Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat de Ciències

Entrega 5

Autora:

Ona Sánchez Núñez

1601181

22 de Març del 2023

Índex

1 Coeficient de fricció

- Volem fer saber el coeficient de fricció sense haver de mesurar la caiguda de pressió.
- Necessitem una precisió de l' 5% amb un 99% de nivell de confiança.
- Per validar el model mesurem el coeficient de fricció indirectament amb mesures de pressió i flux.
  - El manòmetre té una resolució de 10 Pa.
  - El flowmeter té una resolució de 10 ml/s.
  - Els paràmetres tabulats els coneixem amb una precisió d' 1/1000.
- Quina és la discrepància del model?

1.1 Context

- Tenim un fluït que passa a través d'una canonada.
- El fluït exerceix una certa pressió a la canonada, que va disminuint.
- El fluït passa amb un cert flux per la canonada.
- Tenim un manòmetre amb resolució de 10 Pa.
- Tenim un flowmeter amb resolució de 10 ml/s.
- Els paràmetres tabulats tenen una precissió del 0.1%.

1.2 Assumpcions

- El fluït té una densitat homogenia.
- Les condicions de temperatura i pressió fora de la canonada no afecten al coeficient de fricció, és a dir, es tracta d'un sistema aïllat.
- El fluït té una certa viscositat.
- El fluït ocupa tot el volum interior de la canonada, no es té en compte el possible aire que contingui.
- Tota la canonada està construïda amb un mateix material.

1.3 Objectiu

Obtenir el coeficient de fricció sense haver de mesurar la caiguda de pressió, validar el model i fer un anàlisi de discrepància d'aquest.

1.4 Paràmetres

- Pressió: P, amb dimensions de $\left[ML^{-1}T^{-2}\right]$ (només pel model amb el que es validarà).
- Llargada de la canonada: L, amb dimensions de $[L]$.
- Densitat del fluït: ρ, amb dimensions de $\left[ML^{-3}\right]$.
- Flux del fluït: Q, amb dimensions de $\left[L^3T^{-1}\right]$.
- Viscositat: μ, amb dimensions de $\left[T^{-1}M\right]$.
- Nombre de Reynolds: Re, adimensional.
- Rugositat: E, amb dimensions de $[L]$.
- Diàmetre: d, amb dimensions de $[L]$.
- Coeficient de fricció: f, adimensional.

1.5 Relacions

Mitjançant un estudi que es pot consultar a Exemple_04: Caiguda de pressió, sabem que existeixen les següents relacions:

$$\triangle P = \frac{8LQ^2f\rho}{\pi^2d^5}$$

$$f = \frac{0.30864}{log(0.23404(\frac{E}{d})^{1.11}+\frac{6.9}{Re})^2}$$

$$Re = \frac{4Q\rho}{\pi d\mu}$$

Tenint en compte les dades de les que disposem, usarem la primera relació, $\triangle P$, per tal de calcular f a partir de la informació de pressió i flux obtingudes i tenir una aproximació suficientment bona com per poder validar el model que es construirà a continuació.

1.6 Model

El model del que disposem per calcular f és, substituïnt el paràmetre Re per $\frac{4Q\rho}{\pi d\mu}$, el següent:

$$f = \frac{0.309}{log(0.234(\frac{E}{d})^{1.11} + \frac{1.725\pi d\mu}{Q\rho})^2}$$

Observem que el model no depèn de la caiguda de pressió, tal com es volia aconseguir, sinó que usa paràmatres que han sigut mesurats anteriorment i del flux, del qual tenim les dades al fitxer *.csv* adjuntat a la pràctica.

Per tal de verificar i validar el model, es compararan els resultats amb mostrat anteriorment:

$$f = \frac{\pi^2 Pd^5}{8LQ^2\rho}$$

Que usa tant les dades del flux com la caiguda de pressió per calcular f.

A l'apartat 2.1 es pot trobar el codi utilitzat per declarar els models.

1.7 Anàlisis dimensional

Inicialitzem l'estudi comprovant que el model $f = \frac{\pi^2 Pd^5}{8LQ^2\rho}$ tingui la dimensionalitat correcte:

$$\left.\begin{aligned} f &= [1] \\ P &= \left[ML^{-1}T^{-2}\right] \\ d &= [L] \\ L &= [L] \\ Q &= \left[L^3T^{-1}\right] \\ \rho &= \left[ML^{-3}\right] \end{aligned}\right\} \implies [1] = \frac{\left[ML^{-1}T^{-2}\right][L]^5}{[L]\left[L^3T^{-1}\right]^2\left[ML^{-3}\right]} \implies [1] = [1] \tag{1}$$

Per tant, el model és dimensionalment correcte.

Seguim l'estudi mitjançant la comprovació de la dimensionalitat del model $f = \frac{0.309}{log(0.234(\frac{E}{d})^{1.11} + \frac{1.725\pi d\mu}{Q\rho})^2}$. Sabent que f $=$ [1] i que la dimensionalitat del logaritme és [1], es dedueix de forma directa que la dimensionalitat del model és correcte.

1.8 Simulació

Simulació amb caiguda de pressió

Per tal de dur a terme la verificació i validació del model, cal trobar la discrepància entre els valors donats pel model i els valor reals o, en aquest cas, una aproximació calculada a partir del flux i la caiguda de pressió. Mitjançant una representació gràfica en forma d'histograma, obtenim el següent gràfic:

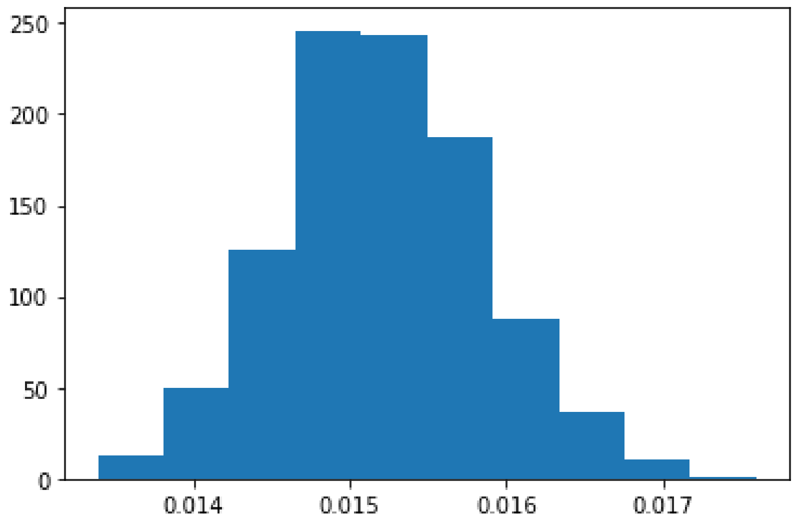

Figura 1: El codi que genera la figura es troba a 2.2

Obtenim a partir del gràfic els següents valors:

- Valor mitjà: 0.0152
- Desviació estàndar: 0.0006

Simulació sense caiguda de pressió

Usem ara el model que es vol verificar per tal de trobar el valor f únicament amb l'ús dels paràmetres mesurats i les dades reals del flux.

Obtenim a partir del gràfic els següents valors:

- Valor mitjà: 0.0156
- Desviació estàndar: $8.8900 \cdot 10^{-7}$

Mitjançant una comparació ràpida dels models veiem que els dos obtenen valors mitjans molt similars, el primer de 0.015 i el segon de 0.016, arrodonint al tercer decimal, pel que sembla ser que el model és una bona aproximació de la realitat. Fixant-nos en les distribucions dels models, els

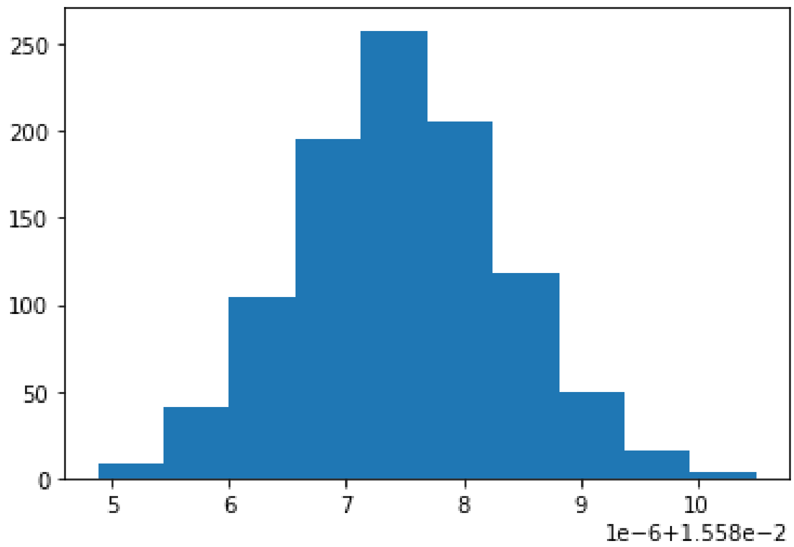

Figura 2: El codi que genera la figura es troba a 2.3

dos semblen tenir una distribució normal, sent el valor més elevat proper a 250 en ambdos casos. Si observem amb més detall, però, veiem que les desviacions típiques són molt diferents, ja que pel model que usa la caiguda de pressió, és de l'ordre de 10^{-4}, mentre que pel model que no usa la caiguda de pressió és de l'ordre de 10^{-7}. D'aquesta manera, deduïm que els valors per f trobats mitjançant les dades de pressió tenen més variació, mentre que el model que es vol verificar dona valors molt propers a la mitjana.

Discrepància

Es decideix prosseguir l'estudi amb el càlcul de la discrepància entre els models i la pertinent representació:

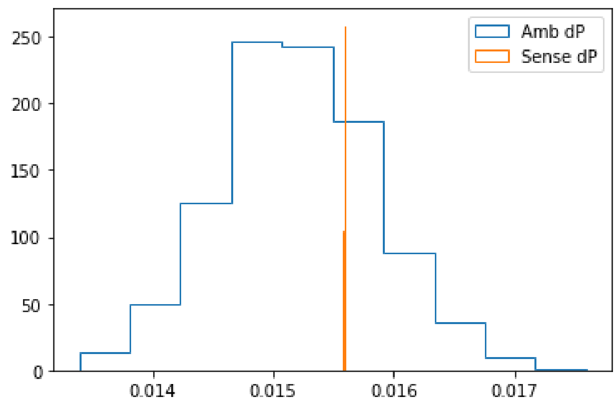

Figura 3: El codi que genera la figura es troba a 2.4

El valor de la discrepància és de 0.0004.

Destacar de la representació la gran diferència de magnituds entre els models degut a les diferències pel que fa a la desviació estàndar, tot i que degut a que la mitjana dels models és molt propera, el valor de la discrepància és de l'ordre de 10^{-4}, per lo que el model sembla adaptar-se correctament a la realitat.

1.9 Incerteses

Per tal de verificar que el model aproxima f amb una precissió suficient pel problema plantejat. Es realitza un estudi de la incertesa de l'estimació de la discrepància del model. L'estudi s'ha realitzat mitjançant un codi en *python* que es pot consultar a l'apartat 2.5, a partir del qual s'han obtingut els següents valors:

- Incertesa dels paràmetres al quadrat: $1.8835 \cdot 10^{-10}$
- Incertesa de l'estimació de la discrepància: 0.0006
- Discrepància $= 0.0004 \pm 0.0006$.

Observem d'aquesta manera que la discrepància entre els dos models és de l'ordre de 10^{-4}, pel que confirmem que no cal usar la caiguda de pressió per calcular de forma precisa el coeficient de fricció, és a dir, f.

Aprofundim en l'estudi del model mitjançant un càlcul de l'error del model. Usant un codi python que es pot consultar a 2.6 obtenim que l'error relatiu del model és 0.0242, això vol dir que l'error del model és d'un 2.4%.

Per finalitzar l'estudi, busquem el nivell de confiança que obtenim per tal de tenir un error del 5%, utilitzant el codi exposat a 2.7, i obtenim un nivell de confiança del 96.11%.

1.10 Anàlisi crítica

A partir de les dades recopilades i analitzades als apartats anteriors, es conclou que el model usat per tal de calcular f sense usar la caiguda de pressió és lo suficientment bo i precís com per utilitzar-se en casos pràctics enlloc de l'altre.

Tot i així, cal destacar que els resultats del model s'han comparat amb aproximacions de f calculades mitjançant un altre model, però no són dades extretes directament de la realitat, pel que la discrepància entre el model i la realitat podria ser major de la que mostren els models entre ells.

Cal tenir en compte també que tot l'estudi s'ha realitzat sobre models que simplifiquen la realitat i que, per tal de tenir resultats amb una precissió major, s'haurien de considerar més paràmetres per tal de representar de forma més concreta el problema.

2 Codis

2.1 Declaració models

Per trobar el model que usa la caiguda de pressió s'ha fet servir el següent codi:

```
from sympy.abc import rho, epsilon, mu, Q, L, d, f
P = sp.symbols('P')

tururu = sp.Eq(P, f * 8 * rho * Q**2 * L / (sp.pi**2 * d**5))
F = sp.solve(tururu, f)
show('f = ', F)
```

També s'ha declarat el model a comparar i les relacions mitjançant el següent fragment:

```
from sympy.abc import rho, epsilon, mu, Q, L, d, f
Re = sp.symbols('Re')

DP = f * 8 * rho * Q**2 * L / (sp.pi**2 * d**5)
show('\Delta P = ', DP)

f = 1 / (-1.8 * sp.log(6.9 / Re + (epsilon/d/3.7)**1.11))**2
show('f = ', f)

Re = 4 * Q * rho / (sp.pi * mu * d)
show('Re =', Re)
```

Per últim, el model a validar s'ha trobat mitjançant:

```
Re = 4 * Q * rho / (sp.pi * mu * d)
f = 1 / (-1.8 * sp.log(6.9 / Re + (epsilon/d/3.7)**1.11))**2
show('f = ', f)
```

2.2 Simulació amb caiguda de pressió

```
valors = {rho: 1000, epsilon: 0.01, mu: 1.2E-3, L: 1000, d: 0.15}
show('F = ', F.subs(valors))

fF = sp.lambdify([Q, P], F.subs(valors))
q = data['Flow (l/s)'] / 1000
p = data['\Delta P (Pa)']
dp = fF(q,p)

l = plt.hist(dp)
print(np.mean(dp), np.std(dp))
```

2.3 Simulació sense caiguda de pressió

```
valors = {rho: 1000, epsilon: 0.01, mu: 1.2E-3, L: 1000, d: 0.15}
show('f = ', f.subs(valors))

ff = sp.lambdify(Q,f.subs(valors))
q = data['Flow (l/s)'] / 1000
dp2 = ff(q)

l = plt.hist(dp2)
print(np.mean(dp2), np.std(dp2))
```

2.4 Discrepància

```
# DISCREPÀNCIA
# S --> calculada per nosaltres
# D --> la del model (la bona)
S = np.mean(dp2)
D = np.mean(dp)
E = S - D
print(E)

l = plt.hist(dp, histtype='step')
l = plt.hist(dp2, histtype='step')
l = plt.legend(['Amb dP', 'Sense dP'])
```

2.5 Incertesa de la discrepància

```
### INCERTESES
Re = 4 * Q * rho / (sp.pi * mu * d)
f = 1 / (-1.8 * sp.log(6.9 / Re + (epsilon/d/3.7)**1.11))**2

# Derivades parcials
mesures = {Q: q.mean()}
valors = {rho: 1000, epsilon: 0.01, mu: 1.2E-3, L: 1000, d: 0.15}
DE = sp.diff(f, epsilon).subs(valors).subs(mesures).n()
Dd = sp.diff(f, d).subs(valors).subs(mesures).n()
Dm = sp.diff(f, mu).subs(valors).subs(mesures).n()
DQ = sp.diff(f, Q).subs(valors).subs(mesures).n()
Dr = sp.diff(f, rho).subs(valors).subs(mesures).n()
show(DE, qq, Dd, qq, Dm, qq, DQ, qq, Dr, qq)
```

```
# Incertesa dels paràmetres al quadrat
up2 = np.sum(np.power([
    DE * valors[epsilon] * 0.001,
    DQ * q.std(),
    Dm * valors[mu] * 0.001,
    Dd * valors[d] * 0.001,
    Dr * valors[rho] * 0.001,
], 2))
up2

# Incertesa de l'estimació de la discrepància
#uD = data.std()['\Delta P (Pa)']
uD = np.std(dp) # dp és el model amb caiguda --> amb el k comparem
uV = np.sqrt(float(uD**2 + up2))
uV

# Discrepància
show("E = %0.4f \pm %0.4f" % (E, uV))
```

2.6 Error relatiu model

```
# Error relatiu del model
ur = E/S
ur
```

2.7 Nivell de confiança per un 5%

```
# Nivell de confiança per un error del 5%
t = 0.05 / ur
l, h = stats.t.cdf([-t, t], 1000)
CL = h - l
CL
```