Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat de Ciències

Entrega 3

Autora:

Ona Sánchez Núñez

1601181

8 de Març del 2023

Índex

1 Exercici 1

Considera el llançament d'un satèl·lit amb un coet d'una sola fase. El coet està perdent massa contínuament, expulsant la matèria a una velocitat considerable. Volem saber quina és la velocitat màxima a la qual el coet pot arribar.

- Considera que el coet té una massa i velocitat donades i que en cada instant està perdent un diferencial de massa (dm) a una velocitat donada.
- Recorda que la segona llei de Newton es pot escriure com F = d(m·v)/dt
- En una primera aproximació pots ignorar l'acceleració de la gravetat.

1.1 Context

- Llancem un coet d'una sola fase a l'espai.
- El coet va perdent massa contínuament, de la matèria que expulsa.
- El coet transporta un satèl·lit a l'espai.
- Juntament amb el canvi de massa, hi ha un canvi en la velocitat del coet.
- La matèria que deixa anar és el combustible que usa per moure's.

1.2 Assumpcions

- Assumim que l'acceleració de la gravetat és negligible en comparació amb la del coet.
- Assumim que el coet et troba fora de l'atmosfera.
- Assumim que es tracta d'un sistema aïllat.
- Assumim que els gasos que surten del coet ho fan a velocitat constant.
- Assumim que no hi ha cap força externa sobre el coet.

1.3 Objectiu

Modelitzar la velocitat del coet en funció del temps.

1.4 Precissió

Busquem obtenir una precissió de $\pm 10^-1$. D'aquesta manera no caldrà arrossegar molts dígits en els càlculs intermedis realitzats.

1.5 Paràmetres

- Massa total del coet (juntament amb el satèl·lit): M_c, amb dimensió $[M]$.
- Massa del combustible: M_{comb}, amb dimensió $[M]$.
- Velocitat del coet: v_c, amb dimensió $\left[LT^{-1}\right]$.

1.6 Relacions

Sabem degut a l'experiència, que com més massa tingui un cos, més difícil és de moure, per tant, sabem que la velocitat del coet és inversament proporcional a la massa total, és a dir: $\frac{dv_c}{dt} \propto \frac{1}{M_c+M_{comb}}$.

De la mateixa manera, sabem que la velocitat del coet augmentarà quan la massa del combustible vagi disminuint, de manera que la velocitat és proporcional a la massa final del combustible menys la inicial. Aquest valor serà < 0.

També sabem que la variació de velocitat del coet depèn directament de la velocitat d'aquest, de manera que: $\frac{dv_c}{dt} \propto v_c$.

1.7 Model

Per plantejar el model, farem servir la segona llei de Newton: $F = \frac{d(m \cdot v)}{dt}$.

Substituint pels nostres paràmetres, i tenint en compte que les forces externes que actuen sobre el coet són 0, obtenim:

$$F = 0 = \frac{d((M_c+M_{comb}) \cdot v_c)}{dt} = (M_c + M_{comb}) \cdot \frac{dv_c}{dt} + \frac{d(M_c+M_{comb})}{dt} \cdot v_c =$$
$$M_c \frac{dv_c}{dt} + M_{comb} \frac{dv_c}{dt} + \frac{dM_c}{dt} \cdot v_c + \frac{dM_{comb}}{dt} \cdot v_c$$

Sabent que la massa total del coet (infraestructura + satèl·lit) no varia, podem simplificar i quedar-nos amb l'expressió:

$$M_c \frac{dv_c}{dt} + M_{comb} \frac{dv_c}{dt} + \frac{dM_{comb}}{dt} \cdot v_c = 0$$

Com el nostre objectiu és modelitzar la velocitat del coet en funció del temps, ens interessa aïllar $\frac{dv_c}{dt}$. Per tant, ens queda:

$$\frac{dv_c}{dt} \cdot (M_c + M_{comb}) + \frac{dM_{comb}}{dt} \cdot v_c = 0$$
$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{\frac{dM_{comb}}{dt} \cdot v_c}{M_c + M_{comb}}$$
$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{M_c + M_{comb}} \cdot \frac{dM_{comb}}{dt}$$

Observem que el model és directament proporcional a la velocitat v_c i inversament proporcional a la suma de les masses $M_c + M_{comb}$, com s'havia previst anteriorment a la secció de relacions.
Destaca també el fet que la variació de velocitat depèn de la variació de massa del combustible en funció del temps, cosa que també s'havia previst.
D'aquesta manera, el model que s'estudiarà és:

$$\boxed{\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{M_c + M_{comb}} \cdot \frac{dM_{comb}}{dt}}$$

Anàlisis dimensional

Per tal de confirmar que el model proposat té sentit físic, es realitza un anàlisis dimensional tenint en compte les dimensions de cadascun dels elements que conformen el model. D'aquesta manera, cal tenir en compte:

$$\frac{dv_c}{dt} = \left[LT^{-2}\right]$$
$$v_c = \left[LT^{-1}\right]$$
$$M_c = M_{comb} = [M]$$
$$\frac{dM_{comb}}{dt} = \left[MT^{-1}\right]$$

Per tant, el nostre model tindria les dimensions:

$$\left[LT^{-2}\right] = \frac{\left[LT^{-1}\right]}{[M]+[M]} \cdot \left[MT^{-1}\right] = \left[LT^{-1}\right] \cdot \left[M^{-1}\right] \cdot \left[MT^{-1}\right] = \left[LT^{-2}\right]$$

Resolució

Veiem d'aquesta manera que el model és dimensionalment correcte, pel que ja podem passar a resoldre'l.

Per tal de solucionar el model, utilitzem el següent codi de python:

```
import sympy as sp
from sympy.abc import t, V, T
Mc = sp.Symbol('Mc', nonzero=True, positive=True)

Mcomb = sp.Function('Mcomb')(t)
v = sp.Function('v')(t)

xp = sp.diff(v, t)
mp = sp.diff(Mcomb, t)

fx = - (v / (Mc+Mcomb)) * mp

eq = sp.Eq(xp, fx)

ics = {v.subs(t, 0): V}

sol = sp.dsolve(eq, v, ics=ics)
xt = sol.rhs
show(xt)
```

Que ens retorna la següent solució:

$$v_c(t) = V \cdot \frac{M_c + M_{comb}(0)}{M_c + M_{comb}(t)}$$

On V és la velocitat a $t = 0$, $M_{comb}(0)$ és la massa de combustible inicial que portem, M_c és la massa del coet i $M_{comb}(t)$ és la massa del combustible en funció del temps, que estudiarem a continuació.

Modelització de $M_{comb}(t)$

Sabem que la massa del combustible varia segons el temps, decreixent continuament, de manera que la variació serà negativa.

Introduïm un nou paràmetre C, que serà la massa de combustible per unitat de temps, és a dir, tindrà dimensions $\left[MT^{-1}\right]$.

D'aquesta manera, obtenim següent model:

$$\frac{dM_{comb}(t)}{dt} = -C$$

Fent un anàlisis dimensional ràpid observem que les dimensions coincideixen i per tant, el model proposat té sentit físic:

$$\frac{dM_{comb}(t)}{dt} = \left[MT^{-1}\right] = -C = \left[MT^{-1}\right]$$

Resolent, arrivem al següent model:

$$M_{comb}(t) = -C \cdot t + k \longrightarrow M_{comb}(0) = k \longrightarrow M_{comb}(t) = -Ct + M_{comb}(0)$$

Model resultant

$$\boxed{v_c(t) = V \cdot \frac{M_c + M_{comb}(0)}{M_c + M_{comb}(0) - Ct}}$$

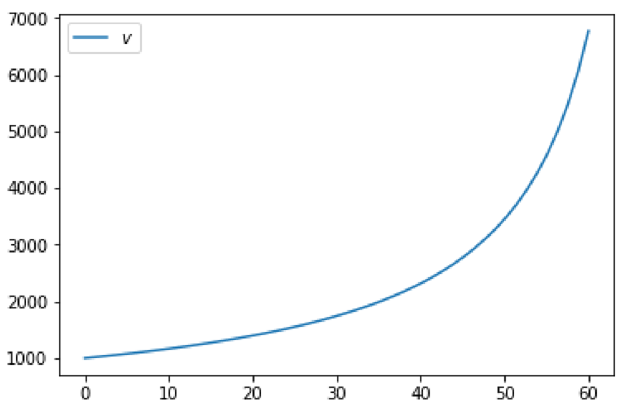
Representació gràfica

Es mostra ara el codi python utilitzat i el gràfic que genera el model creat per uns valors V, C, M_c i $M_{comb}(0)$ qualsevols.

```
from sympy.abc import t, V, C
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
Mc = sp.Symbol('Mc', nonzero=True, positive=True)
m0 = sp.Symbol('m0', nonzero=True, positive=True)


xt = V * ((Mc + m0)/(Mc + m0 - C*t))
valors = {C: 100, V: 1000, Mc: 6700, m0: 340}
fxt = sp.lambdify(t, xt.subs(valors))

temps = np.linspace(0, 60, 50)
con = fxt(temps)
l = plt.plot(temps, con)
plt.legend(["$v$"])
```



Velocitat màxima

Observem a la imatge anterior a la horitzontal el temps i a la vertical el valor de la velocitat. Es veu com la funció és creixent positiva per a tot $t > 0$, degut a que cada cop tindrà menys massa, pel que podem deduïr que el coet anirà augmentant de velocitat indefinidament mentre no se li acabi el combustible.

D'aquesta manera es dedueix que la velocitat serà màxima per a $t \to \infty$.

Observem que, per a $t \to \infty$, la variació en la massa del combustible serà negligible, ja que serà molt proper a 0, de manera que la velocitat màxima serà a $v_c(t) = V \cdot \frac{M_c + M_{comb}(0)}{M_c}$.

1.8 Crítica del model

Un cop acabat el model, cal tenir en compte els diversos fenòmens:

- Té sentit físic i es comporta com caldria esperar, pel que és un bon primer model per atacar el problema plantejat.
- És un model molt simplificat d'una situació molt complexe, pel que, si tinguéssim dades per contrastar, segurament donarien valors diferents als que prediu el nostre model. Caldria afegir factors com la variació de la velocitat quan s'acaba el combustible, els factors que intervenen a l'hora del llançament del coet, etc.

2 Exercici 2

Considera que volem posar el satèl·lit en òrbita geoestacionària. Tenint en compte la llei de gravitació de Newton, a quina velocitat ha d'arribar el coet? Podem arribar-hi amb un coet d'una sola fase?

- Considera que l'òrbita geoestacionària té un radi de 42 164 km i que la gravetat ha de compensar la força centrífuga del satèl·lit (m v^2/r).
- La llei de gravitació de Newton diu que la força gravitatòria és F = G M m / r^2 on G és la constant de gravitació, M i m són les masses dels objectes i r la distància entre ells.

Per tal de posar el satèl·lit en òrbita geoestacionària, cal afegir les següents de consideracions al model plantejat anteriorment:

2.1 Context

– Una òrbita geoestacionària és aquella en la que el satèl·lit es mourà en sincronia amb el gir de la Terra.

– La velocitat a la que ha d'arribar el coet és la velocitat que li permeti moure's en sincronia amb la Terra.

– L'òrbita geoestacionària té un radi de 42164km.

– La força centrífuga del satèl·lit és $\frac{mv^2}{r}$.

– La llei de gravitació és F = $\frac{GMm}{r^2}$.

– El coet és d'una sola fase.

– Es necessitarà una certa velocitat per arribar a la posició de la òrbita.

– Es necessitarà una altre velocitat per mantenir-se en òrbita.

2.2 Objectiu

Trobar la velocitat a la que ha d'arribar el coet per tal que segueixi una òrbita estacionària.

2.3 Precisió

Es busca una precisió de $\pm 10^{-1}$ degut a que a l'hora de treballar amb valors tant grans es poden cometre bastants errors d'aproximació.

2.4 Paràmetres

- Massa del coet amb el satèl·lit: m, amb dimensió M i unitats de kg.
- Massa de la terra: M, amb dimensió M i unitats de kg.
- Distància entre la terra i el satèl·lit: r, amb dimensió L i unitats de m.
- Constant de gravitació: G, amb dimensió $Newton \cdot L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$ i unitats de $\frac{Nm^2}{kg^2}$.

3 Assumpcions

- Els factors climatològics són negligibles.
- El coet no toparà cap obstacle de camí a l'òrbita.
- El coet seguirà la trajectòria més curta fins a l'òrbita, és a dir, línia recta enlloc de desviar-se.
- La resistència de l'aire és negligible.

4 Model

Volem modelitzar, com a l'exercici 1, la velocitat del coet en funció del temps, però aquest cop tenim una força gravitatòria i una força centrípeta.
Com sabem que la força gravitatòria contrarresta la centrípeta, sabem que:

$$F_g - F_c = 0 \longrightarrow F_g = F_c \longrightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Com el coet s'ha llençat des de la Terra a l'espai, sabem que tant la velocitat com la distància recorreguda fins l'òrbita depenen del temps. D'aquesta manera, obtenim la igualtat:

$$\frac{GMm}{r(t)^2} = \frac{mv(t)^2}{r(t)}$$

Usant que la velocitat és la derivada de la posició, trobem el següent model:

$$\frac{GM}{r(t)} = v(t)^2 \longrightarrow \frac{GM}{r(t)} = (\frac{dr}{dt})^2 \longrightarrow \sqrt{\frac{GM}{r(t)}} = \frac{dr}{dt} \longrightarrow \sqrt{GM}dt = \sqrt{r}dr$$

Solucionant, obtenim:

$$\sqrt{GM}t = \frac{2}{3}\sqrt[2]{r(t)^3} \longrightarrow \sqrt[2]{r(t)^3} = \frac{3\sqrt{GM}t}{2} \longrightarrow r(t)^3 = \frac{9GMt^2}{4} \longrightarrow r(t) = \sqrt[3]{\frac{9GMt^2}{4}}$$

Com sabem que la velocitat és la derivada de la posició, per tal d'obtenir $v(t)$, simplement derivem la funció r(t) obtinguda, de manera que obtenim:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d(\sqrt[3]{\frac{9GMt^2}{4}})}{dt} = \sqrt[3]{\frac{9GM}{4}} \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{t}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 9GM}{4 \cdot 81t}} = \sqrt[3]{\frac{2GM}{3t}}$$

És a dir:

$$\boxed{v(t) = \sqrt[3]{\frac{2GM}{3t}}}$$

També s'ha trobat durant l'estudi la següent relació que dona la velocitat que haurà de tenir el satèl·lit per mantenir-se orbitant:

$$\boxed{v(t) = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

4.1 Anàlisis dimensional

Per tal de veure i confirmar que el model tingui sentit físic, es realitza un anàlisis dimensional d'aquest, per corroborar que realment proporcioni el que s'espera.

$$v(t) = \sqrt[3]{\frac{2GM}{3t}}$$
$$\left[LT^{-1}\right] = \sqrt[3]{\left[L^3M^{-1}T^{-2}\right]\left[M\right]\left[T^{-1}\right]} = \sqrt[3]{\left[L^3T^{-3}\right]} = \left[LT^{-1}\right]$$

Confirmem així que el model plantejat té sentit físic.

4.2 Anàlisis Crític

El model per la velocitat presentat en aquesta secció s'apropa més a la realitat que el model proposat a l'Exercici 1, degut a que aquest cop es tenen en compte factors aliens al coet, així com forces externes que actuen sobre ell. En aquest cas concret, s'han tingut en compte tant la força centrípeta com la gravitacional, que actuaran sobre el satèl·lit quan estigui orbitant.

Tot i haver tingut en compte més factors que a l'exercici anterior, segueix sent un model molt simple, i per poder modelitzar la velocitat del cohet en funció del temps hauríem de tenir en compte efectes del clima, possibles desviaments, etc.

4.3 Resolució de les qüestions

Quina velocitat cal per posar en òrbita?

Per contestar la qüestió, es farà servir la relació trobada anteriorment, $v(t) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, que permet saber la velocitat que ha de tenir qualsevol objecte per mantenir-se en òrbita a una distància r. D'aquesta manera, calculem:

$$v(t) = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{42164000}} = 3.073 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

Comparant el resultat amb dades buscades per internet, observem que la relació trobada dona una velocitat que entra dins la precissió que buscàvem, ja que les dades reals trobades indiques que hauria de tenir una velocitat de $3.08\frac{m}{s}$, molt semblant al resultat donat.

Es pot arribar amb un coet d'una sola fase?

Per tal de poder contestar la pregunta cal saber quant combustible es necessita per tal d'arribar a posar el satèl·lit en òrbita. Per fer-ho, usarem primer el model proposat en aquest exercici per trobar el temps que es triga fins arribar a l'òrbita, i es proseguirà amb la utilització del model plantejat a l'exercici 1 per tal de trobar la quantitat de combustible necessària.

Temps que es triga:

$$v(t) = \sqrt[3]{\frac{2GM}{3t}} \longrightarrow t = \frac{2GM}{3 \cdot v(t)^3} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{3 \cdot (3.073 \cdot 10^3)^3} = 9.147 \cdot 10^3 s$$

Observem que, passant el temps a hores, triga entre dues i tres hores, pel que sembla ser un resultat amb certa lògica.

Usem ara el valor trobat, juntament per tal de saber la quantitat de combustible necessària per arribar fins a l'òrbita:

$$v_c(t) = V \cdot \frac{M_c + M_{comb}(0)}{M_c + M_{comb}(0) - Ct}$$

Sabem per l'estudi d'aquesta equació, que la quantitat de combustible inicial, $M_{comb}(0)$ ha de ser major o igual al combustible consumit en el trajecte, Ct. Sent C una constant que depen de cada tipus de motor de coet, indica la quantitat de combustible per segon que es consumeix. Sabem també, que per poder arribar a posar el satèl·lit en òrbita, es estarem un total de $9.147 \cdot 10^3 s$ consumint combustible.

Deduïm d'aquesta manera, que per tal de poder posar el satèl·lit en òrbita, la quantitat de combustible inicial ha de ser igual o major a Ct, és a dir:

$$M_{comb}(0) \geq 9.147 \cdot 10^3 C$$

En cas que al dipòsit no hi càpica la quantitat de combustible necessària, s'hauria d'utilitzar un altre tipus de coet.

5 Exercici 3

El departament de territori i sostenibilitat està estudiant les quotes de caça del porc senglar per controlar la població al Pirineu. Sabem que si la població supera una població M no tindrà prou recursos per sobreviure i si cau per sota d'una població m es podria extingir.

- Fes una anàlisi crític del següent model i estudia els punts d'equilibri dP/dt = r P (M – P)(P - m).
- Com es comporta per a P $>$ M? I per a P $<$ M?
- Quants permisos de caça es poden donar per mantenir una població estable?

Abans de començar a respondre les preguntes, es farà un estudi sobre com s'ha arribat al model donat per l'enunciat, per tal de fer l'anàlisi crític.

5.1 Context

– S'estudia la població de porcs senglars a la zona del Pirineu.

– S'està estudiant el nombre de llicències a donar per tal que no s'extingeixi.

– Cal donar llicències de caça per controlar que la població no augmenti de forma indefinida.

– Si la població supera M, s'extingirà.

– Si la població és menor a m, s'extingirà.

5.2 Assumpcions

– El nombre de llicències de caça a donar ha de ser major a 0.

– Els porcs senglars només poden morir a mans dels caçadors, no es tenen en compte altres factors.

– La població pot arribar a assolir una població M.

5.3 Objectiu

Modelitzar la variació de la població de porcs senglars.

5.4 Paràmetres

- Població de porcs senglars: P
- Màxim al que pot arribar: M
- Mínim al que pot arribar: m
- Taxa de reproducció per unitat de temps: r

5.5 Relacions

- La variació en la població de porcs senglars ha de ser proporcional a la taxa de reproducció per la pròpia població, ja que representa els nous naixements: $\frac{dP}{dt} \propto rP$.
- La variació de la població és proporcional a la població que "falta" fins assolir el màxim possible: $\frac{dP}{dt} \propto (M - P)$.
- La variació de la població és proporcional a la població que "falta" fins assolir el mínim possible: $\frac{dP}{dt} \propto (P - m)$.

5.5.1 Anàlisis crítica

A partir de la informació recopilada fins ara, es crea el primer model donat per l'enunciat:

$$\frac{dP}{dt} = rP(M - P)(P - m).$$

Per confirmar que el model és dimensionalment correcte, es realitza el següent anàlisis dimensional:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dP}{dt} = [Poblacio]\left[T^{-1}\right] \\ r = \left[T^{-1}\right] \\ P = [Poblacio] \\ M = [Poblacio] \\ m = [Poblacio] \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{c} (M - P) = [Poblacio] \\ (P - m) = [Poblacio] \end{array}\right\}$$

$$rP(M - P)(P - m) = \left[T^{-1}\right][Poblacio]^3 \neq \frac{dP}{dt} = [Poblacio]\left[T^{-1}\right]$$

Observem d'aquesta manera que l'anàlisis dimensional mostra que el model no és correcte, ja que faltaria introduïr un nou paràmetre amb unitats de $[Poblacio]^{-2}$ al model proposat per tal que les dimensions als dos costats de la igualtat concidissin.

El model plantejat té certes liminations, i si es disposés de dades per contrastar, segurament es veuria que no dona uns resultats molt precissos, ja que obvia molts factors que afecten a les poblacions de porcs senglars (i altres espècies) al dia a dia, com podria ser la propagació de malalties, competitivitat entre espècies, o morts degudes a altres factors a part de les llicències de caça.

Per seguir amb l'anàlisis cal tenir en compte que la situació plantejada està acotada per $P \geq 0$.

Estudiem els punts d'equilibri del model, és a dir, els valors pels quals la població s'estabilitzaria. Aquests són els valors que fan que $\frac{dP}{dt} = 0$. Trobem així:

$$\mathrm{P} = \mathrm{M}; \quad \mathrm{P} = \mathrm{m}; \quad \mathrm{P} = 0$$

D'aquesta manera podem dividir la regió dels possibles valors de P en tres parts (tenint en compte $P \geq 0$). Distingim i estudiem els següents casos:

1. $P > M$: La població de porcs senglars tendeix a decrèixer fins arribar a $P = M$. Això pot ser degut a la falta de recursos per sobreviure, de manera que anirien morint fins que quedés viu un nombre que pogués viure amb els recursos que hi ha.

2. $P = M$: La població es manté estable.

3. $m < P < M$: La població tendeix a crèixer fins a estabilitzar-se al valor $P = M$.

4. $P = m$: La població es troba en un punt d'equilibri inestable, de manera que si hi hagués algun canvi tendiria o a crèixer fins a tenir $P = M$, o, si morís un porc senglar més, és a dir, tinguéssim $m - 1$ porcs senglars, s'extingirien.

5. $0 < P < m$: La població tendeix a decrèixer fins la seva extinció.

Només queda saber quants permisos de caça es poden donar per mantenir una població estable.

Sabem que si la població és menor a m s'extingirà, de manera que la caça en el cas en que $P \leq m$ ha d'estar totalment prohibida, sent el nombre de llicències a donar 0.

Per altre banda, si la població, P es troba entre m i M, ella mateixa tendeix a un equilibri estable, pel que no cal otorgar cap tipus de llicència per mantenir l'equilibri. En aquest cas el nombre de llicències a donar també ha de ser 0, ja que si es cacéssin porcs senglars només es retardaria el procés d'arribada a l'equilibri.

Per últim, si la població és major a M, es poden donar les llicències necessàries per matar prous porcs senglars fins tenir una població amb nombre d'individus igual a M, tot i així, no seria necessària donar cap llicència de caça, ja que la població tendiria a estabilitzar-se per si sola, el fet de donar llicències només acceleraria aquest procés.