3. FARK DENKLEMLERİ

Türevsel denklemler, zamanın sürekli olarak alındığı modellerde kullanılmaktadır. Bunlarda bir değişkendeki değişme, türevsellerle gösterilmektedir.

Zaman kesikli ise yani t değişkeni sadece tam sayı değerleri alıyorsa, bir değişkendeki değişme, türevsel yerine farklarla gösterilir ve bunların yer aldığı denklemler fark denklemleri olarak adlandırılır.

Sürekli zamandan kesikli zamana geçerken dinamik analiz temelinde bir değişiklik yoktur. Diğer bir deyişle, bir değişkendeki değişme ile ilgili bilgiye dayanarak değişkenin zaman patikası bulunur. Ancak kesikli zaman söz konusu olduğunda $\frac{dy}{dt}$ yerine $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ kullanılır. Ayrıca yeni analizde t tam sayı değerleri aldığından ve art arda iki dönemi karşılaştırdığımızdan $\Delta t = 1$'dir. Böylece türevsel denklemlerdeki $\frac{dy}{dt}$ ifadesi yerini Δy'ye bırakır. Burada Δ türevsel kalkülüsteki $\frac{d}{dt}$'ye karşılık gelmektedir.

Fark denklemleri böylece $\Delta y_t = 2$ veya $\Delta y_t = 2y_t$ gibi bir formda ifade edilebilir. Ancak genel gösterim, bağımlı değişkenin t zamanındaki değerini, geçmiş dönemlerin değerlerinin bir fonksiyonu olarak göstermek şeklindedir. $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ olduğundan önceki örneklerde

$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad y_t = y_{t-1} + 2$

$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = 2y_t \quad \Rightarrow \quad y_t = -y_{t-1}$ şeklindedir.

Daha genel örnekler:

$y_t = ay_{t-1} + x_t$:Burada y'ler bağımlı, x'ler açıklayıcı değişken ve a dışsal parametredir. Bu bir **birinci sıra fark denklemi**dir. Çünkü y_t ve onun bir gecikmesini (y_{t-1}) içerir.

$y_t = ay_{t-1} + by_{t-2} + x_t$:Bu bir **ikinci sıra fark denklemi**dir.

Bunlar **doğrusal** fark denklemleridir. Çünkü y'ler ve gecikmeleri denkleme doğrusal olarak girer.

Genelde bağımlı değişkenin bir **başlangıç değeri** (y_0) belirlenmiştir**.** Bazı durumlarda nihai değeri de belirlenmiş olur.

3.1 BİRİNCİ SIRA FARK DENKLEMLERİ

- Diyelim ki elimizde $y_t = ay_{t-1} + x_t$ şeklinde bir fark denklemi var. (t = 1, 2, …)

I- ÇÖZÜM

a. İteratif Yöntem

Bu tür bir fark denkleminin çözümü sürekli yerine konularak bulunabilir.

$y_1 = ay_0 + x_1$

$y_2 = ay_1 + x_2 = a(ay_0 + x_1) + x_2 = a^2y_0 + ax_1 + x_2$

$y_3 = ay_2 + x_3 = a(a^2y_0 + ax_1 + x_2) + x_3 = a^3y_0 + a^2x_1 + ax_2 + x_3$

benzer bir şekilde

$y_4 = a^4y_0 + a^3x_1 + a^2x_2 + ax_3 + x_4$

$y_5 = a^5y_0 + a^4x_1 + a^3x_2 + a^2x_3 + ax_4 + x_5$

Her durumda y_t'nin formülü a^ty_0 ile başlar ve buna $a^{t-1}x_1$, $a^{t-2}x_2$, … , ax_{t-1}, x_t eklenir. Bunların toplamı $\sum_{i=1}^{t} a^{t-i}x_i$'dir.

Böylece $y_t = ay_{t-1} + x_t$'nin (t = 1, 2, …) çözümü $y_t = a^ty_0 + \sum_{i=1}^{t} a^{t-i}x_i$'dir. (t = 1, 2, …)

- x'in zamana bağlı olmadığı (sabit olduğu) durumda, diğer bir deyişle

$y_t = ay_{t-1} + x$ ise çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y_t = a^ty_0 + \sum_{i=1}^{t} a^{t-i}x_i$$

$$= a^ty_0 + \sum_{i=1}^{t} a^{t-i}x = a^ty_0 + x\sum_{i=1}^{t} a^{t-i} = a^ty_0 + x\{a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1\}$$

Burada son aşamada yer alan parantez içindeki ifadenin yerine koymak için aşağıdaki işlemleri yapabiliriz.

$s_n = a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1$ diyelim. Bunun çözümünü bulmak için iki tarafı a ile çarpalım.

$as_n = a^t + a^{t-1} + \cdots + a^2 + a$. Bu iki denklem arasındaki fark aşağıdaki gibidir.

$s_n - as_n = a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1 - a^t - a^{t-1} - \cdots - a^2 - a = 1 - a^t$. Öyleyse

$s_n(1 - a) = 1 - a^t$. Böylece $s_n = \frac{1-a^t}{1-a}$ bulunur. Demek ki çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y_t = a^t y_0 + x\frac{1-a^t}{1-a} = a^t y_0 + \frac{x}{1-a} - \frac{xa^t}{1-a} = a^t\left(y_0 - \frac{x}{1-a}\right) + \frac{x}{1-a} \qquad (a \neq 1)$$

Örnek : $y_t = (½)y_{t-1} + 5$ a = ½, x = 5, çözüm: $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(y_0 - \frac{5}{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{\frac{1}{2}}$

$y_t = (\frac{1}{2})^t(y_0 - 10) + 10$

- x sabit, a = 1 ise yani $y_t = y_{t-1} + x$ ise çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y_t = a^t y_0 + x\{a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1\} = y_0 + x\{1 + 1 + \cdots + 1 + 1\} = y_0 + xt$$

Örnek : $y_t = y_{t-1} + 2$ a = 1, x = 2, çözüm: $y_t = y_0 + 2t$

- x = 0 ise yani $y_t = ay_{t-1}$ ise çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y_t = a^t\left(y_0 - \frac{x}{1-a}\right) + \frac{x}{1-a} = a^t(y_0 - 0) + 0 = a^t y_0$$

Örnek: $y_t = -2y_{t-1}$ a = -2, x = 0, çözüm: $y_t = (-2)^t y_0$

b. Genel Yöntem

Bu yöntem sadece x'in sabit olduğu durum için ele alınacaktır. $y_t = ay_{t-1} + x$ gibi bir fark denkleminin genel çözümünü türevsel denklemlerde gördüğümüze benzer bir yöntemle bulabiliriz. Yeniden yazarsak,

$y_t - ay_{t-1} = x$ denklemine karşılık gelen homojen denklem, diğer bir deyişle **indirgenmiş denklem** $y_t - ay_{t-1} = 0$'dır. Bunun çözümü **tamamlayıcı fonksiyon**dur. Daha önce gördük ki $x = 0$ iken başlangıç koşullarını içeren çözüm $y_t = y_0 a^t$'dir. Dolayısıyla genel çözümün $y_t = Aa^t$ şeklinde olması gerekir. Bunun doğruluğunu kontrol edelim:

$y_t = Aa^t$ ise $y_{t-1} = Aa^{t-1}$'dir. Bunları indirgenmiş denklemimizde ($y_t - ay_{t-1} = 0$) yerine koyarsak, $Aa^t - aAa^{t-1} = Aa^t - Aa^t$ indirgenmiş denklemde olduğu gibi 0'a eşittir. Öyleyse, tamamlayıcı fonksiyon, $y_t = Aa^t$'dir. (Burada A rasgele bir sabittir.)

İkinci aşama, türevsel denklemlerde olduğu gibi **özel integral**i bulmak, diğer bir deyişle asıl denklemin ($y_t - ay_{t-1} = x$) bir özel çözümünü bulmaktır. En basit çözüm $y_t = k$'dir (k bir sabit). Bunu asıl denklemde yerine koyalım: $y_{t-1} = k$ olduğundan $k - ak = x$, öyleyse $k(1-a) = x$ ve $k = x/(1-a)$ bulunur ($a \neq 1$). Böylece özel integral, $y_p = x/(1-a)$'dır. Genel çözüm:

$$y_t = Aa^t + \frac{x}{1-a} \qquad (a \neq 1)$$

Eğer $a = 1$ ise, bu durumda başka bir çözüm denemeliyiz. $y_t = kt$ çözümünü denersek, $y_{t-1} = k(t-1)$'dir. Asıl denklemde ($y_t - ay_{t-1} = y_t - y_{t-1} = x$) yerine koyarsak $kt - k(t-1) = x$, $k = x$'dir. Böylece genel çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y_t = A + xt \qquad (a = 1)$$

Genel çözümden yola çıkarak **belirli çözümler** bulunabilir. Bunun için $t = 0$ iken çözümün değeri bulunur.

$a \neq 1$ iken $y_t = Aa^t + \frac{x}{1-a}$, $y_0 = A + \frac{x}{1-a} \qquad \Rightarrow \qquad A = y_0 - \frac{x}{1-a}$,

belirli çözüm: $y_t = (y_0 - \frac{x}{1-a})a^t + \frac{x}{1-a}$

$a = 1$ iken $y_t = A + xt$, $\qquad y_0 = A \qquad$ belirli çözüm: $y_t = y_0 + xt$

Bunlar daha önce bulduğumuz çözümlerle aynıdır.

Örnek : $y_t - 2y_{t-1} = 3$ (a = 2, x = 3)

İndirgenmiş denklem: $y_t - 2y_{t-1} = 0$

Tamamlayıcı fonksiyon: $y_t = Aa^t = A2^t$ (iteratif yöntemle bulunabilir)

Özel integral: $y_p = \frac{x}{1-a} = \frac{3}{1-2} = -3$ ($y_t = k$ asıl denklemde yerine konarak bulunabilir)

Genel çözüm: $y_t = A2^t - 3$

$y_0 = A - 3 \Rightarrow A = y_0 + 3$

Belirli çözüm: $y_t = (y_0 + 3)2^t - 3$

II- DENGE VE İSTİKRAR

a. Denge

$y_t = ay_{t-1} + x$ denkleminin çözümü $y_t = (y_0 - \frac{x}{1-a})a^t + \frac{x}{1-a}$ $(a \neq 1)$ bulunur. Eğer $y_0 = \frac{x}{1-a}$ ise $y_t = \frac{x}{1-a}$ olur. Diğer bir deyişle her t döneminde $y_t = \frac{x}{1-a}$'dir. Bu demektir ki eğer y herhangi bir dönemde $\frac{x}{1-a}$ değerine ulaşırsa bundan sonra hep o değerde kalır.

Bu nedenle $y^* = \frac{x}{1-a}$ sabit değerine denge değeri veya durgun durum değeri denilir $(a \neq 1)$.

y^* değeri şu şekilde de bulunabilir:

$y_t = ay_{t-1} + x$'in çözümü $y_t = y^*$ (tüm t değerleri için) içermelidir. Diğer bir deyişle, $y^* = ay^* + x$. Öyleyse $y^* = \frac{x}{1-a}$.

b. İstikrar

$y^* = \frac{x}{1-a}$ ve belirli çözüm $y_t = (y_0 - \frac{x}{1-a})a^t + \frac{x}{1-a}$ iken dengeden sapma aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t - y^* = (y_0 - \frac{x}{1-a})a^t + \frac{x}{1-a} - \frac{x}{1-a} = (y_0 - \frac{x}{1-a})a^t = (y_0 - y^*)a^t$$

Zaman içinde bu sapmanın azalıp azalmayacağı a katsayısı tarafından belirlenir.

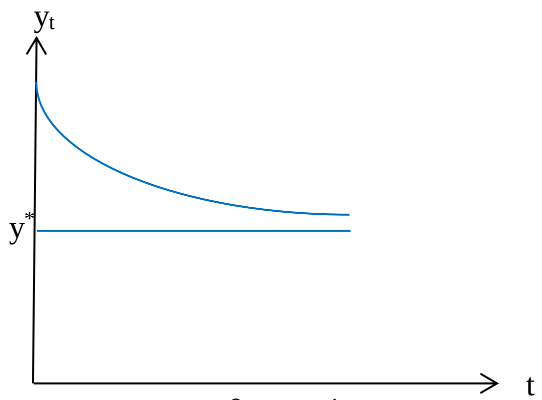
Eğer $|a| < 1$ $\Rightarrow$ $t \to \infty$ $a^t \to 0$ $\Rightarrow$ $y_t - y^* \to 0$, $y_t \to y^*$ istikrarlıdır.

Eğer $|a| > 1$ $\Rightarrow$ $t \to \infty$ $a^t \to \infty$ $\Rightarrow$ $y_t \to \infty$ istikrarsızdır.

c. *Zaman patikaları*

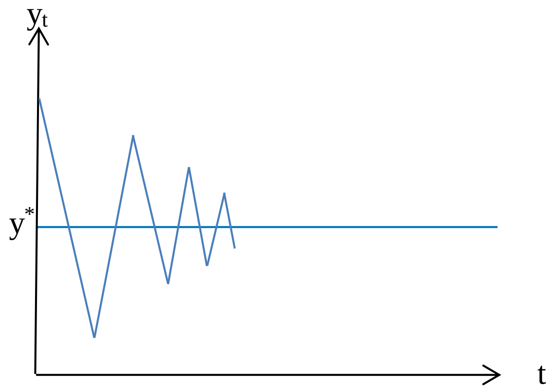
$y_t = ay_{t-1} + x$ denkleminin zaman patikaları, a katsayısının değerine bağlı olarak farklılık gösterecektir. Dengeden sapma $y_t - y^* = (y_0 - y^*)a^t$ olarak gösterilmişti.

|a| < 1



0 < a < 1

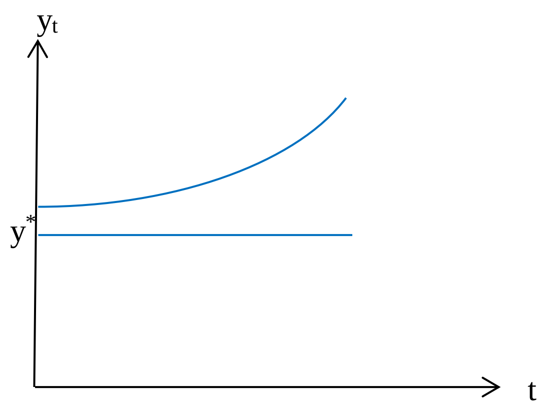
$y_0 > y^*$ise $y_t - y^*$>0'dir ama zaman içinde azalır. (Salınımsız)



-1 < a < 0

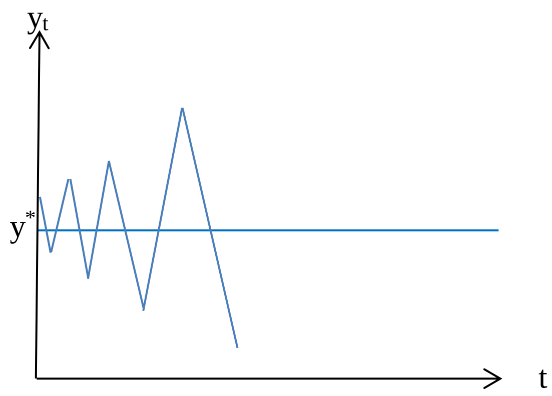
$y_0 > y^*$ise t çift değer aldığında $y_t - y^*$>0, tek değer aldığında $y_t - y^*$<0 'dır. Her durumda zaman içinde azalır. (Salınımlı)

|a| > 1



a >1

$y_0 > y^*$ise $y_t - y^*$>0'dir ve zaman içinde artar. (Salınımsız)



a <-1

$y_0 > y^*$ise t çift değer aldığında $y_t - y^*$>0, tek değer aldığında $y_t - y^*$<0 'dır. Her durumda zaman içinde artar. (Salınımlı)

Örnek : $y_t - (1/2)y_{t-1} = 3$ $\quad$ $(a = 1/2, \quad x = 3)$

Tamamlayıcı fonksiyon: $y_t = Aa^t = A(1/2)^t$

Özel integral: $\quad y_p = \frac{x}{1-a} = \frac{3}{1-(\frac{1}{2})} = 6$

Genel çözüm: $\quad y_t = A(1/2)^t + 6$

$y_0 = A + 6 \Rightarrow A = y_0 - 6$

Belirli çözüm: $\quad y_t = (y_0 - 6)(1/2)^t + 6$

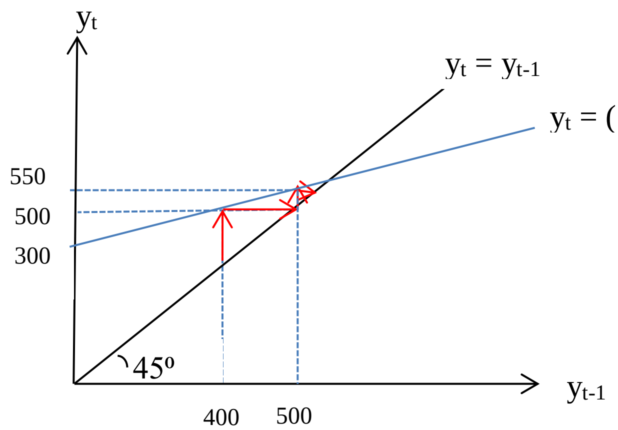
Denge: $\quad y^* = \frac{x}{1-a} = \frac{3}{1-(\frac{1}{2})} = 6$

İstikrar: $\quad a = ½ \quad 0 < a < 1 \quad$ istikrarlı, salınımsız.

d. *Aşama Çizgesi*

Bir fark denkleminin dinamik istikrarı aşama çizgeleri ile de araştırılabilir. Bunun için yatay eksende y_{t-1}, dikey eksende y_t yer alır.

Örnek : $y_t = (1/2)y_{t-1} + 300$ denkleminin aşama çizgesi aşağıdaki gibidir.



Denge $y_t = y_{t-1}$ olması durumudur. Bu da 45⁰ doğrusu ile gösterilir. Denge bu eğri üzerinde olması gerektiğinden y_t eğrisi ile 45⁰ eğrisinin kesiştiği nokta dengeyi verir.

$y^* = (1/2)y^* + 300$'ü sağlayan değer $y^* = 600$'dür.

Diyelim ki y başlangıçta 600'den küçük, örneğin 400'dür.

$y_0 = 400$

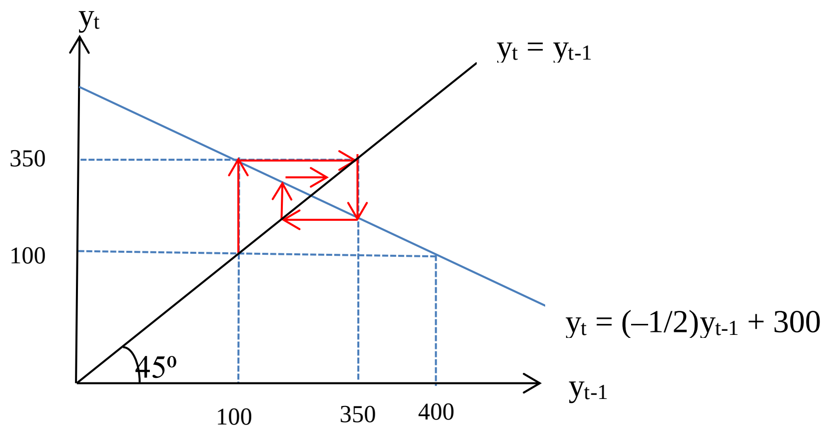
$y_1 = (1/2)400 + 300 = 500$

$y_2 = (1/2)500 + 300 = 550$

…

y_t gittikçe 600'e yaklaşır. y'nin izlediği patika yukarıdaki grafikte gösterilmiştir. Model istikrarlıdır.

Örnek : $y_t = (–1/2)y_{t-1} + 300$ denkleminin aşama çizgesi aşağıdaki gibidir.



Dengede $y^* = (–1/2)y^* + 300$ dolayısıyla $y^* = 200$'dür. Diyelim ki y başlangıçta 400'dür.

$y_0 = 400$

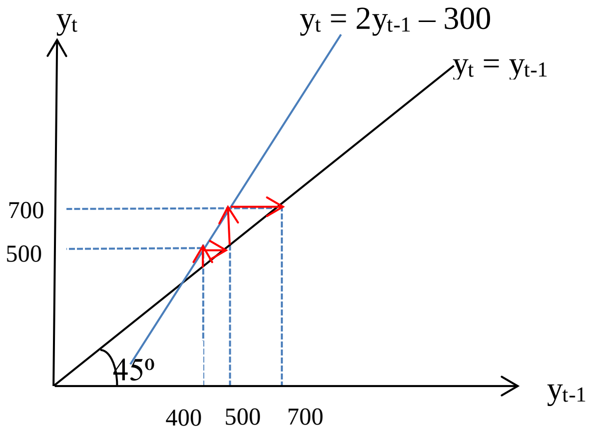
$y_1 = (–1/2)400 + 300 = 100$

$y_2 = (–1/2)100 + 300 = 350$

…

y_t gittikçe 200'e yaklaşır. y'nin izlediği patika yukarıdaki grafikte gösterilmiştir. Model istikrarlıdır.

Örnek : $y_t = 2y_{t-1} - 300$ denkleminin aşama çizgesi aşağıdaki gibidir.



Dengede $y^* = 2y^* - 300$'ü sağlayan değer $y^* = 300$'dür. Başlangıçta y 400 diyelim.

$y_0 = 400$

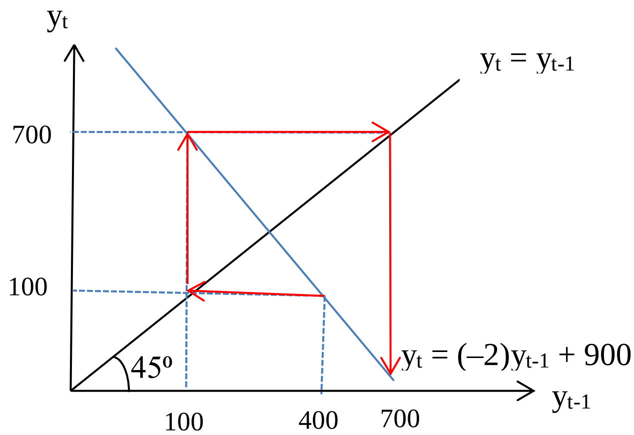
$y_1 = (2)400 - 300 = 500$

$y_2 = (2)500 - 300 = 700$

…

y_t gittikçe 300'den uzaklaşır. Model istikrarsızdır.

Örnek : $y_t = -2y_{t-1} + 900$ denkleminin aşama çizgesi aşağıdaki gibidir.



Dengede $y^* = (-2)y^* + 900$, $y^* = 300$'dür. Diyelim ki y başlangıçta 400'dür.

$y_0 = 400$

$y_1 = (-2)400 + 900 = 100$

$y_2 = (-2)100 + 900 = 700$

y_t gittikçe 300'den uzaklaşır. Model istikrarsızdır.

Yukarıdaki örneklerden görüldüğü üzere, y_{t-1}'in katsayısı a mutlak değer olarak 1'den küçükse model istikrarlı, 1'den büyükse istikrarsız olmaktadır.

III- İKTİSADİ ÖRNEKLER

a. Örümcek Ağı Modeli

Bu model genelde tarımsal üretim için kullanılmaktadır. Üretici bu dönem ne üretileceğine bir dönem öncesinde ve fiyata bağlı olarak karar vermektedir. Dolayısıyla bu dönemin üretim düzeyi bir dönem öncesinin fiyatına bağlıdır: $S = S(P_{t-1})$.

Talep ise bu dönemin fiyatına bağlıdır. $D_t = D(P_t)$

Arz ve talep fonksiyonlarının aşağıdaki gibi doğrusal olduğunu varsayalım.

$D_t = \alpha - \beta P_t \qquad (\alpha, \beta > 0)$

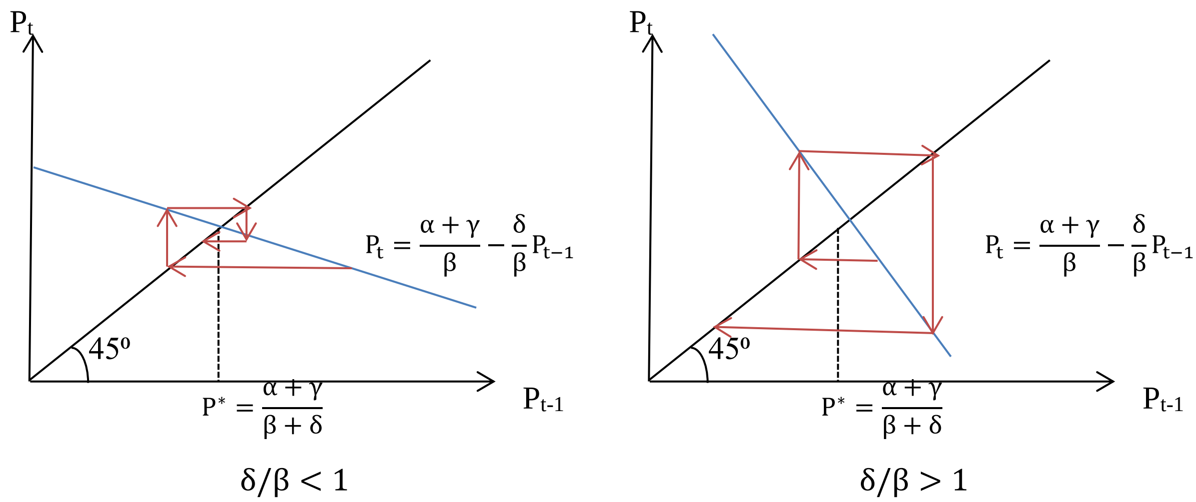
$S_t = -\gamma + \delta P_{t-1} \qquad (\gamma, \delta > 0)$

Dengede $D_t = S_t$ olması gerektiğinden

$\alpha - \beta P_t = -\gamma + \delta P_{t-1} \qquad P_t = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} P_{t-1}$

Aşama çizgesi:

Dengede $P_t = P_{t-1} = P^*$ olmalıdır. Böylece $P^* = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} P^* \qquad \Rightarrow \qquad P^* = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$



$P_t = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} P_{t-1}$ denkleminin eğimi $\frac{\delta}{\beta}$ katsayısı tarafından belirlenir. P_{t-1}in katsayısı negatiftir. Eğer $\frac{\delta}{\beta} > 1$ ise model istikrarsız, $\frac{\delta}{\beta} < 1$ ise istikrarlıdır.

Çözüm:

$$P_t + \frac{\delta}{\beta}P_{t-1} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$$

İndirgenmiş denklem: $\quad P_t + \frac{\delta}{\beta}P_{t-1} = 0$

Tamamlayıcı fonksiyon: $\quad P_t = Aa^t = A(\frac{-\delta}{\beta})^t$

Özel integral: $\quad P_p = \frac{x}{1-a} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}\,\frac{1}{1+(\frac{\delta}{\beta})} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Genel çözüm: $\quad P_t = A(\frac{-\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

$$P_0 = A + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \qquad \Rightarrow A = P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

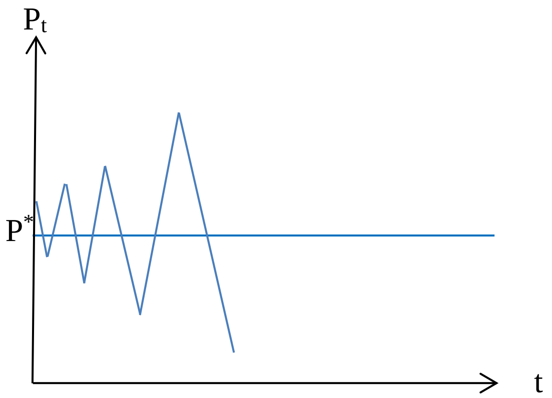
Belirli çözüm: $\quad P_t = (P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta})(\frac{-\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Denge: $\quad P^* = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

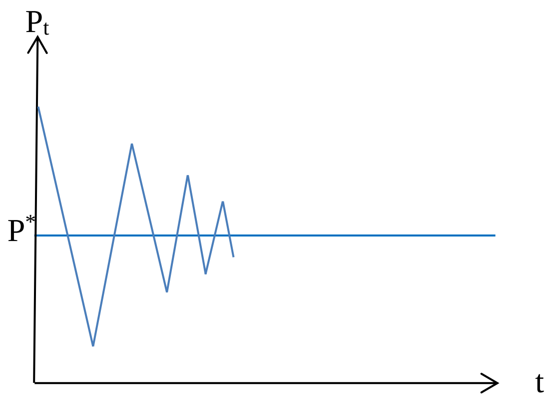
Dengeden sapma: $\quad P_t - P^* = (P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta})(\frac{-\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = (P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta})(\frac{-\delta}{\beta})^t$

İstikrar: $\quad$ Eğer $\frac{\delta}{\beta} > 1$ ise istikrarsız, $\frac{\delta}{\beta} < 1$ ise istikrarlıdır.

Zaman patikası:



$\delta/\beta > 1$



$\delta/\beta < 1$

$P_0 > P^*$ diyelim. $\quad P_t - P^* = (P_0 - P^*)(\frac{-\delta}{\beta})^t$. İlk parantezin içi $(P_0 - P^*)$ pozitiftir. İkinci ifade $(\frac{-\delta}{\beta})^t$ t çift iken pozitif, tek iken negatiftir. Ve $\delta/\beta > 1$ ise dengeden uzaklaşır, $\delta/\beta > 1$ ise dengeye yaklaşır. İki durumda da zaman içindeki hareket salınımlıdır.

b. Keynesyen Gelir Modeli

Bir ekonomide ulusal gelir özdeşliği aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

(1) $Y_t = C_t + G$

Burada Y_t ulusal geliri, C_t tüketim düzeyini ve G kamu harcamalarını göstermektedir. Kamu harcamalarının sabit olduğu varsayılmaktadır. Y^p ile gösterilen sürekli gelir, cari gelir ve önceki dönem gelirinin ağırlıklı ortalaması olarak modellenmektedir.

(2) $Y_t^p = \lambda Y_t + (1-\lambda)Y_{t-1}$ $\qquad 0 < \lambda < 1$

Son olarak tüketim sürekli gelirin doğrusal bir fonksiyonudur:

(3) $C_t = \alpha + \beta Y_t^p$ $\qquad \alpha > 0,\ \ 0 < \beta < 1$

(2) no'lu denklem (3)'de ve bulunan sonuç (1)'de yerine konulursa,

$Y_t = \alpha + \beta(\lambda Y_t + (1-\lambda)Y_{t-1}) + G = \alpha + \beta\lambda Y_t + \beta(1-\lambda)Y_{t-1} + G$

ve yeniden düzenlenirse

$Y_t = \frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda}Y_{t-1} + \frac{\alpha+G}{1-\beta\lambda}$ bulunur. Bu bir fark denklemidir.

Çözüm:

$Y_t - \frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda}Y_{t-1} = \frac{\alpha+G}{1-\beta\lambda}$

İndirgenmiş denklem: $\qquad Y_t - \frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda}Y_{t-1} = 0$

Tamamlayıcı fonksiyon: $\qquad Y_t = Aa^t = A[\frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda}]^t$

Özel integral: $\qquad Y_p = \frac{x}{1-a} = \frac{\alpha+G}{1-\beta\lambda}\,\frac{1}{1-(\frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda})} = \frac{\alpha+G}{1-\beta}$

Genel çözüm: $\qquad Y_t = A[\frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda}]^t + \frac{\alpha+G}{1-\beta}$

$Y_0 = A + \frac{\alpha+G}{1-\beta}$ $\qquad A = Y_0 - \frac{\alpha+G}{1-\beta}$

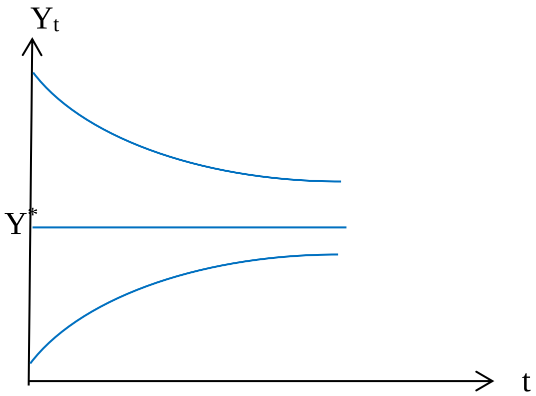
Belirli çözüm: $\qquad Y_t = [Y_0 - \frac{\alpha+G}{1-\beta}][\frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda}]^t + \frac{\alpha+G}{1-\beta}$

Denge: $Y^* = \frac{\alpha+G}{1-\beta}$

Dengeden sapma: $Y_t - Y^* = [Y_0 - Y^*][\frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda}]^t$

İstikrar: İstikrar $\frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda} = \frac{\beta-\beta\lambda}{1-\beta\lambda}$ katsayısının işaretine bağlıdır. $0 < \beta < 1$ olduğundan $\beta - \beta\lambda < 1 - \beta\lambda$ ve $\frac{\beta-\beta\lambda}{1-\beta\lambda} < 1$ bulunur. Bu nedenle model istikrarlıdır.

Zaman patikası:



$Y_0 > Y^*$ise $Y_t - Y^*$>0'dır ama zaman içinde azalır (salınımsız). Eğer $Y_0 < Y^*$ise $Y_t - Y^*$<0'dır ve yine zaman içinde azalır (salınımsız).

c. *Kapalı Ekonomi IS-LM Modeli*

IS-LM modeli, makro iktisat analizlerinin temel modelidir. Statik versiyonunda, mal piyasalarında dengeyi sağlayan reel gelir ve faiz oranı bileşimleri IS eğrisi ile gösterilir. Para piyasalarında dengeyi sağlayan gelir ve faiz oranı bileşimleri de LM eğrisi ile gösterilir. Tüm ekonomiye ilişkin denge ise IS ve LM eğrilerinin kesiştiği noktada oluşur. Karşılaştırmalı durağanlık analizinde dışsal bir değişkende veya bir parametredeki değişimin etkileri, yeni dengenin nerede olacağının belirlenmesi ile incelenir.

Burada IS-LM modelinin dinamik bir versiyonunu ele alacağız. Bunun için burada önce mal piyasalarını, bir sonraki bölümde ise mal ve para piyasalarının birlikte ele alındığı bir model incelenecektir.

Bu modellerde dinamik öğe mal piyasaları denge koşullarında yer alacaktır: Toplam gelir aynı dönem toplam harcamalarına değil bir önceki dönem toplam harcamalarına eşittir. Ancak para piyasalarında para arz ve talebi aynı dönemde birbirine eşitlenir.

Basit bir IS-LM modeli ele alalım:

Diyelim ki yatırımlar sabittir: $I_t = I$

$C_t = a + b\, Y_t$

$E_t = C_t + I$

$Y_t = E_t$

Burada C tüketim, Y ulusal gelir ve E harcamalardır.

Bu statik modeldir. Dengede $Y_t = a + bY_t + I$

$$Y^* = \frac{a + I}{1 - b}$$

Bu modeli dinamik hale getirmek için iki yol izlenebilir. Birinci yolda tüketim geçmiş dönem gelirinin bir fonksiyonudur.

$C_t = a + bY_{t-1}$

$E_t = C_t + I$

$Y_t = E_t$

C ve E'yi son denklemde yerine koyarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$Y_t = a + bY_{t-1} + I$

veya

$Y_t = bY_{t-1} + (a + I)$ Bu bir fark denklemidir.

Modeli dinamik hale getirmenin ikinci yolu, üretimin (Y_t - ulusal gelirin) harcamalardan (E_t) gecikmeli olarak etkilenmesidir.

$C_t = a + bY_t$

$E_t = C_t + I$

$Y_t = E_{t-1}$

Bu durumda

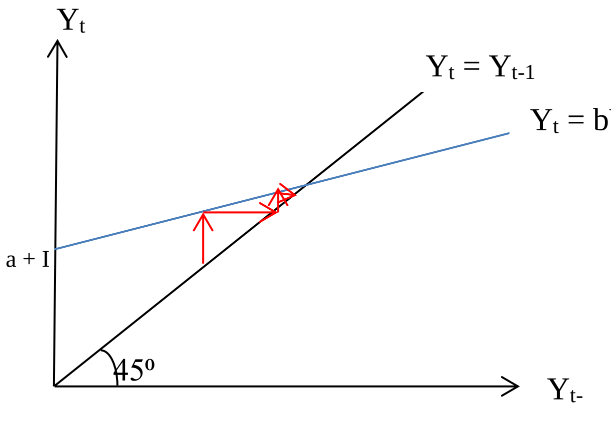
$Y_t = C_{t-1} + I = a + bY_{t-1} + I$ önceki ile aynı fark denklemini verir.

Dengede

$Y^* = bY^* + (a + I)$ olduğundan $Y^* = \frac{a+I}{1-b}$ statik modelle aynıdır.

İki dinamik modelde de statik modelden farklı olarak ulusal gelirin zaman içinde nasıl hareket edeceğini inceleyebiliriz.

Önce aşama çizgesi analizi yapalım:



$0 < b < 1$ olduğundan hareket dengeye doğrudur. Model istikrarlıdır.

Çözüm:

Tamamlayıcı fonksiyon: $Y_c = Ab^t$

Özel integral: $Y_c = \frac{a+I}{1-b}$

Genel çözüm: $Y_t = Ab^t + \frac{a+I}{1-b}$

$Y_0 = A + \frac{a+I}{1-b} \Rightarrow A = Y_0 - \frac{a+I}{1-b}$

Belirli çözüm: $Y_t = (Y_0 - \frac{a+I}{1-b})b^t + \frac{a+I}{1-b}$ veya $Y_t = (Y_0 - Y^*)b^t + Y^*$

$0 < b < 1$ olduğu sürece $t \to \infty$ iken $(Y_0 - tY^*)b^t \to 0$ ve $Y_t \to Y^*$. Y_t denge değerine yaklaşır. Model istikrarlıdır.

d. Mal ve Para Piyasaları Dinamikleri

Bu modelde mal piyasasındaki ilişkilerin aşağıdaki gibi olduğu varsayılmaktadır.

(1) $C_t = a + bY_t^d$ $0 < b < 1$

(2) $Y_t^d = Y_t - V_t$

(3) $V_t = v_O + vY_t$ $0 < v < 1$

(4) $I_t = I_O - hr_t$ $h > 0$

(5) $G_t = \overline{G}$

(6) $E_t = C_t + I_t + G_t$

(7) $Y_t = E_{t-1}$

Bu modelde öncekine ek olarak kamu kesimi de eklenmiştir. Modelde yer alan V vergileri, G kamu harcamalarını göstermektedir.

Para piyasası aşağıdaki gibi modellenmektedir.

(8) $M_t^d = M_O + kY_t - ur_t$ $k > 0, u > 0$

(9) $M_t^s = \overline{M}$

(10) $M_t^d = M_t^s$

Burada M_t^d para talebi, M_t^s para arzı ve r faiz oranıdır.

Önce mal piyasalarında dengeyi inceleyelim. Denklem (3)'yı (2)'te yerine koyduktan sonra çıkan denklemi (1)'te yerine koyarsak aşağıdaki tüketim denklemini elde ederiz.

$$C_t = a + b(Y_t - v_O - vY_t)$$

Bu tüketim denklemini, (4) ve (5)'i (6)'da yerine koyalım:

$$E_t = a + b(Y_t - v_O - vY_t) + I_O - hr_t + \overline{G}$$

Bu denklemin bir dönem gecikmesi alınıp (7)'da yerine koyarsak mal piyasasında dengeyi gösteren denkleme (IS) ulaşırız.

(11) $Y_t = a + b(1 - v)Y_{t-1} - bv_O + I_O - hr_{t-1} + \overline{G}$

Para piyasasında dengeyi bulmak için (8) ve (9)'yi (10)'te yerine koyalım.

$$M_O + kY_t - ur_t = \overline{M}$$

Bu denklem yeniden düzenlenirse aşağıdaki denkleme (LM) ulaşırız.

(12) $r_t = \frac{M_O + kY_t - \overline{M}}{u}$

Bulduğumuz son denklemi (12) mal piyasası dengesinde (11) yerine koyarsak ekonominin genel dengesini veren denkleme ulaşılır.

$$Y_t = a + b(1 - v)Y_{t-1} - bv_O + I_O - h\frac{M_O + kY_{t-1} - \bar{M}}{u} + \bar{G}$$

$$= [b(1 - v) - h\frac{k}{u}]Y_{t-1} + a - bv_O + I_O - h\frac{M_O - \bar{M}}{u} + \bar{G}$$

$$= \alpha Y_{t-1} + \beta$$

Son satırda $\alpha = [b(1 - v) - h\frac{k}{u}]$ ve $\beta = a - bv_O + I_O - h\frac{M_O - \bar{M}}{u} + \bar{G}$ olarak tanımlanmıştır.

Bu bir fark denklemidir. Dengede $Y^* = \alpha Y^* + \beta$ olduğundan $Y^* = \frac{\beta}{1-\alpha}$'dır.

Çözüm:

Tamamlayıcı fonksiyon $Y_c = A\alpha^t$, özel integral $Y_p = \frac{\beta}{1-\alpha}$ olduğundan genel çözüm aşağıdaki gibidir.

$Y_t = A\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha}$

$Y_0 = A + \frac{\beta}{1-\alpha}$ $A = Y_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}$

Belirli çözüm: $Y_t = [Y_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}]\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha} = [Y_0 - Y^*]\alpha^t + Y^*$

İstikrar α katsayısına bağlıdır. Modelin istikrarlı olması için $\alpha = b(1 - v) - h\frac{k}{u} < 1$ olmalıdır. Diğer bir gösterim biçimiyle, $-\frac{1-b(1-v)}{h} < \frac{k}{u}$ olmalıdır.

Burada $-\frac{1-b(1-v)}{h}$ IS eğrisinin eğimidir. Çünkü mal piyasasında dengeyi gösteren (11) no'lu denklem r'yi sol tarafa alacak şekilde yeniden düzenlenirse ve denge koşulu ($Y_t = Y_{t-1}$) eklenirse eğimi $-\frac{1-b(1-v)}{h}$ olan aşağıdaki IS denklemi elde edilir.

$$r_t = -\frac{1 - b(1 - v)}{h}Y_t + \frac{a - bv_O + I_O + \bar{G}}{h}$$

Diğer yandan $\frac{k}{u}$ da LM denkleminin eğimidir ((12) no'lu denklem). IS negatif, LM pozitif eğimlidir. Yukarıda verilen $-\frac{1-b(1-v)}{h} < \frac{k}{u}$ koşuluna göre IS eğrisinin LM eğrisine göre daha yatık olması gerekir. Bu koşul sağlandığında model istikrarlı olmaktadır.

IV- SON NOT

Buraya kadar ele aldığımız genel çözüm yöntemi sadece doğrusal ve x'in sabit olduğu durumlarla ilgili çözüm vermektedir: $y_t = ay_{t-1} + x$

Eğer x sabit değilse, zamanın bir fonksiyonu ise (x_t) iteratif yöntemle bulunabilir. Bu durumda çözüm x'in zaman içinde aldığı değerlere bağlıdır. $y_t = a^t y_0 + \sum_{i=1}^{t} a^{t-i} x_i$

Eğer x_t'yi zamanın bir fonksiyonu olarak açıkça yazabiliyorsak, örneğin $x_t = ct$ veya $x_t = t^2$ gibi, y_t'yi açıkça t'nin bir fonksiyonu olarak yazabiliriz. Ancak x'in sabit olmaması durumunda y_t'nin istikrarı ile ilgili bir şey söylemek kolay değildir. Çünkü y'nin zaman içindeki seyri x'in zaman içindeki seyrine bağlı olacaktır.

Eğer fark denklemi doğrusal değilse ve x sabitse, önceki durumun tersine, çözüm bulunamayabilir ama aşama çizgesi yoluyla istikrar araştırılabilir.