Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat de Ciències

Seminari 2: Fluids

Autors:

Gerard Lahuerta & Ona Sánchez & Andrea González

1601350 — 1601181 — 1603921

29 d'Abril del 2022

Índex

1 Exercici 2.4.13

Modifiquem el flux amb potencial donat per $f(z) = \log(z+2)$ que és una font sortint des del punt $(z = -2)$ (vist en un exemple/exercici anterior). Per això considerem la modificació donada pel potencial:

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \log(z+2) + \overline{\log\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)}$$

(a) **Descomposar $\Phi(z)$ en fluxos coneguts.**

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\
&= \log(z+2) + \overline{\log\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)} \\
&= \log(z+2) + \log\left(\frac{1}{z} + 2\right) \\
&= \log(z+2) + \log\left(\frac{1+2z}{z}\right) \\
&= \log(z+2) + \log(1+2z) - \log(z) \\
&= \log(z+2) + \log\left(2\cdot\left(\frac{1}{2} + z\right)\right) - \log(z) \\
&= \log(z+2) + \log\left(\frac{1}{2} + z\right) - \log(z) + \log(2)
\end{aligned}$$

(b) **Calcular $\Phi'(z)$ i confirmar el que es demostra a l'apartat anterior.**

- Càlcul de la derivada de Φ:

$$\begin{aligned}
\Phi'(z) &= \left(f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right)' \\
&= \left(\log(z+2) + \log\left(\frac{1}{2} + z\right) - \log(z) + \log(2)\right)' \\
&= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{\frac{1}{2} + z} - \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

- Comprovació de l'apartat anterior:

  Usant l'expressió obtingut a l'apartat *(a)*: $\log(z+2) + \log\left(\frac{1}{2} + z\right) - \log(z) + \log(2)$, trobem 3 punts singulars situats a: $z = -2$, $z = -\frac{1}{2}$ i $z = 0$.

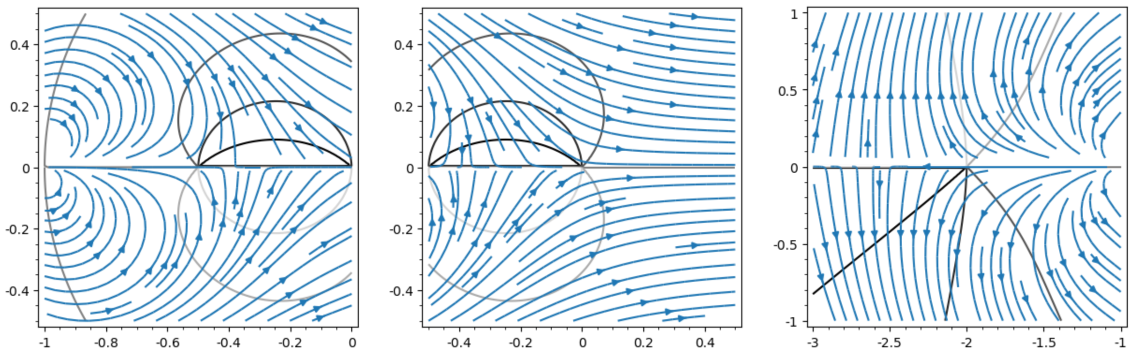
  Sabem que per $\Phi(z) = k \cdot \log(z-a)$, quan $k > 0$ es forma una *font*, i quan $k < 0$ una *pica*.

Estudiem els diversos punts singulars:

(a) $z = -\frac{1}{2}$: S'obté de $\log\left(\frac{1}{2} + z\right)$. En aquest cas, $k = 1 \to k > 0$, per tant en el $-\frac{1}{2}$ es troba una $font$.

(b) $z = 0$: S'obté de $-\log(z)$. En aquest cas, $k = -1 \to k < 0$, per tant en el 0 es troba una $pica$.

(c) $z = -2$: S'obté de $\log(z+2)$. En aquest cas, $k = 1 \to k > 0$, per tant en el -2 es troba una $font$.



(c) Veure que per z amb $|z|$ molt gran resulta $\Phi'(z) \approx \frac{1}{z+2}$ i que llavors lluny de $z = -2$ el flux associat a $\Phi'(z)$ és com una font sortint de $z = -2$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{|z|\to\infty} \Phi(z) &= \lim_{|z|\to\infty} f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\
&= \lim_{|z|\to\infty} \log(z+2) + \overline{\log\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)} \\
&= \lim_{|z|\to\infty} \log(z+2) + \lim_{|z|\to\infty} \overline{\log\left(\frac{z}{|z|^2} + 2\right)} \\
&= \lim_{|z|\to\infty} \log(z+2) + \log(2)
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$
\begin{aligned}
\lim_{|z|\to\infty} \Phi'(z) &\approx \lim_{|z|\to\infty} (\log(z+2) + \log(2))' \\
&= \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z+2}
\end{aligned}
$$

És a dir, veiem que com es deia a l'enunciat:

$$
\Phi'(z) \approx \frac{1}{z+2} \quad \text{quan} \quad z \text{ és molt gran.}
$$

(d) Veure amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir **contour_plot** i **streamline_plot**).

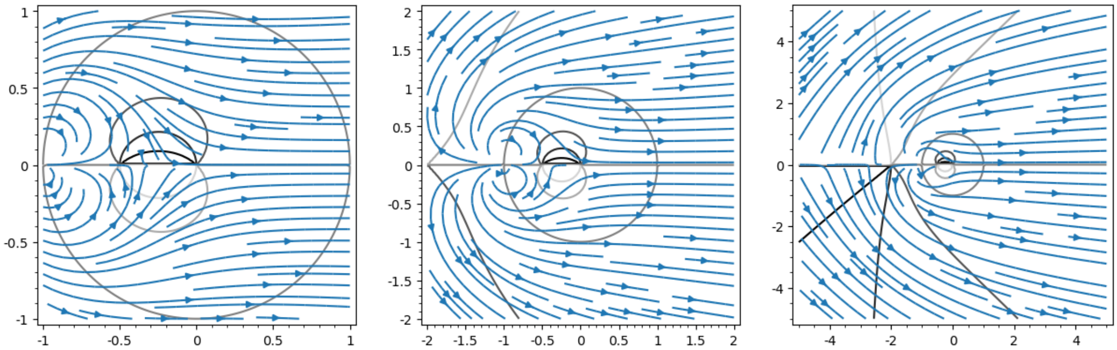


Figura 1: contour_plot i sreamline_plot de la funció

A les imatges adjuntades es poden observar les línies de flux de la funció $\Phi(z) = \log(z+2) + \log\left(\frac{1}{2}+z\right) - \log(z) + \log(2)$, amb diferents proximitats al disc unitari.

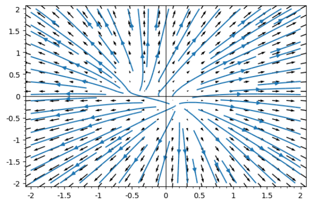
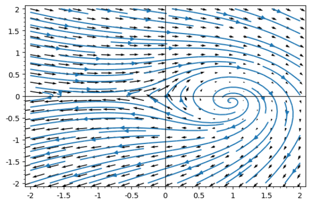
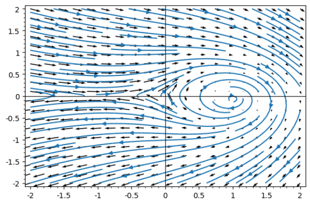
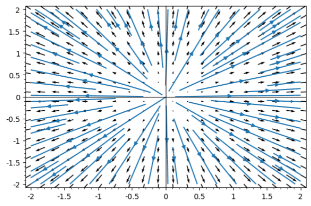
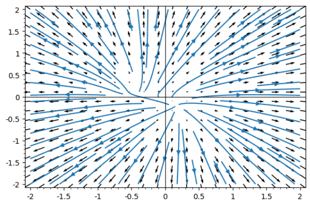
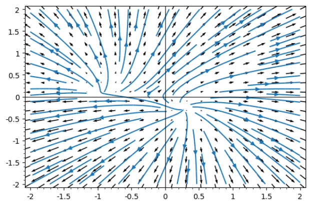
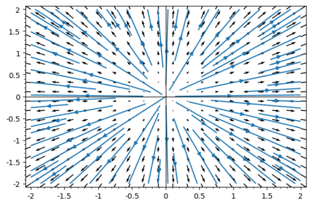
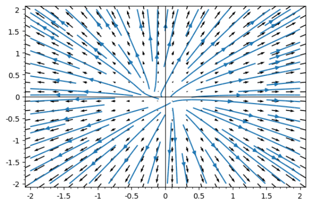
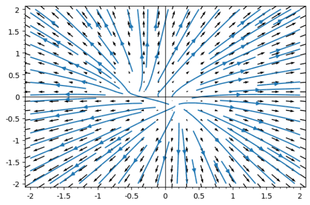
Com es pot observar, les línies de flux que surten de la *font* situada al -2 i al $\frac{-1}{2}$ canvien de direcció, curvant-se en apropar-se al disc. Es pot veure que les línies sortints del -2 intenten seguir la vora del disc.

Per veure el codi utilitzat per generar les imatges, anar a l'apartat 4.1.

2 Exercici 2.6.17 b)

(b) Discutir el moviment del fluid amb potencial complex igual a:

$\Phi(z) = a \cdot z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot log(z)$ on $a, \Gamma \in \mathbb{R}^+$

a \ Γ	1	50	100
1			
50			
100			

Taula 1: Gràfics de la funció per a diversos valors dels paràmetres a i Γ

Per l'enunciat, $\Gamma > 0$, per tant sabem amb certesa que hi ha una *pica*.

Observem que quan el valor d'a és major que Γ, els punts on es genera la $font$ i la *pica* són molt propers (es mostra als gràfics només la $font$ ja que predomina sobre la *pica*).

En canvi, quan els valors d'a i Γ son iguals, els punts on s'originen la $font$ i la *pica* es separen, fent que les línies de flux de la $font$ es curvin quan a causa de la *pica*, sent la curvatura més notoria a mida que aquesta és més propera a la *pica*.

Així doncs, veiem que quan augmenta el valor de Γ (amb $\Gamma > a$) els punts on s'originen la $font$ i la *pica* se separen, i els punts que les generen són molt diferenciats (per exemple en el cas $a = 50, \Gamma = 100$).

Però, quan el valor de Γ és notablement més gran que el de a, (exemples $a = 1$ i $\Gamma = 50, 100$), la *pica* i la $font$ són més distants. A més, tant la $font$ com la *pica* adquereixen més "força" fent que mostrant sempre el mateix interval $(xmin, xmax)$, $(ymin, ymax)$ s'observi només la *pica* i no la $font$ (ja que la $font$ no es genera dins d'aquest interval).

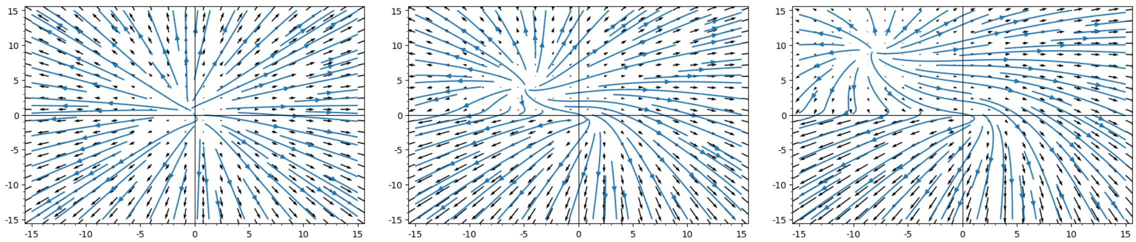
Per veure el codi utilitzat per generar les imatges de la taula llegir l'apartat 4.2.

3 Exercici 2.6.18

Discutir el moviment del fluid amb potencial complex:

$\Phi(z) = V_0 \cdot (z + \frac{R^2}{z}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot log(z)$ on $\Gamma, V_0, R \in \mathbb{R}^+$

Particularment estudieu els casos $\Gamma < 4\pi RV_0$, $\Gamma > 4\pi RV_0$ i $\Gamma = 4\pi RV_0$. Dibuixeu exemples de cadascun dels casos.



(a) $\Gamma < 4\pi RV_0$ (b) $\Gamma = 4\pi RV_0$ (c) $\Gamma > 4\pi RV_0$

Figura 2: Representacions dels fluxos de corrent de la funció per a diversos valors de Γ

Per generar les imatges s'han utilitzat els valors $R = 1$ i $V_0 = 1$.

Sabem que la primera part de l'expressió $\Phi(z)$, $V_0 \cdot (z + \frac{R^2}{z})$ genera una $font$, perquè es tracta d'una funció lineal.

En canvi, a la segona part de l'expressió $\frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot log(z)$, veiem que la part real en aquest cas val 0, i la part imaginària $Q = \frac{\Gamma}{2\pi i} = \frac{-\Gamma \cdot i}{2\pi}$. En ser $Q < 0$, es forma una *pica*.

Arrel d'això, com sabem que Q va variant al llarg dels eixos, deduïm que en els tres casos a estudiar hi haurà tant una $font$ com una *pica*.

(a) S'ha utilitzat el valor $\Gamma = 4\pi - 10$.

Els punts que generen la *pica* i la $font$ són molt propers, de manera que podem observar les línies de flux de la $font$, que en apropar-se al 0, prop de la *pica*, es curven.

(b) S'ha utilitzat el valor $\Gamma = 4\pi$.

Els punts que generen la *pica* i la $font$ estan relativament allunyats l'un de l'altre. De manera que podem observar com les línies de flux de la $font$, a mesura que s'acosten més a la *pica*, augmenten la seva corbatura cap a la *pica*.

(c) S'ha utilitzat el valor $\Gamma = 4\pi + 10$.

Com es pot veure a les diverses imatges, en augmentar el valor de Γ, els punts que generen la *pica* i la $font$ estan significativament allunyats l'un de l'altre. Prop del 0 s'hi troba la *pica*, mentre que la *font* queda situada al segon quadrant. Això provoca que les línies sortints de la *pica* canviïn de direcció en apropar-se al 0.

Per veure el codi utilitzat per generar les imatges, anar a l'apartat 4.3.

4 Codis

4.1 Exercici 2.4.13

```
def f(x,y):
    return imag(log(x+I*y+2)+log(1/2+(x+I*y))-log(x+I*y)+log(2))
def f2(x,y):
    return real(log(x+I*y+2)+log(1/2+(x+I*y))-log(x+I*y)+log(2))

var('x','y')

CP = contour_plot(f, (-1,0), (-0.5,0.5), fill=False)
SP = streamline_plot((f2,f), (-1,0), (-0.5,0.5))
show(CP+SP)

CP = contour_plot(f, (-0.5,0.5), (-0.5,0.5), fill=False)
SP = streamline_plot((f2,f), (-0.5,0.5), (-0.5,0.5))
show(CP+SP)

CP = contour_plot(f, (-3,-1), (-1,1), fill=False)
SP = streamline_plot((f2,f), (-3,-1), (-1,1)))
show(CP+SP)
```

4.2 Exercici 2.6.17 b)

```
def fr(x,y):
    return real(a*(x+I*y) + (T/(2*pi*I))*log(x+I*y))
def fi(x,y):
    return imag(a*(x+I*y) + (T/(2*pi*I))*log(x+I*y))

var('x', 'y')
A = 2

for a in (1,50, 100):
    for T in (1,50, 100):
        CP = plot_vector_field((fr,fi), (-A,A), (-A,A))
        SP = streamline_plot((fr,fi), (-A,A), (-A,A)
        show(CP+SP)
```

4.3 Exercici 2.6.18

```
def g(x,y):
    return real(V0*((x+I*y)+(R^2)/(x+I*y))+(T/(2*pi*I))*log(x+I*y))
def g2(x,y):
    return imag(V0*((x+I*y)+(R^2)/(x+I*y))+(T/(2*pi*I))*log(x+I*y))

var('x','y')
V0=1
R=1

for T in (4*pi*R*V0-10, 4*pi*R*V0, 4*pi*R*V0+10):
    CP = plot_vector_field((g,g2), (-15,15), (-15,15))
    SP = streamline_plot((g,g2), (-15,15), (-15,15))
    show(CP*SP)
```