UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

MÉTODOS NUMÉRICOS

TALLER DE SOCIALIZACIÓN

1. Explique con sus palabras a qué se refieren los términos de error de redondeo, cifras significativas, exactitud, precisión.
2. ¿Por qué el E_t no es tan contundente cuando se busca hallar el error existente en una medición?
3. ¿Qué significado tiene ε_s y de qué parámetro depende?

ERROR ABSOLUTO Y ERROR RELATIVO

Suponga que $\hat{p}$ es una aproximación de p.

El **error absoluto** es $E_p = |\ p - \hat{p}\ |$

El **error relativo** es $\mathcal{E}_p = |\ p - \hat{p}\ | * 100 / \ |p|$, dado que $|p| \neq 0$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|2.1645 - 2.16|}{2.1645} \times 100$$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|2.1645 - 2.16|}{2.1645} \times 100 = 0{,}2079$$

- $n = 0 \Rightarrow \varepsilon_s =$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|2.1645 - 2.16|}{2.1645} \times 100 = 0,2079$$

• $n = 0 \Rightarrow \varepsilon_s = 50$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|2.1645 - 2.16|}{2.1645} \times 100 = 0,2079$$

$$\cdot\ n = 0 \Rightarrow \varepsilon_s = 50 \rightarrow |\varepsilon_t| < \varepsilon_s \checkmark$$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|2.1645 - 2.16|}{2.1645} \times 100 = 0,2079$$

- $n = 0 \Rightarrow \varepsilon_s = 50 \rightarrow |\varepsilon_t| < \varepsilon_s$ ✓
- $n = 1 \Rightarrow \varepsilon_s = 5 \rightarrow |\varepsilon_t| < \varepsilon_s$ ✓

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|2.1645 - 2.16|}{2.1645} \times 100 = 0,2079$$

- $n=0 \Rightarrow \varepsilon_s = 50 \rightarrow |\varepsilon_t| < \varepsilon_s$ ✓
- $n=1 \Rightarrow \varepsilon_s = 5 \rightarrow |\varepsilon_t| < \varepsilon_s$ ✓
- $n=2 \Rightarrow \varepsilon_s = 0.5 \rightarrow |\varepsilon_t| < \varepsilon_s$ ✓

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|2.1645 - 2.16|}{2.1645} \times 100 = 0{,}2079$$

- $n = 3 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}05$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|2.1645 - 2.16|}{2.1645} \times 100 = 0,2079$$

- $n = 3 \rightarrow \varepsilon_s = 0,05 \Rightarrow |\varepsilon_t| < \varepsilon_s$ X

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 2.16 una aproximación de p = 2.1645. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|2.1645 - 2.16|}{2.1645} \times 100 = 0{,}2079$$

- $n = 3 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}05 \Rightarrow |\varepsilon_t| < \varepsilon_s$ X

2 dígitos significativos

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_{s} = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 0.000009 una aproximación de p = 0.000012. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 0.000009 una aproximación de p = 0.000012. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|0{,}000012 - 0{,}000009|}{0{,}000012} * 100$$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 0.000009 una aproximación de p = 0.000012. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|0{,}000012 - 0{,}000009|}{0{,}000012} * 100 = 25$$

$\cdot\ n = 0 \rightarrow \varepsilon_s =$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$$

Sea $\hat{p}$ = 0.000009 una aproximación de p = 0.000012. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|0{,}000012 - 0{,}000009|}{0{,}000012} * 100 = 25$$

- $n = 0 \rightarrow \varepsilon_s = 50 \rightarrow \varepsilon_t < \varepsilon_s$ ✓
- $n = 1$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 0.000009 una aproximación de p = 0.000012. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|0,000012 - 0,000009|}{0,000012} * 100 = 25$$

- $n = 0 \rightarrow \varepsilon_s = 50 \rightarrow \varepsilon_t < \varepsilon_s$ ✓
- $n = 1 \rightarrow \varepsilon_s = 5 \rightarrow \varepsilon_t < \varepsilon_s$ ✗

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 0.000009 una aproximación de p = 0.000012. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{|0{,}000012 - 0{,}000009|}{0{,}000012} * 100 = 25$$

- $n = 0 \rightarrow \varepsilon_s = 50 \rightarrow \varepsilon_t < \varepsilon_s$ ✓
- $n = 1 \rightarrow \varepsilon_s = 5 \rightarrow \varepsilon_t < \varepsilon_s$ ✗

0 dígitos significativos

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_{s} = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 999996 una aproximación de p = 1000000. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 999996 una aproximación de p = 1000000. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{1000000 - 999996}{1000000} * 100 =$$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 999996 una aproximación de p = 1000000. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{1000000 - 999996}{1000000} * 100 = 0{,}0004$$

$n = 0 \rightarrow$

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 999996 una aproximación de p = 1000000. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$$\varepsilon_t = \frac{1000000 - 999996}{1000000} * 100 = 0{,}0004$$

$n = 0 \rightarrow \varepsilon_s = 50$ ✓

$n = 1 \rightarrow \varepsilon_s = 5$ ✓

$n = 2 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}5$ ✓

$n = 3 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}05$ ✓

$n = 4 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}005$ ✓

$n = 5 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}0005$ ✓

$n = 6 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}00005$ ✗

ERROR TOLERADO Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

Sea $\hat{p}$ = 999996 una aproximación de p = 1000000. Encuentre cuántos dígitos significativos son necesarios.

$\varepsilon_t = \dfrac{1000000 - 999996}{1000000} * 100 = 0{,}0004$

$n = 0 \rightarrow \varepsilon_s = 50$ ✓

$n = 1 \rightarrow \varepsilon_s = 5$ ✓

$n = 2 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}5$ ✓

$n = 3 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}05$ ✓

$n = 4 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}005$ ✓

$n = 5 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}0005$ ✓

$n = 6 \rightarrow \varepsilon_s = 0{,}00005$ ✗

5 dígitos significativos

ERRORES

Existen dos causas principales que originan errores al hacer cálculos numéricos:

- Errores de redondeo: se asocia con el limitado número de dígitos que se pueden almacenar en un computador. El redondeo se puede hacer mediante truncado (ocasiona pérdida de información) o redondeo simétrico (comúnmente utilizado).
- Errores de truncamiento: ocurre cuando una expresión matemática se reemplaza por otra más simple, es decir, se emplea una aproximación.

ERROR DE TRUNCAMIENTO

El error de Truncamiento se refiere al error que aparece cuando una expresión matemática complicada se “reemplaza” por otra fórmula más elemental. Por ejemplo la siguiente serie infinita:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

Podría ser reemplazada solo por los 5 primeros términos, entonces aparece el **error de truncamiento**.

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$$

SERIE DE TAYLOR

Corresponde a una serie infinita de potencias, que representa a una función en un radio dado alrededor de cierto punto.

El teorema indica que cualquier función suave se puede aproximar a un polinomio.

SERIE DE TAYLOR

Aproximación de orden cero:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

- Si la función es una constante, se obtiene una igualdad.
- Si no lo es, se requieren más términos para mejorar la aproximación.

Aproximación de primer orden:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

Si la función f y las n derivadas son continuas en un intervalo donde está a y x, entonces se tiene que f puede estar dada por

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$h = x - x_0$

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

Calcular la serie de Taylor para $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 9$, alrededor de $x_0 = 2$.

Nota: se deriva hasta que el valor de ésta sea cero.

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

Calcular la serie de Taylor para $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 9$, alrededor de $x_0 = 2$.

Nota: se deriva hasta que el valor de ésta sea cero.

$$f'(x) = 15x^2 - 4x$$

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

Calcular la serie de Taylor para $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 9$, alrededor de $x_0 = 2$.

Nota: se deriva hasta que el valor de ésta sea cero.

$$f'(x) = 15x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 30x - 4$$

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

Calcular la serie de Taylor para $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 9$, alrededor de $x_0 = 2$.

Nota: se deriva hasta que el valor de ésta sea cero.

$$f'(x) = 15x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 30x - 4$$

$$f'''(x) = 30$$

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

Calcular la serie de Taylor para $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 9$, alrededor de $x_0 = 2$.

Nota: se deriva hasta que el valor de ésta sea cero.

$$f'(x) = 15x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 30x - 4$$

$$f'''(x) = 30$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Reemplace el valor de $x_0 = 2$

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

Calcular la serie de Taylor para $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 9$, alrededor de $x_0 = 2$.

Nota: se deriva hasta que el valor de ésta sea cero.

$f'(x) = 15x^2 - 4x$

$f'(2) = 15(2)^2 - 4(2) = 60 - 8 = 52$

$f''(x) = 30x - 4$

$f''(2) = 30(2) - 4 = 60 - 4 = 56$

$f'''(x) = 30$

$f'''(2) = 30$

$f^{(4)}(x) = 0$

$f^{(4)}(2) = 0$

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

Calcular la serie de Taylor para $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 9$, alrededor de $x_0 = 2$.

Nota: se deriva hasta que el valor de ésta sea cero.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$f\ (2) =$$

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$f\,(2) = 41$$

$$f'(2) = 52$$

$$f''(2) = 56$$

$$f'''(2) = 30$$

$$f^{(4)}(2) = 0$$

SERIE DE EXPANSIÓN DE TAYLOR

Calcular la serie de Taylor para $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 9$, alrededor de $x_0 = 2$.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$f(2) = 41$$

$$f'(2) = 52$$

$$f''(2) = 56$$

$$f'''(2) = 30$$

$$f^{(4)}(2) = 0$$

Serie de Taylor

$$41 + 52(x - 2) + 28(x - 2)^2 + 5(x - 2)^3$$

EJERCICIO

Calcule el cuarto polinomio de Taylor para la función f(x), centrado en el punto X_0=-2.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

EJERCICIO

Calcule el cuarto polinomio de Taylor para la función f(x), centrado en el punto X_0=-2.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$f(x) = (x-1)^{-1}$

EJERCICIO

Calcule el cuarto polinomio de Taylor para la función f(x), centrado en el punto X_0=-2.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$f(x) = (x-1)^{-1}$

$f'(x) = -1(x-1)^{-2}$

EJERCICIO

Calcule el cuarto polinomio de Taylor para la función f(x), centrado en el punto X_0=-2.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5}$$

EJERCICIO

Calcule el cuarto polinomio de Taylor para la función f(x), centrado en el punto X_0=-2.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$$

$$f'(-2) = -\frac{1}{9}$$

$$f''(-2) = -2/27$$

$$f'''(-2) = -2/27$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5}$$

$$f^{(4)}(-2) = \frac{-8}{81}$$

EJERCICIO

Calcule el cuarto polinomio de Taylor para la función f(x), centrado en el punto X_0=-2.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f(-2) = \frac{1}{-3}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x) \simeq -\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x+2) - \frac{(x+2)^2}{27} - \frac{(x+2)^3}{81} - \frac{(x+2)^4}{243}$$