UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA
VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

TEORÍA DE LA DUALIDAD

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Se parte de la idea que para todo problema de optimización (llamado primal), se tiene un problema relacionado (llamado dual).

Problema primal	*Problema dual*
Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$,	Minimizar $W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$,
sujeta a	sujeta a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$
y	y
$x_j \geq 0$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.	$y_i \geq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, m$.

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Se parte de la idea que para todo problema de optimización (llamado primal), se tiene un problema relacionado (llamado dual).

Problema primal	*Problema dual*
Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$	Minimizar $W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$
sujeta a	sujeta a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$ para $i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,$ para $j = 1, 2, \ldots, n$
y	y
$x_j \geq 0,$ para $j = 1, 2, \ldots, n.$	$y_i \geq 0,$ para $i = 1, 2, \ldots, m.$

En consecuencia, si el problema es de minimización el dual será de maximización y viceversa.

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Problema primal

Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

sujeta a

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$ para $i = 1, 2, \ldots, m$

y

$x_j \geq 0,$ para $j = 1, 2, \ldots, n.$

Problema dual

Minimizar $W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

sujeta a

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

y

$y_i \geq 0,$ para $i = 1, 2, \ldots, m.$

- En el dual la cantidad de variables es igual al de restricciones que en el primal.
- En el dual la cantidad de restricciones es igual al de variables que en el primal.

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Problema primal

Maximizar $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

y

$$x_j \geq 0, \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Problema dual

Minimizar $\quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$y_i \geq 0, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

- En el dual la cantidad de variables es igual al de restricciones que en el primal.
- En el dual la cantidad de restricciones es igual al de variables que en el primal.

- Los coeficientes de la función objetivo del dual están dados por los coeficientes del lado derecho de las restricciones del primal.

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Problema primal

Maximizar $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

y

$$x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Problema dual

Minimizar $\quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$y_i \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

- En el dual la cantidad de variables es igual al de restricciones que en el primal.
- En el dual la cantidad de restricciones es igual al de variables que en el primal.

- Los coeficientes de la función objetivo del dual están dados por los coeficientes del lado derecho de las restricciones del primal.
- Los coeficientes del lado derecho del dual están dados por los coeficientes de la función objetivo del primal.

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Problema primal

Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

y

$$x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Problema dual

Minimizar $W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$y_i \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

- En el dual la cantidad de variables es igual al de restricciones que en el primal.
- En el dual la cantidad de restricciones es igual al de variables que en el primal.

- Los coeficientes de la función objetivo del dual están dados por los coeficientes del lado derecho de las restricciones del primal.
- Los coeficientes del lado derecho del dual están dados por los coeficientes de la función objetivo del primal.
- Los coeficientes de las variables de una restricción del dual son los mismos coeficientes que acompañan a la variable primal correspondiente a la restricción dual.

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Problema primal

Maximizar $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

y

$$x_j \ge 0, \qquad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Problema dual

Minimizar $\quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \qquad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

y

$$y_i \ge 0, \qquad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

- En el primal cada columna (excepto la de los coeficientes del lado derecho), corresponde a los coeficientes de una sola variable de las restricciones y de la función objetivo. Además, cada renglón (excepto el último, indica los parámetros de una restricción.

- En el dual, cada renglón (excepto los del lado derecho) corresponde a los coeficientes de cada variable de las restricciones respectivas y de la función objetivo. Además, cada columna (excepto la del lado derecho) indica los parámetros para cada restricción.

TEORÍA DE LA DUALIDAD

PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN	PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN
Restricciones	**Variables**
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestricta
$\leq$	≤ 0
Variables	**Restricciones**
≥ 0	$\leq$
Irrestricta	$=$
≤ 0	$\geq$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejemplo

Problema primal

$$\text{Maximizar} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

y

$$x_j \ge 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Problema dual

$$\text{Minimizar} \quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

y

$$y_i \ge 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

TABLA 6.1 Problemas primal y dual del ejemplo de la Wyndor Glass Co.

Problema primal en forma algebraica

$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \end{aligned}$$

y $\quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Problema dual en forma algebraica

$$\text{Minimizar} \quad W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad + 3y_3 &\ge 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\ge 5 \end{aligned}$$

y

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

Problema primal en forma de matriz

$$\text{Maximizar} \quad Z = [3, 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

sujeta a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problema dual en forma de matriz

$$\text{Minimizar} \quad W = [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

sujeta a

$$[y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ge [3, 5]$$

y

$$[y_1, y_2, y_3] \ge [0, 0, 0].$$

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

$$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

Dual

$$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

$$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } w$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

$$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } W = \quad y_1 \qquad y_2$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

Dual

$$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } W = -3y_1 + 5y_2$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

$$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } W = -3y_1 + 5y_2$$

$$-5$$

$$2$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

Dual

$$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 5$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\text{Min } W = -3y_1 + 5y_2$$

$$-5$$

$$2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

$$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } W = -3y_1 + 5y_2$$

$$-5$$

$$2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

$$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } W = -3y_1 + 5y_2$$

$$-y_1 + 2y_2 \quad -5$$

$$y_1 + 3y_2 \quad 2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 1:

Dual

$\text{Max } z = -5x_1 + 2x_2$

$-x_1 + x_2 \leq -3$

$2x_1 + 3x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Min } W = -3y_1 + 5y_2$

$-y_1 + 2y_2 \geq -5$

$y_1 + 3y_2 \geq 2$

$y_1, y_2 \geq 0$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Algoritmo:

1. Cambiar el sentido de la optimalidad (si se busca un máximo en el primal, en el dual se debe buscar un mínimo y viceversa.
2. El vector de términos independientes del problema primal se transpone y se convierte en el vector de coeficientes de la función objetivo del problema dual.
3. El vector de coeficientes de la función objetivo primal se convierte en el vector de términos independientes del dual.
4. Se transponen la matriz de los coeficientes de las restricciones del primal para obtener la matriz de coeficientes del dual.
5. El vector de las variables del dual deben ser mayores o iguales a cero.

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 2:

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 80X_2$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 300$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 400$$

$$8X_1 + 4X_2 \leq 320$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 2:

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 80X_2$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 300$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 400$$

$$8X_1 + 4X_2 \leq 320$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dual

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 2:

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 80X_2$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 300$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 400$$

$$8X_1 + 4X_2 \leq 320$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } W =$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 2:

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 80X_2$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 300$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 400$$

$$8X_1 + 4X_2 \leq 320$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } W = 300y_1 + 400y_2 + 320y_3$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 2:

Dual

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 80X_2$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 300$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 400$$

$$8X_1 + 4X_2 \leq 320$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Min } W = 300y_1 + 400y_2 + 320y_3$$

$$6y_1 + 5y_2 + 8y_3$$

$$6y_1 + 10y_2 + 4y_3$$

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 2:

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 80X_2$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 300$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 400$$

$$8X_1 + 4X_2 \leq 320$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } W = 300y_1 + 400y_2 + 320y_3$$

$$6y_1 + 5y_2 + 8y_3 \quad 60$$

$$6y_1 + 10y_2 + 4y_3 \quad 80$$

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Ejercicio 2:

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 80X_2$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 300$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 400$$

$$8X_1 + 4X_2 \leq 320$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } W = 300y_1 + 400y_2 + 320y_3$$

$$6y_1 + 5y_2 + 8y_3 \geq 60$$

$$6y_1 + 10y_2 + 4y_3 \geq 80$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

La interpretación del problema dual es la siguiente:

Si se busca maximizar la ganancia en la venta de unos productos, basados en la restricción en el uso de ciertos recursos o materias primas, en el problema dual se busca minimizar el valor marginal de esos recursos o costo de utilización, basados en las restricciones que implicaría su venta por separado (o valor interno de los recursos para el fabricante)

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Hallar la formulación del problema dual para los siguientes ejercicios.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Hallar la formulación del problema dual para los siguientes ejercicios.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } W = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3$$

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3$$
$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Hallar la formulación del problema dual para los siguientes ejercicios.

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 2400$$

$$x_2 \leq 800$$

$$2x_1 \leq 1200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Hallar la formulación del problema dual para los siguientes ejercicios.

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 2400$$

$$x_2 \leq 800$$

$$2x_1 \leq 1200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } W = 2400y_1 + 800y_2 + 1200y_3$$

$$3y_1 + 2y_3 \geq 5$$

$$2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Hallar la formulación del problema dual para los siguientes ejercicios.

$$\text{Max } Z = 1'000.000\,X_1 + 500.000\,X_2 + 2'500.000\,X_3$$

$$100X_1 + 80X_2 \leq 200$$

$$90X_1 + 50X_2 + 100X_3 \leq 250$$

$$30X_1 + 100X_2 + 40X_3 \leq 180$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Hallar la formulación del problema dual para los siguientes ejercicios.

$$\text{Max } Z = 1'000.000\,X_1 + 500.000\,X_2 + 2'500.000\,X_3$$

$$100X_1 + 80X_2 \leq 200$$

$$90X_1 + 50X_2 + 100X_3 \leq 250$$

$$30X_1 + 100X_2 + 40X_3 \leq 180$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$\text{Min } W = 200y_1 + 250y_2 + 180y_3$$

$$100y_1 + 90y_2 + 30y_3 \geq 1'000.000$$

$$80y_1 + 50y_2 + 100y_3 \geq 5.00.000$$

$$100y_2 + 40y_3 \geq 2'500.000$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Hallar la formulación del problema dual para los siguientes ejercicios.

Maximizar $Z = 3x1 + 4x2 + 5x3$,

sujeta a

$$3x1 + x2 + 5x3 <= 150$$
$$x1 + 4x2 + x3 <= 120$$
$$2x1 \qquad + 2x3 <= 105$$

$$x1 >= 0, x2 >= 0, x3 >= 0$$

¡Siempre hacia lo alto!

TEORÍA DE LA DUALIDAD

Hallar la formulación del problema dual para los siguientes ejercicios.

Maximizar $Z = 3x1 + 4x2 + 5x3$,

sujeta a

$$3x1 + x2 + 5x3 <= 150$$
$$x1 + 4x2 + x3 <= 120$$
$$2x1 \quad + 2x3 <= 105$$

$$x1 >= 0,\ x2 >= 0,\ x3 >= 0$$

$$\text{Min } W = 150y_1 + 120y_2 + 105y_3$$

$$3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$$
$$y_1 + 4y_2 \geq 4$$
$$5y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

REFERENCIAS:

Hillier, F. S. L., Hillier, G. J. F. S., & Lieberman, G. J. (1989). ***Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill. 2018**

https://www.u-cursos.cl/usuario/e4ec9e12c4e47e3de09b0ff5dbe14eb0/mi_blog/r/dualidad.pdf

¡Siempre hacia lo alto!

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS

PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA

SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

¡Siempre hacia lo alto!

USTATUNJA.EDU.CO

@santotomastunja