

Universitat Autònoma de Barcelona  
Facultat de Ciències

LLIURAMENT EQUIP 5

*Autors:*

Gerard Lahuerta 1601350

Ona Sánchez 1601181

Pau Ventura 1601350

11 de Juny del 2021

# Índex

<b>1 Exercici 1</b>	<b>4</b>
1.1 Enunciat . . . . .	4
1.2 Procediment . . . . .	5
1.3 Solució . . . . .	5
<b>2 Exercici 2</b>	<b>6</b>
2.1 Enunciat . . . . .	6
2.2 Procediment . . . . .	7
2.2.1 Calculem l'àrea definida sobre $\Omega_1$ . . . . .	7
2.2.2 Calculem l'àrea definida sobre $\Omega_2$ . . . . .	8
2.3 Solució . . . . .	9
<b>3 Exercici 3</b>	<b>10</b>
3.1 Enunciat . . . . .	10
3.2 Procediment . . . . .	10
3.2.1 Busquem els punts crítics . . . . .	10
3.2.2 Calculem la matriu Hessiana . . . . .	11
3.2.3 Avaluem la matriu Hessiana en els punts crítics i calculem el determinant . . . . .	11
3.3 Solució . . . . .	11
<b>4 Exercici 4</b>	<b>12</b>
4.1 Enunciat . . . . .	12
4.2 Procediment . . . . .	12
4.2.1 L'interior del conjunt . . . . .	13
4.2.2 La frontera del conjunt . . . . .	13

4.2.3	Els punts de conjunció de la frontera. . . . .	14
4.3	Solució . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Exercici 5</b>	<b>16</b>
5.1	Enunciat . . . . .	16
5.2	Procediment . . . . .	16
5.3	Solució . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Exercici 6</b>	<b>18</b>
6.1	Enunciat . . . . .	18
6.2	Procediment . . . . .	18
6.3	Solució . . . . .	19
<b>7</b>	<b>Exercici 7</b>	<b>20</b>
7.1	Enunciat . . . . .	20
7.2	Procediment . . . . .	20
7.3	Solució . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Exercici 8</b>	<b>23</b>
8.1	Enunciat . . . . .	23
8.2	Procediment . . . . .	23
8.3	Solució . . . . .	24
<b>9</b>	<b>Exercici 9</b>	<b>25</b>
9.1	Enunciat . . . . .	25
9.2	Procediment . . . . .	25
9.3	Solució . . . . .	26
<b>10</b>	<b>Exercici 10</b>	<b>27</b>
10.1	Enunciat . . . . .	27
10.2	Procediment . . . . .	27
10.3	Solució . . . . .	28

# Capítol 1

## Exercici 1

### 1.1 Enunciat

Trobar el polinomi de grau 3 associat a una funció  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que compleix les igualtats següents:

- $f(-5, 3) = -24$
- $f(0, 2) = 17$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 4$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(-2, 3) = 2$
- $D_{(0, -1)}f(2, 2) = -12$
- $D_{(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})}f(-3, 0) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$
- $D_{(0, 1)}f(3, 6) = 22$
- $D_{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}f(-4, 0) = \frac{-80}{\sqrt{2}}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 0) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -7$
- $D_{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}f(-2, 0) = 0$

## 1.2 Procediment

Vam utilitzar el sagemath per a interpolar el polinomi imposant totes les restriccions que ens donava l'enunciat, creant una matriu ( $A$ ) amb els coeficients de les incògnites, i un vector ( $b$ ) amb les solucions de les equacions.

Al final vam tenir que resoldre un sistema de la forma:

$$Ax = b$$

On  $x$  són els coeficients, és a dir, les incògnites.

## 1.3 Solució

$$f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5$$

# Capítol 2

## Exercici 2

### 2.1 Enunciat

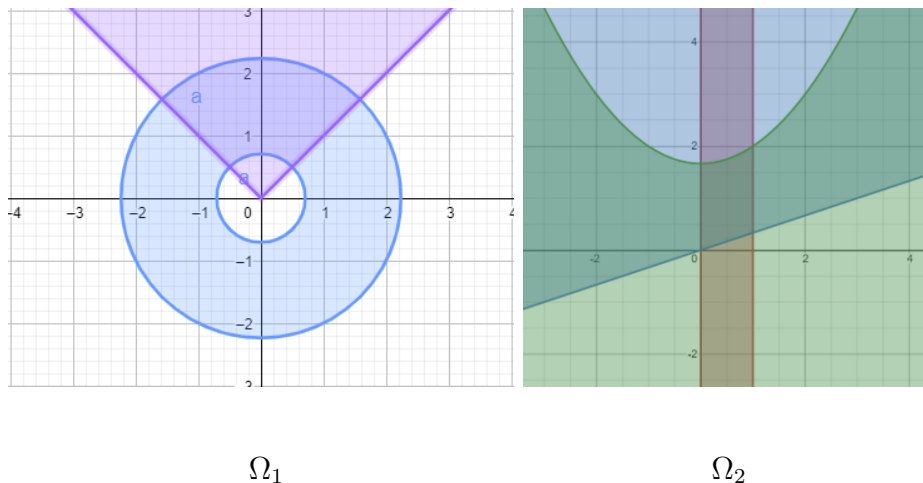
Considerem les regions planes següents:

$$\Omega_1 = (x, y) : \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 5, y \geq |x|$$

$$\Omega_2 = (x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq 3y \leq (x^2 + 5), 0 \leq x \leq 1$$

Calculeu la integral de la vostra funció sobre cadascuna d'aquestes regions. Per a la integral sobre la segona regió, calculeu la integral en els dos possibles ordres d'integració i comproveu que obteniu el mateix resultat.

## 2.2 Procediment



### 2.2.1 Calculem l'àrea definida sobre $\Omega_1$

Volem trobar:

$$\int \int_{\Omega_1} f(x, y) \, dxdy = \int \int_{\Omega_1} x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5 \, dxdy$$

Com que és un cercle, ens interessa fer el canvi a coordenades polars:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Amb  $J\phi = r$

Així doncs:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{5}} r((r\cos(\theta))^3 + 5(r\cos(\theta))^2 + 2r\cos(\theta)r\sin(\theta) + (r\sin(\theta))^2 + 4(r\cos(\theta)) + 4(r\sin(\theta)) + 5) dr d\theta =$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left( 297 \cdot \sqrt{2^5} \cdot \sin^2 x + 297 \cdot \sqrt{2^7} \cdot \cos x + (\sqrt{2^2 \cdot 1 \cdot 5^3} - 512) \sin x + (\sqrt{2^1 \cdot 3 \cdot 5^3} - 32) \cos^3 x + 1485 \cdot \sqrt{2^5} \cos^2 x + (\sqrt{2^1 \cdot 7 \cdot 5^3} - 128) \cos x + \frac{135}{3} \right) d\theta =$$

$$= 169.12947 \Rightarrow \boxed{\int \int_{\Omega_1} f(x, y) dxdy \approx 169.12947u^2}$$

### 2.2.2 Calculem l'àrea definida sobre $\Omega_2$

Volem trobar:

$$\int \int_{\Omega_2} f(x, y) \, dx dy = \int \int_{\Omega_2} x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5 \, dx dy$$

#### Primer ordre

Definint els límits d'integració:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{\frac{x}{3}}^{\frac{x^2+5}{3}} x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5 \, dy dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^6 + 36x^5 + 141x^4 + 188x^3 + 939x^2 + 630x + 1250}{81} dx = \\ &= \left[ \frac{x(5x^6 + 210x^5 + 987x^4 + 1645x^3 + 10955x^2 + 11025x + 43750)}{2835} \right]_0^1 = \\ &= \frac{22859}{945} \approx 24.18u^2 \Rightarrow \boxed{\int \int_{\Omega_2} f(x, y) dx dy \approx 24.18u^2} \end{aligned}$$

#### Segon ordre

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{3y} f(x, y) \, dx dy + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \int_1^0 f(x, y) \, dx dy + \int_{\frac{3}{5}}^2 \int_{\sqrt{3y-5}}^1 f(x, y) \, dx dy$$

Calculem la primera integral:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{3y} f(x, y) \, dx dy = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{3y} x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5 \, dx dy = \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{81y^4 + 228y^3 + 120y^2 + 60y}{4} dy = \left[ \frac{y^2(81y^3 + 285y^2 + 200y + 150)}{20} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{377}{270} \approx 1.39 \end{aligned}$$

Calculem la segona integral:

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \int_1^0 f(x, y) \, dx dy = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \int_1^0 x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5 \, dx dy = \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{12y^2 + 60y + 107}{12} dy = \left[ \frac{y(4y^2 + 30y + 107)}{12} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} = \frac{1627}{81} \approx 20.08 \end{aligned}$$



Calculem la tercera integral:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{5}{3}}^2 \int_{\sqrt{3y-5}}^1 f(x, y) \, dx dy &= \int_{\frac{5}{3}}^2 \int_{\sqrt{3y-5}}^1 x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5 \, dx dy = \\ &= \int_{\frac{5}{3}}^2 -\frac{\sqrt{3y-5}(12y^2 + 108y - 40) + 51y^2 - 138y - 152}{12} dy = \frac{15347}{5670} \approx 2.70\end{aligned}$$

Així doncs, en total:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{3y} f(x, y) \, dx dy + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \int_1^0 f(x, y) \, dx dy + \int_{\frac{3}{5}}^2 \int_{\sqrt{3y-5}}^1 f(x, y) \, dx dy = \\ = 1.39 + 20.08 + 2.7 \approx 24.18 \Rightarrow \boxed{\int \int_{\Omega_2} f(x, y) dx dy \approx 24.18u^2}\end{aligned}$$

## 2.3 Solució

El resultat de la funció definida sobre  $\Omega_1$  és  $756.42u^2$ .

El resultat de la funció definida sobre  $\Omega_2$  és  $24.18u^2$ , i s'ha corroborat mitjançant el càlcul amb diversos mètodes.

# Capítol 3

## Exercici 3

### 3.1 Enunciat

Determineu els extrems relatius de  $f$  i classifiqueu-los.

### 3.2 Procediment

#### 3.2.1 Busquem els punts crítics

Els punts crítics són:

$$\{(a, b) : \nabla f(a, b) = 0\}$$

Calculem el gradient en un punt general:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 10x + 2y + 4, 2x + 2y + 4)$$

Llavors només cal resoldre el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 + 10x + 2y + 4 = 0 \\ 2x + 2y + 4 = 0 \end{array} \right\}$$

On les solucions són:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (0, -2) \\ (x, y) &= \left( \frac{-8}{3}, \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

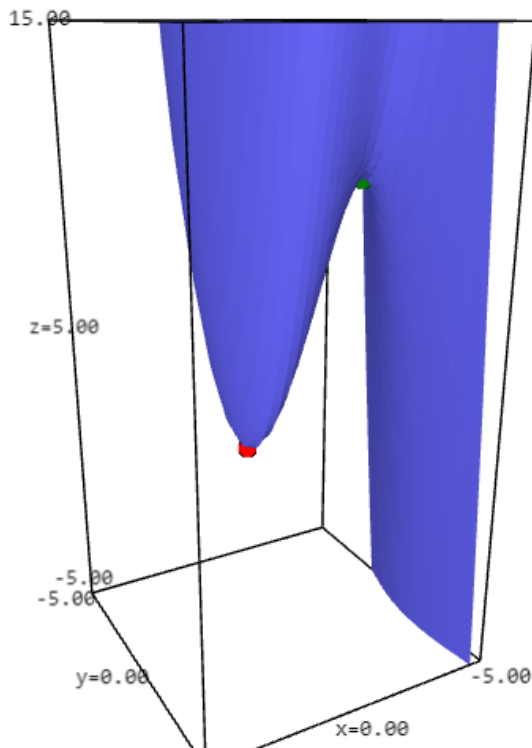
### 3.2.2 Calculem la matriu Hessiana

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

### 3.2.3 Avaluem la matriu Hessiana en els punts crítics i calculem el determinant

$$\left. \begin{array}{l} H(0, -2) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |H(0, -2)| = 16 \\ H\left(\frac{-8}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |H\left(\frac{-8}{3}, \frac{2}{3}\right)| = -16 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{El mínim relatiu és } (0, -2). \\ \text{El punt de sella és } \left(\frac{-8}{3}, \frac{2}{3}\right). \end{array}$$

## 3.3 Solució



Per al punt  $(x, y) = (0, -2)$ , com que el determinant és positiu i el terme  $A_1(10)$  també ho és, el punt es tractarà d'un **mínim** (representat en roig).

Per al punt  $(x, y) = \left(\frac{-8}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , com que el determinant és negatiu, el punt es tractarà d'un **punt de sella** (representat en verd).

# Capítol 4

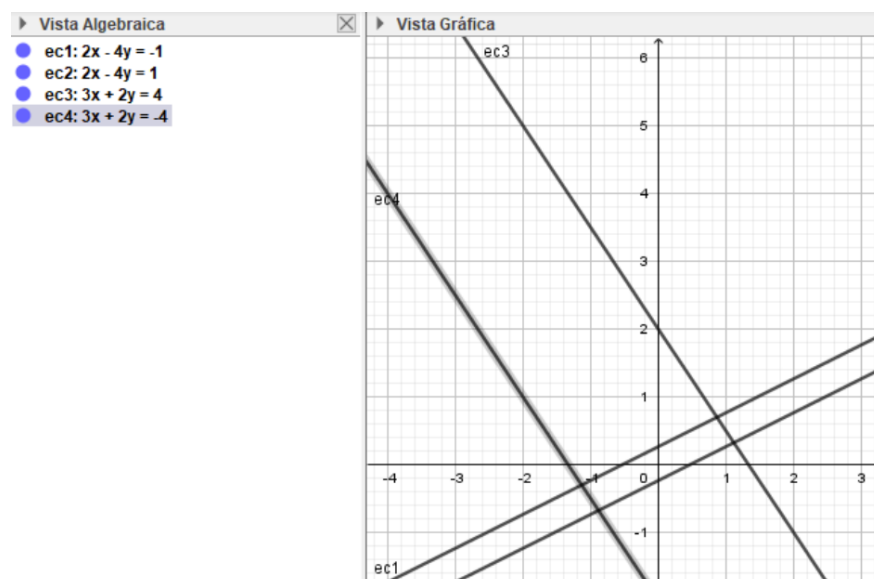
## Exercici 4

### 4.1 Enunciat

Sigui  $K$  el quadrilàter (amb interior) limitat per les rectes  $-4y + 2x = \pm 1$  i  $3x + 2y = \pm 4$ .  
Quin és el valor més gran que pren  $f$  sobre  $K$ ? I el més petit?

### 4.2 Procediment

Fem la representació del quadrilàter:



Al ser un conjunt plè, cal fer l'estudi de:

1. L'interior del conjunt.

2. La frontera del conjunt.
3. Els punts de conjunció de la frontera.

### 4.2.1 L'interior del conjunt

Com hem vist a l'apartat 3, els punts crítics corresponents als extrems relatius de la funció es troben fora del conjunt que estem tractant, així que si hi ha mínims i màxims es trobaran a la frontera.

### 4.2.2 La frontera del conjunt

Per a estudiar la frontera del conjunt estudiarem per separat els punts crítics de les rectes mitjançant el teorema de Multiplicadors de Lagrange.

Així doncs, per a cada recta  $g(x, y)$ , hem de trobar els punts  $(a, b)$  que compleixin:

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

$$g(a, b) = 0$$

Les possibles solucions resultants són:

Recta 1:

$$x = \frac{1}{12}\sqrt{301} - \frac{25}{12} \quad ; \quad y = \frac{1}{24}\sqrt{301} - \frac{19}{24}$$

$$x = \frac{-1}{12}\sqrt{301} - \frac{25}{12} \quad ; \quad y = \frac{-1}{24}\sqrt{301} - \frac{19}{24}$$

Recta 2:

$$x = \frac{1}{12}\sqrt{373} - \frac{25}{12} \quad ; \quad y = \frac{1}{24}\sqrt{373} - \frac{31}{24}$$

$$x = \frac{-1}{12}\sqrt{373} - \frac{25}{12} \quad ; \quad y = \frac{-1}{24}\sqrt{373} - \frac{31}{24}$$

Recta 3:

$$x = \frac{1}{12}\sqrt{481} - \frac{17}{12} \quad ; \quad y = \frac{-1}{8}\sqrt{481} - \frac{33}{8}$$

$$x = \frac{-1}{12}\sqrt{481} - \frac{17}{12} \quad ; \quad y = \frac{1}{8}\sqrt{481} - \frac{33}{8}$$

Recta 4:

$$x = 0 \quad ; \quad y = -2$$

$$x = \frac{-17}{6} \quad ; \quad y = \frac{9}{4}$$

D'aquestes possibles solucions, pertanyen al quadrilàter només:

$$x = \frac{1}{12}\sqrt{301} - \frac{25}{12} \quad ; \quad y = \frac{1}{24}\sqrt{301} - \frac{19}{24}$$

$$x = \frac{1}{12}\sqrt{373} - \frac{25}{12} \quad ; \quad y = \frac{1}{24}\sqrt{373} - \frac{31}{24}$$

Amb imàtges:

$$f\left(\frac{1}{12}\sqrt{301} - \frac{25}{12}, \frac{1}{24}\sqrt{301} - \frac{19}{24}\right) = 4.04$$

$$f\left(\frac{1}{12}\sqrt{373} - \frac{25}{12}, \frac{1}{24}\sqrt{373} - \frac{31}{24}\right) = 2.87$$

Així doncs, podem concloure que el primer punt és el màxim dels punts de la frontera i el segon és el mínim.

### 4.2.3 Els punts de conjunció de la frontera.

Primer cal trobar els punts de la frontera, és a dir, els punts on es tallen les rectes. Aquests punts són:

$$(x, y) = \left(\frac{7}{8}, \frac{11}{16}\right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{-9}{8}, \frac{-5}{16}\right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{9}{8}, \frac{5}{16}\right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{-7}{8}, \frac{-11}{16}\right)$$

On, si els evaluem, ens dona que el màxim d'aquests punts és:

$$(x, y) = \left(\frac{-7}{8}, \frac{-11}{16}\right) \Rightarrow f\left(\frac{-7}{8}, \frac{-11}{16}\right) = 3.58$$

$$(x, y) = \left(\frac{9}{8}, \frac{5}{16}\right) \Rightarrow f\left(\frac{9}{8}, \frac{5}{16}\right) = 19.3$$

On el primer punt és el mínim dels punts i el segon punt és el màxim.

## 4.3 Solució

Comparant tots els punts crítics que hem trobat, podem arribar a la conclusió que el màxim serà:

$$(x, y) = \left(\frac{9}{8}, \frac{5}{16}\right) \Rightarrow f\left(\frac{9}{8}, \frac{5}{16}\right) = 19.3$$

I el mínim serà:

$$(x, y) = \left(\frac{1}{12}\sqrt{373} - \frac{25}{12}, \frac{1}{24}\sqrt{373} - \frac{31}{24}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{12}\sqrt{373} - \frac{25}{12}, \frac{1}{24}\sqrt{373} - \frac{31}{24}\right) = 2.87$$

# Capítol 5

## Exercici 5

### 5.1 Enunciat

Descrivui (si cal, amb ajut d'un ordinador), els conjunts de nivell  $L_0$ ,  $L_5$  i  $L_{-6}$ .

### 5.2 Procediment

Codi *SageMath* per a mostrar el conjunt de nivell  $L_0$ :

```
f(x,y)=x^3+5*x^2+2*x*y+y^2+4*x+4*y+5
a=0
implicit_plot(f(x,y)==a,(x,-10,10),(y,-10,10),fill=False,axes=True)
```

Codi *SageMath* per a mostrar el conjunt de nivell  $L_5$ :

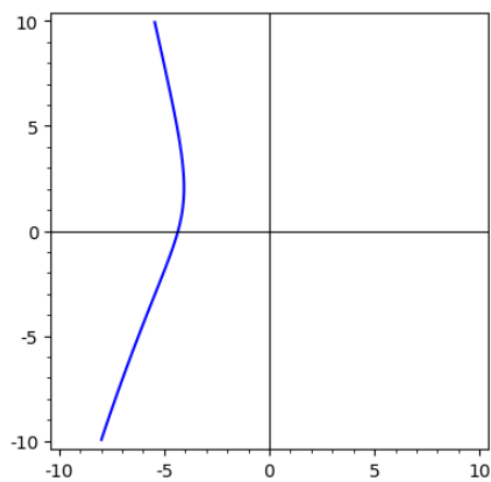
```
b=5
implicit_plot(f(x,y)==b,(x,-10,10),(y,-10,10),fill=False,axes=True)
```

Codi *SageMath* per a mostrar el conjunt de nivell  $L_{-6}$ :

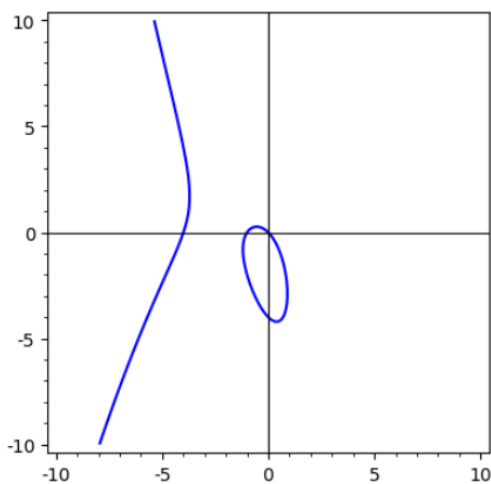
```
c=-6
implicit_plot(f(x,y)==c,(x,-10,10),(y,-10,10),fill=False,axes=True)
```



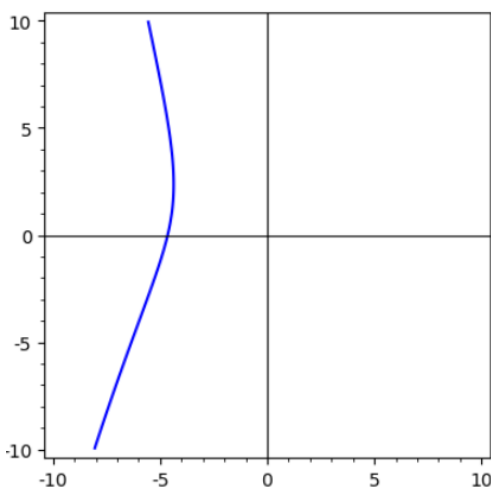
## 5.3 Solució



Conjunt  $L_0$



Conjunt  $L_5$



Conjunt  $L_{-6}$

# Capítol 6

## Exercici 6

### 6.1 Enunciat

Considerem la funció que a cada punt de la circumferència centrada a l'origen i de radi 2 li assigna  $\|\nabla f\|^2$ . On es troba el màxim? I el mínim?

### 6.2 Procediment

Considerem la circumferència centrada a l'origen i de radi 2:

$$\Omega := x^2 + y^2 = 4$$

Calculem el gradient de la funció  $f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5$ :

$$\nabla f = (3x^2 + 10x + 2y + 4, 2x + 2y + 4)^2$$

$$\|\nabla f\| = \sqrt{(3x^2 + 10x + 2y + 4)^2 + (2x + 2y + 4)^2}$$

Definim com  $h(x, y) := \|\nabla f\|^2 = (3x^2 + 10x + 2y + 4)^2 + (2x + 2y + 4)^2$

Calculem el gradient de la funció  $\Omega$ :  $\nabla\Omega = (2x, 2y)$

Calculem el gradient de  $h$ :  $\nabla h(x, y)$

$$\nabla h(x, y) = (4(3x^2 + 10x + 2y + 4)(3x + 5) + 8x + 8y + 16, 12x^2 + 48 + 16y + 32)$$

Troblem les possibles solucions a partir del sistema format per  $\Omega$  i  $\nabla h = \nabla \Omega$ :

$$\left. \begin{aligned} 4(3x^2 + 10x + 2y + 4)(3x + 5) + 8x + 8y + 16 &= 2x\lambda \\ 12x^2 + 48 + 16y + 32 &= 2y\lambda \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Les solucions del sistema són:

- $(x, y) = (0, -2) \longrightarrow h(x, y) = 0$
- $(x, y) = (1.987989886219975, 0.2188507944092701) \longrightarrow h(x, y) = 1379.341929987197$
- $(x, y) = (-1.362133112856552, -1.464443045940843) \longrightarrow h(x, y) = 51.50913183573622$
- $(x, y) = (-1.880800727934486, 0.6801385681293303) \longrightarrow h(x, y) = 10.595801545229449$

Finalment, el màxim i el mínim, respectivament, són:

$(x, y) = (1.987989886219975, 0.2188507944092701)$ i $(x, y) = (0, -2)$
---

## 6.3 Solució

El màxim és el punt  $(x, y) = (1.987989886219975, 0.2188507944092701)$ .

El mínim és el punt  $(x, y) = (0, -2)$ .

# Capítol 7

## Exercici 7

### 7.1 Enunciat

Si considerem la funció  $h(x, y) = \frac{f(x, y)}{1 - xy}$ , determineu quin és el valor de  $\frac{\partial^{17} h}{\partial x^9 \partial y^8}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial^{18} h}{\partial x^{10} \partial y^8}(0, 0)$  i  $\frac{\partial^{17} h}{\partial x^8 \partial y^9}(0, 0)$

### 7.2 Procediment

$$h(x, y) = \frac{x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5}{1 - xy}$$

Desenvolupament per Taylor:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1 - xy} = 1 + xy + xy^2 + xy^3 + \dots$$

Com  $f(x, y)$  és un polinomi, el polinomi de Taylor al punt  $(0, 0)$  és:

$$(x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5) \cdot (1 + xy + xy^2 + xy^3 + \dots)$$

Calculem el valor de  $\frac{\partial^{17} h}{\partial x^9 \partial y^8}(0, 0)$  sabent que:

$$\frac{1}{17!} \cdot \frac{17!}{9!8!} \cdot \frac{\partial^{17} h}{\partial x^9 \partial y^8}(0, 0) = \frac{1}{9!8!} \cdot \frac{\partial^{17} h}{\partial x^9 \partial y^8}(0, 0)$$

Trobem ara el valor del coeficient del polinomi de Taylor que té desembolupat  $x^9y^8$  ja que sabem que el valor de l'expressió anterior serà la d'aquest coeficient.

Per tant ens interessa el producte següent:

$$(x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5)(x^8y^8)$$

Ja que d'aquí obtindrem  $4x(x^8y^8) = 4x^9y^8$ , per tant el valor del coeficient és 4.

Calculem ara el valor de  $\frac{\partial^{17}h}{\partial x^9\partial y^8}(0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{9!8!} \cdot \frac{\partial^{17}h}{\partial x^9\partial y^8}(0,0) &= 4 \Rightarrow \frac{\partial^{17}h}{\partial x^9\partial y^8}(0,0) = 4 \left( \frac{1}{9!8!} \right)^{-1} = 4 \cdot 9! \cdot 8! \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^{17}h}{\partial x^9\partial y^8}(0,0) = 4 \cdot 9! \cdot 8!} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Analogament, calculem els següents valors.

Valor de  $\frac{\partial^{18}h}{\partial x^{10}\partial y^8}(0,0)$  :

$$\frac{1}{18!} \frac{18!}{10!8!} \frac{\partial^{18}h}{\partial x^{10}\partial y^8}(0,0) = \frac{1}{10!8!} \frac{\partial^{18}h}{\partial x^{10}\partial y^8}(0,0)$$

El valor del coeficient del polinomi de Taylor és 5 ja que s'obté del producte següent:

$$(x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5)(x^8y^8) \rightarrow 5x^2(x^8y^8) = 5x^{10}y^8$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{17}h}{\partial x^{10}\partial y^8}(0,0) &= 5 \left( \frac{1}{10!8!} \right)^{-1} = 5 \cdot 10! \cdot 8! \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^{17}h}{\partial x^{10}\partial y^8}(0,0) = 5 \cdot 10! \cdot 8!} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Valor de  $\frac{\partial^{17}h}{\partial x^8\partial y^9}(0,0)$  :

$$\frac{1}{17!} \frac{17!}{8!9!} \frac{\partial^{17}h}{\partial x^8\partial y^9}(0,0) = \frac{1}{8!9!} \frac{\partial^{17}h}{\partial x^8\partial y^9}(0,0)$$

El valor del coeficient del polinomi de Taylor és 4 ja que s'obté del producte següent:

$$(x^3 + 5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5)(x^8y^8) \rightarrow 4y(x^8y^8) = 4x^8y^9$$

Finalment

$$\begin{aligned} \frac{1}{8!9!} \frac{\partial^{17}h}{\partial x^8\partial y^9}(0,0) &= 4 \left( \frac{1}{8!9!} \right)^{-1} = 4 \cdot 8! \cdot 9! \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^{17}h}{\partial x^8\partial y^9}(0,0) = 4 \cdot 8! \cdot 9!} \end{aligned} \quad (7.3)$$

## 7.3 Solució

El valor de  $\frac{\partial^{17}h}{\partial x^9 \partial y^8}(0,0)$  és  $4 \cdot 9! \cdot 8!$ .

El valor de  $\frac{\partial^{17}h}{\partial x^{10} \partial y^8}(0,0)$  és  $5 \cdot 10! \cdot 8!$ .

El valor de  $\frac{\partial^{17}h}{\partial x^8 \partial y^9}(0,0)$  és  $4 \cdot 8! \cdot 9!$ .

# Capítol 8

## Exercici 8

### 8.1 Enunciat

Si considerem la funció  $g(x, y, z) = f(3x^2 - y^2 + z^2, x + 4y - z)$ , quant val el gradient de  $g$  en el punt  $(2, -1, 1)$ ?

### 8.2 Procediment

Calculem  $f(3x^2 - y^2 + z^2, x + 4y - z)$ :

$$\begin{aligned} f(3x^2 - y^2 + z^2, x + 4y - z) &= (3x^2 - y^2 + z^2)^3 + 5(3x^2 - y^2 + z^2)^2 + \\ &+ 2(3x^2 - y^2 + z^2)(x + 4y - z) + (x + 4y - z)^2 + 12x^2 - 4y^2 + 4z^2 + 4x + 16y - 4z + 5 \end{aligned}$$

Calculem el gradient de  $g(x, y, z)$ :  $\nabla g(x, y, z)$

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 18(3x^2 - y^2 + z^2)^2 x + 60(3x^2 - y^2 + z^2)x + 12(x + 4y - z)x + 6x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 26x + 8y - 2z + 4 \\ -6(3x^2 - y^2 + z^2)^2 y + 24x^2 - 20(3x^2 - y^2 + z^2)y - 4(x + 4y - z)y - 8y^2 + 8z^2 + 8x + 24y - 8z + 16 \\ (3x^2 - y^2 + z^2)^2 z - 6x^2 + 2y^2 + 20(3x^2 - y^2 + z^2)z + 4(x + 4y - z)z - 2z^2 - 2x - 8y + 10z - 4 \end{pmatrix}$$

Per últim, substituïm  $(x, y, z)$  per  $(2, -1, 1)$ :  $(6622, 1188, 1078)$

També vam fer el càlcul amb *SageMath*:

```
g(x,y,z) = f(3x^2 - y^2 + z^2, x + 4y - z)
g.gradient()(2, -1, 1)
```

### 8.3 Solució

El gradient de  $g(x, y, z)$  en el punt  $(2, 1, -1)$  és  $(6622, 1188, 1078)$ .



# Capítol 9

## Exercici 9

### 9.1 Enunciat

Considereu ara el conjunt de punts on el vostre polinomi és igual a  $x^3 + 12$ . Parametritzeu aquesta corba i calculeu, aproximadament, la seva longitud.

### 9.2 Procediment

Escribim la equació en forma d'elipse:

$$5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y - 7 = 0 \Rightarrow \frac{(x + y + 2)^2}{(\sqrt{11})^2} + \frac{(x)^2}{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2} = 1$$

Parametritzem la corba de la forma:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

On:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x(t) &= a \cos t \\ y(t) &= b \sin t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{\sqrt{11}}{2} \cos t \\ x(t) + y(t) + 2 &= \sqrt{11} \sin t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{\sqrt{11}}{2} \cos t \\ y(t) &= \sqrt{11} \sin t - 2 - \frac{\sqrt{11}}{2} \cos t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma(t) &= \left( \frac{\sqrt{11}}{2} \cos t, -2 + \sqrt{11} \sin t - \frac{\sqrt{11}}{2} \cos t \right) \end{aligned}$$

Calculem la longitud:

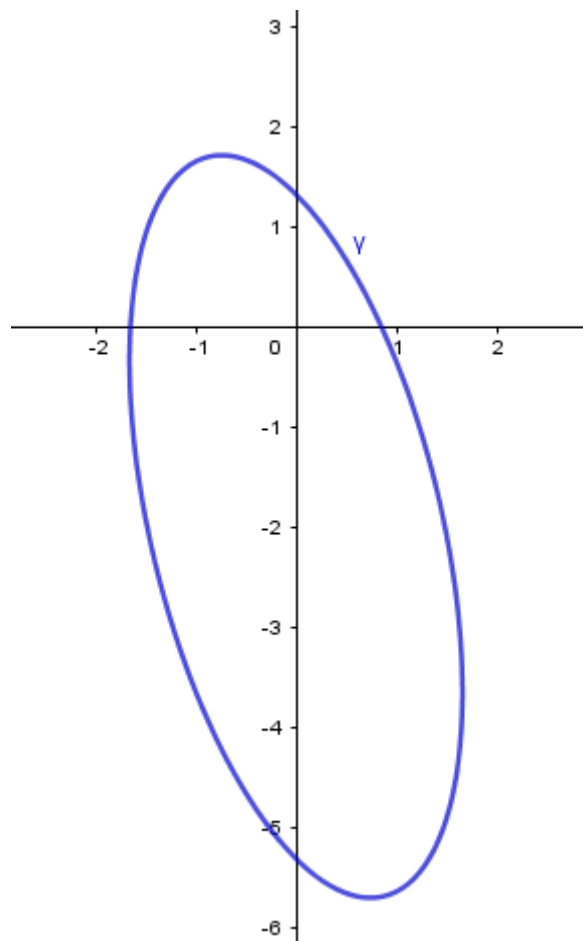
$$L(\gamma(t)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{||\gamma'(t)||} dt$$

$$L(\gamma(t)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{11}}{2} \sin t\right)^2 + \left(\sqrt{11} \cos t + \frac{\sqrt{11}}{2} \sin t\right)^2} dt \approx 17.3092395644920u$$

$$L(\gamma(t)) = 17.3092395644920u$$

### 9.3 Solució

La Longitud de la corba és 17.3092395644920 unitats.



# Capítol 10

## Exercici 10

### 10.1 Enunciat

Determineu, fent servir el teorema de Green, l'àrea de la regió limitada per la corba anterior.

### 10.2 Procediment

Sigui  $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$  la funció del camps vectorial i  $\Omega$  la regió delimitada per la corba  $\varphi$ , essent aquesta l'el·lipse de l'exercici anterior,  $\varphi(t) = \left( \frac{\sqrt{11}}{2} \cos t, -2 + \sqrt{11} \sin t - \frac{\sqrt{11}}{2} \cos t \right)$ , podem calcular l'àrea mitjançant la fórmula:

$$Area(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \vec{F}, \text{ sabent que: } \oint_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt ; \text{ on } t \in [a, b]$$

Per tant, en el nostre cas, calculem la integral de línia del camp vectorial  $F$  sobre la corba  $\varphi$  per a  $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left( 2 - \sqrt{11} \sin t + \frac{\sqrt{11}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{11}}{2} \cos t \right) \left( -\frac{\sqrt{11}}{2} \sin t, \sqrt{11} \cos t + \frac{\sqrt{11}}{2} \sin t \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{4} \sqrt{11} \left( 2\sqrt{11} \cos t + \sqrt{11} \sin t \right) \cos t - \frac{1}{4} \sqrt{11} \left( \sqrt{11} \cos t - 2\sqrt{11} \sin t + 4 \right) \sin t \right) dt = \\ &= 11\pi \Rightarrow \oint_0^{2\pi} \vec{F} = 11\pi \Rightarrow \boxed{Area(\Omega) = \frac{11\pi}{2} u^2.} \end{aligned}$$

## 10.3 Solució

L'àrea de la regió limitada per la corba anterior és  $\frac{11\pi}{2}u^2$ .