UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

Método de las dos fases

Método de las dos fases

Este método elimina el uso de la constante M.

La primera fase consiste en encontrar la solución factible básica inicial.

Si se encuentra, entonces se realiza la segunda fase para resolver el problema original.

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

FASE 1:

- Escriba el problema en forma estándar y agregue las variables artificiales necesarias a las restricciones.
- Determine la solución básica de la ecuación resultante que minimice la suma de las variables artificiales. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema de PL no tiene solución factible. Si el valor es cero, se continúa a la fase 2.

Método de las dos fases

FASE 1:

- Escriba el problema en forma estándar y agregue las variables artificiales necesarias a las restricciones.
- Determine la solución básica de la ecuación resultante que minimice la suma de las variables artificiales. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema de PL no tiene solución factible. Si el valor es cero, se continúa a la fase 2.

FASE 2:

Se usa la solución factible de la fase 1 como solución factible básica para dar solución al problema original.

Método de las dos fases

EJEMPLO:

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Signo de restricción	Transformación
<=	+ Variable de holgura
>=	- Variable de holgura + variable artificial
=	+ variable artificial

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Minimizar $z = 4x_1 + x_2$

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Signo de restricción	Transformación
<=	+ Variable de holgura
>=	- Variable de holgura + variable artificial
=	+ variable artificial

Forma estándar

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1a_1 + 1a_2$$

$$3x_1 + x_2 + a_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_1 + a_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + S_2 = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, a_1, a_2 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Forma estándar

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1a_1 + 1a_2$$

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$3x_1 + x_2 + a_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - s_1 + a_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0$$

Se busca:

$$\text{Min } a = a_1 + a_2$$

(independientemente si es Min o Max)

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

EJEMPLO:

$$\text{Min } a = a_1 + a_2$$

$$a - a_1 - a_2 = 0$$

Forma estándar

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1a_1 + 1a_2$$

$$3x_1 + x_2 + a_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - s_1 + a_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0$$

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
a1	3	1	0	0	1	0	3
a2	4	3	-1	0	0	1	6
s2	1	2	0	1	0	0	4
a	0	0	0	0	-1	-1	0

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución	
a1	3	1	0	0	1	0	3	
a2	4	3	-1	0	0	1	6	
s2	1	2	0	1	0	0	4	
a	0	0	0	0	-1	-1	0	F1+F4

Para que esté en la forma del tablero simplex debe cumplirse que el resto de elementos de la columna de la solución básica esté en cero

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
a1	3	1	0	0	1	0	3
a2	4	3	-1	0	0	1	6
s2	1	2	0	1	0	0	4
a	0	0	0	0	-1	-1	0

F1+F4

Para que esté en la forma del tablero simplex debe cumplirse que el resto de elementos de la columna de la solución básica esté en cero

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
a1	3	1	0	0	1	0	3
a2	4	3	-1	0	0	1	6
s2	1	2	0	1	0	0	4
a	3	1	0	0	0	-1	3

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución	
a1	3	1	0	0	1	0	3	
a2	4	3	-1	0	0	1	6	
s2	1	2	0	1	0	0	4	
a	3	1	0	0	0	-1	3	F2+F4

Para que esté en la forma del tablero simplex debe cumplirse que el resto de elementos de la columna de la solución básica esté en cero

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
a1	3	1	0	0	1	0	3
a2	4	3	-1	0	0	1	6
s2	1	2	0	1	0	0	4
a	7	4	-1	0	0	0	9

Lo que se busca es que el valor solución de a (9) sea cero

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Min $a = a_1 + a_2$

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
a1	3	1	0	0	1	0	3
a2	4	3	-1	0	0	1	6
s2	1	2	0	1	0	0	4
a	7	4	-1	0	0	0	9

Como en esta fase siempre estaremos minimizando, entonces se escoge la variable que entra como la más positiva de la función objetivo (a)

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Min $a = a_1 + a_2$

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución	
a1	3	1	0	0	1	0	3	3/3 =1
a2	4	3	-1	0	0	1	6	6/4=1.5
s2	1	2	0	1	0	0	4	4/1 =4
a	7	4	-1	0	0	0	9	

Como en esta fase siempre estaremos minimizando, entonces se escoge la variable que entra como la más positiva de la función objetivo (a).
La que sale es el mínimo cociente entre la solución y las variables básicas de la columna pivote

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Min $a = a_1 + a_2$

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
a1	3	1	0	0	1	0	3
a2	4	3	-1	0	0	1	6
s2	1	2	0	1	0	0	4
a	7	4	-1	0	0	0	9

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
x1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
A2	4	3	-1	0	0	1	6
s2	1	2	0	1	0	0	4
a	7	4	-1	0	0	0	9

Método de las dos fases

EJEMPLO:

$\text{Min } a = a_1 + a_2$

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
x1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
a2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2
s2	0	5/3	0	1	-1/3	0	3
a	0	5/3	-1	0	-7/3	0	2

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Min $a = a_1 + a_2$

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
X1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
a2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2
s2	0	5/3	0	1	-1/3	0	3
a	0	5/3	-1	0	-7/3	0	2

1/(1/3)=3

2/(5/3)=1.2

3/(5/3) =1.8

Como en esta fase siempre estaremos minimizando, entonces se escoge la variable que entra como la más positiva de la función objetivo (a) (variables no básicas).

La que sale es el mínimo cociente entre la solución y las variables básicas de la columna pivote

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

EJEMPLO:

Min $a = a_1 + a_2$

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
X1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
a2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2
s2	0	5/3	0	1	-1/3	0	3
a	0	5/3	-1	0	-7/3	0	2

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
X1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
x2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5
S2	0	5/3	0	1	-1/3	0	3
a	0	5/3	-1	0	-7/3	0	2

Método de las dos fases

EJEMPLO:

$\text{Min } a = a_1 + a_2$

Básica	x1	x2	s1	s2	a1	a2	Solución
X1	1	0	1/5	0	3/5	-1/5	3/5
x2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5
S2	0	0	1	1	1	-1	1
a	0	0	0	0	-1	-1	0

Como el mínimo de a = 0, la fase 1 produce la solución básica x1 = 3/5, x2=6/5 y s2= 1. Aquí ya las variables artificiales terminan su trabajo y se pueden eliminar sus columnas de la tabla y seguir con la segunda fase.

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

EJEMPLO: Fase 2

$$\text{Min } a = a_1 + a_2$$

Básica	x1	x2	s1	s2		Solución
X1	1	0	1/5	0		3/5
x2	0	1	-3/5	0		6/5
S2	0	0	1	1		1
a	0	0	0	0		0

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{Min } z = 4X_1 + X_2$$

$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$X_1 + \frac{1}{5}S_1 = \frac{3}{5}$$
$$X_2 - \frac{3}{5}S_1 = \frac{6}{5}$$
$$S_1 + S_2 = 1$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

Método de las dos fases

EJEMPLO: Fase 2

$$\text{Min } z = 4X_1 + X_2$$

$$X_1 + \frac{1}{5}S_1 = \frac{3}{5}$$

$$X_2 - \frac{3}{5}S_1 = \frac{6}{5}$$

$$S_1 + S_2 = 1$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

Básica	x1	x2	s1	s2	Solución
X1	1	0	1/5	0	3/5
X2	0	1	-3/5	0	6/5
S2	0	0	1	1	1
z	-4	-1	0	0	0

Método de las dos fases

EJEMPLO: Fase 2

$$\text{Min } z = 4X_1 + X_2$$

$$X_1 + \frac{1}{5}S_1 = \frac{3}{5}$$

$$X_2 - \frac{3}{5}S_1 = \frac{6}{5}$$

$$S_1 + S_2 = 1$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

Básica	x1	x2	s1	s2	Solución
X1	1	0	1/5	0	3/5
X2	0	1	-3/5	0	6/5
S2	0	0	1	1	1
z	-4	-1	0	0	0

Los valores de z en las variables básicas x1 y x2 deben ser cero, por tanto, se deben hacer las transformaciones

Método de las dos fases

EJEMPLO: Fase 2

$$\text{Min } z = 4X_1 + X_2$$

$$X_1 + \frac{1}{5}S_1 = \frac{3}{5}$$

$$X_2 - \frac{3}{5}S_1 = \frac{6}{5}$$

$$S_1 + S_2 = 1$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

Básica	x1	x2	s1	s2	Solución
X1	1	0	1/5	0	3/5
X2	0	1	-3/5	0	6/5
S2	0	0	1	1	1
z	-4	-1	0	0	0

Básica	x1	x2	s1	s2	Solución
X1	1	0	1/5	0	3/5
X2	0	1	-3/5	0	6/5
S2	0	0	1	1	1
z	0	-1	4/5	0	12/5

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

EJEMPLO: Fase 2

$$\text{Min } z = 4X_1 + X_2$$

$$X_1 + \frac{1}{5}S_1 = \frac{3}{5}$$

$$X_2 - \frac{3}{5}S_1 = \frac{6}{5}$$

$$S_1 + S_2 = 1$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

Básica	x1	x2	s1	s2	Solución
X1	1	0	1/5	0	3/5
X2	0	1	-3/5	0	6/5
S2	0	0	1	1	1
z	0	0	1/5	0	18/5

Como es minimización, entonces todos los valores de z deben ser menores o iguales a cero. Por tanto, s1 debe entrar.

¡Siempre hacia lo alto!

Método de las dos fases

EJEMPLO: Fase 2

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2$$

$$x_1 + \frac{1}{5}s_1 = \frac{3}{5}$$

$$x_2 - \frac{3}{5}s_1 = \frac{6}{5}$$

$$s_1 + s_2 = 1$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Básica	x1	x2	s1	s2	Solución	
X1	1	0	1/5	0	3/5	(3/5)/(1/5)=3
X2	0	1	-3/5	0	6/5	
S2	0	0	1	1	1	1/1 =1
z	0	0	1/5	0	18/5	

Método de las dos fases

EJEMPLO: Fase 2

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2$$

$$x_1 + \frac{1}{5}s_1 = \frac{3}{5}$$

$$x_2 - \frac{3}{5}s_1 = \frac{6}{5}$$

$$s_1 + s_2 = 1$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Básica	x1	x2	s1	s2	Solución
X1	1	0	1/5	0	3/5
X2	0	1	-3/5	0	6/5
S2	0	0	1	1	1
z	0	0	1/5	0	18/5

Básica	x1	x2	s1	s2	Solución
X1	1	0	0	-1/5	2/5
X2	0	1	0	3/5	9/5
S1	0	0	1	1	1
z	0	0	0	-1/5	17/5

Referencias

Taha H. Operations research: an introduction. Seventh edition. Prentice Hall, 2002

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS

PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA

SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

¡Siempre hacia lo alto!

USTATUNJA.EDU.CO

@santotomastunja