UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

TEORÍA DE LA DUALIDAD

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Problema primal	*Problema dual*
Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$	Minimizar $W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$
sujeta a	sujeta a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$ para $i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,$ para $j = 1, 2, \ldots, n$
y	y
$x_j \geq 0,$ para $j = 1, 2, \ldots, n.$	$y_i \geq 0,$ para $i = 1, 2, \ldots, m.$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Problema primal

Maximizar $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

y

$$x_j \geq 0, \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Problema dual

Minimizar $\quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$y_i \geq 0, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Problema primal

Max Z = cx
Sujeto a: Ax <= b
x>=0

Problema dual

Min W = $b^T y$
Sujeto a: $A^T y$ >= c
y>=0

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Problema primal

Maximizar $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

y

$$x_j \geq 0, \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Problema dual

Minimizar $\quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$y_i \geq 0, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Problema primal

Max Z = cx
Sujeto a: Ax <= b
x>=0

Problema dual

Min W = $b^T y$
Sujeto a: $A^T y$ >= c
y>=0

El problema dual del dual es el mismo primal

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Se sabe que el valor de la función objetivo (evaluada en cualquier solución factible) de un problema máximo, va a ser siempre menor o igual que el valor de la función objetivo (evaluada en cualquier solución factible) del problema de mínimo.

Z<=W

Los valores coinciden (son iguales) cuando se evalúa el valor óptimo en ambas funciones objetivo.

Z máximo = W mínimo

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejemplo con minimización:

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 8X_2$$

$$3X_1 + X_2 \geq 4$$

$$5X_1 + 2X_2 \geq 7$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejemplo con minimización:

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 8X_2$$

$$3X_1 + X_2 \geq 4$$

$$5X_1 + 2X_2 \geq 7$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Max } w = 4y_1 + 7y_2$$

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejemplo con minimización:

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 8X_2$$

$$3X_1 + X_2 \geq 4$$

$$5X_1 + 2X_2 \geq 7$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Max } w = 4y_1 + 7y_2$$

$$3y_1 + 5y_2 \leq 6$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 8$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

	Problema de Minimización		Problema de Maximización	
Variables	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	Restricciones
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	
	no-restringida $-\infty \leq var \leq \infty$	$\longleftrightarrow$	$=$	
Restricciones	$\geq b$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	Variables
	$\leq b$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	
	$= b$	$\longleftrightarrow$	no-restringida $-\infty \leq var \leq \infty$	

TEORÍA DE LA DUALIDAD

$$\text{Max } z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3: No restringida

TEORÍA DE LA DUALIDAD

$$\text{Max } z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3: No restringida

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

$$\text{Max } z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3: No restringida

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3$$

TEORÍA DE LA DUALIDAD

$$\text{Max } z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3: No restringida

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$$

TEORÍA DE LA DUALIDAD

$$\text{Max } z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3: No restringida

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_3$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

$$\text{Max } z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3: No restringida

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -4$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

$$\text{Max } z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3: No restringida

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$$
$$y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -4$$
$$-y_1 - 5y_2 + 2y_3$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

$$\text{Max } z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3: No restringida

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -4$$

$$-y_1 - 5y_2 + 2y_3 = -1$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

$$\text{Max } z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3: No restringida

	Problema de Minimización	⟷	Problema de Maximización	
	≥ 0	⟷	≤	
Variables	≤ 0	⟷	≥	Restricciones
	no-restringida - ∞ ≤ var ≤ ∞	⟷	=	
	≥ b	⟷	≥ 0	
Restricciones	≤ b	⟷	≤ 0	Variables
	= b	⟷	no-restringida - ∞ ≤ var ≤ ∞	

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -4$$

$$-y_1 - 5y_2 + 2y_3 = -1$$

$y_1 \leq 0$

$y_2 \geq 0$

y_3 No rest.

¡Siempre hacia lo alto!

REFERENCIAS:

Hillier, F. S. L., Hillier, G. J. F. S., & Lieberman, G. J. (1989). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill. 2018

https://www.u-cursos.cl/usuario/e4ec9e12c4e47e3de09b0ff5dbe14eb0/mi_blog/r/dualidad.pdf

https://www.youtube.com/watch?v=x4CjMp_d30s

¡Siempre hacia lo alto!

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

¡Siempre hacia lo alto!

USTATUNJA.EDU.CO

@santotomastunja