Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat de Ciències

Entrega 4

Autora:

Ona Sánchez Núñez

1601181

15 de Març del 2023

Índex

1 Exercici 1 **3**

1.1 Context . . . 3

1.2 Assumpcions . . . 3

1.3 Objectiu . . . 4

1.4 Paràmetres . . . 4

1.5 Relacions . . . 4

1.6 Model . . . 5

1.7 Qüestions . . . 5

2 Exercici 2 **10**

2.1 Context . . . 10

2.2 Assumpcions . . . 10

2.3 Objectiu . . . 11

2.4 Paràmetres . . . 11

2.5 Relacions . . . 11

2.6 Model . . . 11

2.7 Qüestió 1 . . . 12

2.8 Qüestió 2 . . . 13

2.9 Qüestió 3 . . . 14

2.10 Qüestió 4 . . . 15

3 Codis exercici 2 **16**

3.1 Codi qüestió 1 . . . 16

3.2 Codi qüestió 2 . . . 18

3.3 Codi qüestió 3 . . . 19

3.4 Codi qüestió 4 . . . 21

1 Exercici 1

Per modelitzar un sistema mecànic compost per una sèrie de columnes, necessitem mesurar el seu mòdul elàstic E. A l'experiment es carrega una columna de llargària L i secció b x b fins al punt de vinclament.

- Sent la càrrega P = $4pi^2$ E I / L^2 i el moment d'inèrcia d'àrea I = $b^4/12$.
- Amb quina incertesa relativa podem mesurar E, si b, L i P els podem mesurar amb una incertesa relativa d'1%?
- Quins són els coeficients de sensitivitat de cada variable? Quin pes relatiu té cada incertesa en el quadrat de l'incertesa total?

1.1 Context

- Tenim un sistema mecànic compost per columnes.
- Les columnes tenen forma de paral·lelepípede, amb una altura L, i costat b. És a dir, la base és un quadrat bxb.
- L'experiment consisteix en moure una columna fins al punt de vinclament.
- Sabem que la càrrega és P = $\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$.
- Sabem que el moment d'inèrcia d'àrea és I = $\frac{b^4}{12}$.
- Per saber el mòdul elàstic, a la columna se li posa una càrrega P que fa pressió cap a baix, fent que es contregui.
- Es mesuren b, L i P amb una incertesa relativa del 1%.

1.2 Assumpcions

- Es tracta d'un sistema aïllat.
- No es té en compte el material de la columna.
- No es té en compte el material de la càrrega.
- L'experiment es realitza en unes condicions de Temperatura i Pressió estàndars.
- La càrrega que s'aplica a la columna varia respecte el temps.

1.3 Objectiu

Mesurar el mòdul elàstic E d'una de les columnes.

1.4 Paràmetres

- Mòdul elàstic de la columna: E, amb unitats de $\left[ML^{-1}T^{-2}\right]$.
- Alçada de la columna: L, amb unitats de $[L]$.
- Llargada costat de la columna: b, amb unitats de $[L]$.
- Càrrega aplicada a la columna: P, amb unitats de $\left[MLT^{-2}\right]$.
- Moment d'inèrcia d'àrea: I, amb unitats de $\left[L^4\right]$.

1.5 Relacions

Sabem que el moment d'inèrcia d'àrea depèn únicament de l'àrea de la secció de la columna, de manera que sabem: $I \propto b$. Sabent que el moment d'inèrcia d'un rectangle qualsevol és: $I = \frac{h^3 b}{12}$, on h seria la altura del rectangle i b la base, com en el nostre cas $h = b$ en ser la secció un quadrat, deduïm que $I = \frac{b^4}{12}$.

Per altre banda, la càrrega que es pot aplicar a la columna ha de ser directament proporcional al moment d'inèrcia d'àrea, ja que aquesta representa la resistència a la "flexió", d'aquesta manera sabem que: $P \propto I$.
Sabem per experiència que, com més alta sigui la columna, més fàcil serà que es deformi, d'aquesta manera, la càrrega que es pot aplicar a la columna ha de ser inversament proporcional a l'altura d'aquesta, per tant: $P \propto \frac{1}{L}$.
Per últim, la càrrega que es pot posar a la columna ha de ser directament propocional al seu mòdul elàstic, pel que $P \propto E$.
S'observa ara que el model donat per l'enunciat per calcular la càrrega que pot soportar la columna segueix tots els punts mencionats, sent la fòrmula: $P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$.

1.6 Model

Mitjançant les equacions trobades a l'apartat anterior pel moment d'inèrcia d'àrea, $I = \frac{b^4}{12}$, i per la càrrega, $P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$, deduïm que el model per estudiar el mòdul elàstic de la columna ha de ser:

$$P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$
$$P = \frac{4\pi^2 E\frac{b^4}{12}}{L^2}$$
$$P = \frac{4\pi^2 Eb^4}{12L^2} \longrightarrow \boxed{E = \frac{3PL^2}{\pi^2 b^4}}$$

Anàlisis dimensional

Per tal de confirmar que el model ha sigut correctament desenvolupat i té sentit físic, es realitza un anàlisis dimensional per veure que les unitats que dona el model siguin realment les que pertoquen al mòdul elàstic E.

$$\left.\begin{aligned} E &= \left[ML^{-1}T^{-2}\right] \\ L &= [L] \\ b &= [L] \\ P &= \left[MLT^{-2}\right] \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \left.\left[ML^{-1}T^{-2}\right] = \frac{\left[MLT^{-2}\right]\left[L^2\right]}{\left[L^4\right]}\right\} \longrightarrow \left[ML^{-1}T^{-2}\right] = \left[ML^{-1}T^{-2}\right]$$

Observem d'aquesta manera que el model té sentit físic.

1.7 Qüestions

Amb quina incertesa relativa podem mesurar E, si b, L i P els podem mesurar amb una incertesa relativa d'1%? Quins són els coeficients de sensitivitat de cada variable? Quin pes relatiu té cada incertesa en el quadrat de l'incertesa total?

Fent un anàlisi de l'enunciat, ens adonem que cal calcular, en aquest ordre:

1. Coeficients de sensitivitat de b, L i P.
2. Incertesa relativa de E.
3. Pes relatiu de b, L i P en el quadrat de la incertesa total.

Els càlculs es realitzaran en aquest ordre ja que el pas 2 usa els coeficients que calcularem al pas 1, de la mateixa manera que tant el pas 1 com el 2 es necessiten per poder trobar els pesos relatius de b, L i P.

Per tal de poder contestar les qüestions s'ha utilitzat un *Jupyter Notebook* per realitzar els càlculs de forma més ràpida i senzilla. Per cada apartat, es mostrarà el codi utilitzat, així com la sortida d'aquest.

El primer pas, que consisteix en calcular els **coeficients de sensitivitat** de cada paràmetre del model, ens descriu que tant el valor estimat de la variable de sortida (E) es feu influït pels canvis en la variable d'entrada (b, L i/o P).
Es mostra a continuació el codi amb els *imports* necessaris per treballar el *notebook*:

```
import numpy as np
from scipy import optimize
from scipy import stats
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import Math, display
import math
import sympy as sp
n = 50

sp.init_printing()

def show(*args):
    out = ""
    for arg in args:
        if isinstance(arg, (sp.Expr, sp.Eq)):
            arg = sp.latex(arg)
        else:
            arg = str(arg)
        out += arg
    display(Math(out))

qq = "\quad "
```

Definim el model:

```
# Mòdul elàstic
from sympy.abc import P, L, b


E = (3*P*L**2)/(math.pi**2 * b**4)
show("E =", E)
```

A continuació, ja es poden calcular els coeficients de sensitivitat, minjançant el fragment de codi adjunt:

```
# Coeficients de sensitivitat
EL = L / E * sp.diff(E, L)
EP = P / E * sp.diff(E, P)
Eb = b / E * sp.diff(E, b)
show(EL, qq, EP, qq, Eb)
```

Que proporciona els coeficients de sensitivitat de L, P i b, en aquest ordre, amb valors de: **2.0**, **1.0** i **-4.0**, respectivament.

Destaca el fet que en aquest cas concret, els coeficients de sensitivitat tenen exactament el valor de l'exponent de cada paràmetre al model, és a dir, observant el model exposat a l'apartat 1.6, el paràmetre L està elevat a 2, P a 1, i b a -4. Pels valors obtinguts i analitzant el model, deduïm que els paràmetres que faran variar més el resultat del model són, de més a menys, b, L i P. Per una banda, un augment en el valor de b mantenint la resta de paràmetres constants faria disminuir significativament el resultat del model, és a dir, un augment en la secció faria disminuir significativament el mòdul elàstic de la columna. Per altre banda, un augment en el valor L de la columna farà augmentar-ne el mòdul. La variació del paràmetre P farà variar el mòdul de forma proporcional (o lineal) a ell, ja que té coeficient de sensitivitat 1.

Conèixer aquests valors i com afecten a la sortida és important, ja que el mòdul elàstic és una mesura de la rigidesa, i com més elevat sigui el mòdul elàstic, més rígid el material.

Es segueix l'estudi amb el càlcul de la **incertesa relativa de E**, usant el següent codi en *python*:

```
# Incertesa relativa de E
# Assumint que les incerteses de L, P i b són independents
# Sabent que la incertesa de L, P i b és del 1%

CurL = EL * 0.01
CurP = EP * 0.01
Curb = Eb * 0.01

IrE = (CurL**2 + CurP**2 + Curb**2)
show("Ir^2_E=", IrE)
IrE = math.sqrt(CurL**2 + CurP**2 + Curb**2)
show("Ir_E=", IrE)
```

Obtenim, mitjançant aquest codi, un valor per la incertesa al quadrat d'E de 0.0021, és a dir $IrE^2 = 0.21\%$. Obtenim fent l'arrel d'aquest valor la incertesa relativa d'E, 0.0458, és a dir, $\mathbf{IrE = 4.5\%}$. Aquest valor ens informa de la precisió de la mesura, pel que és important estudiar-lo per saber si compleix els objectius plantejats.

Per últim, es vol estudiar el **pes relatiu** de cada paràmetre, b, L i P en el quadrat de la incertesa total, per tal de saber quina influència té cada paràmetre al model. A partir de l'estudi realitzat anteriorment al càlcul dels coeficients sobre l'aportació de cada paràmetre al resultat, deduïm que s'haurien d'obtenir uns pesos tals que, si P(x) és el pes del paràmetre x al quadrat de la incertesa total: $P(b) > P(L) > P(P)$.
Ho comprovem mitjançant el següent fragment de codi:

```
# Pesos relatius de cada incertesa
# Sabent que incertesa de L, P i b és del 1%
# Sabent que incertesa total, E és 4.5%
PrL = CurL**2/0.0021
show("PrL=", PrL)
PrP = CurP**2/0.0021
show("PrP=", PrP)
Prb = Curb**2/0.0021
show("Prb=", Prb)
```

Que ens proporciona els valors:

- **PrL = 0.190**
- **PrP = 0.047**
- **Prb = 0.761**

Corroborem d'aquesta manera que els paràmetres, ordenats de major a menor pes, són: b, L, P, tal com s'esperava.

2 Exercici 2

A una granja volen saber com creix de ràpid el bestiar. Sent G el pes de l'animal en kg i A els kg de menjar, es construeix el model de l'evolució del pes de l'animal G(A) = (A − A0)/(b A + c).

- Si A0, b i c es coneixen amb un error relatiu de l'1%, amb quina precisió hem de mesurar l'aliment A per tindre una incertesa de G menor del 5%?.
- I si a més a més volem saber-ho amb un nivell de confiança del 95%?.
- Quin és el punt d'alimentació òptima que maximitza G/A?
- Quina incertesa tindrem en el pes de l'animal G al punt òptim?
- Podeu fer servir b= 0.482, c=0.645, A0 = 0.764.

2.1 Context

- Tenim una granja amb bestiar.
- El bestiar creix contínuament.
- Segons creix el bestiar, canvia la quantitat de menjar que pren.
- El bestiar inicialment pren una quantitat de menjar $A0$.
- Sabem que $A0 = 0.764$kg.
- Intervé el factor del metabolisme de l'animal mitjançant un paràmetre $b = 0.482\text{kg}^{-1}$.

2.2 Assumpcions

- Les malalties dels animals i els efectes d'aquestes sobre el creixement són negligibles.
- Només es té en compte el menjar, no la beguda.
- No es té en compte la variació de l'activitat física dels animals segons el periode de l'any.
- No es té en compte l'ambient on es troben els animals: temperatura, pluja, pressió, etc.
- El menjar que es dona als animals sempre és del mateix tipus.
- Hi ha un mínim de menjar que tot el bestiar menja, és a dir $A \geq A0$.
- Assumim que tenim una mostra suficientment gran, més de 9 exemplars.

2.3 Objectiu

Modelitzar l'augment dels kg del bestiar segons els kg de menjar que pren.

2.4 Paràmetres

- Constant: c, unitats de [1].
- Factor metabòlic: b, unitats de $\left[M^{-1}\right]$.
- Quantitat de menjar mínima: $A0$, unitats de $[M]$.
- Quantitat de menjar: A, unitats de $[M]$.
- Pes de l'animal: G, unitats de $[G]$.

2.5 Relacions

Deduïm per l'experiència que el pes de l'animal ha de ser directament proporcional a la quantitat de menjar que ingereix. D'aquesta manera, si es vol saber quant creix l'animal respecte a quan ingeria una quantitat inicial $A0$, la variació del pes de l'animal serà proporcional a l'augment de la quantitat de menjar, és a dir, $G(A) \propto (A - A0)$.

Per altra banda, cal tenir en compte el metabolisme de l'animal i com aquest processa els aliments, ja que si un animal té un metabolisme molt ràpid, l'augment en la quantitat de menjar no li afectarà tant com un que no. Així, sabem que la manera en que el cos de l'animal "absorveix"el menjar ha de ser inversament proporcional a l'aument de pes, de manera que $G(A) \propto \frac{1}{bA}$.

2.6 Model

Mitjançant l'estudi de relacions anterior, observem que el model plantejat a l'enunciat de l'exercici té sentit (és lògic), i segueix les relacions trobades fins el moment. El model que es presenta és:

$$\boxed{G(A) = \frac{A - A0}{bA + c}}$$

Es veu que, com cabia esperar, l'augment del pes de l'animal és proporcional a la variació en la quantitat de menjar que pren, i inversament proporcional al factor que representa el metabolisme de l'animal, b.

Anàlisis dimensional

Per tal de comprovar que el model presentat tingui sentit físic, es realitzarà un estudi dimensional de les diverses components del model, per tal de verificar que les unitats resultants corresponguin al pes del bestiar, és a dir, tingui dimensió $[M]$.

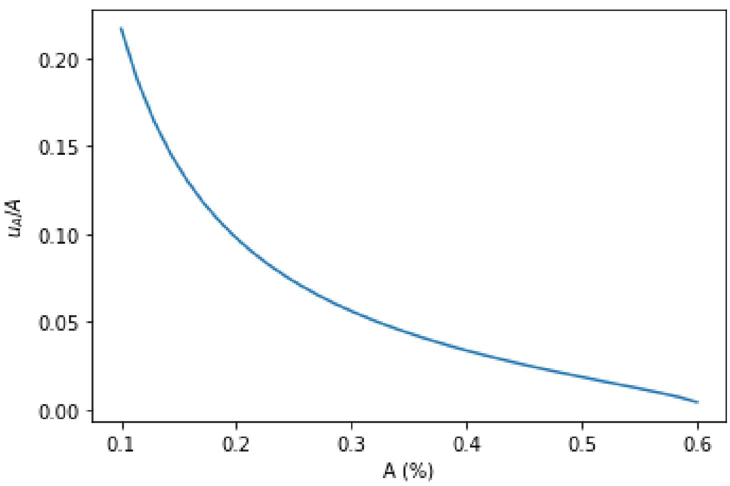
$$\left.\begin{array}{c} A = [M] \\ A0 = [M] \\ b = \left[M^{-1}\right] \\ c = [1] \\ G(A) = [M] \end{array}\right\} \longrightarrow [M] = \frac{[M]-[M]}{[M^{-1}][M]+[1]} \longrightarrow [M] = \frac{[M]}{[1]} \longrightarrow [M] = [M]$$

Es confirma d'aquesta manera que el model té les dimensions correctes.

2.7 Qüestió 1

Si A0, b i c es coneixen amb un error relatiu de l'1%, amb quina precisió hem de mesurar l'aliment A per tindre una incertesa de G menor del 5%?

Mitjançant el codi adjuntat a la secció 3.1 obtenim el gràfic mostrat a continuació:



Es pot observar al gràfic representat la relació entre el valor del paràmetre A i la incertesa d'aquest (és a dir la precissió amb el que cal mesurar-lo).

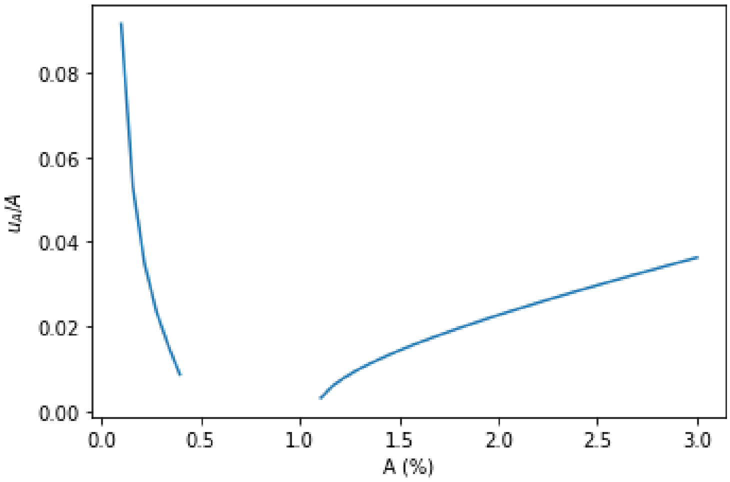
S'observa a l'horitzontal el diversos valors de A, i a la vertical la incertesa de les mesures.

Per a qualsevol punt sobre la gràfica tindrem una incertesa de G menor al 5%.

Per tal de corroborar que realment sigui així, s'ha decidit fer una prova amb una combinació (punt) de la gràfica, el punt (0.3, 0.05), i s'ha obtingut un valor per la incertesa de G del 4.54%. El codi usat per corroborar el resultat està adjuntat al final de l'apartat 3.1.

2.8 Qüestió 2

I si a més a més volem saber-ho amb un nivell de confiança del 95%? Utilitzant el codi adjuntat a l'apartat 3.2, obtenim el següent gràfic: Per tal de generar la gràfica, i mitjançant l'as-



sumpció d'una mostra lo suficientment gran, s'ha estimat el valor de t(95%)=2.

Observem a la horitzontal del gràfic els valors de A i a la vertical els valors de les incerteses. Destaca el fet que els valors de les incerteses han disminuït considerablement en aplicar el nivell de confiança.

Es veu una part del gràfic que no existeix. Això és degut a que l'arrel a l'hora de calcular la incertesa quedava negativa, pel que no es podia representar. S'observa també com abans d'aquests valors les incerteses disminueixen amb una gran pendent, mentre que després puja amb una pendent no tan inclinada.

De la mateixa manera que a la qüestió anterior, per qualsevol punt de la gràfica el valor de G tindrà una incertesa menor al 5%.

2.9 Qüestió 3

Quin és el punt d'alimentació òptima que maximitza G/A?

Per tal de trobar el punt que maximitza $\frac{G}{A}$, s'han seguit els següent passos:

1. Fer una nova funció G, on $G = \frac{A-A0}{A(Ab+c)}$.

2. Desenvolupar un codi per representar la funció esmentada al pas 1.

3. Fer una nova representació tenint en compte que el valor de l'aliment no pot ser negatiu (realment, per tenir un creixement positiu, hauria de ser una quantitat tal que $A > A0$).

4. Trobar els màxims de la funció i descartar els valors negatius.

5. Trobar el valor de G/A al punt d'alimentació (A) òptim.

El codi desenvolupat que segueix els passos esmentats es pot consultar a l'apartat 3.3. Amb ell, s'han desenvolupat les següents gràfiques:

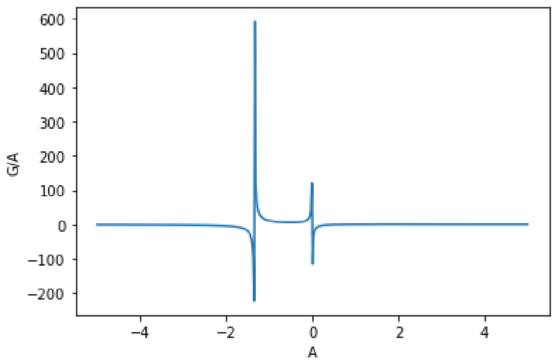


Figura 1: Representació completa de la funció G/A (A)

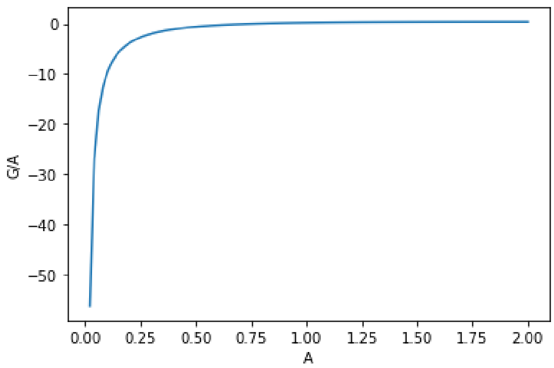


Figura 2: Representació acotada de la funció G/A (A)

Sabem que el valor de la funció $\frac{G}{A}(A)$ ha de ser positiu per tal de tenir sentit físic, ja que tant el creixement de l'animal (G), com l'aliment que ingereix (A) són quantitats positives. D'aquesta manera, es dedueix que el valor de $\frac{G}{A}(A)$ ha de ser un valor proper a 0 (per la representació gràfica) i amb $A > A0 \longrightarrow A > 0.764$.

Mitjançant un estudi a *Jupyter Notebook* es troba que el màxim és el punt (2.03, 0.38). Per tant, el valor d'A per tenir una alimentació òptima és de 2.03kg de menjar pel bestiar, cosa que donarà un valor de proporció entre pes de l'animal i menjar ingerit (G/A) de 0.38.

2.10 Qüestió 4

Quina incertesa tindrem en el pes de l'animal G al punt òptim?

Per tal de resoldre aquest apartat, s'ha usat el codi de la qüestió 2 per tal de trobar el valor de la incertesa d'A en el punt òptim 2.03. Mitjançant l'ús d'aquest codi, s'ha trobat que la incertesa és de 0.023.

Sabent aquest valor, s'ha usat el codi exposat a l'apartat 3.4 per tal de trobar la incertesa de G al punt òptim.

S'ha arribat a un valor de 0.025, és a dir, un 2.5%.

3 Codis exercici 2

3.1 Codi qüestió 1

```
#Pes del animal
from sympy.abc import A, a, b, c
G = (A-a)/(b*A + c)
show("G =", G)


# Coeficients de sensitivitat
GA = A / G * sp.diff(G, A)
Ga = a / G * sp.diff(G, a)
Gb = b / G * sp.diff(G, b)
Gc = c / G * sp.diff(G, c)
show(GA, qq, Ga, qq, Gb, qq, Gc)


# Incertesa relativa de G
# Assumint que les incerteses de b, a i c són independents
urA = sp.symbols('ur_A')

CurA = GA * urA
Curb = Gb * 0.01
Curc = Gc * 0.01
Cura = Ga * 0.01

urG2 = CurA**2 + Curb**2 + Curc**2 + Cura**2
show("ur^2_G=", urG2)
```

```
# Incertesa relativa de A perquè U_G/G sigui del 5%

valors = {b:0.482, c:0.645, a:0.764}

urA2 = sp.solve(sp.Eq(urG2, 0.05 * 0.05), urA**2)[0]

x = np.linspace(0.1, 0.8, 50)
furA = sp.lambdify(A, sp.sqrt(urA2).subs(valors), "numpy")

ura = furA(x)

plt.plot(x, ura)
plt.xlabel('A (%)')
plt.ylabel('$u_A/A$')
plt.show()
```

3.2 Codi qüestió 2

```
# Incertesa de A perquè U_G/G sigui del 5% amb un nivell de confiança del 95%
# Assumint suficient estadística per a tindre t(95%) = 2

urA2 = sp.solve(sp.Eq(urG2, (0.05 / 2)**2), urA**2)[0]

x = np.linspace(0.1, 3, 50)
furA = sp.lambdify(A, sp.sqrt(urA2).subs(valors), "numpy")

ura = furA(x)

plt.plot(x, ura)
plt.xlabel('A (%)')
plt.ylabel('$u_A/A$')
plt.show()
```

3.3 Codi qüestió 3

```
#Model
valors = {b:0.482, c:0.645, a:0.764}
from sympy.abc import A, a, b, c
G = (A-a)/((b*A + c)*A)
valors = {b:0.482, c:0.645, a:0.764}
G = G.subs(valors)
show("G =", G)


#representació de G/A segons el valor de A
x = np.linspace(-5, 5, 500)
G_A = sp.lambdify(A, G, "numpy")

ura = G_A(x)

plt.plot(x, ura)
plt.xlabel('A')
plt.ylabel('G/A')
plt.show()


#Fem la representació tenint en compte que els valors només poden ser positius
x = np.linspace(0, 2, 100)
G_A = sp.lambdify(A, G, "numpy")

ura = G_A(x)

plt.plot(x, ura)
plt.xlabel('A')
plt.ylabel('G/A')
plt.show()
```

```
#Trobem el màxim
def maxminf(f):
    """ Calcula los máximos y mínimos de una función f(A) """
    df = sp.diff(f, A) # 1era. derivada
    d2f = sp.diff(f, A, 2) # 2da. derivada
    pcs = sp.solve(sp.Eq(df,0)) # puntos críticos
    for p in pcs:
        print("x = ", (p))
maxminf(G)

#ens quedem amb x = 2.03130467734803
G = (A-a)/((b*A + c)*A)
valors = {b:0.482, c:0.645, a:0.764, A:2.031}
G.subs(valors)
```

3.4 Codi qüestió 4

```
from sympy.abc import A, a, b, c

G = (A-a)/(b*A + c)

show("G =", G)



valors = {b:0.482, c:0.645, a:0.764, A:2.03}


CurA = GA * 0.023

Curb = Gb * 0.01

Curc = Gc * 0.01

Cura = Ga * 0.01


urG2 = CurA**2 + Curb**2 + Curc**2 + Cura**2

show("ur^2_G=", sp.sqrt(urG2.subs(valors)))
```