UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

MÉTODOS NUMÉRICOS

ERRORES

¿Cuántas cifras significativas tienen los siguientes números?

- 0.000468
- 0.00468
- 0.0468

Los ceros no siempre son cifras significativas.

ERRORES

¿Cuántas cifras significativas tienen los siguientes números?

- 0.000468
- 0.00468
- 0.0468

Los ceros no siempre son cifras significativas.

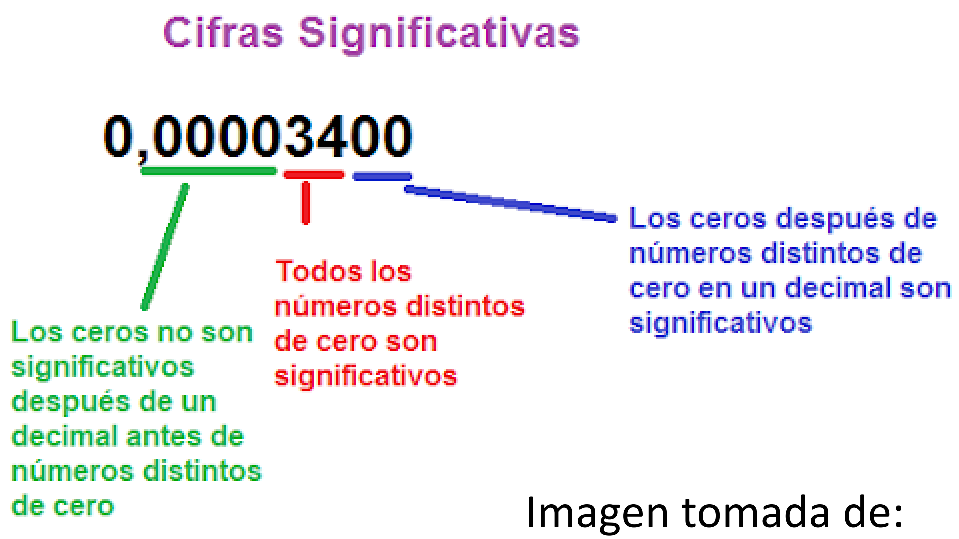


Imagen tomada de: http://www.learningaboutelectronics.com

ERRORES

- Los métodos numéricos proporcionan resultados aproximados. Por tanto, se requiere que se determinen qué tan confiables pueden ser los resultados. Una forma es mediante las cifras significativas.
- Existen cantidades que representan valores específicos pero no se pueden representar en su totalidad. Tal es el caso del número π, la raíz cuadrada de un número o una fracción. Para efectos de cálculos a través de los computadores (los cuales permiten un número finito de cifras significativas), es necesario hacer un redondeo (omitir algunos dígitos) → error de redondeo.

EXACTITUD Y PRECISIÓN

Para caracterizar un error, es posible usar la exactitud y la precisión.

- Exactitud: ¿qué tan cercano está el valor calculado o medido al real?.
- Precisión: ¿qué tan cercano están unos de otros, un conjunto de valores calculados o medidos?.

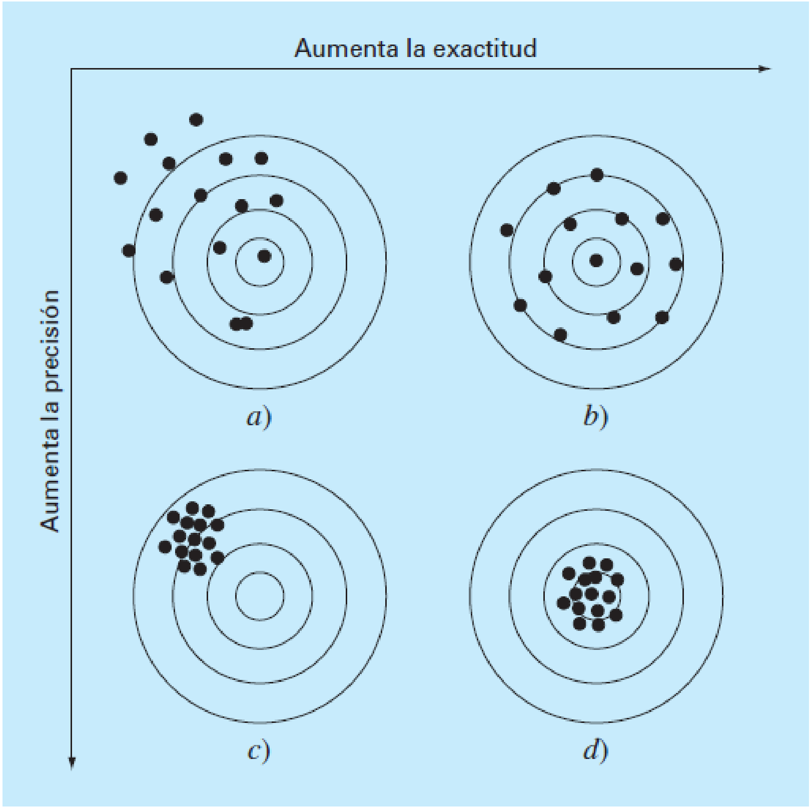
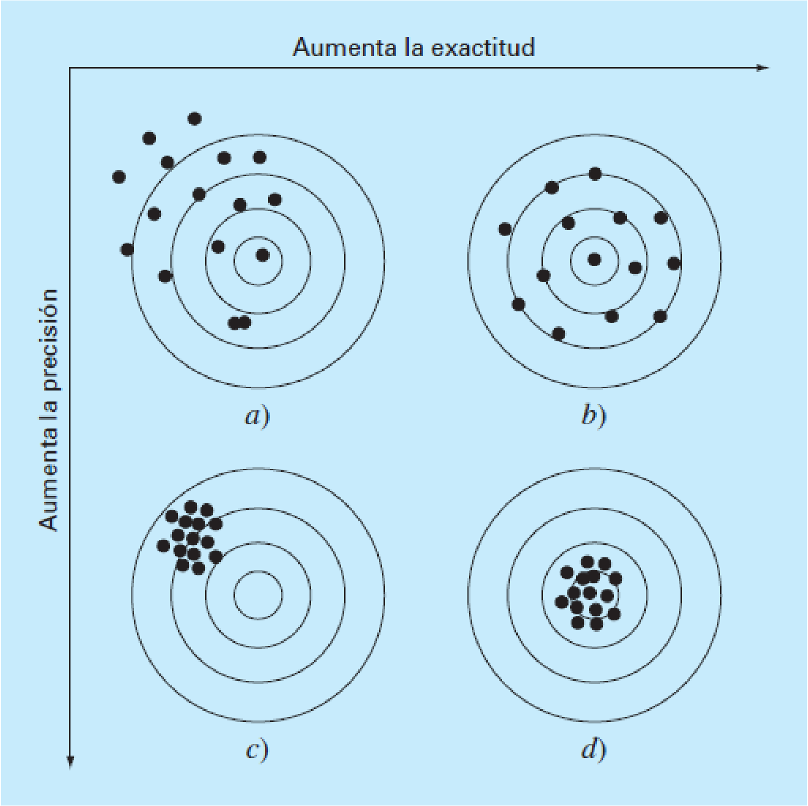


Imagen tomada de: Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill.

EXACTITUD Y PRECISIÓN

- Inexactitud o sesgo: desviación sistemática del valor verdadero. a) y c) son iguales de inexactos.
- Impresición o incertidumbre: magnitud de la dispersión de los datos. d) es más preciso que b).



Ejemplo de la prueba saber

Imagen tomada de: Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill.

DEFINICIÓN DE ERROR

Los errores numéricos se producen a raíz de la aplicación de aproximaciones en el momento de representar operaciones y cantidades matemáticas exactas.

¿Qué diferencia se encuentra entre el truncamiento y el redondeo? De un ejemplo.

24365.879

Valor verdadero = valor aproximado + error

E_t = valor verdadero – valor aproximado

No tiene en cuenta el orden de la magnitud que se estima

DEFINICIÓN DE ERROR

$$\text{Error relativo fraccional verdadero} = \frac{error\ verdadero}{valor\ verdadero}$$

$$\text{Error relativo porcentual verdadero} = \varepsilon_t = \frac{error\ verdadero}{valor\ verdadero} * 100$$

DEFINICIÓN DE ERROR

Ejercicio:

En el mes de Enero, la predicción de temperatura promedio para una ciudad fue de 25.3°C; mientras que según el reporte de la estación meteorológica de la ciudad, el promedio fue de 27.7°C. ¿Cuál fue el error relativo porcentual de la predicción?

$$\text{Error relativo porcentual verdadero} = \varepsilon_t = \frac{\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}} * 100$$

DEFINICIÓN DE ERROR

Ejercicio:

En el mes de Enero, la predicción de temperatura promedio para una ciudad fue de 25.3°C; mientras que según el reporte de la estación meteorológica de la ciudad, el promedio fue de 27.7°C. ¿Cuál fue el error relativo porcentual de la predicción?

$$\varepsilon_t = \frac{(27,7 - 25,3)}{27,7} * 100 = 8,664\%$$

$$\text{Error relativo porcentual verdadero} = \varepsilon_t = \frac{\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}} * 100$$

DEFINICIÓN DE ERROR

Ejercicio:

Dentro de un proceso experimental, se está calculando la distancia de un objeto a un punto determinado, a partir de los datos capturados con un sensor. Antes de la calibración del dispositivo que posee el sensor, se obtuvo el valor de 2.42 m, mientras que posterior a este proceso se obtuvo el valor de 1.9 m. ¿Cuál fue el error relativo porcentual?

DEFINICIÓN DE ERROR

Ejercicio:

Dentro de un proceso experimental, se está calculando la distancia de un objeto a un punto determinado, a partir de los datos capturados con un sensor. Antes de la calibración del dispositivo que posee el sensor, se obtuvo el valor de 2.42 m, mientras que posterior a este proceso se obtuvo el valor de 1.9 m. ¿Cuál fue el error relativo porcentual?

$$\varepsilon_t = \frac{|1{,}9 - 2{,}42|}{1{,}9} * 100 =$$

DEFINICIÓN DE ERROR

Ejercicio:

Dentro de un proceso experimental, se está calculando la distancia de un objeto a un punto determinado, a partir de los datos capturados con un sensor. Antes de la calibración del dispositivo que posee el sensor, se obtuvo el valor de 2.42 m, mientras que posterior a este proceso se obtuvo el valor de 1.9 m. ¿Cuál fue el error relativo porcentual?

$$\varepsilon_t = \frac{|1{,}9 - 2{,}42|}{1{,}9} * 100 = 27{,}36\,\%$$

DEFINICIÓN DE ERROR

Ejercicio:
Suponga que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache, y se obtiene 9 999 y 9 cm, respectivamente. Si los valores verdaderos son 10 000 y 10 cm, calcule *a*) el error verdadero y *b*) el error relativo porcentual verdadero en cada caso.

DEFINICIÓN DE ERROR

Ejercicio:

Suponga que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache, y se obtiene 9 999 y 9 cm, respectivamente. Si los valores verdaderos son 10 000 y 10 cm, calcule *a*) el error verdadero y *b*) el error relativo porcentual verdadero en cada caso.

a) Puente $E_t = 10000 - 9999 = 1$

Remache $E_t = 10 - 9 = 1$

DEFINICIÓN DE ERROR

Ejercicio:
Suponga que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache, y se obtiene 9 999 y 9 cm, respectivamente. Si los valores verdaderos son 10 000 y 10 cm, calcule *a*) el error verdadero y *b*) el error relativo porcentual verdadero en cada caso.

b) Puente $\varepsilon_t = \frac{1}{100\cancel{00}} * 1\cancel{00} = 0{,}01\ \%$

Remache $\varepsilon_t = \frac{1}{1\cancel{0}} * 10\cancel{0} = 10\%$

SISTEMA DECIMAL Y SISTEMA BINARIO

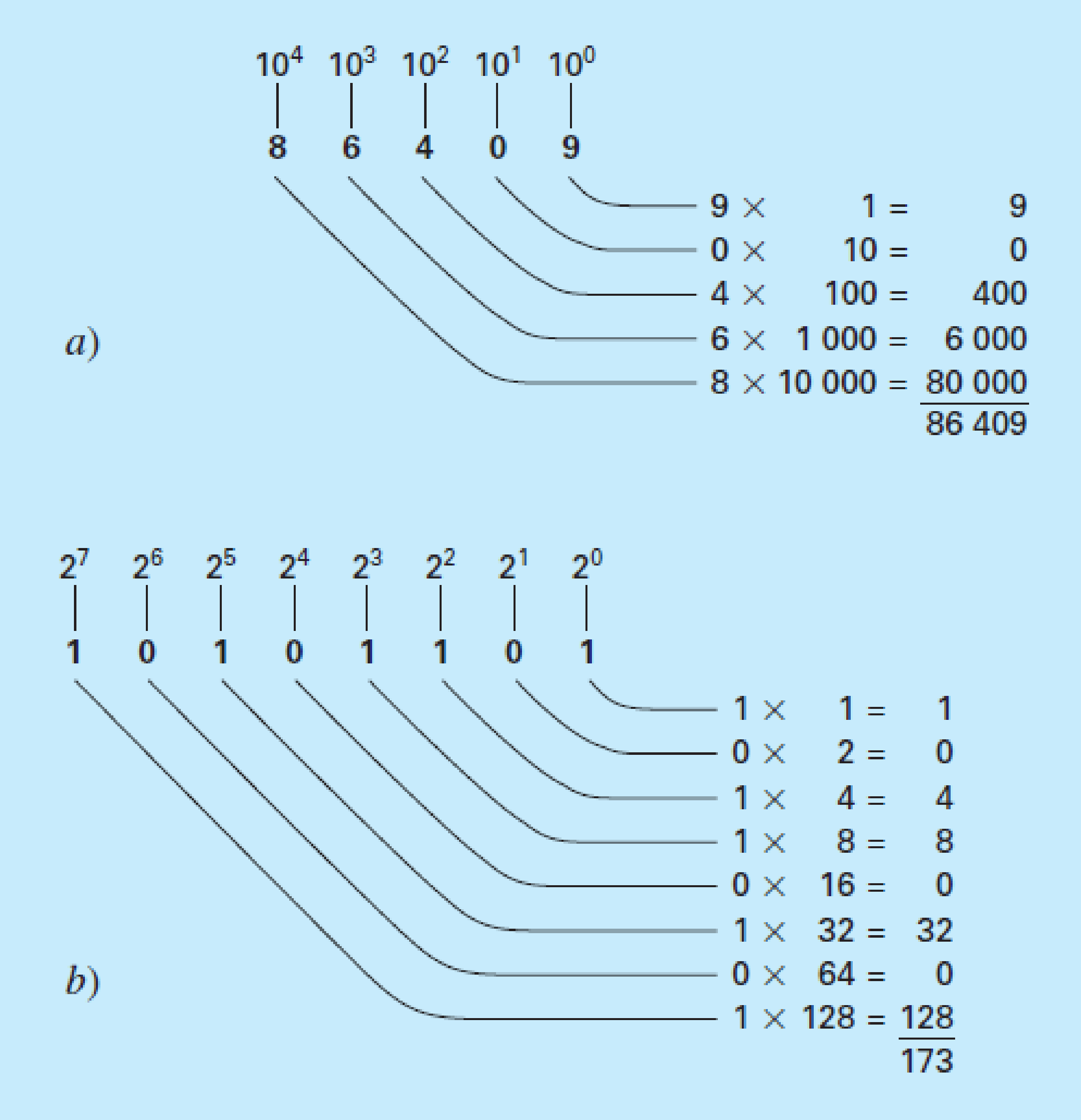


Imagen tomada de: Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill.

SISTEMA DECIMAL Y SISTEMA BINARIO

FIGURA 3.4
La representación de un entero decimal −173 en una computadora de 16 bits usando el método de magnitud con signo.

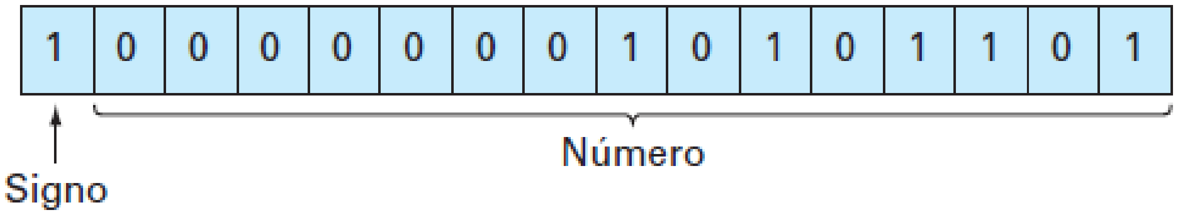


Imagen tomada de: Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill.

SISTEMA DECIMAL Y SISTEMA BINARIO

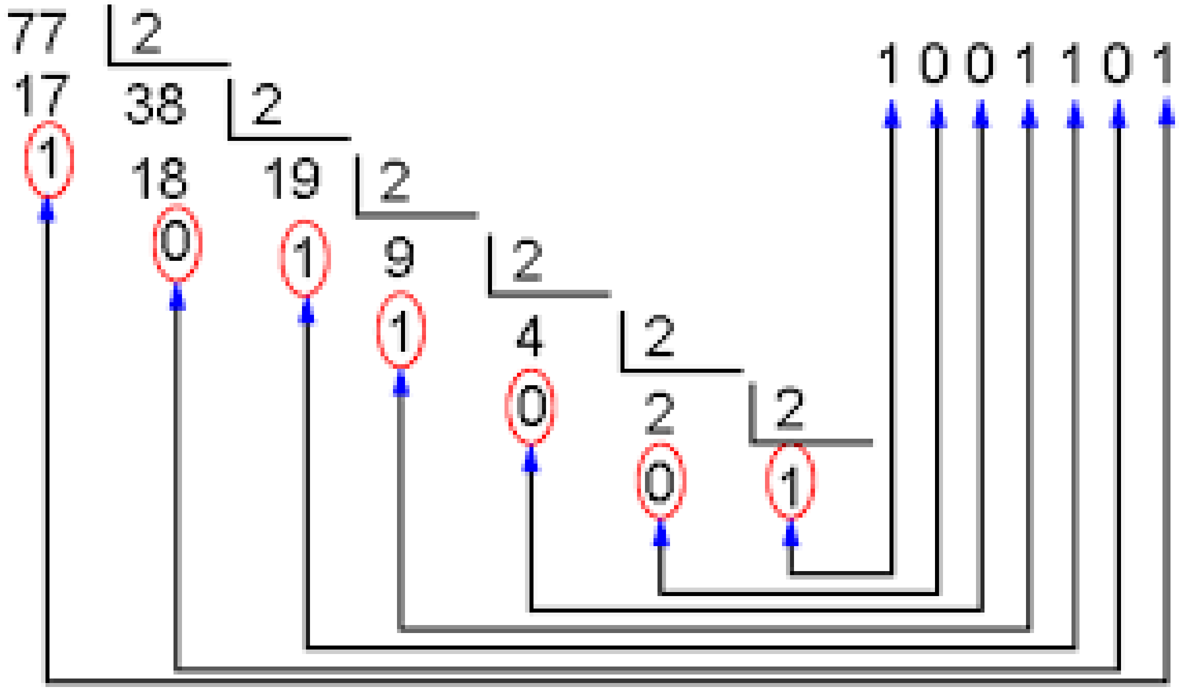
Ejemplo:
Expanda el número 1563 usando base 10

$$1563 = (1 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (3 \times 10^0).$$

SISTEMA DECIMAL Y SISTEMA BINARIO

Ejemplo:

Expanda el número 77 usando base 2



SISTEMA DECIMAL Y SISTEMA BINARIO

Ejercicios: expanda los siguientes números según la base indicada.

- 34210 (base 10)
- 697 (base 2)
- 96 (base 2)
- 419 (base 10)
- 315 (base 2)

ESTIMACIÓN DEL ERROR CON MÉTODOS ITERATIVOS

$$\text{Error relativo porcentual verdadero} = \varepsilon_t = \frac{error\ verdadero}{valor\ verdadero} * 100$$

En ocasiones es difícil obtener el valor verdadero, por lo que se recurre a un valor aproximado.

$$\varepsilon_a = \frac{error\ aproximado}{valor\ aproximado} * 100$$

Y para hallar las aproximaciones, comúnmente se utiliza un método iterativo.

$$\varepsilon_a = \frac{(aproximación\ actual - aproximación\ anterior)}{aproximación\ actual} * 100$$

ESTIMACIÓN DEL ERROR CON MÉTODOS ITERATIVOS

Al final lo que se busca es que

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

Donde, ε_s hace referencia al error tolerado.

Si se relaciona el error con la cantidad de cifras significativas, se tiene que el error tolerado para **n** cifras significativas está dado por:

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$$

ESTIMACIÓN DEL ERROR CON MÉTODOS ITERATIVOS

Muchas funciones se representan a través de series infinitas.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Ejemplo: calcule el valor de $e^{0.5}$, iniciando la iteración en $e^x = 1$.

Tenga presente que el valor verdadero de $e^{0.5}$=1.648721271
Agregue términos, hasta que el valor absoluto del error aproximado ε_a sea menor que un criterio de error preestablecido ε_s con **tres cifras significativas.**

ESTIMACIÓN DEL ERROR CON MÉTODOS ITERATIVOS

Solución: $\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$e^{0.5}=1.648721271$

Término	Resultado	$\varepsilon_t(\%)$	ε_a (%)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			

ESTIMACIÓN DEL ERROR CON MÉTODOS ITERATIVOS

Solución: $\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$e^{0.5}$=1.648721271

Término	Resultado	ε_t(%)	ε_a (%)
1	1	39,34693404	
2	1,5	9,02040106	33,33333333
3	1,625	1,438767815	7,692307692
4	1,645833333	0,175162274	1,265822785
5	1,6484375	0,017211581	0,157977883
6	1,648697917	0,001416512	0,015795293
7	1,648719618	0,000100256	0,001316257
8	1,648721168	6,23788E-06	9,40183E-05
9	1,648721265	3,61737E-07	5,87614E-06
10	1,64872127	3,52849E-08	3,26452E-07
11	1,648721271	1,89622E-08	1,63226E-08

Se detiene cuando error aproximado sea menor que error tolerado

EJERCICIO 2

Determine el número de términos necesarios para aproximar cos x a 8 cifras significativas con el uso de la serie de McLaurin.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Calcule la aproximación con el empleo del valor de $x = 0.3\pi$.

EJERCICIO 2

Determine el número de términos necesarios para aproximar cos *x* a 8 cifras significativas con el uso de la serie de McLaurin.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Calcule la aproximación con el empleo del valor de $x = 0.3\pi$.

$$\varepsilon_s = (0{,}5 * 10^{2-n})\,\% =$$

EJERCICIO 2

Determine el número de términos necesarios para aproximar cos *x* a 8 cifras significativas con el uso de la serie de McLaurin.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Calcule la aproximación con el empleo del valor de *x* = 0.3*π*.

$$\varepsilon_s = (0{,}5 * 10^{2-n})\% = 0{,}0000005$$

EJERCICIO 2

Determine el número de términos necesarios para aproximar cos *x* a 8 cifras significativas con el uso de la serie de McLaurin.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Calcule la aproximación con el empleo del valor de *x* = 0.3*π*.

$\varepsilon_s = (0{,}5 * 10^{2-n})\,\% = 0{,}0000005$

$\cos(0{,}3\pi) =$

EJERCICIO 2

Determine el número de términos necesarios para aproximar cos *x* a 8 cifras significativas con el uso de la serie de McLaurin.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Calcule la aproximación con el empleo del valor de $x = 0.3\pi$.

$\varepsilon_s = (0{,}5 * 10^{2-n})\% = 0{,}0000005$

$\cos(0{,}3\pi) = 0{,}587785252$

EJERCICIO 2

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\varepsilon_s = (0{,}5 * 10^{2-n})\ \% = 0{,}0000005$$

$$\cos(0{,}3\pi) = 0{,}587785252$$

Término	exponente	Resultado	$\varepsilon_t(\%)$	$\varepsilon_a\ (\%)$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

EJERCICIO 2

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$\varepsilon_s = (0{,}5 * 10^{2-n})\,\% = 0{,}0000005$

$\cos(0{,}3\pi) = 0{,}587785252$

exponente	Resultado	$\varepsilon_t(\%)$	$\varepsilon_a\ (\%)$
	1	-70,13016167	
2	0,555867802	5,430120987	-79,898889
4	0,58874337	-0,16300475	5,584023513
6	0,587769964	0,002601065	-0,165610123
8	0,587785404	-2,5752E-05	0,002626816
10	0,587785251	1,73612E-07	-2,59256E-05
12	0,587785252	-8,48347E-10	1,74461E-07
14	0,587785252	3,11656E-12	-8,51463E-10
16	0,587785252	-3,77765E-14	3,15434E-12
18	0,587785252	-3,77765E-14	0
20	0,587785252	-3,77765E-14	0