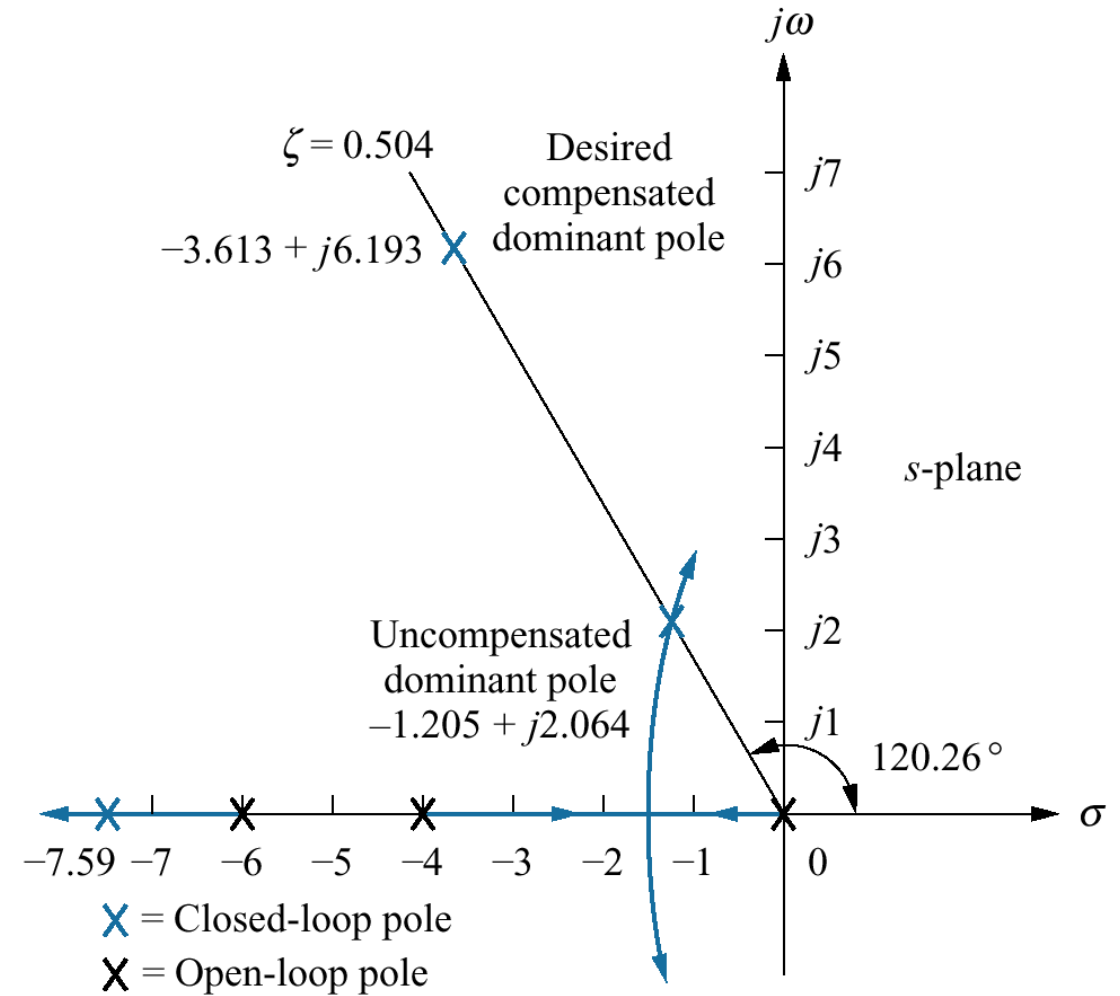
- ***Ahora continuamos compensado el sistema.***
- Primero, hallamos la ubicación de los polos dominantes del sistema compensando.
- Para tener una **reducción de umbral** en el tiempo de asentamiento, el tiempo de asentamiento del sistema compensado será **un tercio** de la ecuación (9.13). El nuevo tiempo de asentamiento será 1.107.
- Por lo tanto, la parte real del polo dominante de segundo orden del sistema es

$$\sigma = \frac{4}{T_s} = \frac{4}{1.107} = 3.613 \quad (9.14)$$



- La figura 9.19 muestra el polo dominante de segundo orden diseñado, con una parte real igual a -3.613 y una parte imaginaria de

$$\omega_d = 3.613 \tan(180^\circ - 120.26^\circ) = 6.193 \quad (9.15)$$



- Figura 9.19** Polo dominante compensado superpuesto sobre el LGR no compensado para el ejemplo 9.3



- A continuación, diseñamos la ubicación del cero del compensador.
- **Introducimos los polos y ceros del sistema no compensado en el programa del LGR**, así como el punto de diseño -3.613 ± 6.193 como punto de prueba.
- El resultado es la suma de los ángulos al punto de diseño de todos los polos y ceros del sistema compensado, excepto para los ceros del compensador mismo.
- **La diferencia entre el resultado obtenido y 180° es la aportación angular requerida por el cero del compensador.**
- Al usar los polos en lazo abierto que se muestran en la figura 9.19 y el punto de prueba, que es el polo de segundo orden dominante deseado, obtenemos la suma de los ángulos como **-275.6**.
- Por lo tanto, la aportación angular requerida desde el cero del compensador para el punto de prueba que debe estar en LGR es $+275.6^\circ - 180^\circ = 95.6^\circ$.

Root Locus and Frequency Response Utility

About

Poles		Number	Zeros		Number
Re	Im		Re	Im	
0	0	3			0
-4	0				
-6	0				

Test Point		Re	Im
Polar	<input type="radio"/>	Cartesian	<input checked="" type="radio"/>
		-3.613	6.193

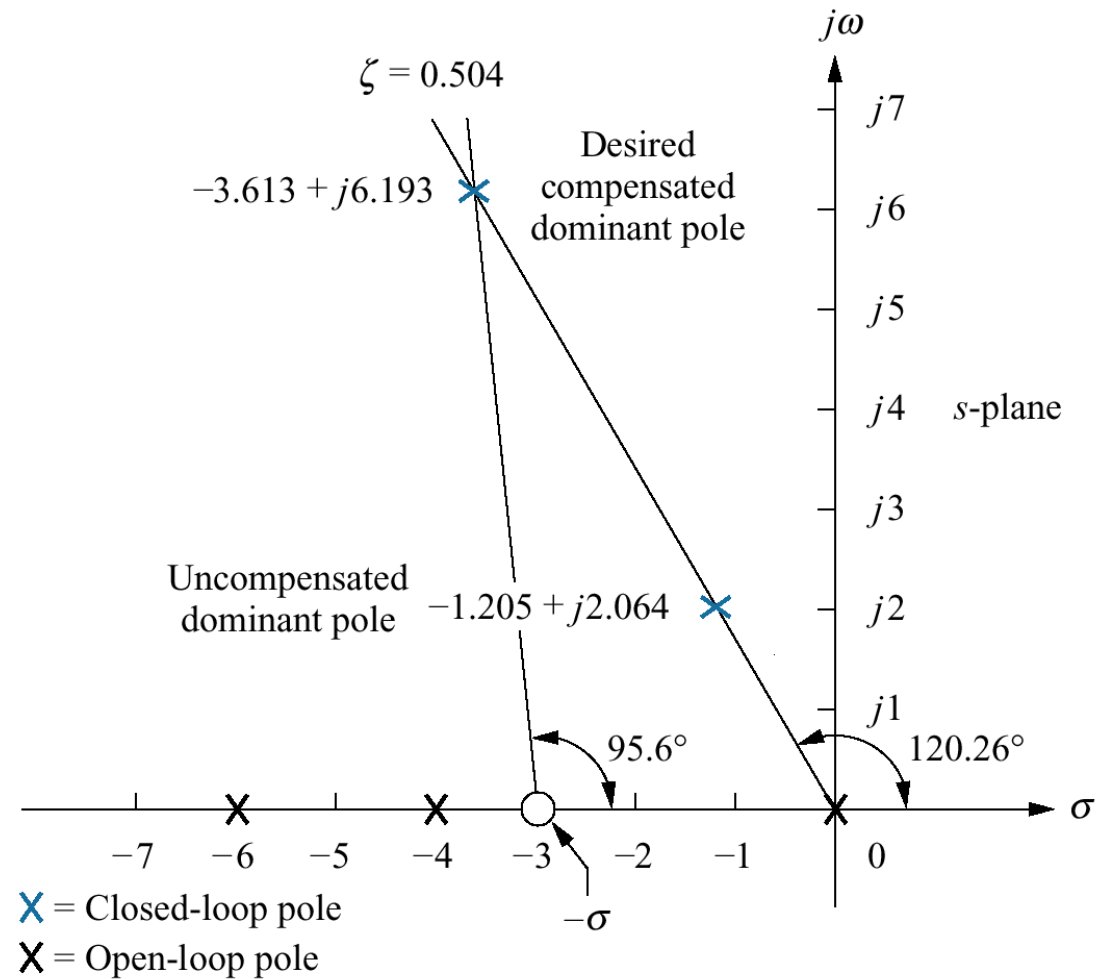
Calculate

Angle	-275.604993555581	Deg.
Mag	3.386596E-03	
Gain	295.2817	



- La geometría se muestra en la figura 9.20, donde ahora debemos despejar $-\sigma$, la ubicación del cero del compensador.
- De la figura,

$$\frac{6.193}{3.613 - \sigma} = \tan(180^\circ - 95.6^\circ) \quad (9.16)$$
- Entonces, $z_c = \sigma = 3.006$.
- El LGR completo para el sistema compensado se muestra en la figura 9.21.
- La tabla 9.3 resume los resultados tanto para el sistema no compensado como para el sistema compensado.



■ **Figura 9.20** Evaluación de la ubicación del cero del compensador para el ejemplo 9.3.



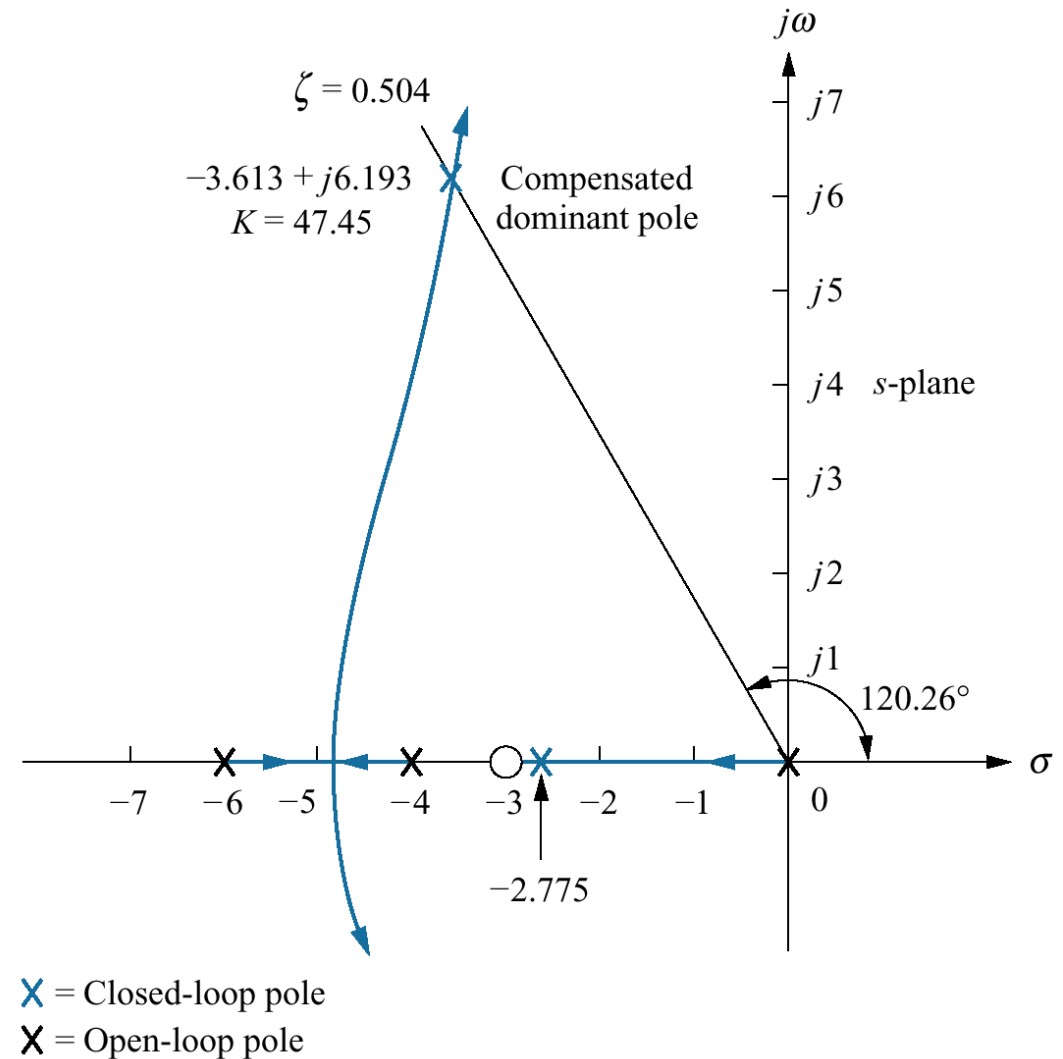
- Las características transitorias y de error en estado estable del sistema no compensado se resumen en la tabla 9.3.

	Uncompensated	Simulation	Compensated	Simulation
Plant and compensator	$\frac{K}{s(s+4)(s+6)}$		$\frac{K(s+3.006)}{s(s+4)(s+6)}$	
Dominant poles	$-1.205 \pm j2.064$		$-3.613 \pm j6.193$	
K	43.35		47.45	
ζ	0.504		0.504	
ω_n	2.39		7.17	
%OS	16	14.8	16	11.8
T_s	3.320	3.6	1.107	1.2
T_p	1.522	1.7	0.507	0.5
K_v	1.806		5.94	
$e(\infty)$	0.554		0.168	
Third pole	-7.591		-2.775	
Zero	None		-3.006	
Comments	Second-order approx. OK		Pole-zero not canceling	

- Tabla 9.3** Características de los sistemas no compensado y compensado para el ejemplo 9.3.



- Para el sistema no compensado, estimamos que la respuesta transitoria es precisa, ya que el tercer polo es por lo menos cinco veces la parte real del par dominante de segundo orden.
- **La aproximación de segundo orden para el sistema compensado, sin embargo, puede ser inválida porque no hay cancelación aproximada del tercer polo en lazo cerrado y un cero, entre el polo en lazo cerrado en -2.775 y el cero en lazo cerrado en -3.006.**
- Se necesita una simulación, o una expansión en fracciones parciales de la respuesta en lazo cerrado, para comparar el residuo del polo en -2.775 con los residuos de los polos dominantes en $-3.613 \pm 6.193j$.



■ **Figura 9.21** LGR para el sistema compensado del ejemplo 9.3.




```

>> rlocus(G1)
>> z=0.504;
>> sgrid(z,0)
>> [K,p]=rlocfind(G1)
Select a point in the graphics window

selected_point =

    -3.6127 + 6.1916i

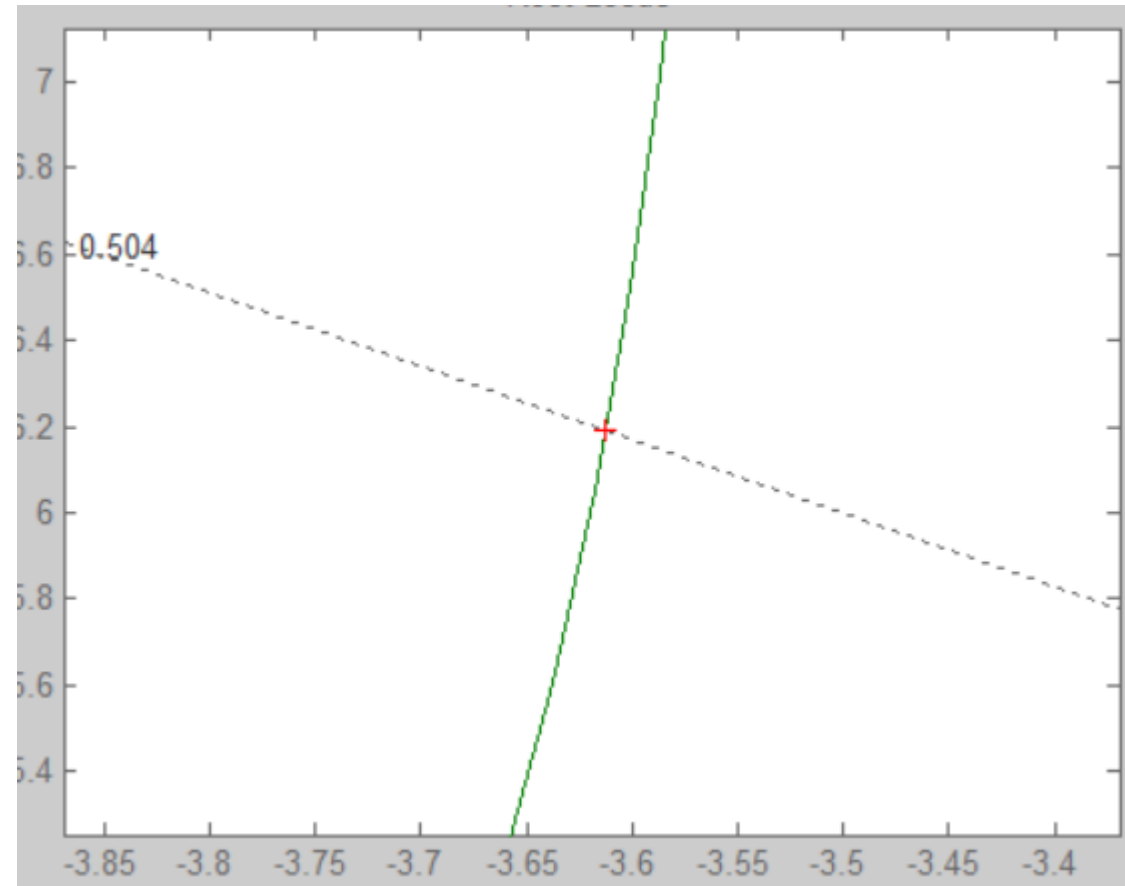
K =

    47.4357

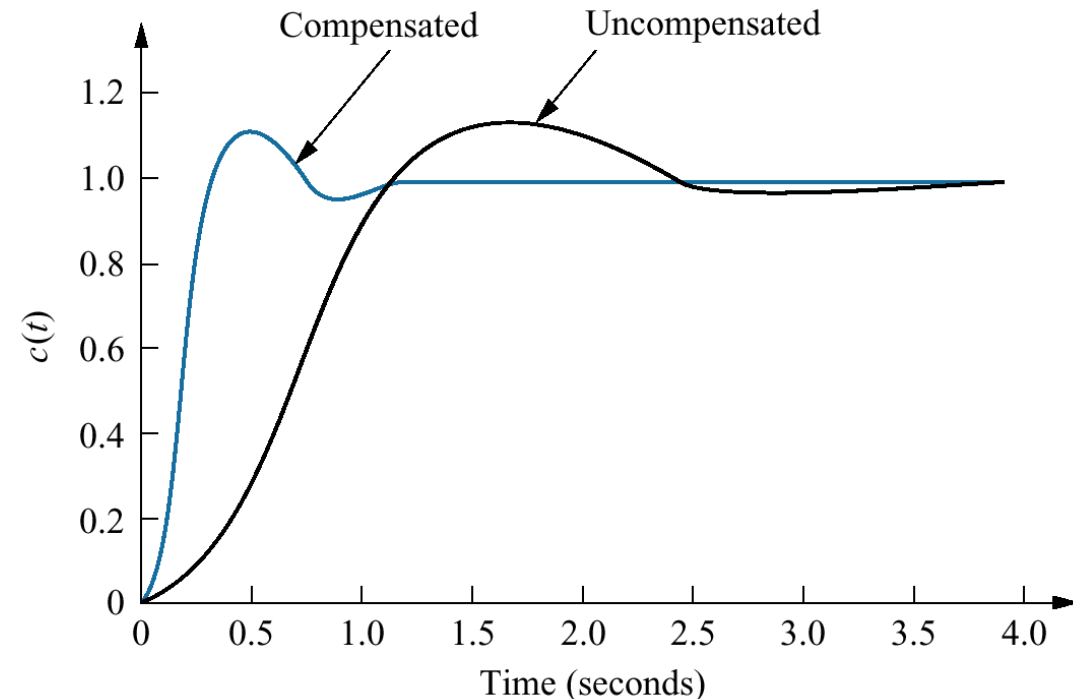
p =

    -3.6126 + 6.1916i
    -3.6126 - 6.1916i
    -2.7749 + 0.0000i

```



- Los resultados de una simulación se ilustran en la segunda columna para el sistema no compensado y la cuarta columna para el sistema compensado.
- Los resultados de simulación se pueden obtener usando MATLAB.
- El sobrepaso en porcentaje difiere en 3% los sistemas no compensado y compensado, mientras que hay una mejoría de aproximadamente tres veces en la velocidad cuando se evalúa a partir del tiempo de asentamiento.
- Los resultados finales se ilustran en la figura 9.22, que compara el sistema o compensado y el más rápido sistema compensado.



- **Figura 9.22** Respuestas escalón del sistema no compensado y compensado del ejemplo 9.3.

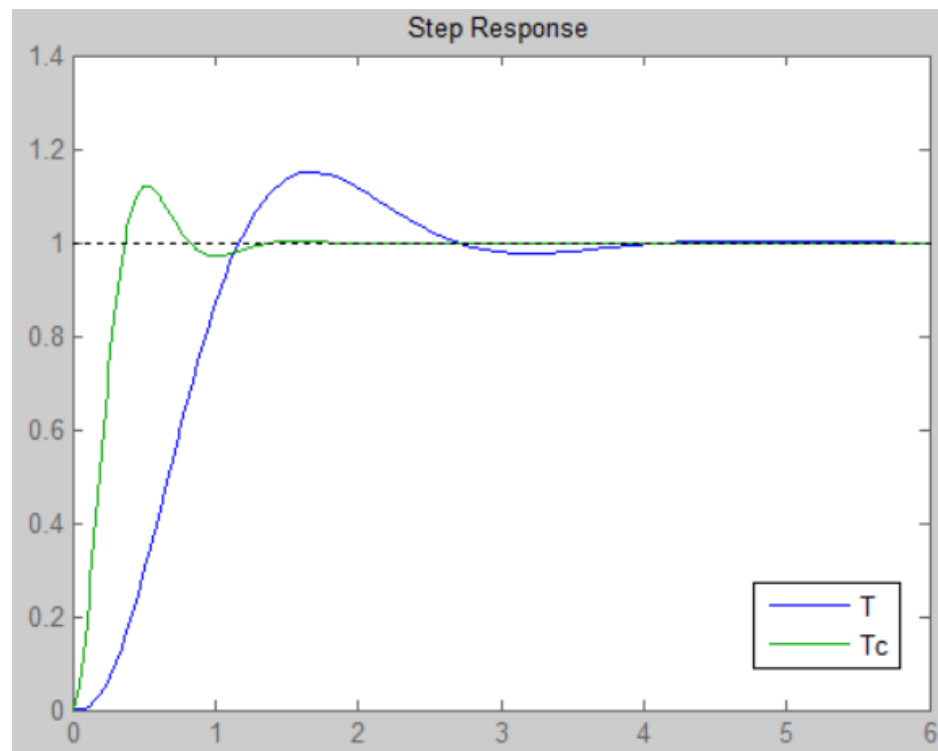


```
>> Knc=43.35;
>> Ge=Knc*G;
>> T=feedback(Ge,1)
```

T =

$$\frac{43.35}{s^3 + 10 s^2 + 24 s + 43.35}$$

Continuous-time transfer function.



```
>> nPI=[1 3.006];
>> G1=tf(nPI,denG)
```

G1 =

$$\frac{s + 3.006}{s^3 + 10 s^2 + 24 s}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> GPI=K*G1
```

GPI =

$$\frac{47.45 s + 142.6}{s^3 + 10 s^2 + 24 s}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> Tc=feedback(GPI,1)
```

Tc =

$$\frac{47.45 s + 142.6}{s^3 + 10 s^2 + 71.45 s + 142.6}$$

Continuous-time transfer function.

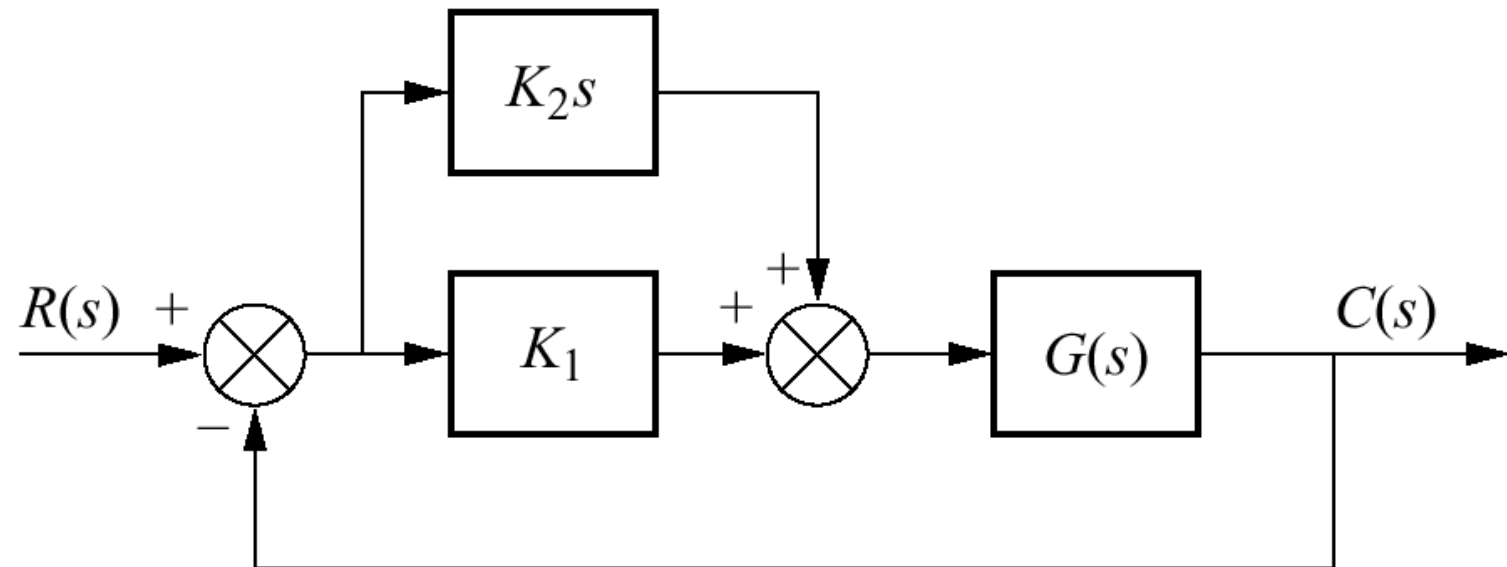
```
>> step(T,Tc)
```



- Una vez que se haya determinado la ubicación del cero del compensador, ¿cómo se implementa el controlador PD?
- El compensador derivativo ideal empleado para mejorar la respuesta transitoria se pone en práctica con un controlador PD.
- Por ejemplo, en la figura 9.23 la función del controlador es

$$G_c(s) = K_2s + K_1 = K_2 \left(s + \frac{K_1}{K_2} \right) \quad (9.17)$$

- Por lo tanto, K_1/K_2 se selecciona para igual el valor negativo del cero del compensador, y K_2 se selecciona para aportar al valor necesario de ganancia de lazo.



▪ **Figura 9.23** Controlador PD.





- **MATLAB:**

- Los estudiantes que utilicen MATLAB deben correr ahora el ch9p1, del apéndice B.
- El estudiante utilizará el MATLAB para diseñar un controlador PD y, desde el teclado, introducirá el sobrepaso en porcentaje deseado.
- MATLAB trazará la gráfica del LGR del sistema no compensado y la línea de sobrepaso en porcentaje.
- De manera interactiva es posible seleccionar la ganancia, tras lo cual MATLAB exhibirá la características de operación del sistema no compensado y graficará su respuesta escalón; con el uso de estas características, el estudiante introducirá el tiempo de asentamiento deseado.
- MATLAB diseña el controlador PD, enumera sus características de operación y grafica una respuesta escalón.
- Este ejercicio resuelve el ejemplo 9.3 usando MATLAB.



Capítulo 9 Diseño mediante el lugar geométrico de las raíces

ch9p1 (Ejemplo 9.3) Se puede usar el MATLAB para diseñar controladores PD. El programa nos permite ingresar a través del teclado un sobrepaso en porcentaje deseado. El MATLAB entonces produce un lugar geométrico de las raíces para el sistema sin compensar con la sobreposición de una línea de sobrepaso en porcentaje. Seleccionamos en forma interactiva la intersección del lugar geométrico de las raíces con la línea del sobrepaso en porcentaje deseado para fijar la ganancia. MATLAB nos proporciona un estimado de las especificaciones de desempeño del sistema sin compensar y una respuesta escalón del sistema sin compensar para determinar el tiempo de asentamiento requerido. Después de que se ingresa el tiempo de asentamiento a través del teclado, MATLAB diseña el controlador PD y produce el lugar geométrico de las raíces del sistema compensado con el PD, a partir del cual se puede seleccionar la ganancia en forma interactiva. Por último, MATLAB produce un estimado de las especificaciones de desempeño del sistema compensado con el PD y una respuesta escalón del sistema compensado con el PD.

```
'(ch9p1) Ejemplo 9.3' % Desplegar etiqueta.
clf % Borrar gráfica de la pantalla.
'Sistema sin compensar' % Desplegar etiqueta.
numg=1; % Generar numerador de G(s).
deng=poly([0 -4 -6]); % Generar denominador de G(s).
'G(s)' % Desplegar etiqueta.
G=tf(numg,deng) % Crear y desplegar G(s).
pos=input('Escriba el sobrepaso en porcentaje deseado ');
% Ingresar el sobrepaso en
% porcentaje deseado.
z=-log(pos/100)/sqrt(pi^2+[log(pos/100)]^2);
% Calcular el factor de
% amortiguamiento relativo.
rlocus(G) % Graficar el lugar geométrico de
% las raíces sin compensar.
sgrid(z,0) % Sobreponer la línea del sobrepaso
% en porcentaje deseado.
title(['Lugar Geométrico de las Raíces sin Compensar
con ', num2str(pos),...
'% Línea de sobrepaso']) % Título del lugar geométrico de las
% raíces sin compensar.
[K,p]=rlocfind(G); % Generar ganancia, K, y los polos
% en lazo cerrado, p, para el punto elegido
% en forma interactiva sobre el lugar
% geométrico de las raíces.
'Closed-loop poles = ' % Desplegar etiqueta.
p % Desplegar los polos en lazo cerrado.
f=input('Dar el número del polo que está en el punto de operación ');
% Elegir el polo dominante del
% sistema sin compensar.
'Resumen de las especificaciones estimadas para el punto seleccionado sobre'
'el lugar geométrico de las raíces sin compensar'
% Desplegar etiqueta.
operatingpoint=p(f) % Desplegar el polo dominante
% sin compensar.
gain=K % Desplegar la ganancia sin compensar.
```

```

sgrid(z,0) % Sobreponer la línea del sobrepaso
           % en porcentaje deseado.
title(['Lugar Geométrico de las Raíces del Sistema
compensado con PD ', num2str(pos),...
'% Línea de Sobrepaso']) % Adicionar título al lugar geométrico de
                        % las raíces del sistema compensado con PD.
[K,p]=rlocfind(Ge); % Generar ganancia, K, los polos en lazo cerrado, p,
                  % para el punto elegido en forma interactiva sobre
                  % el lugar geométrico de las raíces.
'Closed-loop poles = ' % Desplegar etiqueta.
p % Desplegar los polos del sistema en
  % lazo cerrado compensado con PD.
f=input('Dar el número del polo que está en el punto de operación ');
  % Elegir el polo dominante del
  % sistema compensado con PD.
'Resumen de las especificaciones estimadas para el punto seleccionado sobre'
'el lugar geométrico de las raíces compensado con PD' % Desplegar etiqueta.
operatingpoint=p(f) % Desplegar el polo dominante del
                   % sistema compensado con PD.
gain=K % Desplegar la ganancia del sistema compensado con PD.
estimated_settling_time=4/abs(real(p(f)))
  % Desplegar el tiempo de asentamiento
  % del sistema compensado con PD.
estimated_peak_time=pi/abs(imag(p(f)))
  % Desplegar el tiempo pico del sistema compensado
  % con PD.
estimated_percent_overshoot=pos
  % Desplegar el sobrepaso en porcentaje
  % del sistema compensado con PD.
estimated_damping_ratio=z % Desplegar el factor de amortiguamiento
  % relativo del sistema compensado con PD.
estimated_natural_frequency=sqrt(real(p(f))^2+imag(p(f))^2)
  % Desplegar la frecuencia natural no
  % amortiguada del sistema compensado con PD.
s=tf([1 0],1); % Crear la función de transferencia, 's'.
sGe=s*Ge; % Crear sGe(s).
sGe=minreal(sGe); % Cancelar los polos y ceros comunes.
Kv=dcgain(K*sGe) % Desplegar la Kv compensada.
ess=1/Kv % Desplegar el error en estado
  % estable para una entrada rampa.
'T(s)' % Desplegar etiqueta.
T=feedback(K*Ge,1) % Crear y desplegar la T(s) compensada con PD.
'Presione cualquier tecla para continuar y obtener la'
' respuesta escalón del sistema compensado con PD'
  % Desplegar etiqueta.

pause
step(T) % Graficar la respuesta escalón
        % del sistema compensado con PD.

title(['Respuesta escalón del sistema compensado con PD ', num2str(pos),...
'% sobrepaso']) % Adicionar título a la gráfica de la
                % respuesta escalón del sistema compensado
                % con PD.

pause

```

```

estimated_settling_time=4/abs(real(p(f)))
  % Desplegar el tiempo de asentamiento sin compensar.
estimated_peak_time=pi/abs(imag(p(f)))
  % Desplegar el tiempo pico sin compensar.
estimated_percent_overshoot=pos
  % Desplegar el sobrepaso en porcentaje sin compensar.
estimated_damping_ratio=z % Desplegar el factor de
  % amortiguamiento relativo sin compensar.
estimated_natural_frequency=sqrt(real(p(f))^2+imag(p(f))^2)
  % Desplegar la frecuencia natural
  % no amortiguada sin compensar.
numkv=conv([1 0],numg); % Inicializar el numerador para evaluar Kv.
denkv=deng; % Inicializar el denominador para evaluar Kv.
sG=tf(numkv,denkv); % Crear sG(s).
sG=minreal(sG); % Cancelar polos y ceros comunes.
Kv=dcgain(K*sG) % Desplegar Kv sin compensar.
ess=1/Kv % Desplegar el error en estado estable
  % sin compensar para una entrada rampa.
'T(s)' % Desplegar etiqueta.
T=feedback(K*G,1) % Determinar T(s) sin compensar.
step(T) % Graficar la respuesta escalón
  % del sistema sin compensar.
title(['Respuesta escalón del sistema sin compensar con ', num2str(pos),...
'% Overshoot']) % Adicionar título a la respuesta
  % escalón sin compensar.
'Presionar cualquier tecla para ir al compensado PD'
  % Desplegar etiqueta.

pause
'Sistema compensado' % Desplegar etiqueta.
Ts=input('Type Desired Settling Time ');
  % Ingresar el tiempo de asentamiento
  % deseado, desde el teclado.
wn=4/(Ts*z); % Calcular la frecuencia natural no amortiguada.
desired_pole=(-z*wn)+(wn*sqrt(1-z^2)*i);
  % Calcular la ubicación del polo dominante deseado.
angle_at_desired_pole=(180/pi)*...
angle(polyval(numg,desired_pole)/polyval(deng,desired_pole));
  % Calcular la contribución angular al polo
  % deseado sin el compensador PD.
PD_angle=180-angle_at_desired_pole;
  % Calcular la contribución angular
  % requerida del compensador PD.
zc=((imag(desired_pole)/tan(PD_angle*pi/180))-real(desired_pole));
  % Calcular la localización del cero del PD.
'Compensador PD' % Desplegar etiqueta.
numc=[1 zc]; % Calcular numerador de Gc(s).
denc=[0 1]; % Calcular denominador de Gc(s).
'Gc(s)' % Desplegar etiqueta.
Gc=tf(numc,denc) % Crear y desplegar Gc(s).
'G(s)Gc(s)' % Desplegar etiqueta.
Ge=G*Gc % Poner en cascada G(s) y Gc(s).
rlocus(Ge,0:0.5:100) % Graficar el lugar geométrico de
  % las raíces del compensado con PD.

```



9.4 MEJORAMIENTO DEL ERROR EN ESTADO ESTABLE Y LA RESPUESTA EN ESTADO ESTABLE

- A continuación combinamos las técnicas de diseño estudiadas en las secciones 9.2 y 9.3 para obtener la mejoría en el error en estado estable y en la respuesta transitoria **independientemente**.
- En esencia, primero mejoramos la respuesta transitoria mediante el uso del método del controlador PD y, en seguida, mejoramos el error en estado estable de este sistema compensado al aplicar el método del controlador PI.
- Una ligera desventaja de este método es la ligera disminución de la velocidad de la respuesta cuando se mejora el error en estado estable.



- Como alternativa, podemos mejorar primero el error en estado estable y luego seguir con el diseño para mejorar la respuesta transitoria.
- Una desventaja de este método es que la mejoría en respuesta transitoria, en algunos casos, deteriora la mejoría del error en estado estable, que se diseño primero.
- En otros casos, la mejoría en la respuesta transitoria da una mejoría posterior de los errores en estado estable.
- Así, un sistema puede tener un exceso de diseño con respecto a los errores en estado estable.
- En este curso, **primero diseñamos para la respuesta transitoria y luego para el error en estado estable.**
- Si diseñamos un controlador PD seguido de un PI, el compensador resultante se llama **controlador Proporcional Integral Derivativo PID.**

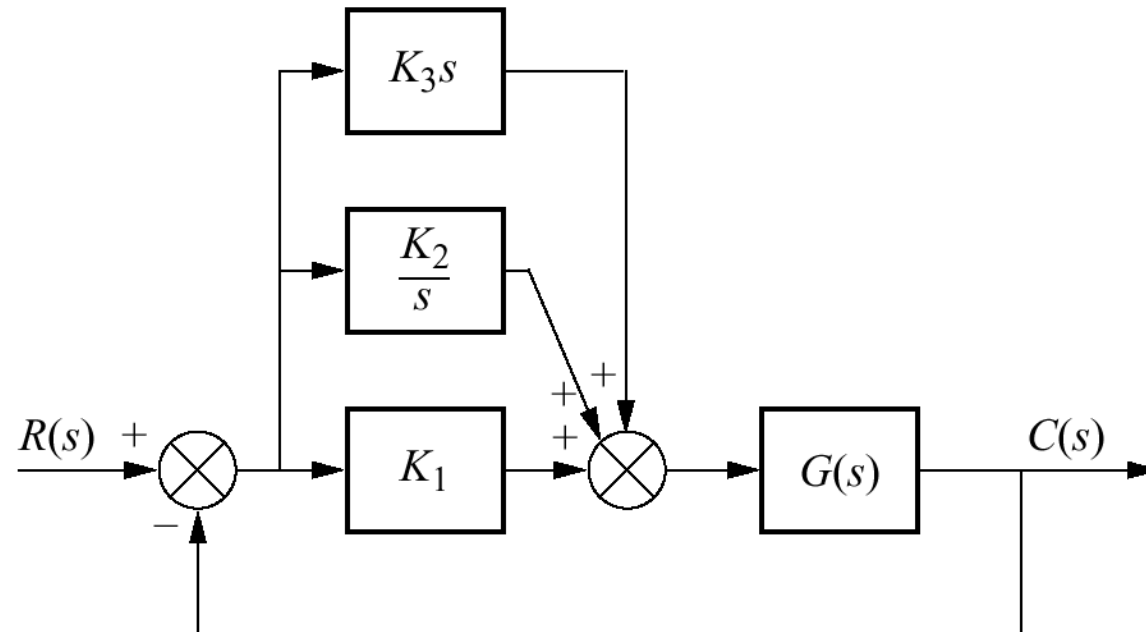


- **Diseño de un controlador PID**

- En la figura 9.30 se ilustra un controlador PID. Su función de transferencia es

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3s = \frac{K_1s + K_2 + K_3s^2}{s} = \frac{K_3 \left(s^2 + \frac{K_1}{K_3}s + \frac{K_2}{K_3} \right)}{s} \quad (9.21)$$

- Que tiene dos ceros más un polo en el origen. Un cero y un polo en el origen se pueden diseñar como el controlador PI; el otro cero se puede diseñar como el controlador PD.



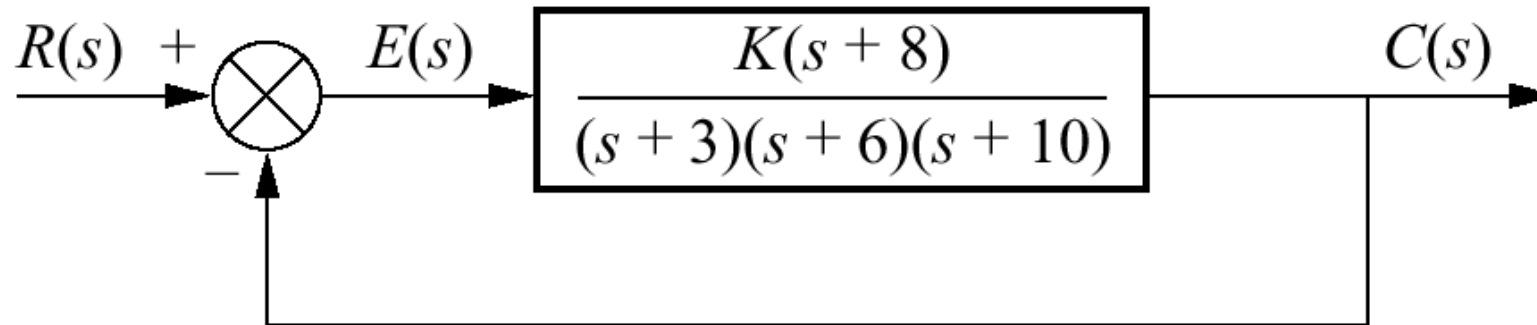
- **Figura 9.30** Controlador PID.



- La técnica de diseño, que se demuestra en el ejemplo 9.5, consta de los siguientes pasos:
 1. Evaluación del desempeño del sistema no compensado para determinar cuánta mejoría se necesita en la respuesta transitoria.
 2. Diseño del controlador PD para satisfacer las especificaciones de respuesta transitoria. El diseño incluye la ubicación del cero y la ganancia de lazo.
 3. Simulación del sistema para estar seguros que todos los requerimientos se hayan satisfecho.
 4. Rediseño si la simulación demuestra que los requerimientos no se han satisfecho.
 5. Diseño del controlador PI para obtener el error necesario en estado estable.
 6. Determinación de las ganancias, K_1 , K_2 y K_3 , en la figura 9.30.
 7. Simulación del sistema para estar seguros que todos los requerimientos se hayan satisfecho.
 8. Rediseño si la simulación demuestra que los requerimientos no se han satisfecho



- **Ejemplo 9.5 Diseño de un controlador PID**
- **Problema:** Dado el sistema de la figura 9.31, diseñar un controlador PID para que el sistema pueda operar con un tiempo pico que es dos tercios del tiempo pico de un sistema no compensado a 20% de sobrepaso, y con error en estado cero para una entrada escalón.

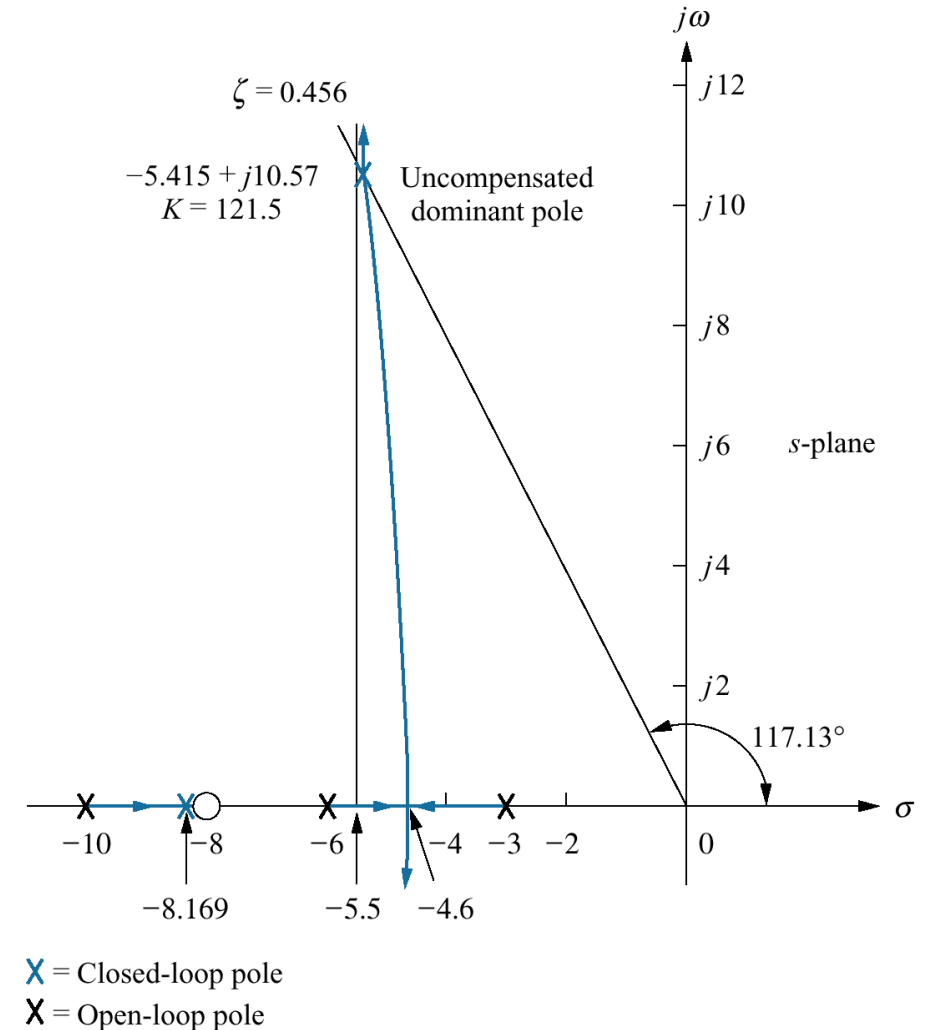


- **Figura 9.31** Sistema no compensado de control realimentado para el ejemplo 9.5.



- **Solución:** Nótese que nuestra solución sigue el procedimiento de ocho pasos descritos.
- **Paso 1** Primero vamos a evaluar el sistema no compensado que opera a 20% de sobrepaso.
- Buscando a lo largo de la línea de 20% de sobrepaso ($\zeta=0.456$) en la figura 9.32, encontramos que los polos dominantes son $-5.415 \pm j10.57$ con una ganancia de 121.5.
- Estimamos que el sistema no compensado tiene un T_p de 0.297 segundos al 20% de sobrepaso.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{10.57} = 0.297$$



- **Figura 9.32** LGR para el sistema no compensado del ejemplo 9.5.



```

>> numG=[1 8];
>> denG=poly([-3 -6 -10]);
>> G=tf(numG,denG)

G =

          s + 8
-----
s^3 + 19 s^2 + 108 s + 180

Continuous-time transfer function.

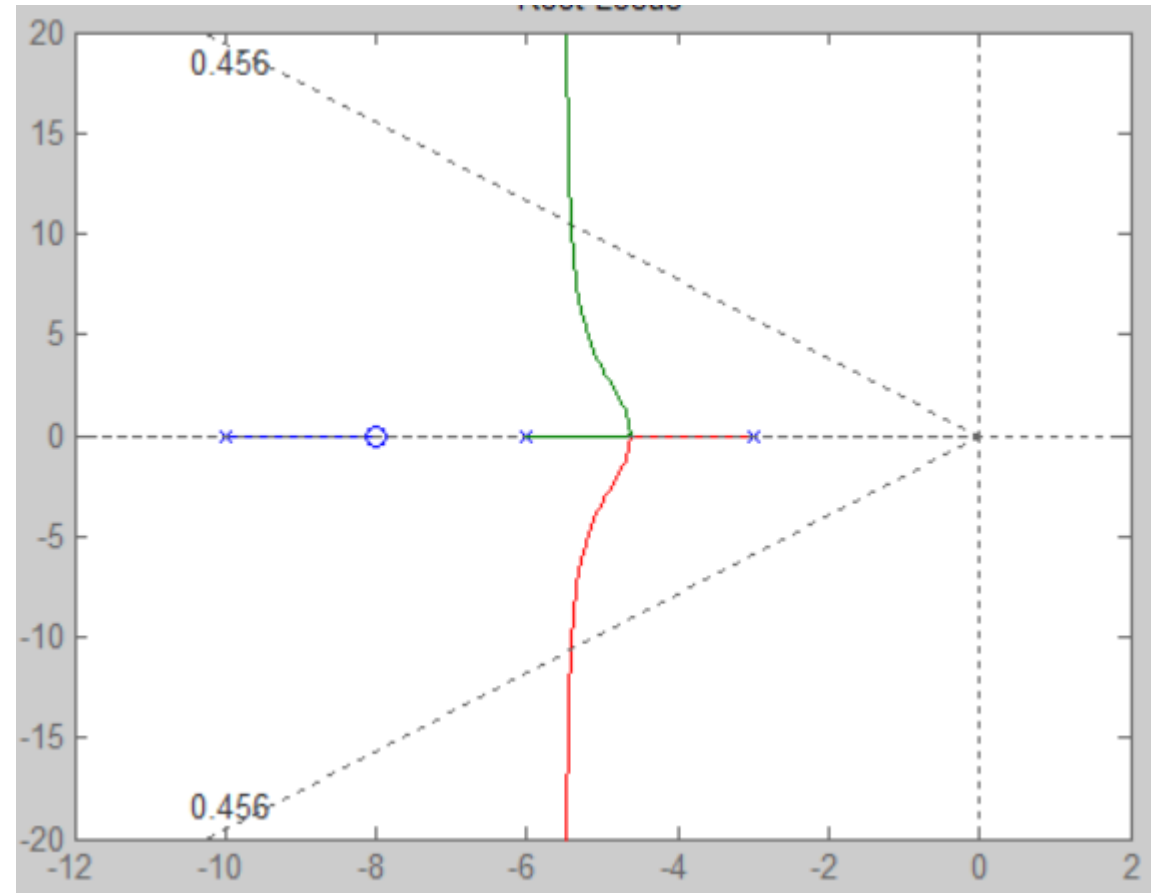
>> pos=20;
>> z=-log(pos/100)/sqrt(pi^2+[log(pos/100)]^2)

z =

    0.4559

>> rlocus(G)
>> sgrid(z,0)

```

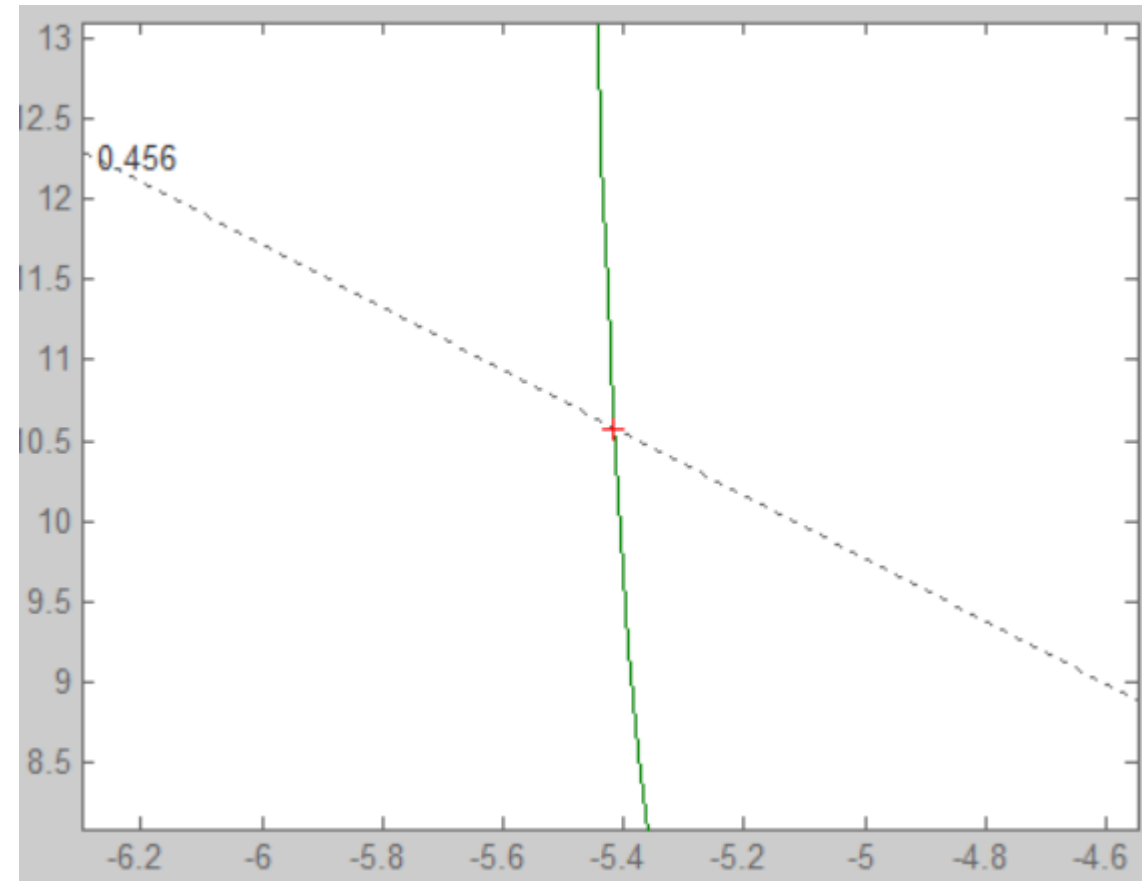


```
>> [K,p]=rlocfind(G)  
Select a point in the graphics window
```

```
selected_point =  
  
-5.4156 +10.5688i
```

```
K =  
  
121.5050
```

```
p =  
  
-5.4155 +10.5688i  
-5.4155 -10.5688i  
-8.1689 + 0.0000i
```



- **Paso 2** Para compensar el sistema para reducir el tiempo pico a dos tercios del tiempo del sistema no compensado, debemos primero hallar la ubicación del polo dominante del sistema compensado. La parte imaginaria del polo dominante compensado es

$$\omega_d = \frac{\pi}{T_p} = \frac{\pi}{(2/3)(0.297)} = 15.87 \quad (9.22)$$

- Entonces, la parte real del polo dominante compensado es

$$\sigma = \frac{\omega_d}{\tan 117.13^\circ} = -8.13 \quad (9.23)$$

- Si se usa el programa del LGR, encontramos que la suma de ángulos desde los polos y ceros del sistema no compensado hasta el polo dominante deseado es -198.37° .

Poles		Number	Zeros		Number
Re	Im		Re	Im	
-3	0	3	-8	0	1
-6	0				
-10	0				

Test Point		Re	Im
Polar	<input type="radio"/> Cartesian <input checked="" type="radio"/>	-8.13	15.87

Calculate	Angle	-198.367985594154	Deg.
	Mag	3.718849E-03	
	Gain	268.9004	



- Así, la aportación necesaria desde el cero compensador es $180^\circ - 193,37^\circ = 18,37^\circ$. Supóngase que el cero del compensador está ubicado en $-Z_c$, como se ve en la figura 9.33. Como

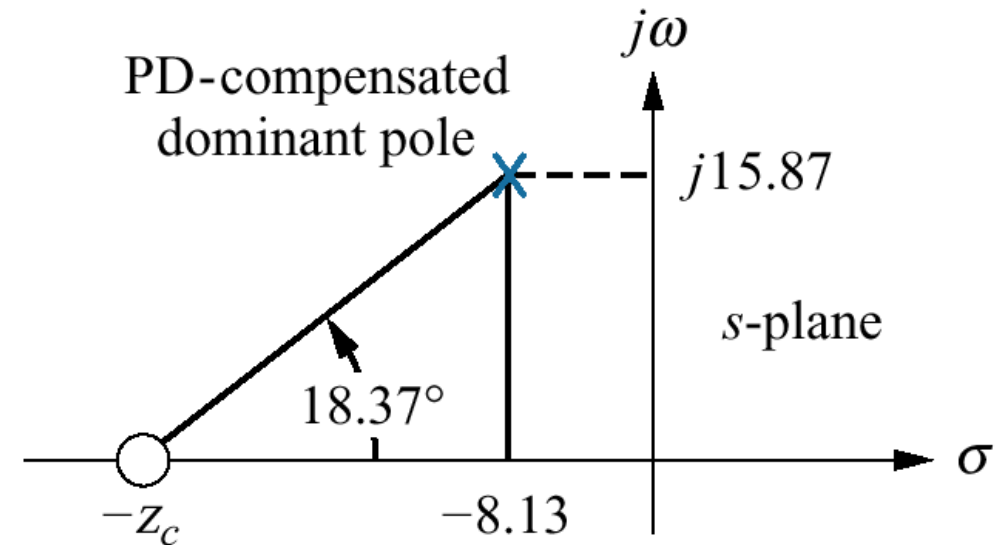
$$\frac{15.87}{z_c - 8.13} = \tan 18.37^\circ \quad (9.24)$$

- Entonces

$$z_c = 55.92 \quad (9.25)$$

- Así, el controlador PD

$$G_{PD}(s) = (s + 55.92) \quad (9.26)$$



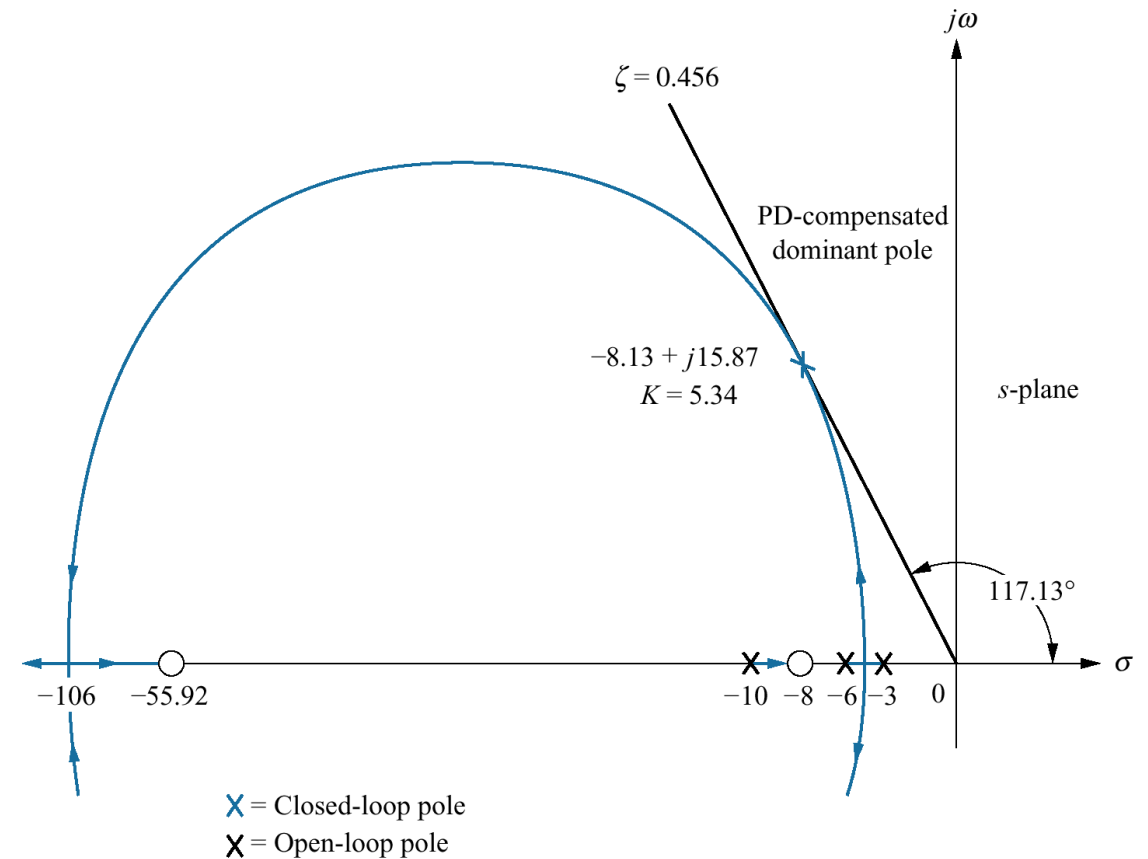
X = Closed-loop pole

Note: This figure is not drawn to scale.

- Figura 9.33** Cálculo del cero del compensador PD para el ejemplo 9.5.



- El LGR para el sistema compensado PD se traza en la figura 9.34.
- Con el uso del programa del LGR, la ganancia en el punto de diseño 5.34.



Note: This figure is not drawn to scale.

- **Figura 9.34** LGR para el sistema compensador PD del ejemplo 9.5.



```
>> GPD=tf(conv(nPD,numG),denG)
```

GPD =

$$\frac{s^2 + 63.92 s + 447.4}{s^3 + 19 s^2 + 108 s + 180}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> rlocus(GPD)
```

```
>> sgrid(z,0)
```

```
>> [K,p]=rlocfind(GPD)
```

Select a point in the graphics window

selected_point =

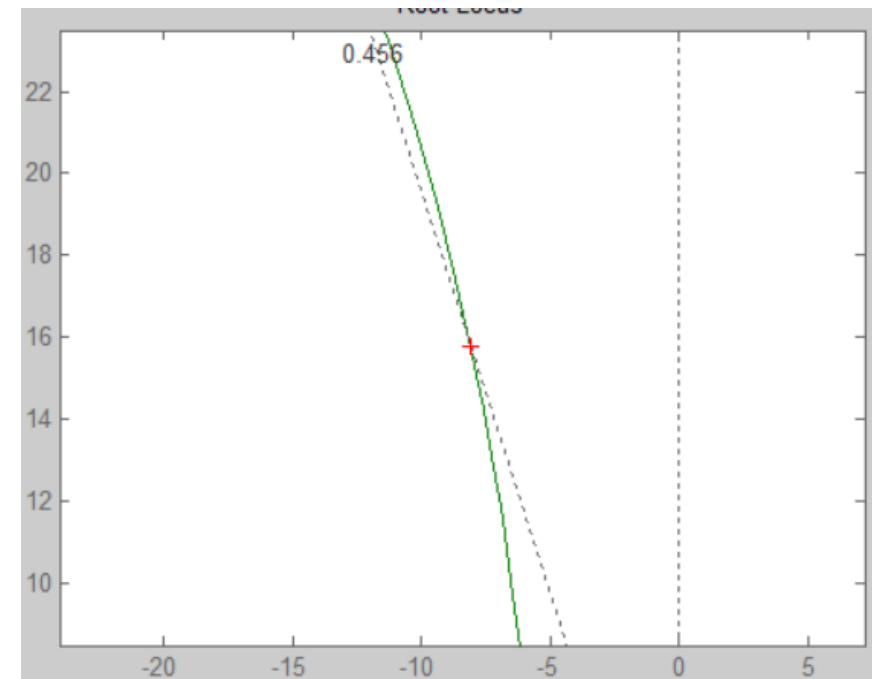
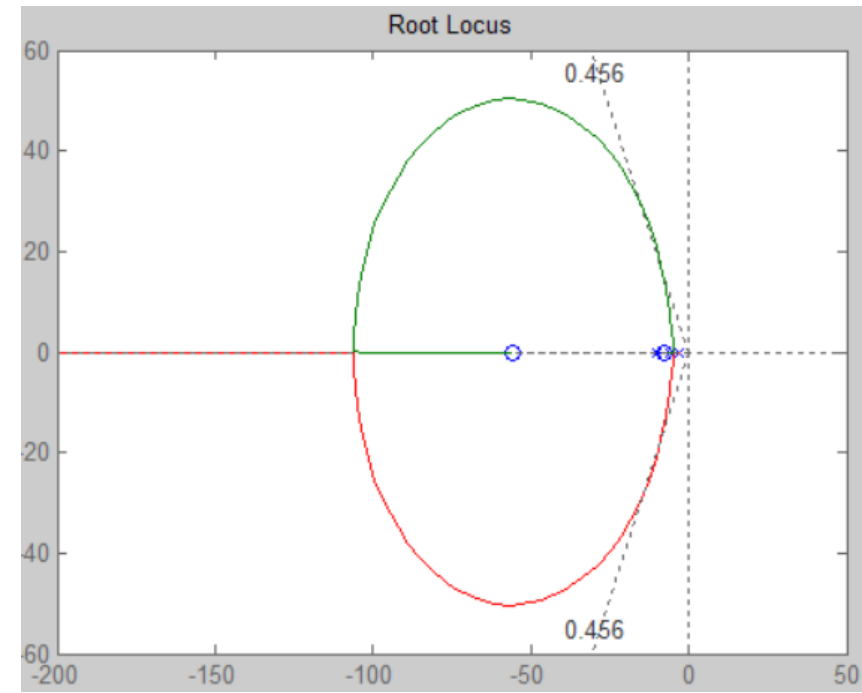
-8.0831 +15.7895i

K =

5.2826

p =

-8.1012 +15.7834i
-8.1012 -15.7834i
-8.0803 + 0.0000i



- **Paso 3 y 4** Simulamos el sistema PD, vemos la reducción en el tiempo pico y la mejora en el error en estado estable sobre el sistema no compensado.

```
>> numG=[1 8];
>> denG=poly([-3 -6 -10]);
>> G=tf(numG,denG)

G =
          s + 8
-----
s^3 + 19 s^2 + 108 s + 180

Continuous-time transfer function.

>> Knc=121.5;
>> Ge=Knc*G

Ge =
      121.5 s + 972
-----
s^3 + 19 s^2 + 108 s + 180

Continuous-time transfer function.

>> Tnc=feedback(Ge,1)

Tnc =
      121.5 s + 972
-----
s^3 + 19 s^2 + 229.5 s + 1152

Continuous-time transfer function.
```

```
>> nPD=[1 55.92];
>> GPD=tf(conv(nPD,numG),denG)

GPD =
      s^2 + 63.92 s + 447.4
-----
s^3 + 19 s^2 + 108 s + 180

Continuous-time transfer function.

>> K=5.34;
>> GPDe=K*GPD

GPDe =
      5.34 s^2 + 341.3 s + 2389
-----
s^3 + 19 s^2 + 108 s + 180

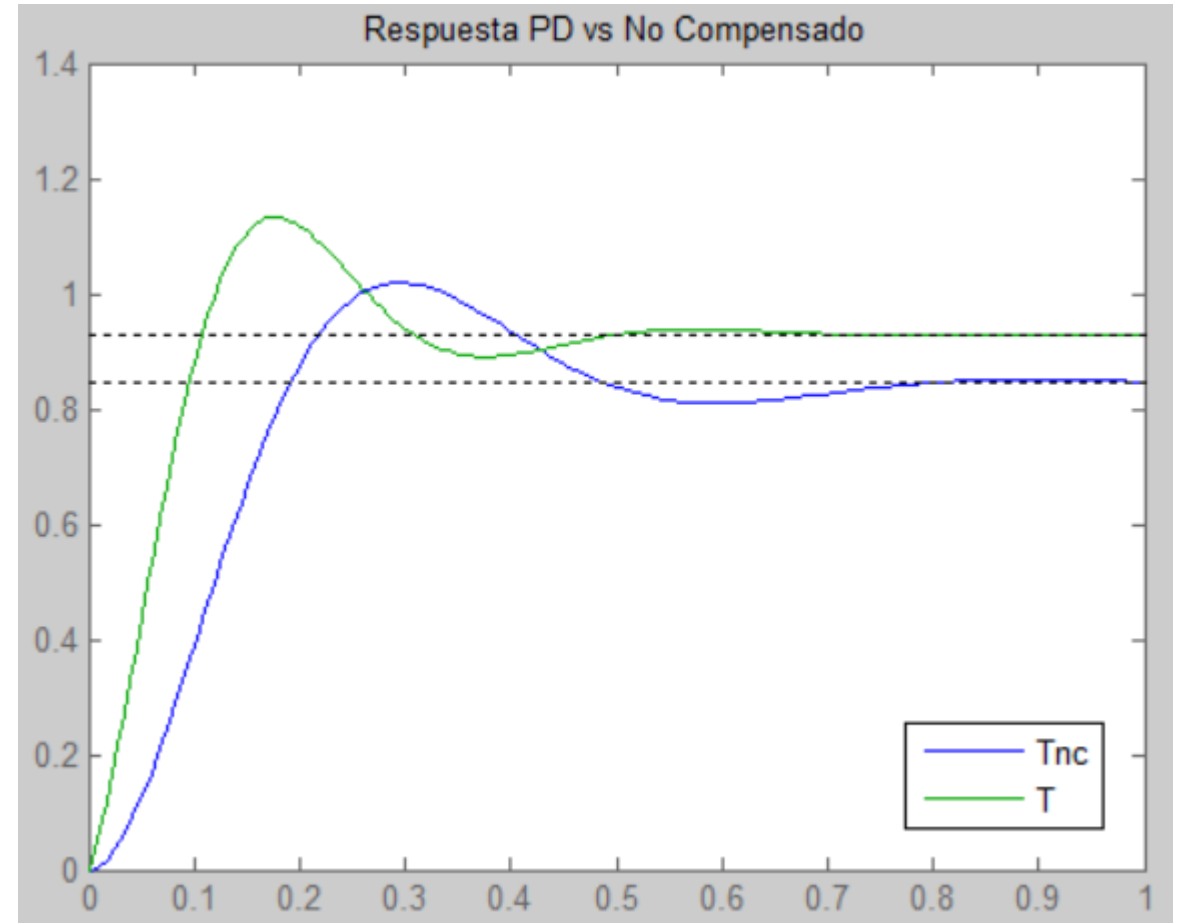
Continuous-time transfer function.

>> T=feedback(GPDe,1)

T =
      5.34 s^2 + 341.3 s + 2389
-----
s^3 + 24.34 s^2 + 449.3 s + 2569

Continuous-time transfer function.

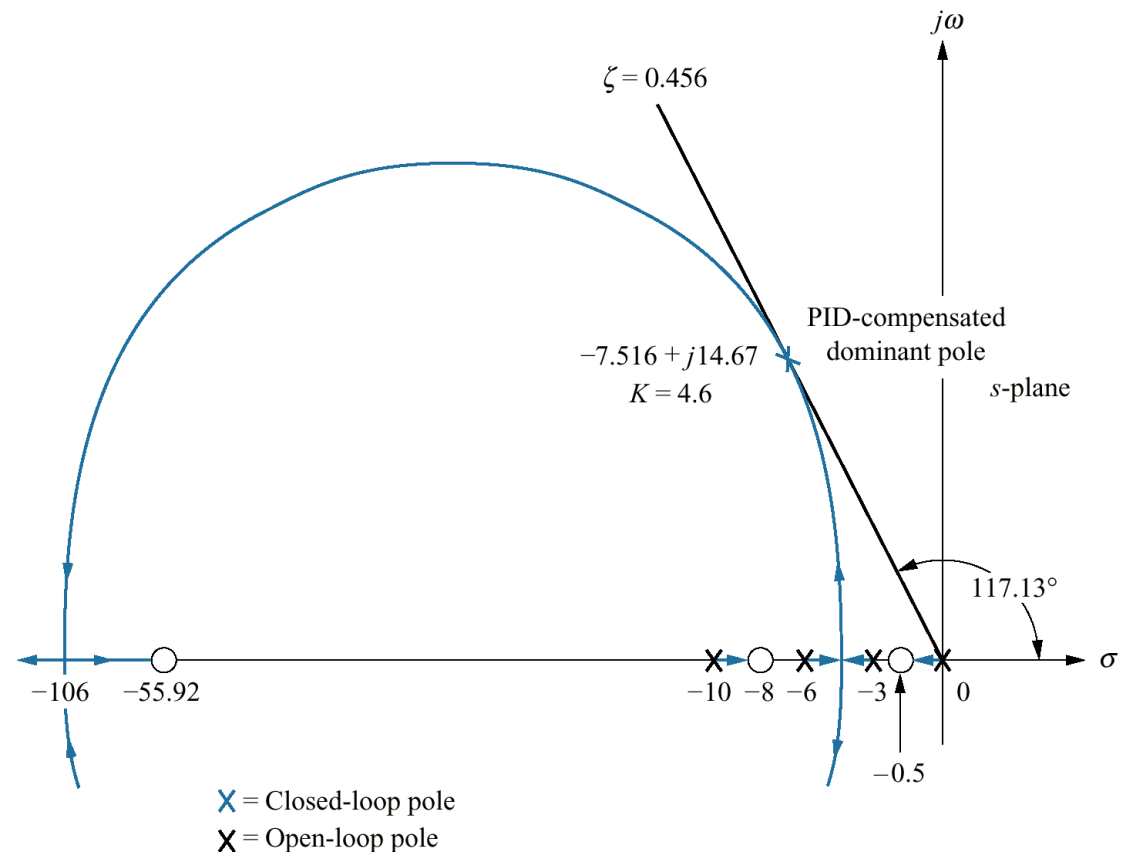
>> step(Tnc,T)
>> title('Respuesta PD vs No Compensado')
```



- **Paso 5** Una vez diseñado el controlador PD, diseñamos el compensador integral ideal para reducir a cero el error en estado estable para una entrada escalón.
- Cualquier controlador PI, mientras el cero se coloque cerca del origen. Seleccionando que el controlador PI sea

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0.5}{s} \quad (9.27)$$

- Trazamos el LGR para el sistema compensado con el PID, como se ve en la figura 9.36.
- Al buscar la línea de factor de amortiguamiento relativo de 0.456, encontramos que los polos dominantes de segundo orden son $-7.516 \pm j14.67$, con una ganancia relacionada de 4.6.



Note: This figure is not drawn to scale.

- **Figura 9.36** LGR para el sistema compensado PID del ejemplo 9.5.



```
>> GPID=GPD*GPI
```

```
GPID =
```

$$\frac{s^3 + 64.42 s^2 + 479.3 s + 223.7}{s^4 + 19 s^3 + 108 s^2 + 180 s}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> rlocus(GPID)
```

```
>> sgrid(z,0)
```

```
>> [K,p]=rlocfind(GPID)
```

Select a point in the graphics window

```
selected_point =
```

```
-7.4464 +14.5925i
```

```
K =
```

```
4.5442
```

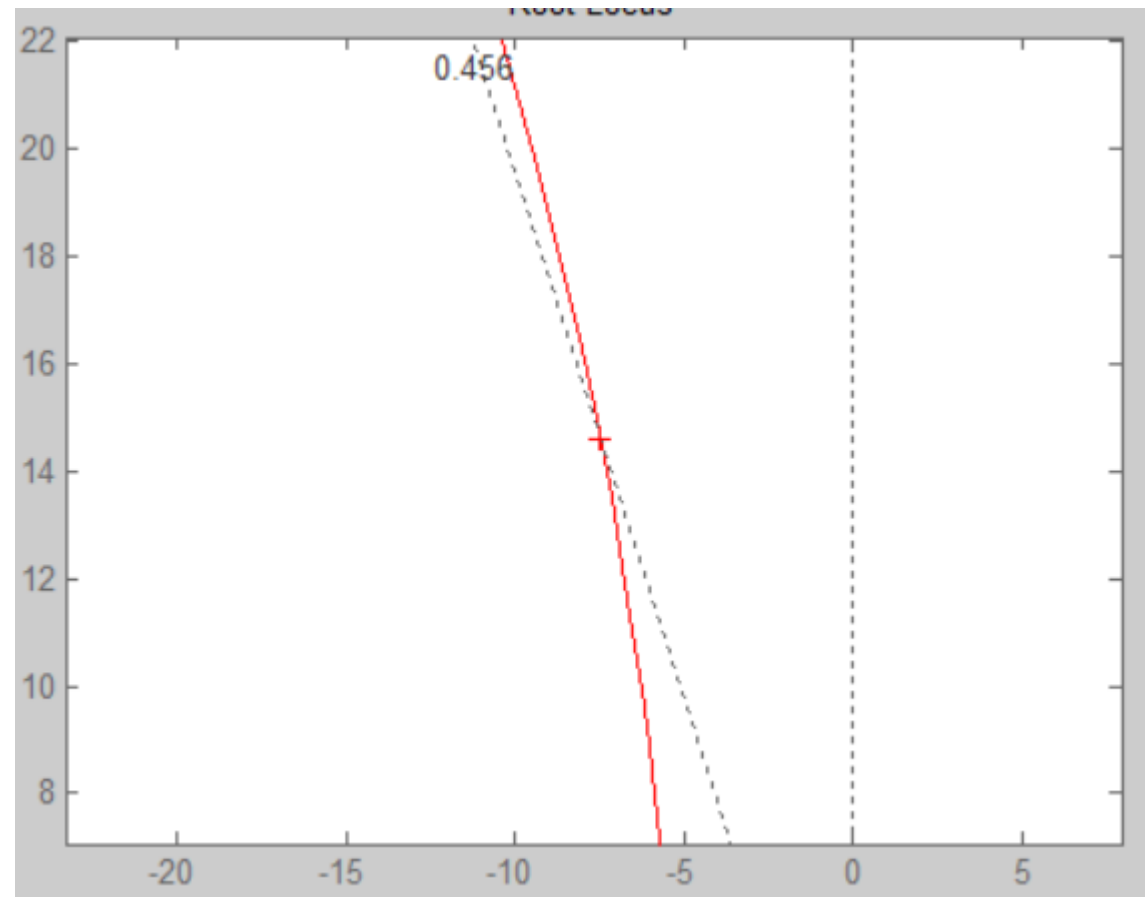
```
p =
```

```
-7.4887 +14.5796i
```

```
-7.4887 -14.5796i
```

```
-8.0998 + 0.0000i
```

```
-0.4671 + 0.0000i
```



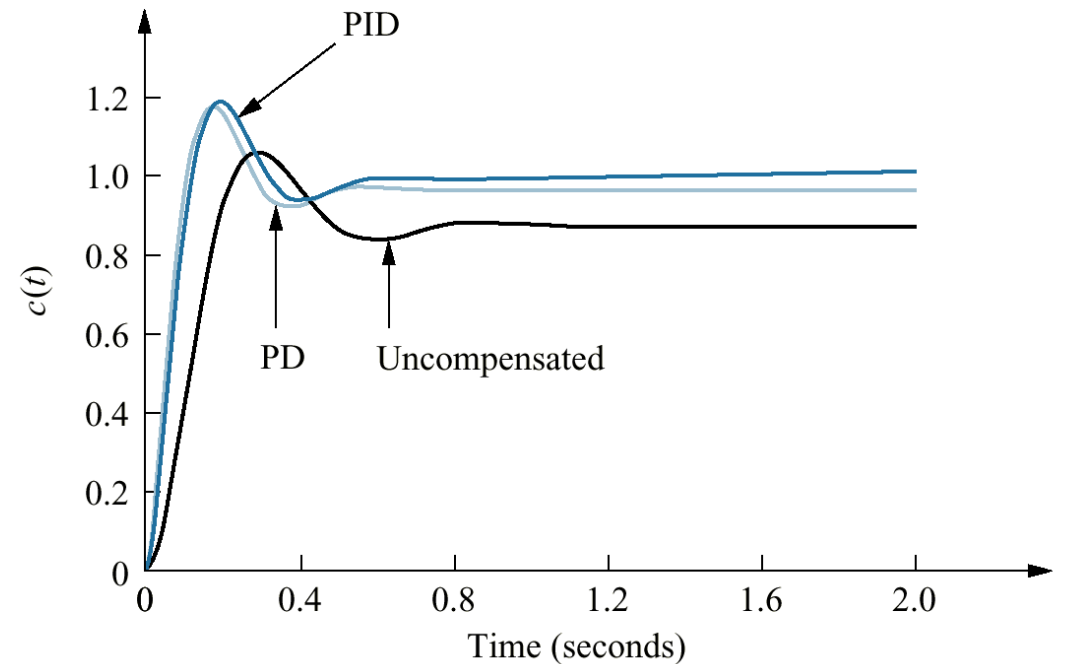
- **Paso 6** Ahora determinamos las ganancias, K_1, K_2 y K_3 en la figura 9.30. De la ecuaciones (9.26) y (9.27), el producto de la ganancia y el controlador PID es

$$\begin{aligned} G_{\text{PID}}(s) &= \frac{K(s + 55.92)(s + 0.5)}{s} = \frac{4.6(s + 55.92)(s + 0.5)}{s} \\ &= \frac{4.6(s^2 + 56.42s + 27.96)}{s} \end{aligned} \quad (9.28)$$

- Comparando las ecuaciones (9.21) y (9.28), $K_1 = 259.5$, $K_2 = 128.6$ y $K_3 = 4.6$.



- **Pasos 7 y 8** Observando a la figura 9.35, resumimos los resultados de nuestro diseño.
- La compensación PD mejoró la respuesta transitoria al reducir el tiempo necesario para llegar el primer pico, así como dar alguna mejoría en el error en estado estable.
- El controlador PID completo mejoró aún más el error en estado estable sin cambiar de modo apreciable la respuesta transitoria diseñada con el controlador PD.



- **Figura 9.35** Respuestas escalón para sistemas no compensado, compensado PD, y compensado PID del ejemplo 9.5




```
>> nPI=[1 0.5];
>> dPI=[1 0];
```

```
>> GPI=tf(nPI,dPI)
```

GPI =

$$\frac{s + 0.5}{s}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> GPID=GPI*GPD
```

GPID =

$$\frac{s^3 + 64.42 s^2 + 479.3 s + 223.7}{s^4 + 19 s^3 + 108 s^2 + 180 s}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> Kpid=4.6;
```

```
>> Tpid=feedback(Kpid*GPID,1)
```

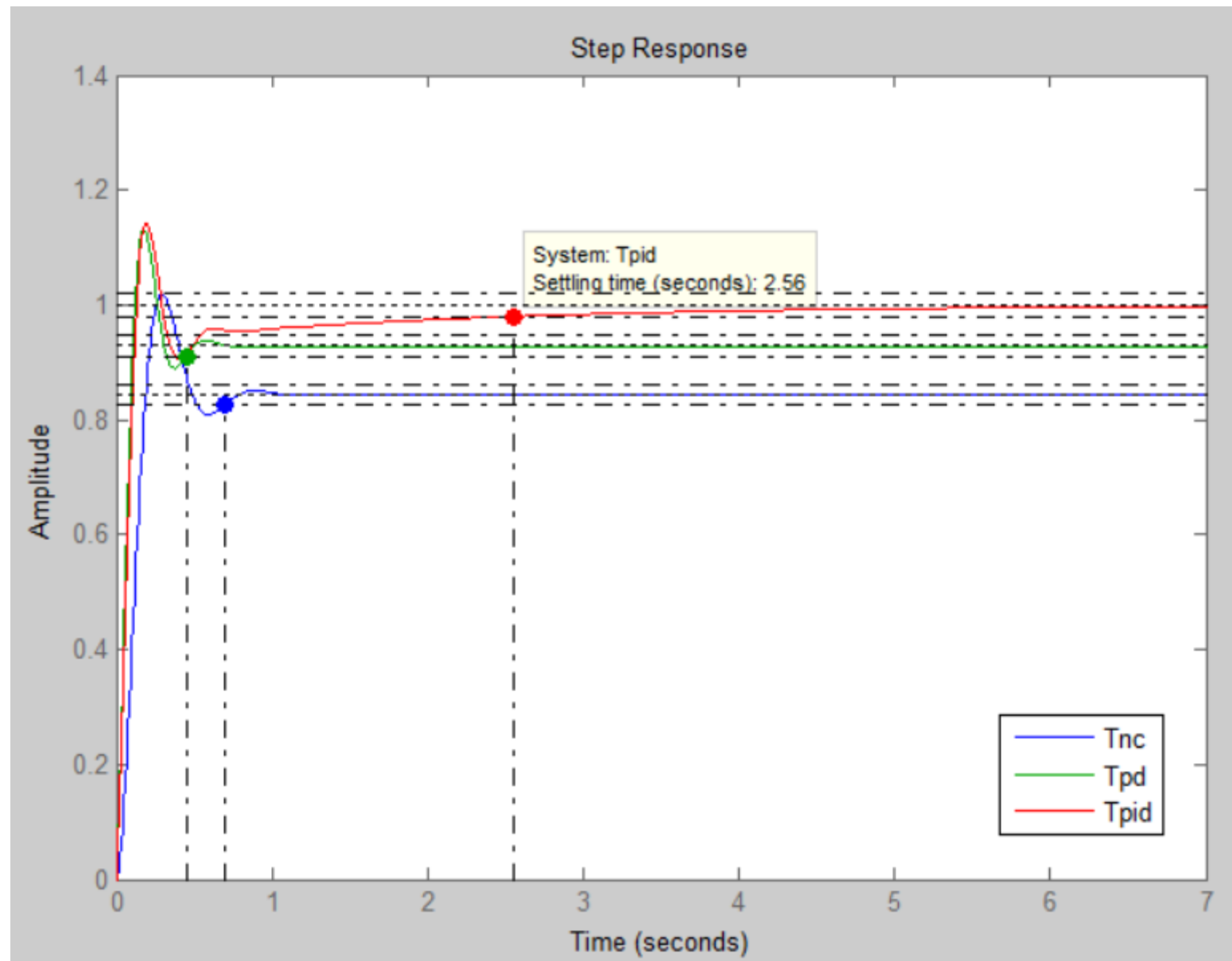
Tpid =

$$\frac{4.6 s^3 + 296.3 s^2 + 2205 s + 1029}{s^4 + 23.6 s^3 + 404.3 s^2 + 2385 s + 1029}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> step(Tnc,Tpd,Tpid)
```





- Como hemos mencionado antes, **el controlador PID exhibe una respuesta más lenta que llega al valor final de la unidad en aproximadamente 3 segundos.**
- Si esto es indeseable, la velocidad del sistema debe aumentarse mediante un rediseño del controlador PD o al mover el cero del controlador PI más allá del origen.
- La simulación desempeña una función importante en este tipo de diseño, puesto que nuestra ecuación derivada para el tiempo de asentamiento no es aplicable para esta parte de la respuesta, donde hay una lenta corrección del error en estado estable.



	Uncompensated	PD-compensated	PID-compensated
Plant and compensator	$\frac{K(s+8)}{(s+3)(s+6)(s+10)}$	$\frac{K(s+8)(s+55.92)}{(s+3)(s+6)(s+10)}$	$\frac{K(s+8)(s+55.92)(s+0.5)}{(s+3)(s+6)(s+10)s}$
Dominant poles	$-5.415 \pm j10.57$	$-8.13 \pm j15.87$	$-7.516 \pm j14.67$
K	121.5	5.34	4.6
ζ	0.456	0.456	0.456
ω_n	11.88	17.83	16.49
%OS	20	20	20
T_s	0.739	0.492	0.532
T_p	0.297	0.198	0.214
K_p	5.4	13.27	∞
$e(\infty)$	0.156	0.070	0
Other poles	-8.169	-8.079	-8.099, -0.468
Zeros	-8	-8, -55.92	-8, -55.92, -0.5
Comments	Second-order approx. OK	Second-order approx. OK	Zero at -55.92 and -0.5 not canceled

- **Tabla 9.5** Características pronosticadas para los sistemas no compensados, compensados PD, y compensador PID del ejemplo 9.5.



RESUMEN TIPO DE CONTROLADORES EN CASCADA

Tipo de controlador ideal	Tipo de controlador no ideal	Especificación que corrige
Controlador PI	Compensador de atraso de fase	Error en estado estable
Controlador PD	Compensador de adelanto de fase	Respuesta Transitoria (%OS, T_p , T_s)
Controlador PID	Compensador de adelanto - atraso de fase	Corrección simultanea de error en estado estable y la respuesta transitoria



BIBLIOGRAFÍA

- Nise, Norman. *Sistemas de Control para Ingeniería*. Capitulo 9. CECSA, 3ª ed.

