UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS

PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA

SECCIONAL TUNJA

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

Interpolación y aproximación polinomial

Interpolación polinomial

Serie de Taylor:

Si una función f(x) tiene derivadas continuas de todos sus órdenes en un punto X_0 que está dentro de un intervalo (a,b) y si la sucesión de polinomios de Taylor converge a f(x), se tiene que:

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} P_N(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Para todo x $\in$ (a,b). Entonces f es analítica y se puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de $x_{0.}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Interpolación polinomial

Para construir el polinomio de Taylor se requiere el valor de la función f y sus derivadas de orden superior, evaluadas en el punto x_0.

El problema está cuando esas derivadas de orden superior no están disponibles o son muy difíciles de calcular.

Interpolación polinomial

Si conocemos los N+ 1 puntos de la curva f(x):

$$(x_0, y_0),(x_1, y_1), \ldots,(x_N, y_N)$$

Donde se tiene que todas las x_k se encuentran dentro del intervalo [a,b].

$$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_N \leq b$$

Entonces se puede construir un polinomio P(x) de grado N que pase por los N+1 puntos. Para esto solo se necesita conocer los valores de los puntos (x_k, y_k). Es decir, no se requieren las derivadas de orden superior.

¡Siempre hacia lo alto!

Interpolación polinomial

Esto significa que este polinomio $P(x)$ puede usarse como una aproximación a $f(x)$ en todo el intervalo $[a,b]$.

¡Siempre hacia lo alto!

Interpolación polinomial

Esto significa que este polinomio P(x) puede usarse como una aproximación a f(x) en todo el intervalo [a,b].

En algunas funciones se dispone solo de los valores de N+1 puntos tabulados y se hace necesario aproximar f(x) en valores que no se encuentran allí. Sin embargo, es importante analizar siempre el valor del error de esos puntos tabulados. Si es significativo, entonces es mejor usar otros métodos (ajuste de curvas)

¡Siempre hacia lo alto!

Interpolación polinomial

Si $x_0 < x < x_N$ entonces a la aproximación $P(x)$ se le llama valor interpolado.

Pero si solo se tiene $x < x_0$ o $x > x_N$, entonces a $P(x)$ se le llama valor extrapolado.

¡Siempre hacia lo alto!

Interpolación polinomial

Ejemplo:

Se busca un polinomio P(x) que tome los valores de la siguiente tabla de valores:

x	P(x) = y
-2	-6
0	4
1	-3
3	-11

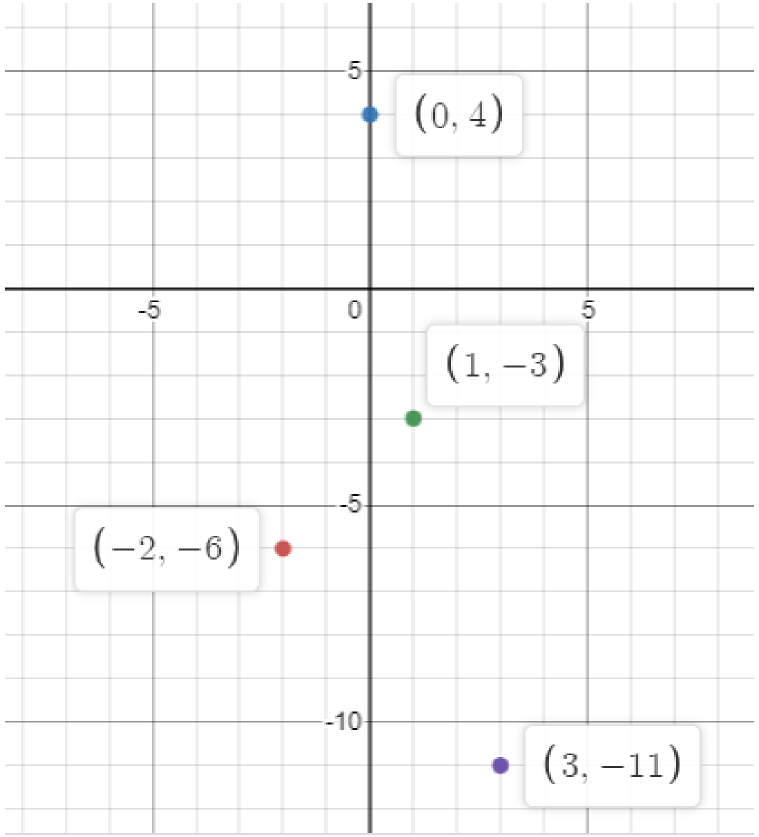
¡Siempre hacia lo alto!

Interpolación polinomial

Ejemplo:

Se busca un polinomio P(x) que tome los valores de la siguiente tabla de valores:

x	P(x) = y
-2	-6
0	4
1	-3
3	-11



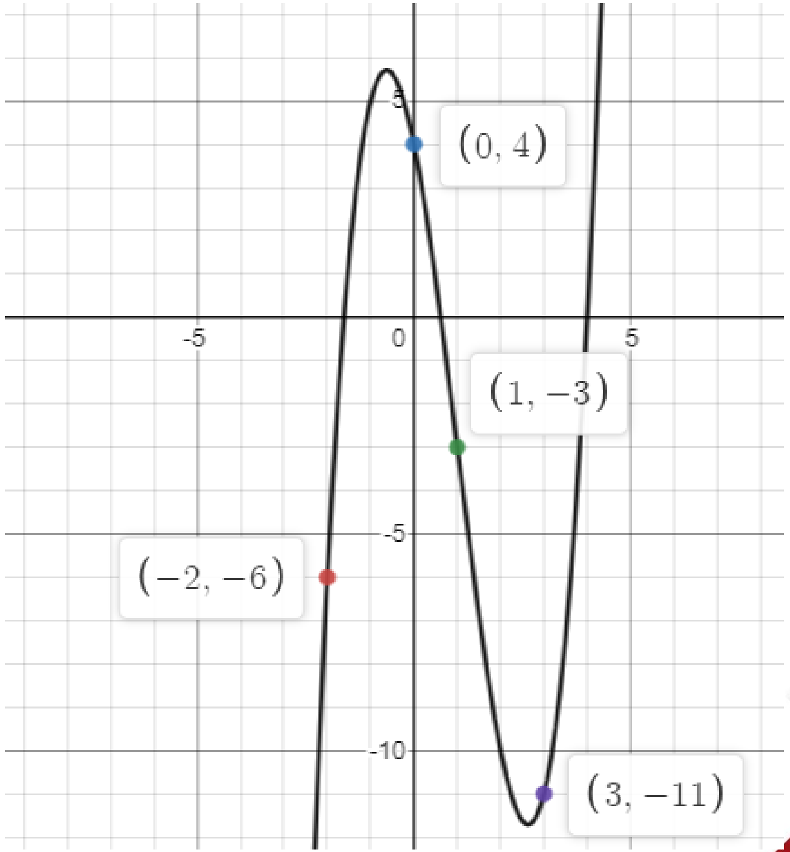
Interpolación polinomial

Ejemplo:

Se busca un polinomio P(x) que tome los valores de la siguiente tabla de valores:

x	P(x) = y
-2	-6
0	4
1	-3
3	-11

$$y = 4 - 5x - 3x^2 + x^3$$



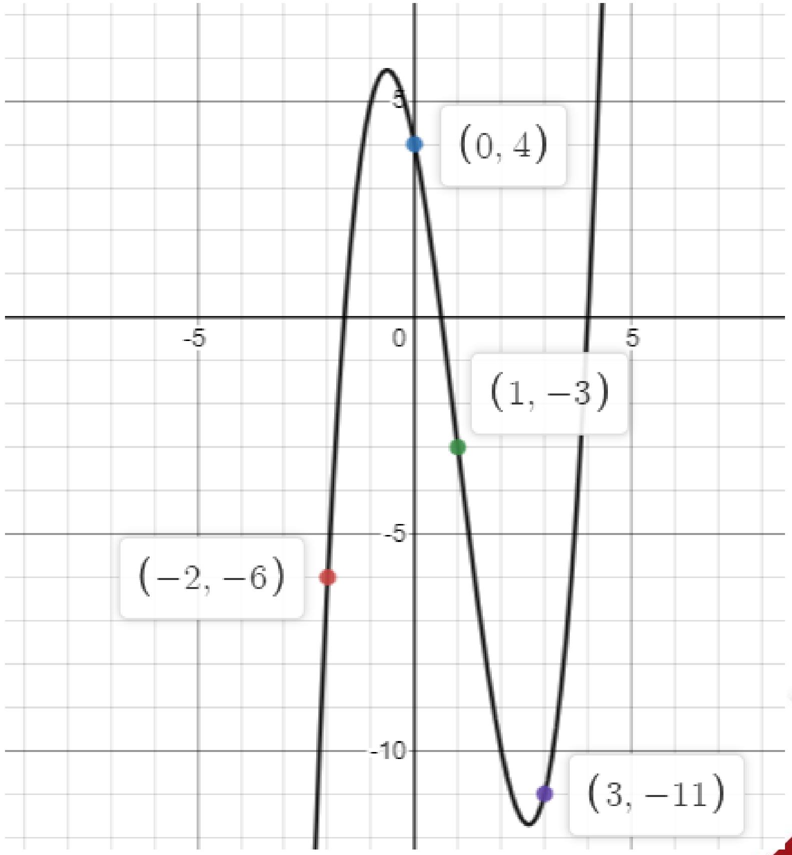
Interpolación polinomial

Ejemplo:

Se busca un polinomio P(x) que tome los valores de la siguiente tabla de valores:

x	P(x) = y
-2	-6
0	4
1	-3
3	-11

$$y = 4 - 5x - 3x^2 + x^3$$



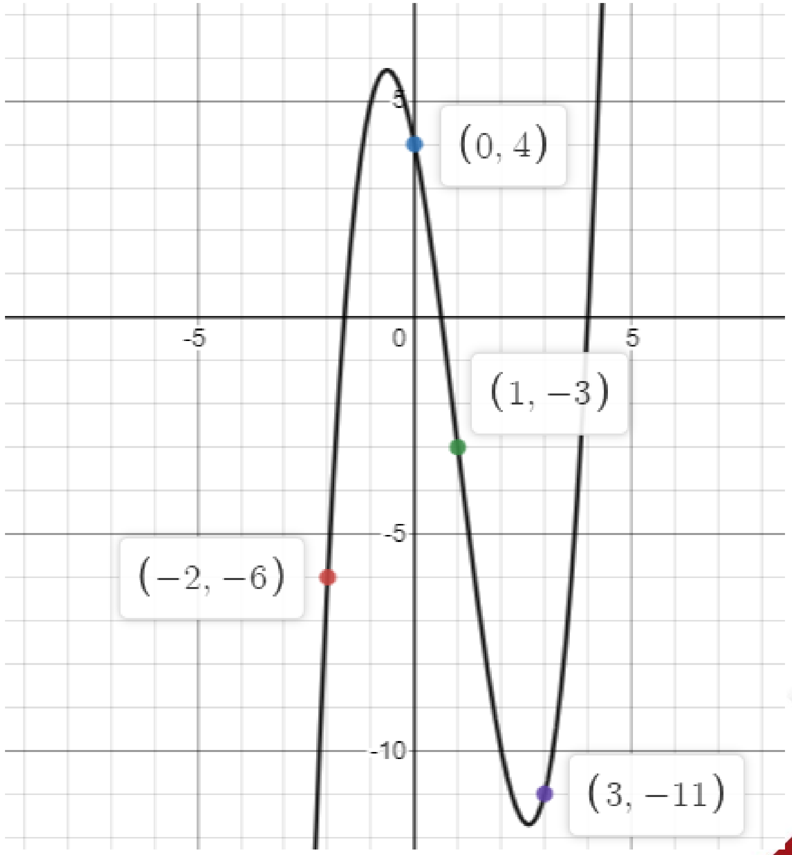
¡Siempre hacia lo alto!

Interpolación polinomial

Ejemplo:
Se busca un polinomio P(x) que tome los valores de la siguiente tabla de valores:

x	P(x) = y
-2	-6
0	4
1	-3
3	-11

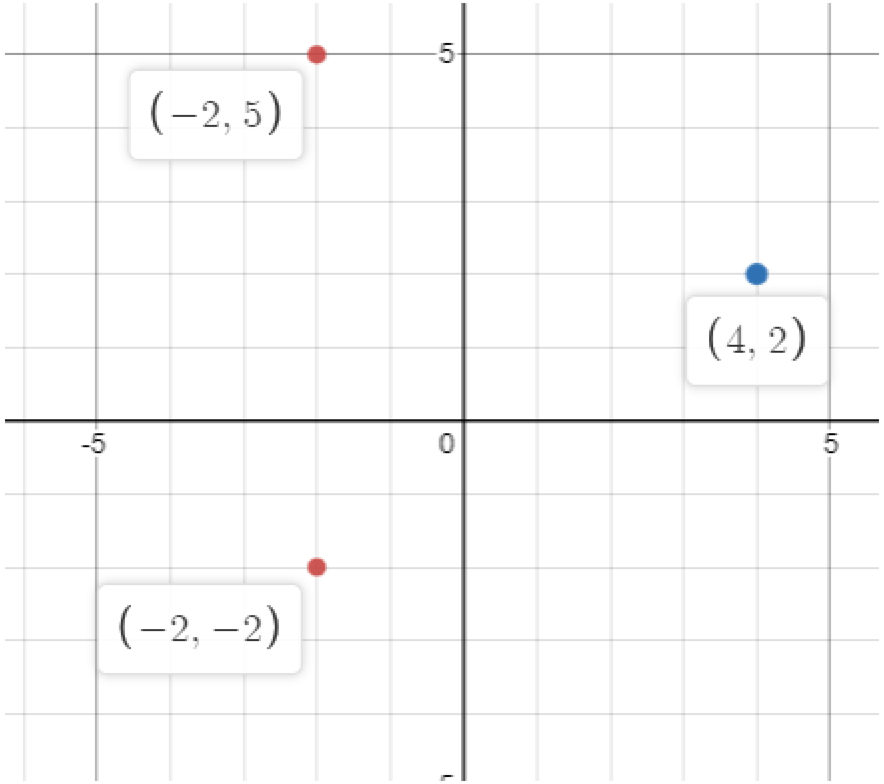
$$y = 4 - 5x - 3x^2 + x^3$$



Interpolación polinomial

Ejemplo 2:
Se busca un polinomio P(x) que tome los valores de la siguiente tabla de valores:

x	P(x) = y
-2	-1
-2	3
1	2

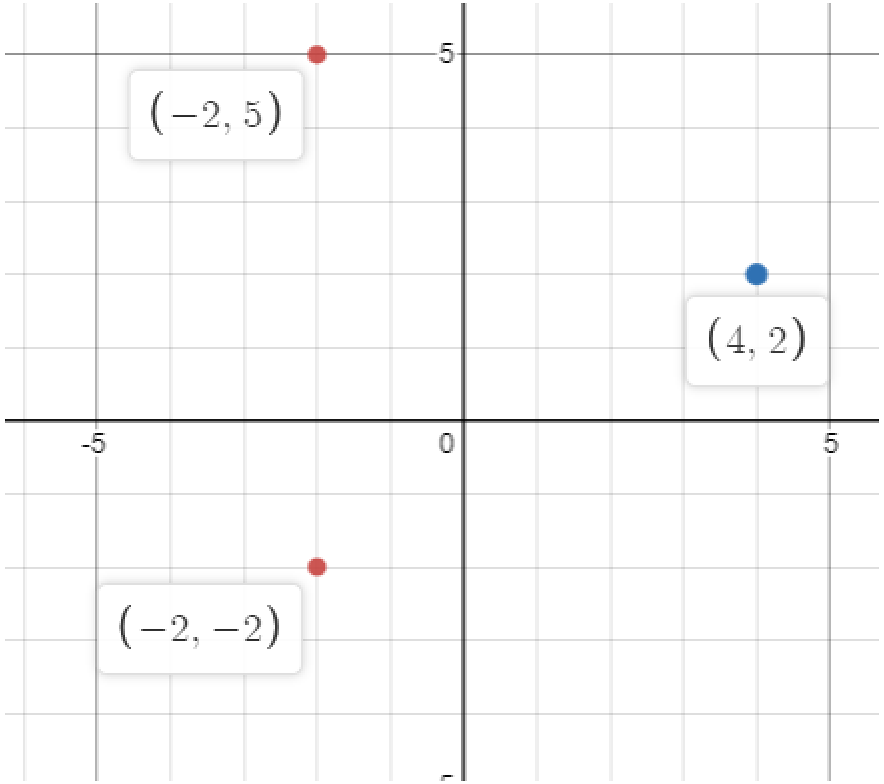


Interpolación polinomial

Ejemplo 2:

Se busca un polinomio P(x) que tome los valores de la siguiente tabla de valores:

x	P(x) = y
-2	-1
-2	3
1	2



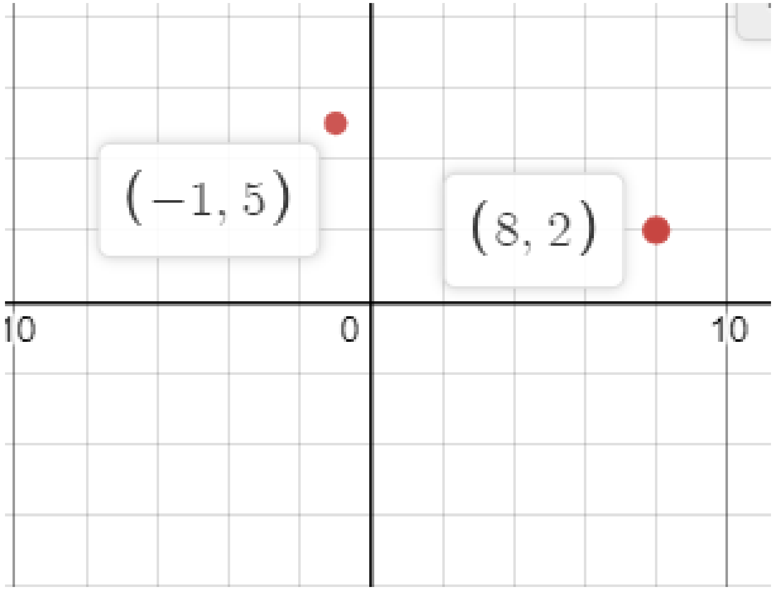
No se pueden tener dos valores para el polinomio con el mismo valor de x

¡Siempre hacia lo alto!

Interpolación polinomial

Relación entre el grado y el número de puntos

x	P(x) = y
-1	5
8	2

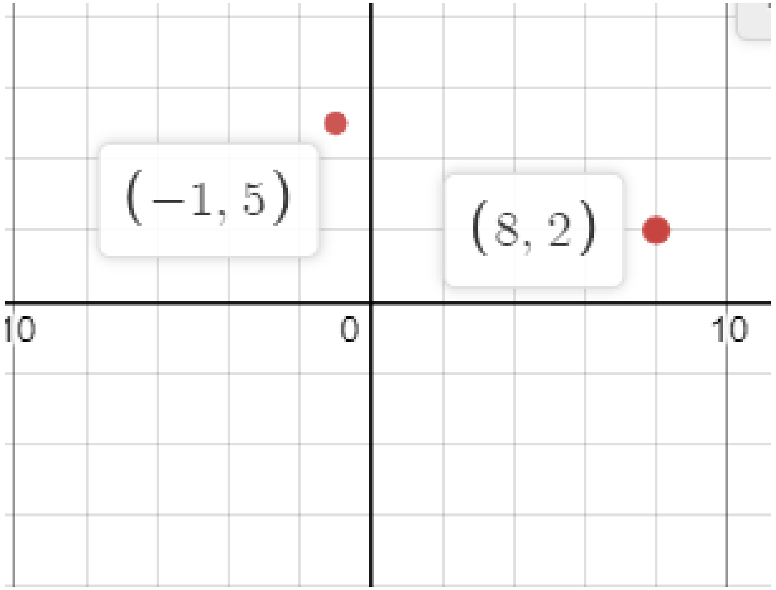


¡Siempre hacia lo alto!

Interpolación polinomial

Relación entre el grado y el número de puntos

x	P(x) = y
-1	5
8	2



El mínimo grado del polinomio sería 1.