

Рассматривается уравнение:

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \quad (1)$$

Вводятся обозначения:

$$\begin{aligned} P &= ae - 4bd + 3c^2; & Q &= (b^2 - ac)e + ad^2 + (c^2 - 2bd)c; & D &= 27Q^2 - P^3; \\ R &= b^2 - ac; & S &= 12R^2 - a^2P; & T &= 3aQ - 2PR; & U &= 2d^2 - 3ce. \end{aligned}$$

Примечание. Уравнение  $4z^3 - Pz + Q = 0$  соответствует кубической резольвенте.

Имеет место

Теорема. Уравнение (1) имеет действительные корни при  $a \neq 0$  соответственно таблице

Случай	Число корней	Кратности корней	Условия на коэффициенты
1	4	1,1,1,1	$D < 0, R > 0, S > 0$
2	3	1,1,2	$D = 0, T < 0$
3	2	1,1	$D > 0$
4	2	2,2	$D = T = 0, PR > 0$
5	2	1,3	$D = P = 0, R \neq 0$
6	1	4	$D = P = R = 0$
7	1	2	$D = 0, T > 0$
8	0	--	$D = T = 0, PR < 0$
9	0	--	$D < 0, R \leq 0$
10	0	--	$D < 0, S < 0$

а при  $a = 0$

Случай	Число корней	Кратности корней	Условия на коэффициенты
1	3	1,1,1	$D < 0, R \neq 0$
2	2	1,1	$R = 0, P > 0, U > 0$
3	2	1,2	$D = 0, PR \neq 0$
4	1	3	$D = P = 0, R \neq 0$
5	1	2	$R = U = 0, P \neq 0$
6	1	1	$D > 0, R \neq 0$
7	1	1	$R = P = 0, U \neq 0$
8	0	--	$R = 0, P \neq 0, U < 0$
9	0	--	$R = P = U = 0, e \neq 0$
10	$\infty$	--	$R = P = U = e = 0$