UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA

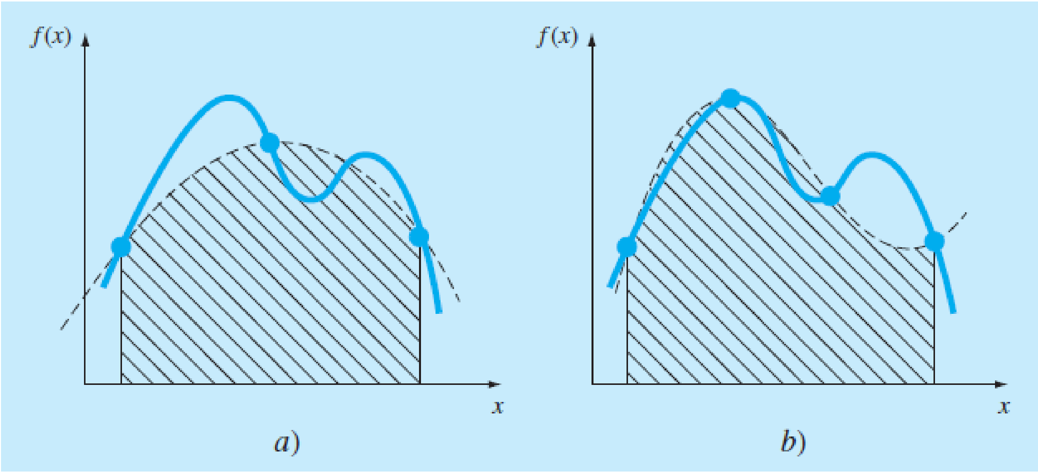
VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

Diferenciación e integración numéricas

Método de integración de Simpson

Otro método que proporciona una buena estimación de una integral, consiste en utilizar polinomios de grado superior que una los puntos.

Si se tiene una función evaluada entre los puntos a y b, podemos determinar un punto intermedio y unirlos con una parábola (grado 2) o si se tienen dos puntos intermedios igualmente espaciados, entonces los 4 puntos se pueden unir mediante un polinomio de grado tres.



Método de integración de Simpson

A este método se le conoce como reglas de Simpson.

Regla de Simpson 1/3

Se origina cuando un polinomio de interpolación de grado 2 se sustituye por la siguiente ecuación

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Método de integración de Simpson

A este método se le conoce como reglas de Simpson.

Regla de Simpson 1/3

Se origina cuando un polinomio de interpolación de grado 2 se sustituye por la siguiente ecuación

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Si a se denomina x_0 y b como x_2 y $f_2(x)$ se define como un polinomio de Lagrange de grado 2, tendremos

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Método de integración de Simpson 1/3

Finalmente, se obtiene:

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

Donde h= (b-a)/2.

Esta es la fórmula de la **Regla de Simpson 1/3**. Esta fórmula hace parte de las fórmulas de integración cerradas de Newton-Cotes. Esta también se puede expresar como:

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}}_{\text{Altura promedio}}$$

Donde $a=x_0$, $b=x_2$ y x_1 es el punto de la mitad entre a y b y es igual a (b+a)/2

Método de integración de Simpson 1/3

Se puede determinar que la regla de Simpson 1/3 es más exacta que la regla del trapecio.

Método de integración de Simpson 1/3

Ejemplo: obtener la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejemplo: obtener la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$X_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 0{,}2$

$X_1 = (a+b)/2 = 0{,}4 \rightarrow f(x_1) = 2{,}456$

$X_2 = 0{,}8 \rightarrow f(x_2) = 0{,}232$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejemplo: obtener la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$X_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 0,2$

$X_1 = (a+b)/2 = 0,4 \rightarrow f(x_1) = 2,456$

$X_2 = 0,8 \rightarrow f(x_2) = 0,232$

$$I = (0,8-0)\frac{(0,2+4(2,456)+0,232)}{6}$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejemplo: obtener la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$X_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 0{,}2$

$X_1 = (a+b)/2 = 0{,}4 \rightarrow f(x_1) = 2{,}456$

$X_2 = 0{,}8 \rightarrow f(x_2) = 0{,}232$

$$I = (0{,}8 - 0)\frac{(0{,}2 + 4(2{,}456) + 0{,}232)}{6}$$

$$= 1{,}36746$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\ \underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejemplo: obtener la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$X_0 = 0 \quad \rightarrow f(x_0) = 0{,}2$

$X_1 = (a+b)/2 = 0{,}4 \quad \rightarrow f(x_1) = 2{,}456$

$X_2 = 0{,}8 \quad \rightarrow f(x_2) = 0{,}232$

$$I = (0{,}8 - 0)\frac{(0{,}2 + 4(2{,}456) + 0{,}232)}{6}$$

$$= 1{,}36746$$

$$\varepsilon_t = \frac{(1{,}640533 - 1{,}36746)}{1{,}640533} * 100 =$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejemplo: obtener la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$X_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 0{,}2$

$X_1 = (a+b)/2 = 0{,}4 \rightarrow f(x_1) = 2{,}456$

$X_2 = 0{,}8 \rightarrow f(x_2) = 0{,}232$

$$I = (0{,}8 - 0)\frac{(0{,}2 + 4(2{,}456) + 0{,}232)}{6}$$

$$= 1{,}36746$$

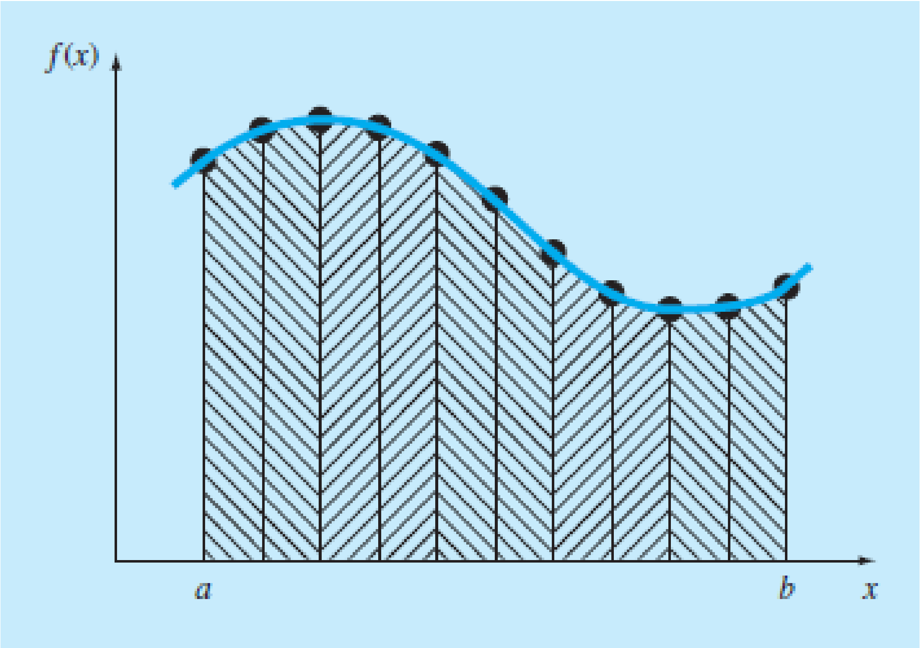
$$\varepsilon_t = \frac{(1{,}640533 - 1{,}36746)}{1{,}640533} * 100 = 16{,}64\%$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Cuando se divide el área bajo la curva en varios segmentos, se obtiene una mejor estimación.

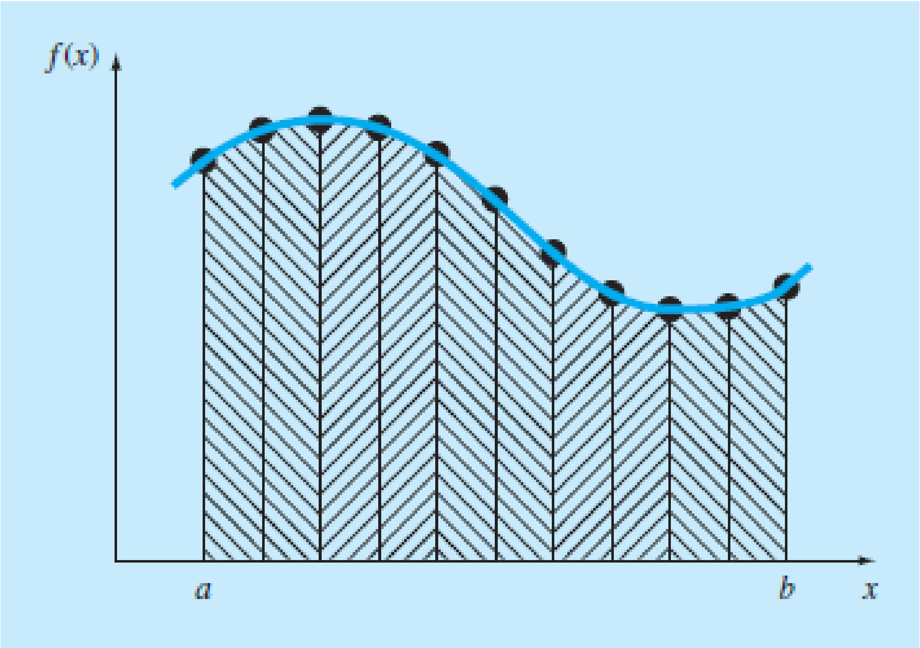


$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4\displaystyle\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\displaystyle\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Cuando se divide el área bajo la curva en varios segmentos, se obtiene una mejor estimación.



$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

Nota: se requiere un número <u>**par**</u> de segmentos para poder aplicar este método.

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$$h = \frac{0,8}{4} = 0,2$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$$h = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$$

	x
x0	0
x1	0,2
x2	0,4
x3	0,6
x4	0,8

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$h = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$

	x	f(x)
x0	0	0,2
x1	0,2	1,288
x2	0,4	2,456
x3	0,6	3,464
x4	0,8	0,232

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$h = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$

$I = 0{,}8 \frac{0{,}2 + 4(1{,}288 + 3{,}464) + 2(2{,}456) + 0{,}232}{3(4)}$

$=$

	x	f(x)
x0	0	0,2
x1	0,2	1,288
x2	0,4	2,456
x3	0,6	3,464
x4	0,8	0,232

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$$h = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$$

$$I = 0{,}8\,\frac{\left(0{,}2 + 4(1{,}288 + 3{,}464) + 2(2{,}456) + 0{,}232\right)}{3(4)}$$

$$= 1{,}62346$$

	x	f(x)
x0	0	0,2
x1	0,2	1,288
x2	0,4	2,456
x3	0,6	3,464
x4	0,8	0,232

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\,\underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$h = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$

$I = 0{,}8 \frac{(0{,}2 + 4(1{,}288 + 3{,}464) + 2(2{,}456) + 0{,}232)}{3(4)}$

$= 1{,}62346$

	x	f(x)
x0	0	0,2
x1	0,2	1,288
x2	0,4	2,456
x3	0,6	3,464
x4	0,8	0,232

$\varepsilon_t =$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$$h = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$$

$$I = 0{,}8\,\frac{\left(0{,}2 + 4(1{,}288 + 3{,}464) + 2(2{,}456) + 0{,}232\right)}{3(4)}$$

$$= 1{,}62346$$

$$E_t = 1{,}04\,\%$$

	x	f(x)
x0	0	0,2
x1	0,2	1,288
x2	0,4	2,456
x3	0,6	3,464
x4	0,8	0,232

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$\varepsilon_a =$

$f'(x) =$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$\varepsilon_a =$

$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$\varepsilon_a =$

$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$

$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$E_a =$

$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$

$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$

$f'''(x) = 4050 - 21600x + 24000x^2$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$\varepsilon_a =$

$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$

$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$

$f'''(x) = 4050 - 21600x + 24000x^2$

$f^{IV}(x) = -21600 + 48000x$

$\bar{f}^{(4)} = \dfrac{f^4(a) + f^4(b)}{2} = \dfrac{-21600 + 16800}{2} =$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$E_a =$

$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$

$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$

$f'''(x) = 4050 - 21600x + 24000x^2$

$f^{IV}(x) = -21600 + 48000x$

$$\bar{f}^{(4)} = \frac{f^4(a) + f^4(b)}{2} = \frac{-21600 + 16800}{2} = -2400$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$E_a =$

$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$

$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$

$f'''(x) = 4050 - 21600x + 24000x^2$

$f^{IV}(x) = -21600 + 48000x$

$\bar{f}^{(4)} = \dfrac{f^4(a) + f^4(b)}{2} = \dfrac{-21600 + 16800}{2} = -2400$

$E_a = \dfrac{(0{,}8 - 0)^5}{180(4)^4}(-2400)$

$E_a =$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3 múltiple:

Ejemplo: usar n = 4 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde que la integral exacta es 1.640533

$E_a =$

$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$

$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$

$f'''(x) = 4050 - 21600x + 24000x^2$

$f^{IV}(x) = -21600 + 48000x$

$\bar{f}^{(4)} = \frac{f^4(a) + f^4(b)}{2} = \frac{-21600 + 16800}{2} = -2400$

$E_a = -\frac{(0,8 - 0)^5}{180(4)^4}(-2400)$

$E_a = 0,017$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Evalúe la integral con una sola aplicación de la regla de Simpson 1/3

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Evalúe la integral con una sola aplicación de la regla de Simpson 1/3

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\,dx$$

$f(x_0) = f(-2) = -29$

$f(x_1) = f(1) = -2$

$f(x_2) = f(4) = 1789$

$I = (4-(-2)) \dfrac{(-29+4(-2)+1789)}{6}$

$= \cancel{6} \dfrac{(1752)}{\cancel{6}} = 1752$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 \, dx$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} \bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx$$

Analítica:

$u = 4x - 3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4} du$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\int u^3 du = \frac{1}{4}\frac{(4x-3)^4}{4} = \frac{(4x-3)^4}{16}$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx$$

Analítica:

$u = 4x - 3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4} du$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\int u\,du = \frac{1}{4}\frac{(4x-3)^4}{4} = \frac{(4x-3)^4}{16}$

$\int_{-3}^{5}(4x-3)^3 dx = \frac{(4x-3)^4}{16}\Big]_{-3}^{5} = \frac{(4(5)-3)^4}{16} - \frac{(4(-3)-3)^4}{16}$

$=$

¡Siempre hacia lo alto!

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3\,dx$$

Analítica:

$$u = 4x - 3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4}\,du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int u^3 du = \frac{1}{4}\,\frac{(4x-3)^4}{4} = \frac{(4x-3)^4}{16}$$

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx = \frac{(4x-3)^4}{16}\Big]_{-3}^{5} = \frac{(4(5)-3)^4}{16} - \frac{(4(-3)-3)^4}{16}$$

$$= 5220{,}0625 - 3164{,}0625 = 2056$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx$$

$n=4 \rightarrow h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{5-(-3)}{4} = 2$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3\,dx$$

$$n=4 \rightarrow h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-(-3)}{4}=2$$

	x	f(x)
x0	-3	-3375
x1	-1	-343
x2	1	1
x3	3	729
x4	5	4913

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$E_a=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3\,dx$$

$$n=4 \rightarrow h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-(-3)}{4}=2$$

	x	f(x)
x0	-3	-3375
x1	-1	-343
x2	1	1
x3	3	729
x4	5	4913

$$I=(5-(-3))\frac{-3375+4(-343+729)+2(1)+4913}{3(4)}$$

$$I=$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\underbrace{\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$E_a=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx$$

$n=4 \rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-(-3)}{4} = 2$

$I = (5-(-3))\frac{(-3375 + 4(-343+729) + 2(1) + 4913)}{3(4)}$

	x	f(x)
x0	-3	-3375
x1	-1	-343
x2	1	1
x3	3	729
x4	5	4913

$I = 2056$

¿Cuánto se obtuvo con el analítico?

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx$$

$E_a =$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx$$

$E_a =$

$f'(x) = 3(4x-3)^2(4) = 12(4x-3)^2$

$f''(x) =$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx$$

$E_a =$

$f'(x) = 3(4x-3)^2(4) = 12(4x-3)^2$

$f''(x) = 24(4x-3)(4) = 96(4x-3)$

$f'''(x) =$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx$$

$E_a =$

$f'(x) = 3(4x-3)^2(4) = 12(4x-3)^2$

$f''(x) = 24(4x-3)(4) = 96(4x-3)$

$f'''(x) = 96(4) = 384$

$f^4(x) =$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 1/3

Ejercicio: Integre la función siguiente en forma tanto analítica como con la regla de Simpson, con n = 4. Calcule el error aproximado

$$\int_{-3}^{5} (4x-3)^3 dx$$

$E_a =$

$f'(x) = 3(4x-3)^2(4) = 12(4x-3)^2$

$f''(x) = 24(4x-3)(4) = 96(4x-3)$

$f'''(x) = 96(4) = 384$

$f^4(x) = \emptyset$

$\Rightarrow E_a = \emptyset$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de integración de Simpson 3/8

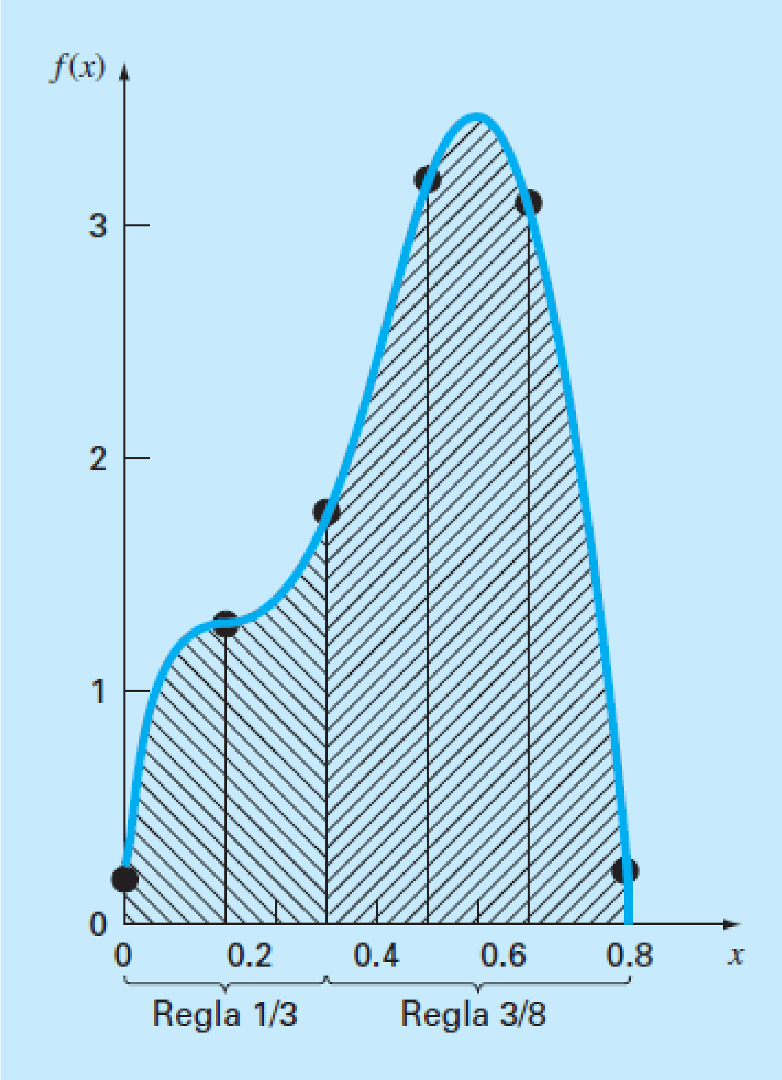
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$

para obtener

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\underbrace{\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

$$h = \frac{(b-a)}{3}$$



¡Siempre hacia lo alto!

Método de integración de Simpson 3/8

$$h = \frac{(b-a)}{3}$$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h =$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$h = \frac{(b-a)}{3}$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h = 0{,}2667$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$h = \frac{(b-a)}{3}$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h = 0{,}2667$

i	Xi	f(Xi)
0	0	
1		
2		
3	0,8	

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$h = \frac{(b-a)}{3}$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h = 0{,}2667$

i	Xi	f(Xi)
0	0	
1	0,2667	
2		
3	0,8	

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$h = \frac{(b-a)}{3}$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h = 0,2667$

i	Xi	f(Xi)
0	0	
1	0,2667	
2	0,533	
3	0,8	

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$h = \frac{(b-a)}{3}$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h = 0{,}2667$

i	Xi	f(Xi)
0	0	0,2
1	0,2667	1,4327
2	0,533	3,4871
3	0,8	0,232

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$h = \frac{(b-a)}{3}$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h = 0{,}2667$

i	Xi	f(Xi)
0	0	0,2
1	0,2667	1,4327
2	0,533	3,4871
3	0,8	0,232

$$I = (0{,}8)\left(\frac{0{,}2 + 3(1{,}4327) + 3(3{,}4871) + 0{,}232}{8}\right)$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$h = \frac{(b-a)}{3}$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h = 0{,}2667$

i	Xi	f(Xi)
0	0	0,2
1	0,2667	1,4327
2	0,533	3,4871
3	0,8	0,232

$$I = (0{,}8)\left(\frac{0{,}2 + 3(1{,}4327) + 3(3{,}4871) + 0{,}232}{8}\right)$$

$I = 1{,}5191$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$h = \frac{(b-a)}{3}$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h = 0,2667$

i	Xi	f(Xi)
0	0	0,2
1	0,2667	1,4327
2	0,533	3,4871
3	0,8	0,232

$$I = (0,8)\left(\frac{0,2 + 3(1,4327) + 3(3,4871) + 0,232}{8}\right)$$

$$I = 1,5191$$

$$\varepsilon_t = \frac{(1,640533 - 1,5191)}{1,640533} * 100$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$$h = \frac{(b-a)}{3}$$

a) Con la regla de Simpson 3/8 integre

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$h = 0{,}2667$

i	Xi	f(Xi)
0	0	0,2
1	0,2667	1,4327
2	0,533	3,4871
3	0,8	0,232

$$I = (0{,}8)\left(\frac{0{,}2 + 3(1{,}4327) + 3(3{,}4871) + 0{,}232}{8}\right)$$

$$I = 1{,}5191$$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{1{,}640533 - 1{,}5191}{1{,}640533}\right) * 100 = 7{,}4\%$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$h = \frac{(b-a)}{3}$

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

Con la regla de Simpson 3/8

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Método de integración de Simpson 3/8

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

Con la regla de Simpson 3/8

$h = 2$

$x_0 = -2 \rightarrow f(x_0) = -29$

$x_1 = 0 \rightarrow f(x_1) = 1$

$x_2 = 2 \rightarrow f(x_2) = 31$

$x_3 = 4 \rightarrow f(x_3) = 1789$

$$I = 6\,\frac{(-29 + 3(1) + 3(31) + 1789)}{8}$$

$I = 1392$

¡Siempre hacia lo alto!

Método de integración de Simpson 3/8

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

Con la regla de Simpson 3/8

Analitica:

¡Siempre hacia lo alto!

Método de integración de Simpson 3/8

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

Con la regla de Simpson 3/8

Analitica:

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}} + \frac{\cancel{2}x^6}{6} = x - \frac{x^2}{2} - x^4 + \frac{x^6}{3} \Big]_{-2}^{4}$$

$$= 1104$$

Método de integración de Simpson 3/8

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

Con la regla de Simpson 3/8

Analitica:

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}} + \frac{\cancel{2}x^6}{6} = x - \frac{x^2}{2} - x^4 + \frac{x^6}{3} \Big]_{-2}^{4}$$

$$= 1104$$

$$\varepsilon_t = \frac{(1104 - 1392)}{1104} * 100 = 26{,}08\,\%$$

¡Siempre hacia lo alto!

Método de integración de Simpson 3/8

21.7 Integre la función siguiente tanto analítica como numéricamente. Para las evaluaciones numéricas use *a*) una sola aplicación de la regla del trapecio, *b*) la regla de Simpson 1/3, *c*) la regla de Simpson 3/8,

$$\int_{0.5}^{1.5} 14^{2x}\,dx$$

¡Siempre hacia lo alto!

Referencias

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill,.

¡Siempre hacia lo alto!

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

¡Siempre hacia lo alto!

USTATUNJA.EDU.CO

@santotomastunja