1. İNTEGRAL (TÜMLEV)

Tanım:

İntegral türevin tersidir. Bir fonksiyonun türevinin integrali fonksiyonun kendisine eşittir.

1.1 BELİRSİZ İNTEGRAL

Verilen bir F(x) (ilkel) fonksiyonunun türevi f(x)'i veriyorsa, diğer bir deyişle $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ise, F(x) fonksiyonuna f(x)'in integrali veya anti türevi denir.

İntegral $\int$ ile gösterilir. $\int f(x)dx$ ifadesi f(x)'in x'e göre integralidir. Burada f(x) **integrand** olarak adlandırılır. dx kısmı ise işlemin x değişkenine göre yapıldığını belirtir. Ancak f(x)dx bir bütün olarak da alınabilir ve F(x)'in diferansiyeli (türevseli) olarak görülebilir: dF(x)= f(x)dx

$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ olduğundan $\int f(x)dx + c$ yazılabilir. Burada c rasgele bir sabittir.

Burada c **integral sabiti**nin yer almasının nedeni, integrandın (f(x)) birden çok ilkel fonksiyona sahip olmasıdır. Bunun nedeni F(x), F(x) + 3, F(x) + 5 gibi fonksiyonların tümünün türevinin f(x) olmasıdır.

Diğer bir deyişle, türevlenebilir bir F(x) ilkel fonksiyonunun sadece bir tek türevi (f(x)) varken, türetilmiş f(x) fonksiyonu integral yolu ile sonsuz sayıda ilkel fonksiyona (F(x) +c) sahip olabilir. Burada çok sayıda integrali sağlayan c sabittir.

$\int f(x)dx$ integraline **belirsiz integral** denir. Çünkü bunun sonucu F(x) + c'nin belirli bir değeri yoktur. Burada c sabitinin belirli bir değeri olsa bile F(x)'in alacağı değerler x'e bağlıdır. Örneğin $F(x) = x^2$ ise $f(x) = 2x$ veya $\int f(x)dx = \int 2xdx = x^2 + c$'dir. c'yi bilsek bile x^2'nin alacağı değerler x'e bağlı olarak değişmektedir.

İntegral Almanın Temel Kuralları

İntegral alma kuralları türev alma kurallarına yakından bağımlıdır. Örneğin $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ ($n \neq -1$) olduğundan x^n türev fonksiyonunun ilkel fonksiyonu $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ dir. Böylece integral için kuvvet kuralını çıkarmış olduk.

KURAL I : (Kuvvet Kuralı) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

Örnek : $\int x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 + c$

Örnek : $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$

Örnek : $\int 1 dx = \frac{1}{1} x^1 + c = x + c \quad (1 = x^0)$

Örnek: $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

Örnek: $\int \sqrt{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$

Örnek: $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + c = -\frac{1}{2} x^{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

Not : İntegral sonuçları türev yoluyla kontrol edilebilir. Eğer integral doğru alındıysa integralin türevi integranda eşit olmalıdır.

KURAL II : (Üstel Kural) $\int e^x dx = e^x + c$

KURAL III : (Logaritmik kural) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \quad (x>0)$

(Burada kuvvet kuralı kullanılamaz. Kuvvet kuralı kullanılırsa, $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \frac{1}{-1+1} x^{-1+1}$ tanımsız olduğundan logaritmik kural yolu ile dikkate alınmalıdır.)

Logaritmik kural x>0 sınırlaması altında geçerlidir, çünkü x'in pozitif olmayan değerleri için logaritma tanımsızdır. Kuralın x'in negatif değerlerini de dikkate alan daha genel formülasyonu şu şekildedir.

$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad (x \neq 0)$

Kural II ve Kural III'ün iki değişik şekli vardır :

Kural IIa : $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$

Kural IIIa : $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = lnf(x) + c \quad f(x) > 0$

veya $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + c \quad f(x) \neq 0$

Örnek : $\int 2e^{2x}dx = e^{2x} + c$

Örnek : $\int \frac{6x}{3x^2+5} dx = \ln(3x^2 + 5) + c$

Örnek : $\int 10x\, e^{5x^2} dx = e^{5x^2} + c$

İşlem Kuralları

KURAL IV : (Bir toplamın integrali) $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Bu kural şuradan çıkar :

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left[F(x)+G(x)\right]}_{A} = \underbrace{\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}G(x)}_{B} = \underbrace{f(x) + g(x)}_{C}$$

A=C olduğu sürece $\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + c$ (1)

B=C olduğundan $\int f(x)dx = F(x) + c_1$ ve $\int g(x)dx = G(x) + c_2$

buradan $\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + c_1 + c_2$ (2)

c_1 ve c_2 rastgele değerlere sahip olduğundan $c = c_1 + c_2$ yazılabilir. Bu durumda (1) ve (2) eşitliklerinin sağ tarafları eşit olduğundan $(F(x) + G(x) + c = F(x) + G(x) + c_1 + c_2)$ sol taraftarı da eşit olacaktır: $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Örnek : $\int(x^4+e^x+1)dx = \int x^4dx + \int e^xdx + \int 1dx = \frac{1}{5}x^5 + c_1 + e^x + c_2 + x + c_3$

$= \frac{1}{5}x^5 + e^x + x + c$

KURAL V : (Bir çarpımın integrali) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Örnek : $\int 2x^3dx = 2\int x^3dx = 2\left[\frac{1}{4}x^4 + c_1\right] = \frac{x^4}{2} + c, \quad c = 2c_1$

Örnek : $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

İkameye İlişkin Kurallar

KURAL VI : (İkame Kuralı)

Eğer $\int f(u)du$ integrali elementer fonksiyonlar cinsinden açıkça belirlemiyorsa, $u = g(x)$ transformasyonu uygulanıp değişkeni u'dan x'e çevirebiliriz:
$u = g(x)$'den $du/dx = g'(x)$ veya $du = g'(x)dx$ bulunacağından $\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx$.
Bu kural türev almada kullanılan zincir kuralının integral kalkülüsündeki karşılığıdır.

Örnek : $\int 3x^2 (x^3+5)dx = ?$

1. Yöntem :

$\int(3x^5 + 15x^2)dx = 3\int x^5dx + 15\int x^2dx = 3(\frac{1}{6}x^6) + c_1 + 15(\frac{1}{3}x^3) + c_2 = \frac{1}{2}x^6 + 5x^3 + c$

2. Yöntem :

$u = x^3+5, \quad du/dx = 3x^2 \Rightarrow dx = du/3x^2$

$\int 3x^2(x^3+5)dx = \int 3x^2u\frac{du}{3x^2} = \int udu = \frac{1}{1+1}u^{1+1} + c = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{(x^3+5)^2}{2} + c$

Örnek : $\int 12x(3x^2+1)dx$

$u = 3x^2+1, \quad du/dx = 6x, \quad dx = du/6x$

$\int 12x(3x^2+1)du/6x = \int 2udu = 2\int udu = 2\left(\frac{1}{2}u^2 + c_1\right) = (3x^2+1)^2 + c$

Örnek : $\int \frac{1}{x(\ln x)^3}dx =$

$u = \ln x, \quad du/dx = 1/x, \quad dx = xdu$

$\int \frac{1}{x(\ln x)^3}x\,du = \int \frac{1}{u^3}du = \int u^{-3}du = \frac{1}{-3+1}u^{-3+1} + c = -\frac{1}{2u^2} + c = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + c$

Örnek : $\int(6x+1)e^{3x^2+x}dx,$

$u = 3x^2 + x, \quad du/dx = 6x+1, \quad dx = du/(6x+1)$

$\int(6x+1)e^u du/(6x+1) = \int e^u du = e^u + c$

KURAL VII : (Kısmi İntegral)

$\int vdu = uv - \int udv$

Bu kuralın özü $\int du$ işleminin $\int dv$ ile değiştirilmesidir.

Örnek : $\int x(x+1)dx$ (bu soru Kural VI kullanılarak çözülemez.)

$x = v \Rightarrow dv=dx,$ $du =(x+1)dx \Rightarrow u = \frac{1}{2}(x+1)^2$

$\int x\,(x+1)dx = \int vdu = uv - \int udv = \frac{x}{2}(x+1)^2 - \int\frac{1}{2}(x+1)^2dx$

$= \frac{x(x+1)^2}{2} - \frac{1}{2}\int(x^2+2x+1)dx = \frac{x(x+1)^2}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^3 + 2\,\frac{1}{2}x^2 + x + c)$

Örnek : $\int xe^x dx$ (bu soru Kural VI kullanılarak çözülemez.)

$v = x \Rightarrow dv =dx,$ $du = e^x dx \Rightarrow$ $u = e^x$

$\int vdu = uv - \int udv = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

Örnek : $\int(\ln x)dx$ (bu soru Kural VI kullanılarak çözülemez.)

$v=\ln x \Rightarrow dv = (1/x)dx,$ $du = dx \Rightarrow u = x$

$\int vdu = x\ln x - \int x(1/x)dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$

1.2 BELİRLİ İNTEGRAL

Veri bir f(x) sürekli fonksiyonunun belirsiz integralini alalım : $\int f(x)dx = F(x) + c$

x'in ön alanındaki iki değerini, a ve b, seçip (a<b) eşitliğin sağ tarafında x'in yerine koyalım: F(a) + c ve F(b) + c. Sonra şu farkı alalım: F(b) + c – F(a) - c = F(b) – F(a). Bu değer c sabitinden bağımsızdır ve "f(x)'in a'dan b'ye belirli integrali olarak adlandırılır. Burada a'ya integralin alt sınırı b ye üst sınırı adı verilir.

Belirli integral : $\int_a^b f(x)dx = F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a)$. Burada $\Big]_a^b$ ifadesi, integral alındıktan sonra farkların alınması gerekliğini gösterir.

Örnek : $\int_2^7 2x^3\,dx = \left[2.\frac{1}{4}x^4\right]_2^7 = \frac{1}{2}7^4 - \frac{1}{2}2^4$

Örnek : $\int_1^5 2e^x\,dx = \left[2.e^x\right]_1^5 = 2e^5 - 2e^1 = 2(e^5 - e)$

Örnek : $\int_0^4 \left(\frac{1}{1+x} + 2x\right)dx = [\ln|1 + x| + x^2]_0^4 = \ln(1+4) + 4^2 - \ln(1+0) - 0^2 = \ln 5 + 16$

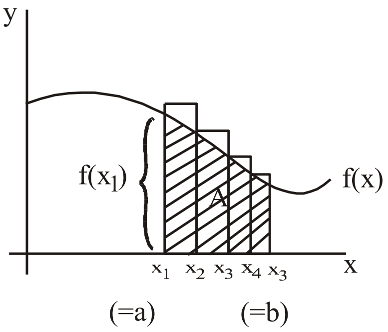
Örnek : $\int_1^2 (2x^3-1)(6x^2)dx, \quad u = 2x^3 - 1, \quad du = 6x^2dx, \; dx = du/6x^2$

$\int(2x^3-1)(6x^2)dx = \int u(6x^2)du/6x^2 = \int udu = (1/2)u^2 + c$

$\int_1^2 (2x^3-1)(6x^2)dx = \left[\frac{1}{2}(2x^3-1)^2\right]_1^2 = \left[\frac{1}{2}(2.2^3-1)^2 - \frac{1}{2}(2.1^3-1)^2\right] = \frac{1}{2}(2^4-1)^2 - \frac{1}{2}$

Belirli İntegral ve Eğrinin Altındaki Alan

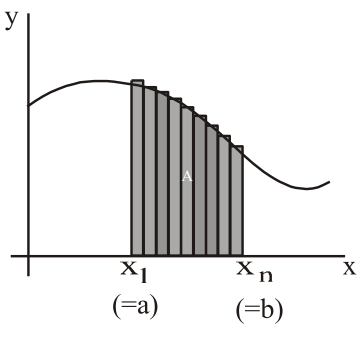
Her belirli integral belirli bir değere sahiptir ve bu değer geometrik olarak verilen bir eğrinin altında kalan alan olarak yorumlanabilir.



Bu şekilde, herhangi bir bloğun alanı $f(x_i)\Delta x_i$'e eşittir. Blokların toplam alanı

$A^* = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_1 \quad (n = 4)$

Bu hesaplanan değer, tam olarak eğrinin altındaki alan olmayıp onun bir yaklaştırımıdır.
Ancak bloklar inceltilirse (diğer bir deyişle, n arttırılsa) iki değer birbirine daha çok yaklaşır.



Limitte $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} A^* = A$ alanıdır.

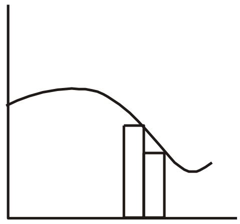
Δx çok küçük olduğunda dx ile değiştirebiliriz ve çok küçük olan bu ifadeler birbirine eşit olduğu için i alt notasyonu atılabilir.

Ayrıca n→ ∞ iken $\sum_{i=1}^{n}$ ifadesi $\int_a^b$ ile değiştirilebilir. Böylece $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_1 \equiv$

$\int_a^b f(x)dx$ = A alanı yazabiliriz.

Bir fonksiyonun integralinin alınabildiği koşulları belirleyen kalkülüsün temel teoremine göre [a,b] aralığında sürekli olan bir fonksiyon integrali alınabilir bir fonksiyondur[1].

Burada A alanı eğrinin yukarısına taşan bloklar ile hesaplandı. Buna üstten integral (yukarıdan yaklaştırım) denir. Eğrinin içinde kalan bloklar oluşturarak da A alanına yaklaştırım yapabilir.



Buna da alttan integral denir. Alttan ve üstten integraller değer olarak eşit olduklarında $\int_a^b f(x)dx$ integrali tanımlıdır ve f(x) "integrali alınabilir" veya "Riemann integrali alınabilir" fonksiyondur denir.

[1] Süreklilik şu şekilde tanımlanır: f(x) x'in önalanı içindeki x = N gibi bir noktada tanımlı ise, bu noktada limite sahipse ($\lim_{x\to N} f(x)$ var ise) ve bu noktada bu limit f(N)'e eşitse, fonksiyon N noktasında süreklidir.

Belirli İntegrallerin Bazı Özellikleri

ÖZELLİK I : İntegralin sınırlarının değişmesi belirli integralin işaretini değiştirir.

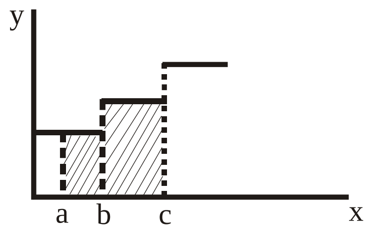
$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

ÖZELLİK II **:** Sınırları aynı ise belirli intergal sıfıra eşittir. $\int_a^a f(x)dx = F(a) – F(a) = 0$

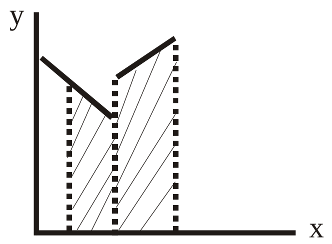
ÖZELLİK III : Belirli bir integral, sonlu sayıda belirli alt integralin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\int_a^d f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx, \qquad (a<b<c<d)$$

Bu özellik kullanılarak belli bazı süreksiz fonksiyonların da belirli integrali, diğer bir deyişle, alanı bulunabilir.



Örneğin süreksiz basamak fonksiyonu [a,c] aralığında bulunan b noktasında süreksiz olmasına rağmen gölgeli alan $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ toplamından bulunabilir. Aynının yöntemle şu alan da bulunabilir.



ÖZELLİK IV : $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

ÖZELLİK V : $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

ÖZELLİK VI : $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

ÖZELLİK VII : u(x) ve v(x) veri iken $\int_{x=a}^{x=b} vdu = uv]_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} udv$

Uygun Olmayan İntegraller

Tanım : $\int_a^b f(x)dx$ gibi bir integrade eğer integralin sınırları [a,b] sonlu değilse veya f(x) fonksiyonu [a,b] aralığındaki noktalarının birinde veya daha fazlasında sonlu değilse bu integrale "uygun olmayan integral" denir.

Diğer bir deyişle, eğer

1) a = -∞ veya b = ∞ ise veya ikisi birden geçerliyse yani integral sınırlarından biri veya ikisi sonsuzsa,

2) a ≤ x ≤ b sınırları arasında f(x) bir veya daha fazla noktada sonsuz ise bu integral uygun olmayan integraldir. Bu tür integraller limit alma işlemleri ile bulunabilir.

1) Sonsuz Sınırlı İntegral

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \equiv \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \equiv \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \equiv \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

Eğer bu limit varsa, uygun olmayan integral yakınsaktır denir ve limit alma süreci ile integralin değeri hesaplanır. Eğer limit yoksa, uygun olmayan integral "ıraksaktır" denir ve anlamsızdır.

Örnek : $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$

$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1$ bu uygun olmayan integral yakınsaktır ve 1'e eşittir.

Örnek : $\int_1^{\infty} x^2dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}\right]$ ıraksaktır.

Örnek : $\int_1^{\infty} e^{-2x}dx$, u = -2x, du = -2dx, dx = -du/2, $(-\frac{1}{2})\int e^u\,du = (-\frac{1}{2})e^{-2x} + c$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}[e^{-2b} - e^{-2}] = +\frac{1}{2}e^{-2}$ yakınsaktır.

$\int_{-\infty}^{\infty}$ e^{-2x}dx = $\lim\limits_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} -\frac{1}{2}$ [e^{-2b} e^{-2a}] ıraksaktır.

2) Sonsuz İntegrand

İntegral aralığı [a,b] içinde herhangi bir noktada integrandın sonsuz olması durumunda da uygun olmayan integral söz konusudur.

- Eğer f(x) sadece x = a noktasında sonsuzsa

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$, eğer limit varsa integral yakınsak, yoksa ıraksaktır.

Örnek : $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} [\ln x]_\epsilon^1 = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} [\ln 1 - \ln\epsilon]$ ıraksaktır.

- Eğer f(x) sadece x = b noktasında sonsuzsa

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$, eğer limit varsa integral yakınsak, yoksa ıraksaktır.

Örnek : $\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{2}}}dx$, u=2-x, du=-dx, $\int u^{-\frac{1}{2}}(-du) = -\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}u^{-\frac{1}{2}+1} = -2u^{1/2}$

$= \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_1^{2-\epsilon}(2-x)^{-1/2}dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\left[-2(2-x)^{1/2}\right]_1^{2-\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\left[-2\,\epsilon^{1/2} - 2\right]$ yakınsaktır.

- Eğer f(x) a ≤ x ≤ b aralığındaki sadece bir p noktasında sonsuzsa belirli integrallerin toplanabilirliği özelliğinden yararlanabiliriz: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^p f(x)dx + \int_p^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\int_a^{p-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{p+\epsilon_2}^b f(x)dx$$

Bu kural f(x) in birden fazla noktada sonsuz olması durumuna da genişletilebilir.

Örnek : $\int_1^4 \frac{1}{(2-x)^{1/3}}dx = \int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{1/3}}dx + \int_2^4 \frac{1}{(2-x)^{1/3}}dx$

$= \lim\limits_{\epsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\epsilon_1} (2-x)^{-1/3}dx + \lim\limits_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{2+\epsilon_2}^4 (2-x)^{-1/3}dx$

$$= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[\frac{-1}{\frac{-1}{3}+1}(2-x)^{\frac{-1}{3}+1}\right]_1^{2-\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[\frac{-3}{-1+3}(2-x)^{\frac{-1}{3}+1}\right]_{2+\epsilon_2}^{4}$$

$$= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left(\frac{-3}{2}\right)\left[(2-2+\epsilon_1)^{\frac{2}{3}}-(2-1)^{\frac{2}{3}}\right] \quad + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left(\frac{-3}{2}\right)\left[(2-4)^{\frac{2}{3}}-(2-2-\epsilon_2)^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left(\frac{-3}{2}\right)\left[\epsilon_1{}^{\frac{2}{3}}-1\right] \quad + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left(\frac{-3}{2}\right)\left[(-2)^{\frac{2}{3}}-(-\epsilon_2)^{\frac{2}{3}}\right] \quad = \frac{3}{2}-\frac{3}{2}(-2)^{\frac{2}{3}} \text{ yakınsaktır.}$$

1.3 İNTEGRALLERİN BAZI İKTİSADİ UYGULAMALARI

Marjinal Fonksiyondan Toplam Fonksiyonun Elde Edilişi

Bir toplam fonksiyon verildiğinde türevi alınarak marjinal fonksiyon elde edilir. İntegral de türev alma sürecinin tersi olduğundan, marjinal fonksiyonun integrali alınarak toplam fonksiyon elde edilebilir.

Örnek : Bir firmanın marjinal maliyeti $MC = f(Q) = C'(Q) = 4e^{\frac{Q}{2}}$ ise ve sabit maliyet $C_F = 70$ ise toplam maliyet fonksiyonunu C(Q) bulunuz.

$\int MCdQ = \int 4e^{\frac{Q}{2}} dQ = (4)(2)e^{\frac{Q}{2}} + c = 8e^{\frac{Q}{2}} + c$

Burada c rasgele bir sabittir. Ancak $C_F = 70$ bilgisini kullanarak sabitin değeri bulunabilir. Tanım olarak sabit maliyet, Q = 0 iken toplam maliyettir. Buradan,

$Q = 0 \;\Rightarrow\; 8e^0 + c = 8 + c = 70 \;\Rightarrow c = 62$ dir.

$\Rightarrow$ Toplam maliyet fonksiyonu: $C = 8e^{\frac{Q}{2}} + 62$

Örnek : Marjinal tasarruf eğilimi (MPS) gelirin fonksiyonudur: $MPS = S'(Y) = 0.3 - 0.1Y^{-1/2}$ ve Y = 81 iken toplam tasarruflar S = 0 dır. Toplam tasarruf fonksiyonunu bulunuz.

$S(Y) = \int(0.3 - 0.1Y^{-1/2})dY = 0.3Y - 0.1 \dfrac{1}{1-1/2} Y^{1/2} + c = 0.3Y - 0.2Y^{1/2} + c$

$Y = 81 \;\Rightarrow\; S(Y) = (0.3)(81) - (0.2)\sqrt{81} + c = 24.3 - 1.8 + c = 0 \quad c = -22.5$

$S(Y) = 0.3Y – 0.2Y^{1/2} - 22.5$

Yatırım ve Sermaye Oluşumu

Sermaye oluşumu (sermaye birikimi), verilen bir sermaye stokuna eklemeler yapılmasıdır. Sermaye stoku zamanın bir fonksiyonu olarak gösterilebilir: K(t). Bu durumda sermaye oluşum hızı, sermayenin zamana göre türevidir: $d\dot{K} = dK/dt$. Ve sermaye oluşum hızı, yatırım hızı I(t) ile özdeştir. $d\dot{K} = dK/dt \equiv I(t) \Rightarrow$ ve $K(t) = \int I(t)dt$

Örnek : Yatırım akımı $I(t) = 4t^{1/2}$ ise ve başlangıç sermaye stoku K(0) ise sermayenin zaman patikası nedir? K(t) = ?

$$K(t) = \int I(t)dt = \int 4t^{1/2}dt = 4\frac{1}{1+\frac{1}{2}}t^{1+\frac{1}{2}} + c = \frac{8}{3}t^{3/2} + c$$

Başlangıç sermayesi K(0), t = 0 iken K'nın aldığı değerdir:

$$t = 0 \Rightarrow K(t) = c = K(0),\ \ K(t) = \frac{8}{3}t^{3/2} + K(0)$$

K'nın zaman patikası yerine bir zaman aralığında sermaye oluşum miktarı bulmak istenirse belirli integral kullanılmalıdır. Eğer [a,b] aralığındaki sermaye birikimi bulunmak istenirse,

$\int_a^b I(t)dt = K(t)]_a^b = K(b) - K(a)$ belirli intergali yazılabilir.

Örnek : Önceki örnekte t = 1 ile t = 3 aralığında sermaye oluşumu ne olacaktır?

$$\int_1^3 I(t)dt = \int_1^3 4t^{1/2}\,dt = \frac{8}{3}3^{3/2} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}(\sqrt{27} - 1)$$

Bir Nakit Akımının Şimdiki Değeri

Gelecekte elde edilecek tek bir V değerinin indirgenmesi ile elde edilen bugünkü değer formülleri,

$A = V(1+i)^{-t}$ (kesikli zaman)

$A = Ve^{-rt}$ (sürekli zaman)

şeklindedir. Şimdi, gelecekteki nakit akımları toplamının bugünkü değerini bulmaya çalışacağız.

Örnek : 3 yıl boyunca elde edilecek yıllık hasılat değerlerini biliyoruz diyelim: R_t (t=1,2,3). Yıllık faiz oranını i olduğunu varsayalım

1. yılın hasılatının bugünkü değeri : $R_1 (1+i)^{-1}$

2. yılın hasılatının bugünkü değeri : $R_2 (1+i)^{-2}$

3. yılın hasılatının bugünkü değeri : $R_3 (1+i)^{-3}$

Üç yıl boyunca elde edilecek toplam hasılat $\pi = \sum_{t=1}^{3} R_t (1+i)^{-t}$ şeklindedir.

Kesikli zaman yerine sürekli zaman söz konusu ise $(1+i)^{-t}$ yerine e^{-rt} ve $\sum_{t=1}^{3}$ yerine $\int_0^3$ geçer. Burada alt sınır 1 değil 0 ile gösterilmiştir. Çünkü kesikli durumda hasılat t = 1 yılının sonunda elde edilirken, sürekli durumda t = 1 yılının başından itibaren yani t = 0'ın sonundan itibaren elde edilmeye başlar. Böylece üç yıllık bir akımının toplam şimdiki değeri, $\pi = \int_0^3 R(t)e^{-rt}dt$'dir.

Örnek: Diyelim ki her yıl D TL.'lik bir nakit akımı olduğunu biliyoruz. Sürekli indirgeme söz konusu ise y yıl boyunca elde edilen toplam gelirin bugünkü değeri:

$$\pi = \int_0^y De^{-rt}dt = D\left[\frac{-1}{r}e^{-rt}\right]_0^y = \frac{-D}{r}\left[e^{-ry} - e^0\right] = \frac{D}{r}\left(1-e^{-ry}\right)$$

Örneğin yıl başında gelir akımı D = 2000 TL., faiz oranı r = %10 ise 5 yıl boyunca (y = 5) elde edilen toplam gelirin bugünkü değeri $\pi = \frac{2000}{0.1}(1-e^{(-0.1)5}) = 20{,}000(1-e^{-0.5})$ dir.

Örnek: Eğer nakit alımı sonsuza kadar sürüyorsa yani daimi nakit alımı söz konusu ise

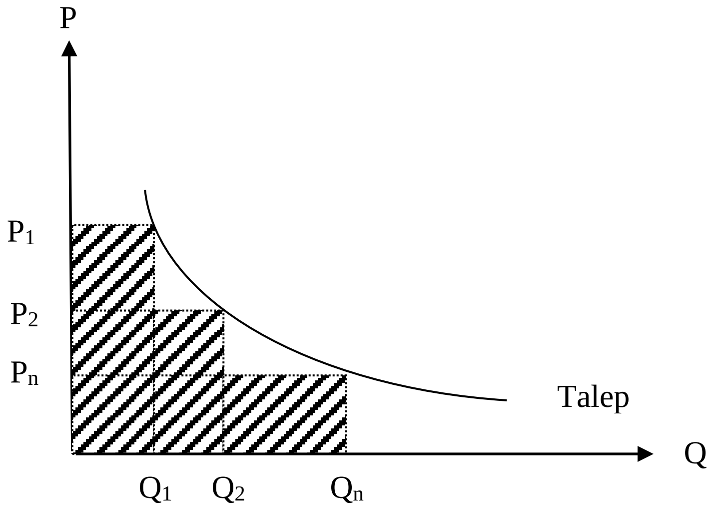
$$\pi = \int_0^\infty De^{-rt}dt = \lim_{y\to\infty} \int_0^y De^{-rt}dt = \lim_{y\to\infty} \frac{D}{r}\left(1 - \frac{1}{e^{ry}}\right) = \frac{D}{r}$$

biraz önceki örnekte D = 2000, r = 0.10 $\Rightarrow$ $\pi = 20{,}000$

Tüketici ve Üretici Fazlası

Tüketici Fazlası

Tüketici fazlası, tüketicinin belli bir malı belli bir fiyata satın almasıyla elde ettiği net faydadır. Diyelim ki bir malın talep fonksiyonu Q = f(P) şeklindedir (burada Q talep düzeyini, P fiyatı gösterir). Talep fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir.



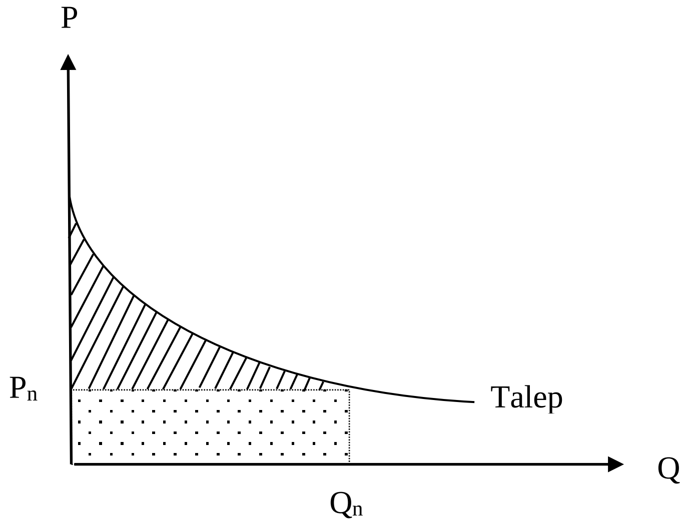
Bir tüketici belli bir maldan Q_n birim satın aldığında, satın aldığı son birim için P_n TL fiyat ödemeye razıdır. Ancak daha önceki tüm birimler için ödemeye razı olduğu fiyatlar P_n'den yüksektir. Örneğin satıcı malı küçük miktarlar halinde satıyor olsaydı, ilk Q_1 birim malın her bir birimini P_1 TL'den satabilirdi. Bu durumda tüketicinin toplam masrafı $P_1Q_1 = f(Q_1)Q_1$ TL kadar olurdu. Benzer bir şekilde ikinci parti ($Q_2 - Q_1 = \Delta Q_2$ birim) malın ise her bir birimini P_2 TL'den satabileceğinden tüketicinin bu parti mala ödeyeceği toplam miktar $P_2\Delta Q_2 = f(Q_2)\Delta Q_2$, iki parti mal için ödeyeceği toplam miktar $P_1(Q_1 - 0) + P_2(Q_2 - Q_1) = f(Q_1)\Delta Q_1 + f(Q_2)\Delta Q_2$ TL kadar olurdu. Bu toplam harcama miktarı yukarıdaki şekildeki taralı alan ile gösterilmiştir. Bu süreç Q_n'e kadar devam ettirildiğinde tüketicinin yapacağı toplam harcama düzeyi $\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\, \Delta Q_i$ ile gösterilir. Bu düzey, tüketicinin ödemeye razı olduğu toplam harcama miktarıdır. Eğer ΔQ_i çok küçük ise toplam harcama düzeyi $\int_0^{Q_n} f(Q)dQ$ kadardır ve grafikte Q_n'e kadar talep eğrisinin altında kalan alan ile gösterilir (aşağıdaki şekilde taralı ve noktalı alanların toplamı).

Diğer yandan Q_n miktarının tümü P_n fiyatından satıldığından dolayı tüketicinin gerçekte yapacağı toplam harcama düzeyi P_nQ_n kadardır (şekildeki noktalı alan). Ödemeye razı olduğu miktar ile ödediği miktar arasındaki fark ise tüketici fazlası olarak adlandırılır.

Böylece, tüketici fazlası TF = $\left\{\int_0^{Q_n}[f(Q)dQ]\right\} - P_nQ_n$ kadardır. Diğer bir gösterimle,

TF = $\int_0^{Q_n}(f(Q) - P_n)dQ$

Bu miktar aşağıdaki şekilde taralı alan kadardır.



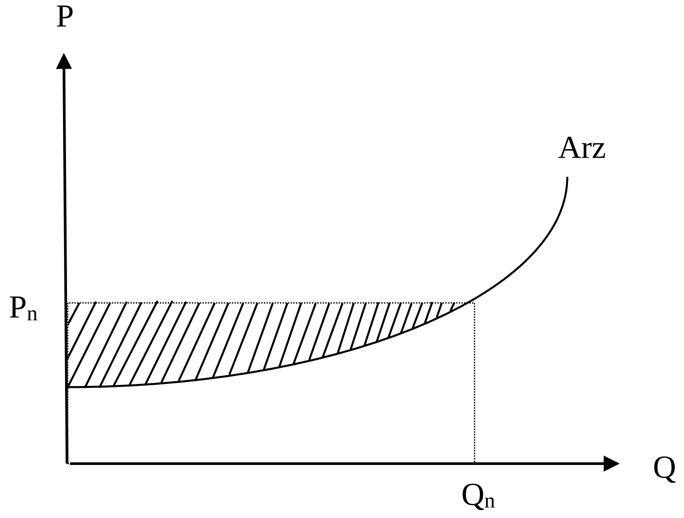
Örnek: Talep fonksiyonu P = 10 – 2Q ise satış miktarı 3 birim iken tüketici fazlasını hesaplayınız.

Q_n = 3 birim mal piyasada P_n = 4 TL'den satılır.

TF = $\int_0^3(10 - 2Q - 4)dQ = \int_0^3(6 - 2Q)dQ = 6Q - Q^2]_0^3 = 9$ TL.

Üretici Fazlası

Üretici fazlası da tüketici fazlasına benzer bir kavramdır. Üreticinin malı satmaya razı olduğu fiyatın üstünde bir fiyat elde etmesi durumunda elde ettiği ile elde etmeye razı olduğu toplam kazanç arasındaki fark üretici fazlasıdır. Bu fazla aşağıdaki şekilde taralı alan ile gösterilmiştir.



Üretici fazlası (ÜF) da tüketici fazlasına benzer bir şekilde integral kullanılarak hesaplanabilir. Arz fonksiyonu P = g(Q) ise üreticinin elde etmeye razı olduğu toplam miktar arz eğrisinin altında kalan alan ($\int_0^{Q_n} g(Q)dQ$), elde ettiği toplam miktar P_nQ_n kadardır. Böylece üretici fazlası ÜF = $P_nQ_n - \int_0^{Q_n} g(Q)dQ$ ile bulunabilir. Diğer bir gösterimle,

ÜF = $\int_0^{Q_n}(P_n - g(Q))dQ$

Örnek: Arz fonksiyonu P = 5 + Q ise satış miktarı Q_n = 2 iken üretici fazlasını hesaplayınız.

Q_n = 2 iken satıcı her bir birimini P_n = 7 TL'ye satar.

ÜF = $\int_0^2(7 - 5 - Q)dQ = \int_0^2(2 - Q)dQ = 2Q - \frac{1}{2}Q^2]_0^2 = 2$ TL.

Örnek: Bir mal için talep fonksiyonu P = 12 – 0.25Q ve arz fonksiyonu P = 10.5 + 0.5Q ise piyasa dengesinde tüketici ve üretici fazlasını hesaplayınız.

Dengede arz talebe eşit olmalı. Bu nedenle:

12 – 0.25Q = 10.5 + 0.5Q

Bu eşitliği sağlayan Q ve P düzeyleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$\overline{Q} = Q_n = 2, \quad \overline{P} = P_n = 11.5$ dir.

TF = $\int_0^2 (12 - 0.25Q - 11.5)dQ = 0.5Q - 0.125Q^2]_0^2 = 0.5$ TL.

ÜF = $\int_0^2 (11.5 - 10.5 - 0.5Q)dQ = Q - 0.25Q^2]_0^2 = 1$ TL.