INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA Z

- García, L. (2012). **Control Digital Teoría y Práctica.** Medellín: Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid.

COMPETENCIA DE LA UNIDAD TEMÁTICA

- Aplica las transformadas Z y de Laplace utilizando las tablas de transformadas, así como herramientas computacionales, llegando a obtener las bases para el desarrollo de un modelo matemático asociado a un sistema de control digital.

SECCIONES DE LA UNIDAD

2.1 Transformada z de funciones sencillas.

2.2 Propiedades de la transformada z.

2.3 Transformada z inversa.

2.4 La transformada z modificada.

2. INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA Z

- La transformada z, en sistemas discretos en el tiempo, desempeña un papel muy similar al de la transformada de Laplace en los sistemas continuos en el tiempo.
- La transformada de Laplace de una función , está definida como:

$$X(S) = F(S) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-St}\, dt \qquad 2.1$$

- Cualquier función continua , muestreada periódicamente, se puede expresar matemáticamente, para $t \geq 0$, mediante la ecuación:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \qquad 2.2$$

- Si se desarrolla la sumatoria planteada en la ecuación anterior se obtiene:

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t - T) + x(2T)\delta(t - 2T) + \cdots \qquad 2.3$$

- Al tomar la transformada de Laplace a la última expresión resulta:

$$X^*(S) = x(0) + x(T)e^{-TS} + x(2T)e^{-2TS} + \cdots$$

- Es decir:

$$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS} \qquad 2.4$$

- Si se introduce ahora una nueva variable z definida como:

$$z = e^{TS} \qquad o \qquad S = \frac{1}{T}\ln(z)$$

- La ecuación 2.4 se puede escribir en la siguiente forma:

$$X^*(S)\big|_{S=\frac{1}{T}\ln(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \qquad 2.5$$

- Haciendo ahora:

$$X^*(S)\big|_{S=\frac{1}{T}\ln(z)} = X(z)$$

- Se obtiene:

$$X(z) = \Im[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \qquad 2.6$$

- **La ecuación 2.6 se define como la transformada z de la función continua $x(t)$.**
- Así mismo, **para una secuencia de números $x(k)$, la transformada z es:**

$$X(z) = \Im[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \qquad 2.7$$

2.1 TRANSFORMADA Z DE FUNCIONES SENCILLAS

2.1.1 Transformada z de la función escalón unitario

- Esta función se define como:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Por definición:

$$X(z) = \Im[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \qquad \text{Pero:} \qquad x(kT) = 1$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

2.1.2 Transformada z de la función rampa

- Esta función se define como:

$$x(t) = \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- En este caso: $x(kT) = AkT$ para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ entonces:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} AkTz^{-k} = AT\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

$$X(z) = AT(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots) = ATz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots)$$

$$X(z) = \frac{ATz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{ATz}{(z - 1)^2}$$

❑2.1.3 Transformada z de la función exponencial

- Esta función se define como:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}\, z^{-k}$$

$$X(z) = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + e^{-3aT}z^{-3} + \cdots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

2.1.4 Transformada z de la función polinomial

- Esta función se define como:

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

- Aplicando la ecuación 2.7:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^2 z^{-2} + \cdots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

MATLAB

- El cálculo de la transformada Z, para obtener una expresión en el dominio de z de una secuencia de datos discretos, se realiza con la expresión:

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- En MATLAB, esta transformación se obtiene mediante el comando **ztrans**.
- Al igual que en la transformada de Laplace, la variable z, debe definirse como **símbolo** para obtener su transformada.

```
>> escalon_z=sym('1');        % escalón unitario como función simbólica
>> ztrans(escalon_z)          % obtención de la transformada Z
ans =
z/(z-1)

>> syms n T                   % creación de n y T como símbolos
>> rampa_z=n*T;               % rampa discreta como función simbólica
>> ztrans(rampa_z)            % obtención de la transformada Z
ans =
T*z/(z-1)^2

>>x1=5^n*n*T;                 % creación de la secuencia discreta x1=5^n nT
>>X1=ztrans(x1)               % obtención de la transformada Z
X1 =
1/5*T*z/(1/5*z-1)^2
>> pretty(X1)
                 T z
       1/5 -------------
                     2
           (1/5 z - 1)
```

❖ Pinto, E. (2010). ***Fundamentos de control con MATLAB***. Sección 4.4.2 Transformada Z. Madrid: Pearson.

Tabla 2.1 Transformada z de funciones prácticas

Nº	$f(t)$ F. Continua	$f(kT)$ F. Discreta	$F(S)$ T. de Laplace	$F(z)$ Transformada z
1	$\delta(t)$	$\delta(kT)$	1	1
2	$u(t)$	$u(kT)$	$\frac{1}{S}$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	kT	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	t^2	$(kT)^2$	$\frac{2}{S^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	t^3	$(kT)^3$	$\frac{6}{S^4}$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
6	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{S+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
7	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{1}{(S+a)^2}$	$\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
8	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{2}{(S+a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
9	$sin(bt)$	$sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{zsin(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$
10	$cos(bt)$	$cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z^2-zcos(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$
11	$e^{-at}sin(bt)$	$e^{-akT}sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT}sinbT}{z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT}}$
12	$e^{-at}cos(bt)$	$e^{-akT}cos(bkT)$	$\frac{S+a}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}cosbT}{z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT}}$
13	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{a}{S(S+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
14	$1-(1+at)e^{-at}$	$1-(1+akT)e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S(S+a)^2}$	$\frac{1}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})}$
15	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
16	$be^{-bt}-ae^{-at}$	$be^{-bkT}-ae^{-akT}$	$\frac{(b-a)S}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{[(b-a)z-(be^{-aT}-ae^{-bT})]z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$

Tabla 2.1 Transformada z de Funciones Prácticas (Continuación)

N^{o}	$f(t)$ F. Continua	$f(kT)$ F. Discreta	$F(S)$ T. de Laplace	$F(z)$ Transformada z
17	$(1-at)e^{-aT}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{S}{(S+a)^2}$	$\frac{[z-(1+aT)e^{-aT}]z}{(z-e^{-aT})^2}$
18	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S^2(S+a))}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
19		a^k		$\frac{z}{z-a}$
20		$a^{k-1} \quad k \geq 1$		$\frac{1}{z-a}$
21		ka^{k-1}		$\frac{z}{(z-a)^2}$
22		k^2a^{k-1}		$\frac{z(z+a)}{(z-a)^3}$
23		k^3a^{k-1}		$\frac{z(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$
24		$(-a)^k$		$\frac{z}{z+a}$
25		$a^k\cos(k\pi)$		$\frac{z}{z+a}$
26		$k(k-1)a^{k-2}$		$\frac{2z}{(z-a)^3}$
27		$k(k-1)\cdots(k-m+2)$		$\frac{z(m-1)!}{(z-1)^m}$
28	$\frac{1}{S(S+a)(S+b)}$ $A=\frac{b(1-e^{-aT})-a(1-b^T)}{ab(b-a)}$			$\frac{(Az+B)z}{(z-1)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$ $B=\frac{ae^{-aT}(1-e^{-bT})-be^{bT}(1-e^{-aT})}{ab(b-a)}$
29	$1-e^{-at}(cosbt+\frac{a}{b}sinbt)$		$\frac{a^2+b^2}{S[(S+a)^2+b^2]}$	$\frac{(Az+B)z}{(z-1)(z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT})}$
	$A=1-e^{-aT}cosbT-\frac{a}{b}e^{-aT}sinbT$			$B=e^{-2aT}+\frac{a}{b}e^{-aT}sinbT-e^{-aT}cosbT$

Ejemplo 2.1

- Aplicando la definición de transformada z, hallar la transformada z de la función descrita por:

$$x(t) = te^{-at} \qquad\qquad t \geq 0$$

Solución:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kTe^{-akT}\, z^{-k} = T\sum_{k=0}^{\infty} Ke^{-akT}\, z^{-k}$$

$$X(z) = T(e^{-aT}z^{-1} + 2e^{-2aT}z^{-2} + 3e^{-3aT}z^{-3} + \cdots)$$

$$X(z) = Te^{-aT}z^{-1}(1 + 2e^{-aT}z^{-1} + 3e^{-2aT}z^{-2} + \cdots)$$

$$X(z) = \frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^2} = \frac{Te^{-aT}z}{(z - e^{-aT})^2}$$

Command Window

```
>> syms s k T t a
>> x=t*exp(-a*t);
>> xkT=compose(x,k*T);
>> xz=ztrans(xkT);
>> pretty(xz)
   T z exp(T a)
-----------------
                2
(z exp(T a) - 1)
```

❑Ejemplo 2.2

- Hallar la transformada z de:

$$X(S) = \frac{4}{S(S+4)}$$

❑Solución:

- Cuando se da una **función en términos de S** y se desea evaluar su transformada z, se puede transformar $X(S)$ en $x(t)$ y hallar la transformada z de $x(t)$.
- Ahora bien, si se dispone de una tabla de transformada z, se puede **expandir $X(S)$ en fracciones parciales** y utilizando la tabla se evalúa $X(z)$.
- Para el ejemplo propuesto:

$$X(S) = \frac{4}{S(S+4)} = \frac{1}{S} - \frac{1}{S+4}$$

- De las tablas:

$$\Im\left\{\frac{1}{S}\right\} = \frac{z}{z-1} \qquad\qquad \Im\left\{\frac{1}{S+4}\right\} = \frac{z}{z-e^{-4T}}$$

- Es decir:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-4T}} = \frac{(1-e^{-4T})z}{(z-1)(z-e^{-4T})}$$

- La ubicación del polo $z - e^{-4T}$, depende del valor del periodo de muestreo.

MATLAB

Command Window

```
>> syms s k T
>> X=4/(s*(s+4));
>> x=ilaplace(X);
>> pretty(x)
1 - exp(-4 t)

>> xkT=compose(x,k*T);
>> xz=ztrans(xkT);
>> pretty(xz)
  z              z
----- - -------------
z - 1   z - exp(-4 T)
```

2.2 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

- El uso de las propiedades de la transformada z facilita la evaluación de la transformada z de una función así como el análisis de sistemas de control en tiempo discreto.

2.2.1 Multiplicación por una constante

- Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, entonces:

$$\Im\{ax(t)\} = a\Im\{x(t)\} = aX(z) \qquad 2.8$$

2.2.2 Propiedad de linealidad

- Si $X(z)$ es la *transformada* z de $x(t)$ y $Y(z)$ es la transformada z de $y(t)$, entonces:

$$\Im\{ax(t)+by(t)\}=aX(z)+bY(z) \tag{2.9}$$

2.2.3 Multiplicación por a^k

- Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, entonces:

$$\Im\{a^k x(t)\}=X\left(\frac{z}{a}\right) \tag{2.10}$$

2.2.4 Propiedad de translación

- Si se tiene que $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$ y que $x(t)=0$ para $t<0$, entonces:

$$\Im\{x(t-nT)\}=z^{-n}X(z) \tag{2.11}$$

❑Ejemplo 2.3

- Hallar la transformada z de la función: $x(t) = 4u(t-3T)$

❑Solución

- En este caso se aplica la propiedad de traslación y la propiedad de multiplicación por una constante.

$$X(z) = \Im\{4u(t-3T)\} = 4\Im\{u(t-3T)\} = 4z^{-3}\Im\{1\}$$

$$X(z) = 4z^{-3}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{4}{z^2(z-1)}$$

Command Window

```
>> X=ztrans(4*sym('1'));
>> pretty(X)
 4 z
-----
z - 1


>> n=3;
>> Xz=z^(-n)*X;
>> pretty(Xz)
      4
----------
 2
z  (z - 1)
```

2.2.5 Propiedad de la traslación compleja

- Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, entonces:

$$\Im\{e^{-at}x(t)\} = X(ze^{aT}) \qquad 2.14$$

Ejemplo 2.5

- Hallar la transformada z de la función: $x(t) = t^2e^{-3t}$

Solución:

- Utilizando la tabla de transformada z se obtiene:

$$\Im\{t^2\} = \frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$\Im\{t^2e^{-3t}\} = X(ze^{aT}) = X(ze^{3T})$$

- Reemplazando z por ze^{3T} resulta:

$$\Im\{t^2e^{-3t}\} = \frac{T^2e^{3T}z(ze^{3T}+1)}{(ze^{3T}-1)^3}$$

```
>> syms k T
>> f=(k*T)^2*exp(-3*k*T);
>> F=ztrans(f);
>> pretty(F)
 2
T  z exp(3 T) (z exp(3 T) + 1)
------------------------------
                            3
         (z exp(3 T) - 1)
```

2.2.6 Teorema del valor inicial

- Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, el valor inicial, $x(0)$ de $x(t)$ o $x(k)$ de está dado por:

$$x(0) = \lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{z\to\infty} X(z) \qquad 2.15$$

2.2.7 Teorema del valor final

- Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, el valor $x(\infty)$ de $x(t)$ de está dado por:

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) \qquad 2.16$$

- **Ejemplo 2.6**
- Determinar el valor inicial y el valor final de la función cuya transformada z está dada por:

$$X(z) = \frac{(1 - e^{-3T})z}{(z - 1)(z - e^{-3T})}$$

- **Solución**

a) Para el valor inicial se tiene:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{(1 - e^{-3T})z}{(z - 1)(z - e^{-3T})} = 0$$

b) Para el valor final se tiene:

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1}(z - 1)\,X(z) = \lim_{z\to 1}(z - 1)\frac{(1 - e^{-3T})z}{(z - 1)(z - e^{-3T})} = 1$$

Command Window

```
>> syms z T
>> Xz=(z*(1-exp(-3*T)))/((z-1)*(z-exp(-3*T)));
>> limit(Xz,z,0)

ans =

0

>> limit((z-1)*Xz,z,1)

ans =

1
```

- En efecto, la función $x(t)$ correspondiente a la función $X(z)$ es: $x(t) = 1 - e^{-3t}$
- por lo tanto:

$$x(0) = \lim_{t \to 0}(1 - e^{-3t}) = 0 \qquad x(\infty) = \lim_{t \to \infty}(1 - e^{-3t}) = 1$$

- En la tabla 2.2 se dan algunas de las propiedades fundamentales de la transformada z.

Tabla 2.2 Propiedades de la Transformada z

Nº	$x(t)$ ó $x(kT)$	Transformada z
1	$ax(t)$	$aX(z)$
2	$ax(t) + by(t)$	$aX(z) + bY(z)$
3	$x(t+T)$ ó $x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
4	$x(t+2T)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(T)$
5	$x(k+2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
6	$x(t+kT)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(T) - \cdots zx(kT-T)$
7	$x(t-k)$	$z^{-k}X(z)$
8	$x(n+k)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(1) - \cdots zx(k-1)$
9	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{-aT})$
11	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^{a})$
12	$a^kx(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
13	$tx(t)$	$-T\frac{d[X(z)]}{dz}$
14	$x(0)$	$\lim_{z\to\infty} X(z)$
15	$x(\infty)$	$\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

2.3 TRANSFORMADA Z INVERSA

- La transformada z inversa de una función $X(z)$ da como resultado la función muestreada $x^*(t)$ y no la función continua $x(t)$.
- Al evaluar la transformada z inversa se obtienen los valores de la función $x(k)$ en los instantes de muestreo para $k = 0, 1, 2\ \ldots$.
- En consecuencia, la función muestreada $x(k)$ obtenida a partir de la transformada z inversa es única pero, es posible que exista más de una función continua $x(t)$ a partir de la cual se pueda derivar la misma función $x(k)$.

- La notación para la transformada z inversa de una función $X(z)$ es:

$$x(k) = \mathfrak{I}^{-1}\{X(z)\} \qquad 2.17$$

- Existen diferentes métodos para evaluar la transformada z inversa, entre ellos están:

➢ Método de la división larga o método directo.

➢ Método de la expansión en fracciones parciales.

➢ Método de la integral de inversión.

➢ **Método computacional.**

2.3.4 Método Computacional

- Este método utiliza software mediante el cual es posible obtener la transformada z inversa bien sea en forma de serie infinita de potencias o en forma de una expresión matemática específica.
- En el caso del **MATLAB**; la transformada z inversa se evalúa obteniendo la respuesta del sistema al impulso unitario.
- En este caso la entrada está dada por:

$$u = [1\ zeros(1, N)] \qquad 2.29$$

- En donde N corresponde al último periodo de muestreo deseado para la observación de la respuesta.
- A continuación se presenta un programa en MATLAB que permite evaluar la transformada z inversa.

❑Ejemplo 2.13

- Utilizando MATLAB, determinar la transformada z inversa de:

$$G(z) = \frac{2z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}$$

❑Solución:

➢ $G(z)$ se puede escribir en la como:

$$G(z) = \frac{2}{z^3 - 1.5z^2 + 0.5z}$$

- El programa en MATLAB para evaluar la transformada z inversa es:

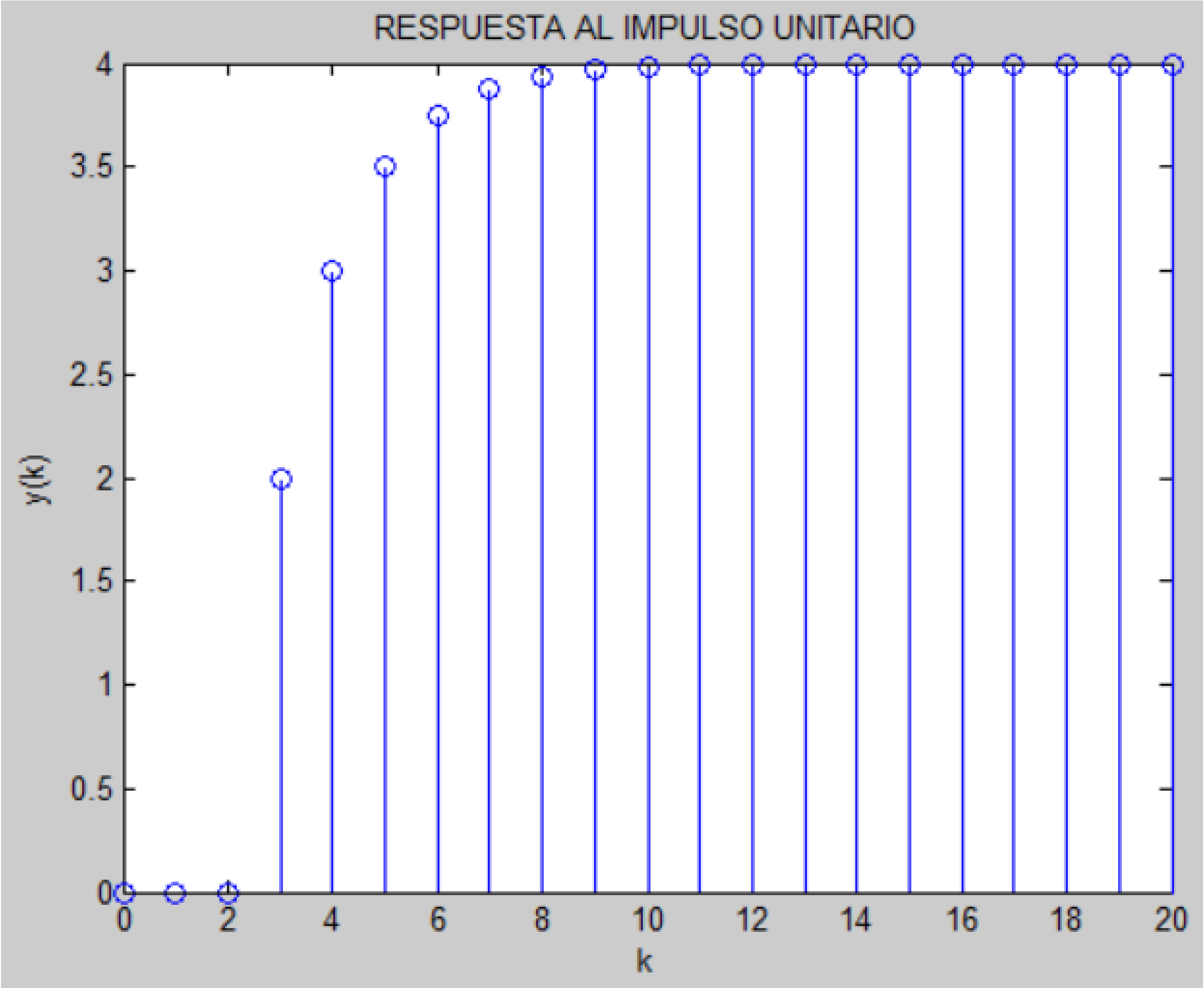
```
>> % Transformada z inversa
% Introducir el numerador y el denominador
n=[0 0 0 2];
d=[1 -1.5 0.5 0];
u=[1 zeros(1,20)];
y=filter(n,d,u)
```

- Al ejecutar el programa se obtiene el siguiente resultado:

```
y =

  Columns 1 through 11

         0         0         0    2.0000    3.0000    3.5000    3.7500    3.8750    3.9375    3.9688    3.9844

  Columns 12 through 21

    3.9922    3.9961    3.9980    3.9990    3.9995    3.9998    3.9999    3.9999    4.0000    4.0000
```

- Para obtener la respuesta correcta, es necesario que el numerador n, y el denominador d, se introduzcan al MATLAB con el mismo número de coeficientes, por esta razón se introdujo $n = [0\ 0\ 0\ 2]$ y no $n = [2]$ como sería lo más fácil.
- Si se desea graficar la respuesta al impulso unitario se puede utilizar el siguiente programa:

```
% Transformada z inversa.
% Gráfica de la respuesta al impulso unitario.
n=[0 0 0 2];
d=[1 -1.5 0.5 0];
u=[1 zeros(1,20)];
k=0:20;
y=filter(n,d,u);
stem(k,y)
title('RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

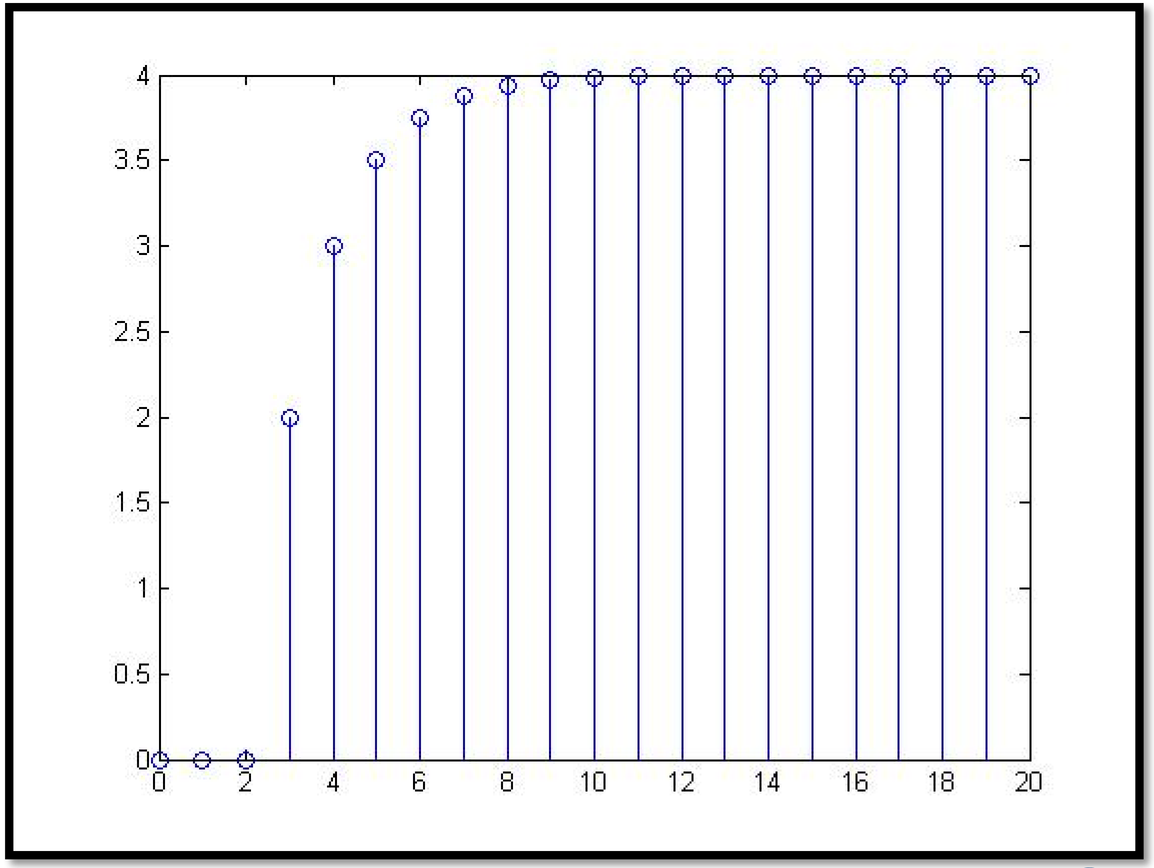


- Desarrollo usando la librería de *matemática simbólica.*

```
clc
syms z
disp('Ejemplo 2.13 con matemática simbólica')
Y=2/((z^3)-(1.5*z^2)+(0.5*z));
disp('Y=')
pretty(vpa(Y,2))
y=iztrans(Y);
disp('la Z-1 de Y es y= ')
pretty(y)
disp('A partir del resultado anterior se construye la señal a graficar')
n=0:20;
imp0= n==0; %Función impulso unitario en tiempo n = 0
imp1= n==1; %Función impulso unitario en tiempo n = 1
y1=(4*imp1)-(16*(1/2).^n)+(12*imp0)+4;
stem(n,y1)
```

Command Window

```
Ejemplo 2.13 sin matemática simbólica
Y=
        2.0
-------------------
 3        2
z  - 1.5 z  + 0.5 z

la Z-1 de Y es y=
                                       / 1 \n
4 kroneckerDelta(n - 1, 0) - 16 | - |  + 12 kroneckerDelta(n, 0) + 4
                                       \ 2 /

A partir del resultado anterior se construye la señal a graficar
```



- La figura 2.1 muestra el resultado que se obtiene al graficar la transformada z inversa de la función dada.

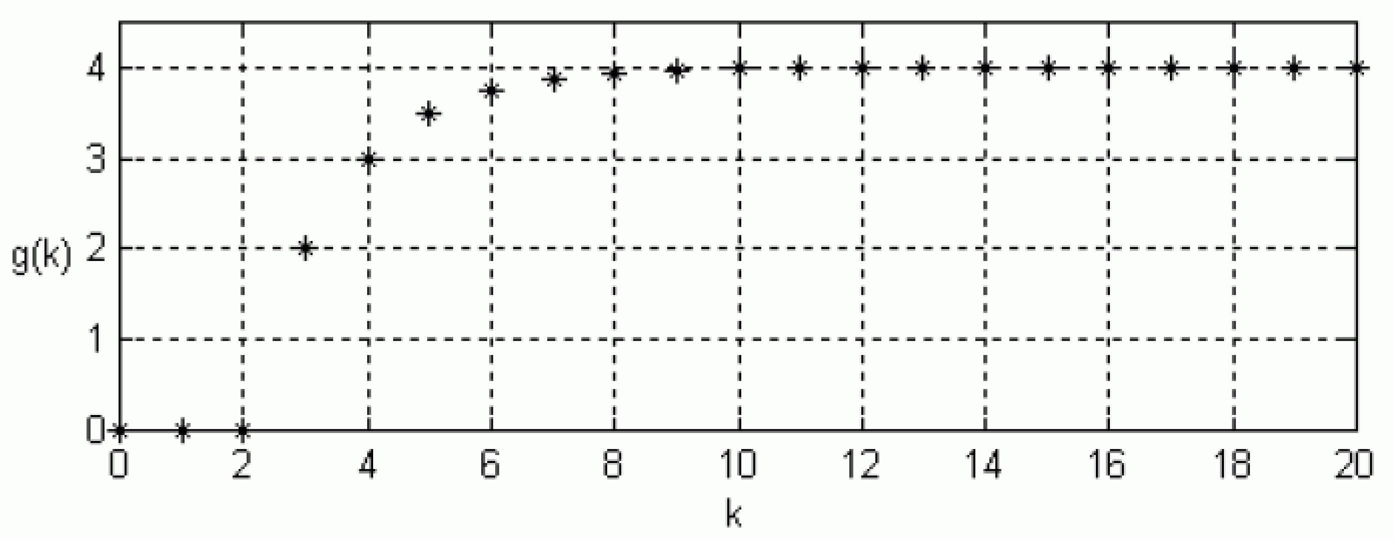


Figura 2.1 Respuesta al impulso unitario

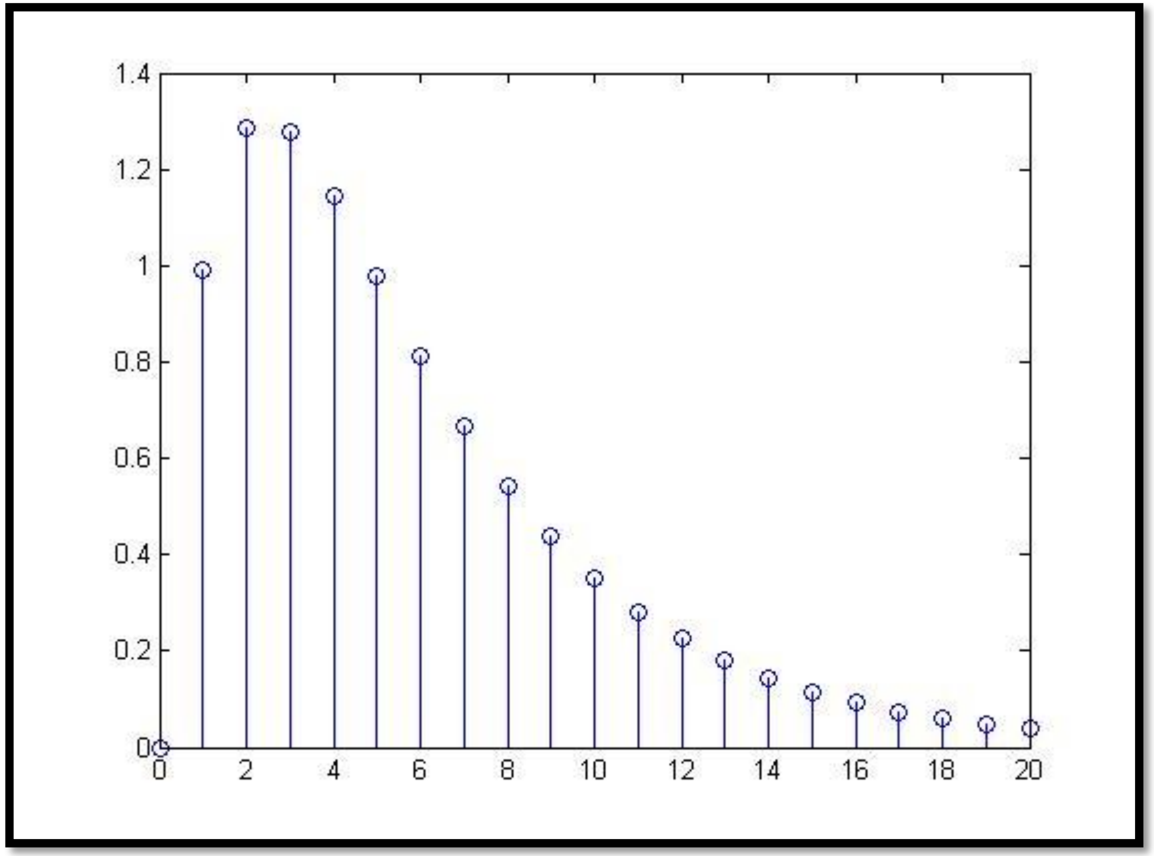
MATLAB

- El cálculo de la transformada inversa, que permite obtener la secuencia discreta a partir de la expresión racional en z, se realiza mediante el comando **iztrans**.

```
>> syms z
>> Y5=z/(z-0.5)/(z-0.8);                    % creación de la función simbólica Y5
>> pretty(Y5)
                          z
                  -------------------
                  (z - 1/2) (z - 4/5)
>> y5=iztrans(Y5)                           % obtención de la transformada Z inversa
y5 =
10/3*(4/5)^n-10/3*(1/2)^n
>> pretty(y5)
                         n            n
                 10/3 (4/5)  - 10/3 (1/2)
```

❖ Pinto, E. (2010). ***Fundamentos de control con MATLAB***. Sección 4.4.2 Transformada Z. Madrid: Pearson.

```
clc
syms z
Y5=z/(z-0.5)/(z-0.8);
'Y5= '
pretty(Y5)
y5=iztrans(Y5);
y5=simplify(y5);
'y5= '
pretty(vpa(y5,2))
'A partir del resultado anterior se construye el vector n de 21 muestras'
n=0:20;
y=3.3*((0.8.^n)-(0.5.^n));
stem(n,y)
```




```
Y5=

         z
-------------------
/     1 \ /     4 \
| z - - | | z - - |
\     2 / \     5 /


ans =

y5=

      n          n
3.3 0.8  - 3.3 0.5


ans =

A partir del resultado anterior se construye el vector n de 21 muestras
```

2.4 LA TRANSFORMADA Z MODIFICADA

- La transformada z modificada se utiliza cuando la **función de transferencia** de un sistema que se analiza, presenta un determinado **tiempo muerto o retardo** θ'.
- Asumiendo que la función de transferencia del sistema está dada por:

$$G_p S) = G(S)e^{-\theta' S} \qquad 2.30$$

- En donde G(S) no contiene tiempo muerto y θ' es el tiempo muerto, el procedimiento para evaluar la transformada z de esta función es el siguiente:

- Sea:

$$\theta' = NT + \theta \qquad 2.31$$

- En donde T es el periodo de muestreo y N es la parte entera del cociente:

$$N = \frac{\theta'}{T} \qquad 2.32$$

- Sustituyendo la ecuación 2.31 en la ecuación 2.30 se obtiene:

$$G_p S) = G(S)e^{-(NT+\theta)S} \qquad 2.33$$

- Tomando la transformada z a la ecuación 2.33:

$$G_p(z) = \Im\left\{G(S)e^{-(NT+\theta)S}\right\}$$

- Es decir:

$$G_p(z) = z^{-N}\Im\left\{G(S)e^{-\theta S}\right\} \qquad 2.34$$

- El término $\Im\left\{G(S)e^{-\theta S}\right\}$ se define como la transformada z modificada de $G(s)$ y se denota por: $\Im_m\{G(S)\} = G(z,m)$
- Entonces:

$$G_p(z) = z^{-N}\Im_m\{G(S)\} = z^{-N}G(z,m) \qquad 2.35$$

- En donde:

$$m = 1 - \frac{\theta}{T} \qquad 2.36$$

- En la tabla 2.3 se da la transformada z modificada de algunas funciones prácticas.

Tabla 2.3 Transformada z modificada

Nº	$f(t)$	$F(kT)$	$F(S)$	$F(z)$ Modificada
1	$u(t)$	$U(kT)$	$\frac{1}{S}$	$\frac{1}{z-1}$
2	t	kT	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{mT}{z-1}-\frac{T}{(z-1)^2}$
3	t^2	$(kT)^2$	$\frac{2}{S^3}$	$T^2\left[\frac{m^2}{z-1}+\frac{2m+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}\right]$
4	t^{n-1}	$(kT)^{n-1}$	$\frac{(n-1)!}{S^n}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
5	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{S+a}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
6	te^{-at}	$(kT)e^{-akT}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Te^{-amT}[e^{-aT}+m(z-e^{-aT})]}{(z-e^{-aT})^2}$
7	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{a}{S(S+a)}$	$\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
8	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S^2(S+a)}$	$\frac{aT}{(z-1)^2}+\frac{amT-1}{z-1}+\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
9	$1-(1+at)e^{-at}$	$1-(1+akT)e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S(S+a)^2}$	$\frac{1}{z-1}-\left[\frac{1+amT}{z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]$
10	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}-\frac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
11	$sin(bt)$	$sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{z.\,sin(bmT)+sin(1-m)bT}{z^2-2zcos(bT)+1}$
12	$cos(bt)$	$cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z.\,cos(bmT)-cos(1-m)bT}{z^2-2zcos(bT)+1}$
13	$e^{-at}sin(bt)$	$e^{-akT}sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{[z.\,sin(bmT)+e^{-aT}sin(1-m)bT]e^{-amT}}{z^2-2ze^{-aT}cos(bT)+e^{-2aT}}$
14	$e^{-at}cos(bt)$	$e^{-akT}cos(bkT)$	$\frac{S+a}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{[z.\,cos(bmT)+e^{-aT}sin(1-m)bT]e^{-amT}}{z^2-2ze^{-aT}cos(bT)+e^{-2aT}}$

Ejemplo 2.15

- Hallar la transformada z de la función:

$$G_p(S) = \frac{5e^{-1,3S}}{(S+3)^2}$$

- Asumir que el periodo de muestreo es $T = 1s$.

Solución

- Utilizando las ecuaciones 2.31, 2.32 y 2.36 se obtiene:

$$N = \frac{\theta'}{T} = \frac{1,3}{1} = 1 \qquad (Se\ toma\ sólo\ la\ parte\ entera\ del\ cociente)$$

$$\theta = \theta' - NT = 1.3 - 1 = 0.3$$

$$m = 1 - \frac{\theta}{T} = 1 - \frac{0,3}{1} = 0,7$$

- Utilizando la tabla 2.3 se encuentra que:

$$\Im\left\{\frac{1}{(S+a)^2}\right\} = \frac{Te^{-amT}[e^{-aT} + m(z-e^{-aT})]}{(z-e^{-aT})^2}$$

- Utilizando la ecuación 2.34 con $N = 1$ y con $G(S) = 5/(S+3)^2$ obtiene:

$$G_p(z) = z^{-1}\Im_m\left\{\frac{5}{(S+3)^2}\right\} = \frac{5 * 0.12245[0.04978 + 0.7(z-0.04978)]}{(z-0.04978)^2}$$

- Simplificando:

$$G_p(S) = \frac{0.42857(z+0.02133)}{(z-0.04978)^2}$$

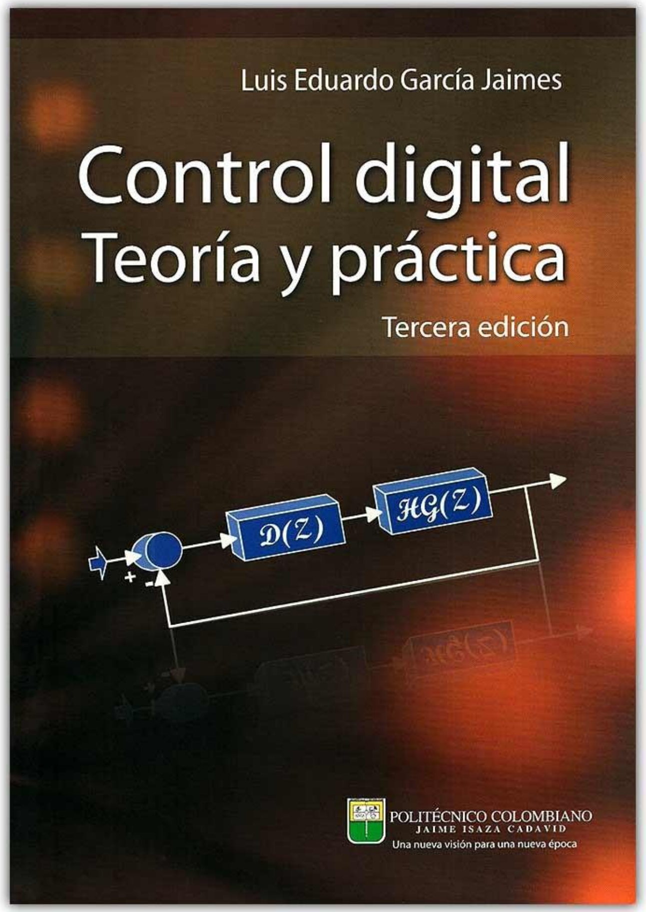
```
syms s z
clc
Gp= 5*exp(-1.3*s)/(s^2*(s+3))

T=1;
N=1;
theta=1.3-(N*T);
m=1-(theta/T);
'Transformada Z Modificada = '
ycz=(5*T*exp(-3*m*T)*(exp(-3*T)+m*(z-exp(-3*T)))/(z-exp(-3*T))^2);
ycz=simplify(ycz);
pretty(vpa(ycz,4))
```

MATLAB

Command Window

```
Gp =

(5*exp(-(13*s)/10))/(s^2*(s + 3))


ans =

Transformada Z Modificada =

0.4286 z + 0.009145
-------------------
                 2
   (z - 0.04979)
```

BIBLIOGRAFÍA



- García, L.(2012). ***Control digital teoría y práctica****; capítulo 2. Introducción a la transformada z*. Medellín: Politécnico Colombiano "Jaime Isaza Cadavid"

- *Signatura. 629.895 G21co*