Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat de Ciències

Seminari 4: Transformada de Fourier

Autors:

Gerard Lahuerta & Ona Sánchez & Andrea González

1601350 — 1601181 — 1603921

25 de Maig del 2022

Índex

1 Exercicis per entregar

1.1 Exercici 5.6.7

Provar l'igualtat de *Plancherel*: $\sum_{j=0}^{N-1} f[k]\overline{g[k]} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k]\overline{\hat{g}[k]}$

$$\sum_{k=0}^{N-1} f[k]\overline{g[k]} = \left(\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{N}\hat{f}[k]e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \cdot \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{N}\overline{\hat{g}[k]e^{\frac{2\pi ijk}{N}}}\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{f}[k]e^{\frac{2\pi ijk}{N}}\overline{\hat{g}[k]}\cdot e^{\frac{-2\pi ijk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{f}[k]\overline{\hat{g}[k]}$$

S'han utilitzat propietats en la demostració que són demostrades als exercicis extres, es pot consultar a l'apartat 2.

1.2 Exercici 5.11.12

Considereu un senyal amb les dades contingudes al fitxer **dades_exer.csv** (es donen els valors $f[k]$). Estudieu el senyal (discret) i el seu espectre.

```
import csv
dadescsv=list(csv.reader(open("/home/gerard/Descargas/dades_exer.csv")) )
print(len(dadescsv))
```

L'output obtingut i que serveix per comprovar que les dades han sigut extretes de forma correcte és:

```
128
```

A continuació, una vegada confirmada l'extracció correcte de les dades, procedim a analitzar el senyal:

```
dades_llista=[RR(dadescsv[j][0]) for j in range(len(dadescsv))]
long=len(dades_llista)
T=40
fft_dades=FFT(long)
for j in range(long):
    fft_dades[j]=dades_llista[j]
fft_dades.forward_transform()
fft_dades_freq=[[0,0] for k in range(long/2)]
for j in range(long/2):
    fft_dades_freq[j][0]=j/T
```

```
    fft_dades_freq[j][1]= abs(vector(fft_dades[j]))/long

dibS=list_plot(fft_dades_freq,plotjoined=True,axes_labels=('Freq. angular', 'Amplitud'),
                color = 'red')
dades_temps=[[0,0] for k in range(long)]
for j in range(long):
    dades_temps[j][0]=j*T/long
    dades_temps[j][1]= dades_llista[j]
dibT=list_plot(dades_temps,plotjoined=True,axes_labels=('Temps', 'Senyal'))
Dib=graphics_array([dibT,dibS])
show(Dib,figsize=[12, 5])
```

Del codi mostrat, s'obté el següent output, gràfic de l'espectre del senyal:

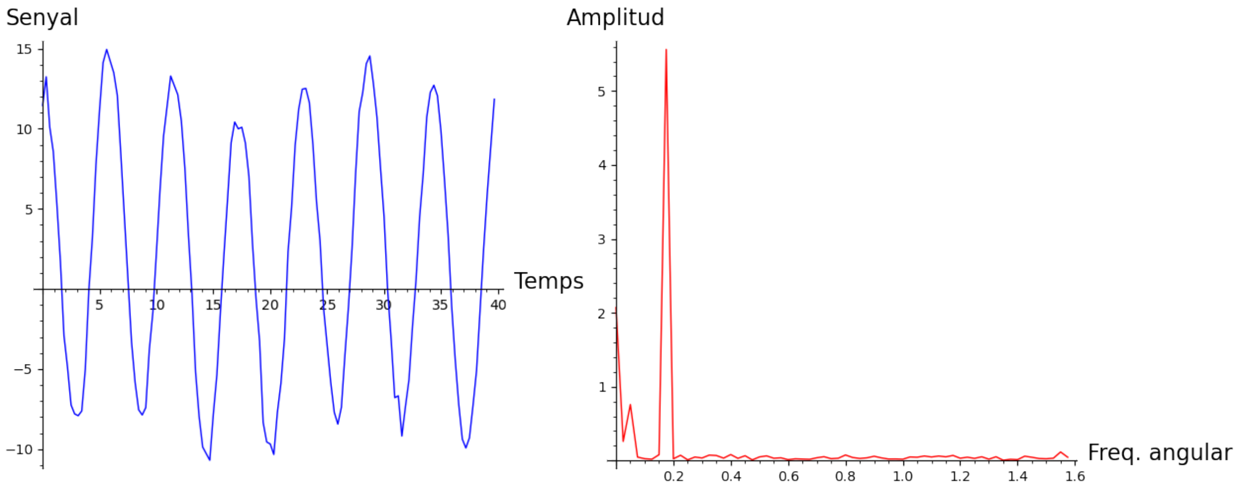


Figura 1: Output del programa

És pot observar fàcilment com el senyal no és del tot clar (hi existeixen interferències/soroll) pel que les petites "deformitats" de la gràfica afecten a l'anàlisis de les freqüències.
Podem deduïr que existeix una presència notoria de 3 pics diferents (situats a $0, 0.05$ i 0.2).
De totes les frequències rellevants, la més important i la que resalta davant de totes és la situada a 0.2.
Com que la diferència d'amplituts entre la més notoria i les altres és molt gran, podem asumir que la resta de freqüències són part del soroll; és a dir, concluïm que la freqüència del senyal es situa a 0.2 i la resta de freqüències que apareixen a l'espectre es tracten de "soroll" de fons.

2 Exercicis extres

2.1 Exercici 5.1.1

Proveu que $\hat{f}[k+N] = \hat{f}[k]$.

$$\hat{f}[k+N] = \sum_{j=0}^{N-1} \left(f[j+N] \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(f[j] \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right) = \hat{f}[k] \Longrightarrow \hat{f}[k+N] = \hat{f}[k]$$

2.2 Exercici 5.1.2

Calcular $\hat{f}[k]$ si $N = 4$ i $f[0] = f[1] = 0$ i $f[2] = f[3] = 1$.

$$e(-i\pi k) + e(-\frac{3}{2}i\pi k)$$

2.3 Exercici 5.1.3

Proveu les següents propietats

- Linealitat. $(\alpha f + \beta g)\hat{}= \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.

$$(\alpha f + \beta g)\hat{}= \sum_{j=0}^{N-1} \left((\alpha f + \beta g) \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\alpha f \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} + \beta g \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\alpha f \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(\beta g \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right) =$$

$$= \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \left(f \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right) + \beta \sum_{j=0}^{N-1} \left(g \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right) = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

- Translació temporal. Si $g[k] = f[k-n]$ llavors $\hat{g}[k] = e^{-2\pi ikn/N} \hat{f}[k]$.

$$\hat{g}[k-n] = \sum_{j=0}^{N-1} \left(f[j-n] \cdot e^{\frac{2\pi i(j-n)k}{N}} \cdot e^{\frac{-2\pi ijnk}{N}} \right) = e^{\frac{2\pi ink}{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f[j-n] \cdot e^{\frac{2\pi i(j-n)k}{N}} \right) = e^{\frac{2\pi ink}{N}} \cdot \hat{f}[k]$$

- Translació freqüencial. Si $g[k] = f[k]e^{2\pi ikn/N}$ llavors $\hat{g}[k] = \hat{f}[k-n]$.

$$\hat{g}[k] = e^{\frac{2\pi ink}{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f[j] \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(f[j] \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi ink}{N}} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \left(f[j] \cdot e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \cdot e^{\frac{-2\pi i(-n)k}{N}} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(f[j] \cdot e^{\frac{2\pi i(j-n)k}{N}} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(f[j-n] \cdot e^{\frac{2\pi i(j-n)k}{N}} \right) = \hat{f}[k-n]$$

- Modulació. Si $g[k] = f[k]cos2\pi kn/N$ llavors $\hat{g}[k] = \frac{1}{2}(\hat{f}[k-n] + \hat{f}[k+n])$.

$$\hat{g}[k] = \sum_{j=0}^{N-1}\left(f[j]\cdot\cos(\frac{2\pi kn}{N})\right) = \sum_{j=0}^{N-1}\left(f[j]\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi kn}{N}i} + e^{-\frac{2\pi kn}{N}i}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{N-1}\left(f[j]\cdot e^{\frac{2\pi kn}{N}i}\right) + \sum_{j=0}^{N-1}\left(f[j]\cdot e^{-\frac{2\pi kn}{N}i}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}[k-n] + \hat{f}[k+n]\right)$$

2.4 Exercici 5.5.6

Provar que quan $f[k] = f(kT/N)$ llavors $c_j = \frac{1}{N}\hat{f}[j]$.

$$p(x_k) = f(x_k) \Longleftrightarrow c_j \cdot e^{\frac{2\pi ijx}{T}} = \frac{1}{N}\hat{f}(jN/T)\cdot e^{\frac{2\pi ijkN}{TN}} \Longrightarrow c_j = \frac{1}{N}\hat{f}(jN/T) = \frac{1}{N}\hat{f}[j] \Longrightarrow c_j = \frac{1}{N}\hat{f}[j]$$

2.5 Exercici 5.5.8

Deduir que $\sum_{j=0}^{N-1}|f[k]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}|\hat{f}[k]|^2$.

$$\sum_{j=0}^{N-1}|f[k]|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} f[k]\overline{f[k]} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{f}[k]\overline{\hat{f}[k]} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}|\hat{f}[k]|^2$$

2.6 Exercici 5.5.9

Provar que $\widehat{(f*g)}[k] = \hat{f}[k]\cdot\hat{g}[k]$

$$\widehat{(f*g)}[k] = \sum_{j=0}^{N-1}(f*g)[k](w^k)^j = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{q=0}^{N-1} f[q]g[j-q]\right)(w^k)^j = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{q=0}^{N-1} f[q]g[j-q]\right)w^{kj} =$$

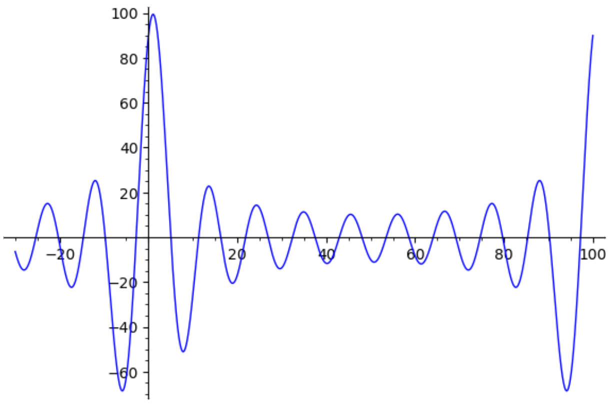
$$= \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1} f[q]g[j-q]w^{kq}w^{k(j-q)} = \hat{f}[k]\cdot\hat{g}[k]$$

2.7 Exercici 5.11.11

Tenim un senyal de la forma $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_n cos(2\pi kx/T) + b_n sin(2\pi kx/T))$.
El gràfic del senyal s'ha realitzat amb el codi:

```
var('x')
m = 10
T = 100
a0 = 1
f = 0
for k in range(1,m):
    f += 2*k*cos(2*pi*k*x/T)+k*sin(2*pi*k*x/T)
N = 2**8
plot(f, (x,-30,100))
```

Que dona el següent senyal:



S'ha generat una mostra $M = [f[0], f[1], ..., f[N-1]]$ de manera que $f[k] = f(k \cdot T/N)+$ soroll Gaussià.
S'ha generat amb el codi:

```
data = []
c = 3
mean = 0
sd = 10
for i in range(0,2**7):
    res = [i,f(i*T/(2**7)).n()+c*gauss(mean,sd)]
    data.append(res)
show(data)
```

Les mostres generades son:

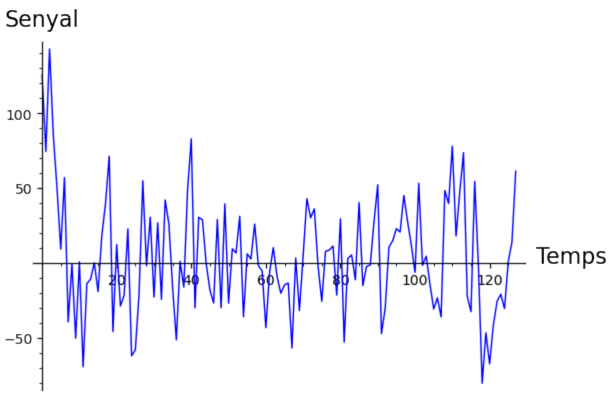
$$[[0, 78.8850326657057], [1, 121.961528341471], [2, 104.753021560335], ...,$$

..., [125, 26.5845519022956], [126, 30.9520577591478], [127, 55.7335597110999]]

El dibuix de la mostra del senyal donat per M s'ha generat amb el codi:

```
list_plot(data,plotjoined=True,axes_labels=('Temps', 'Senyal'))
```

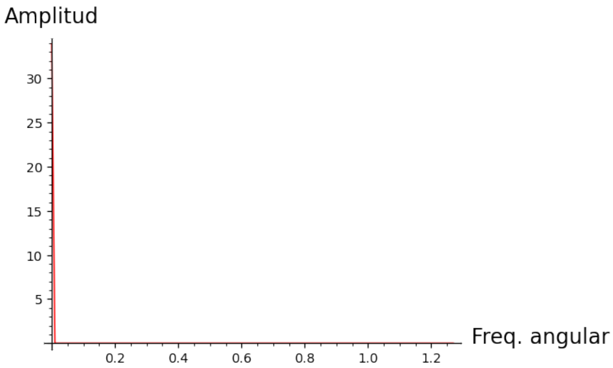
Que genera el dibuix:



S'ha fet el dibuix de l'amplitud sense soroll:

```
long = len(data)
fft_dades=FFT(long)

for j in range(long):
    fft_dades[j]=data[j][1]
fft_dades.forward_transform()

fft_funcio = FFT(N)
for t in range(N):
    fft_funcio[t] = f(i*2*pi/(2**7))
fft_funcio.forward_transform()



fft_dades_freq=[[0,0] for k in range(long/2)]
for j in range(long/2):
    fft_dades_freq[j][0]=j/T
    fft_dades_freq[j][1]= abs(vector(fft_dades[j]))/long

fft_funcio_freq=[[0,0] for k in range(N/2)]
for j in range(N/2):
    fft_funcio_freq[j][0]=j/T
```

```
        fft_funcio_freq[j][1]= abs(vector(fft_funcio[j]))/N

    list_plot(fft_funcio_freq,plotjoined=True, axes_labels=('Freq. angular', 'Amplitud'),
    color='red')
```



Amb soroll:

```
    list_plot(fft_dades_freq,plotjoined=True,axes_labels=('Freq. angular', 'Amplitud'))
```