特殊函数 (一)

OnceBeta

2024 年 8 月 18 日

Email: OnceBeta@hotmail.com

本文为科普性文章，内容主要为采用积分、级数的方法对一些重要特殊函数的性质进行研究或讨论，背景知识的范围一般局限于初等数学、数学分析及复变函数论，唯一超纲的部分在于对黎曼论文的介绍部分，涉及到少部分解析数论方面的内容，但仅局限于简单介绍，读者在阅读时也可选择直接跳过该部分。此外，由于文章结构安排及篇幅长短问题，文中会对严谨性较高的内容进行一定压缩，只保留重要的技术细节。

这是该系列文章的第一卷，内容主要包括 Bernoulli 数和 Euler 数、Gamma 函数和 Polygamma 函数、黎曼 Zeta 函数、Beta 函数四大部分，也可按下文目录部分进行进一步区分。这些函数 (数列) 均是基础数学中十分重要的内容，甚至在物理学等其他自然科学学科中也常常出现。这里主要对它们的定义和一些重要性质进行简单的介绍，并尽量还原它们在数学史上的一些细节。在最后的习题部分，我安排了一些简单的题目，内容均是与对应章节的内容相关的，读者可以通过它们检验自己对文章内容的掌握程度。

最后，由于笔者尚且才疏学浅，行文过程也略微仓促，如有谬误敬请指出。

OnceBeta 于上海市浦东新区

2024 年 8 月

目录

1 Bernoulli 数 **3**

1.1 定义 3

1.2 性质 3

2 Euler 数 **4**

3 Gamma 函数 **5**

3.1 简介 5

3.2 定义 5

3.2.1 积分定义 5

3.2.2 其他定义 6

3.3 性质 6

3.3.1 基本性质 6

3.3.2 余元公式 7

3.3.3 勒让德公式和高斯公式 8

3.3.4 斯特林公式 8

3.4 欧拉-马歇罗尼常数 8

3.5 特殊值 10

4 黎曼 Zeta 函数 **10**

4.1 定义 10

4.2 性质 11

4.3 函数方程 12

4.4 黎曼 Xi 函数 13

4.5 关于素数分布和黎曼猜想 13

5 Polygamma 函数 **14**

5.1 定义 14

5.2 性质 15

5.3 级数展开式 16

5.4 特殊值 16

6 Beta 函数 **17**

6.1 定义 17

6.2 性质 17

6.3 特殊值 18

6.4 沃利斯积分 18

7 习题 **19**

1 Bernoulli 数

1.1 定义

Bernoulli 数是在解决一个古老的数学问题时发现的，雅各布 • 伯努利 (Jakob Bernoulli, 1654-1705) 在试图找到方幂和：

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + \cdots + n^m$$

的通项公式时偶然发现了这一序列。

定义 1. 伯努利数 B_k 定义为下述幂级数的系数：

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \tag{1}$$

1.2 性质

定理 1. 对于 $k = 1, 2, \cdots$：

$$B_{2k+1} = 0 \tag{2}$$

证明. 注意到：

$$\begin{aligned}
\frac{x}{e^x - 1} - B_1 x &= \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} \\
&= \frac{2x + x(e^x - 1)}{2(e^x - 1)} \\
&= \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\
&= \frac{x}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}
\end{aligned}$$

为偶函数，则 $\frac{x}{e^x-1}$ 的幂级数展开式中除 B_1 外的奇数项系数都为 0。 □

定理 2.

$$\cot x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{2k} \frac{2^{2k} x^{2k-1}}{(2k)!} \tag{3}$$

证明. 由：

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!}$$

可得：

$$\frac{e^{-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{1}{e^{ix} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k (ix)^{k-1}}{k!}$$

代换 $x \mapsto 2x$ 可得：

$$\frac{e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k (2ix)^{k-1}}{k!}$$

即：

$$\frac{1}{2i}\cot x-\frac{1}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(2ix)^{k-1}}{k!}$$

由于 $B_0=1,B_1=-\frac{1}{2},B_3=B_5=\cdots=0$：

$$\frac{1}{2i}\cot x=\frac{1}{2ix}+\sum_{k=1}^{\infty}B_{2k}\frac{(2ix)^{2k-1}}{(2k)!}$$

故：

$$x\cot x=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kB_{2k}\frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}$$

□

定理 3.

$$\tan x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}B_{2k}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)x^{2k-1}}{(2k)!} \tag{4}$$

证明.

$$\begin{aligned}\tan x&=\cot x-2\cot(2x)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kB_{2k}\frac{2^{2k}x^{2k-1}}{(2k)!}-2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kB_{2k}\frac{2^{2k}(2x)^{2k-1}}{(2k)!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kB_{2k}\frac{2^{2k}(1-2^{2k})x^{2k-1}}{(2k)!}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}B_{2k}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)x^{2k-1}}{(2k)!}\end{aligned}$$

□

2 Euler 数

另一个重要的特殊数列是欧拉数 (Euler Number)，它是由欧拉在研究 $\sec x$ 和 $\operatorname{sech} x$ 时所发现的一个数列。与 $\tan x$ 和 $\cot x$ 类似，$\sec x$ 和 $\operatorname{sech} x$ 也不具有简单的幂级数展开式系数。由于欧拉在这方面所做出的贡献，我们把 $\operatorname{sech} x$ 幂级数展开式系数相关的一个数列称为欧拉数：

定义 2. 设 $\operatorname{sech} x$ 具有如下形式的幂级数展开式：

$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^t+e^{-t}}=\sum_{k=0}^{\infty}E_k\frac{x^k}{k!} \tag{5}$$

其中 $E_n,n\in\mathbb{N}$ 称为欧拉数 *(Euler Number)*。

由于 $\operatorname{sech} x$ 是偶函数，故其幂级数展开式不含奇数项，所以下面的定理是显然的：

定理 4. 对于 $k=0,1,2,\cdots$：

$$E_{2k+1}=0 \tag{6}$$

此外，$\sec x$ 的幂级数展开式也可以用 E_k 进行表示。特别地，我们有下面的定理：

定理 5.

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k E_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, |x| < \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

证明.

$$\begin{aligned}\sec x = \operatorname{sech}(ix) = \frac{2}{e^t + e^{-t}} &= \sum_{k=0}^{\infty} E_k \frac{(ix)^k}{k!} \\ = \frac{2}{e^t + e^{-t}} &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k E_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

□

3 Gamma 函数

3.1 简介

Gamma 函数最早是由瑞士著名数学家欧拉 (Euler, 1707-1783) 在解决阶乘的解析延拓问题时引入的。由于其在各个领域的重要性，后续又有许多数学家对它的性质进行了大量研究，在这方面做出杰出贡献的数学家包括勒让德 (Legendre, 1752-1833)、高斯 (Gauss, 1777-1855) 等。与许多初等函数不同的是，Gamma 函数是一个特殊函数，且并不能由基本初等函数表出。此外，Gamma 函数与一些其他的特殊函数，如黎曼 Zeta 函数、超几何函数具有十分密切的联系；由于这些原因，它也在解析数论等领域有着十分重要的应用。

3.2 定义

3.2.1 积分定义

Gamma 函数有多种定义方式，它们分别适用于不同的场合和定义域。其中，它的最广为人知的定义是由下面的定积分给出的：

定义 3. 对于 $\mathrm{Re}(z) > 0$：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx \tag{8}$$

若在上式中作换元 $x \mapsto -\log(x)$，则可以得到另一种常见的积分表达，它也是欧拉最初给出的 Gamma 函数的表达式：

定义 4. 对于 $\mathrm{Re}(z) > 0$：

$$\Gamma(z) = \int_0^{1} \left(-\log(x)\right)^{z-1} dx \tag{9}$$

3.2.2 其他定义

此外，Gamma 函数还有多种其他定义方式。如在给哥德巴赫 (Goldbach) 的一封回信中，他曾写到下面的一种基于无穷乘积的定义：

定义 5. 对于 $\mathrm{Re}(z) > 0$，写：

$$\Gamma_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{n^z}{z(1+z/1)\cdots(1+z/n)} \tag{10}$$

则

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(z) \tag{11}$$

容易发现，用这种方式定义的 Gamma 函数，对于 $\mathrm{Re}(z) \le 0$ 也是良好的，除了在 $z = 0, -1, -2, \cdots$ 处存在单极点。因此，Gamma 函数事实上是复平面上的亚纯函数。

魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 曾对 Gamma 函数的这一定义进行过深入研究，并给出了它的另一种无穷乘积公式。他的工作始于对下述关系的洞察：

$$k^z = e^{z\log k} = e^{z(\log k - 1 - 1/2 - \cdots - 1/k)} e^{z + z/2 + \cdots + z/k}$$

故：

$$\begin{aligned}\Gamma_k(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{z+1}\frac{2}{z+2}\cdots\frac{k}{z+k}p^z = \frac{e^{z(\log k-1-1/2-\cdots-1/k)}e^{z+z/2+\cdots+z/k}}{z(1+z)(1+z/2)\cdots(1+z/k)}\\ &= e^{z(\log k-1-1/2-\cdots-1/k)}\frac{1}{z}\frac{e^z}{1+z}\frac{e^{z/2}}{1+z/2}\cdots\frac{e^{z/k}}{1+z/k}\end{aligned}$$

当 $k \to \infty$ 时，指数项中的 $\log k - 1 - 1/2 - \cdots - 1/k$ 一项其极限是收敛的，它被称为欧拉-马歇罗尼常数 (Euler-Mascheroni Constant)，即：

$$\gamma = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{k} - \log k\right) \tag{12}$$

这就给出了 Gamma 函数的魏尔斯特拉斯无穷乘积公式：

定理 6. 对于 $\mathrm{Re}(z) \ne 0, -1, -2, \cdots$：

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \tag{13}$$

3.3 性质

3.3.1 基本性质

我们先从它的一个显然的性质开始：

定理 7.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1 \tag{14}$$

此外，对于 $\mathrm{Re}(z) > 0$，由分部积分法可得：

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^z dx = \left[e^{-x} x^z\right]_0^\infty + \int_0^\infty z e^{-x} x^{z-1} dx = z\Gamma(z)$$

由此可得：

定理 8. 对于 $\mathrm{Re}(z) > 0$：

$$\Gamma(z) = z\Gamma(z) \tag{15}$$

至此便证明了，Gamma 函数确实是阶乘的一个解析延拓，即对于 $n \in \mathbb{Z}$，$\Gamma(n+1) = n!$。一个显然的事实是，这样的解析延拓并不是唯一的，因为我们很容易发现，$\cos(2\pi z)\Gamma(z)$ 也满足这样的性质。但是，丹麦数学家 Bohr 和 Mollerup 证明了下述定理，表明 Gamma 函数确实是阶乘最典型的解析延拓。

定理 9. *满足以下三个性质的函数* $f : (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ *是唯一的：*

(1). $f(1) = 1$；

(2). $f(x) = xf(x)$；

(3). $\log f(x)$ *是凹函数。*

且 Gamma 函数是唯一满足以上性质的函数。

3.3.2 余元公式

余元公式是 Gamma 函数十分重要的一个性质，从 Gamma 函数的魏尔斯特拉斯无穷乘积公式可得：

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{1}{\Gamma(-z)} = -z^2 e^{\gamma z} e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \left(1-\frac{z}{k}\right) e^{z/k}\right]$$

由此可得：

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{1}{\Gamma(1-z)} = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$

这就给出了 Gamma 函数的余元公式：

定理 10. *对于* $z \neq 0, -1, -2, \cdots$ *且* $1 - z \neq 0, -1, -2, \cdots$：

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{16}$$

在历史上，这一公式最早是由欧拉发现的，但在当时他所采用的证明方法要复杂得多。由余元公式，我们可以得到 Gamma 函数的一个重要函数值：

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

3.3.3 勒让德公式和高斯公式

下述公式是由勒让德发现的，它也可以很容易地从魏尔斯特拉斯无穷乘积公式得出：

定理 11. *对于* $z \neq 0, -1, -2, \cdots$ *且* $z + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \cdots$：

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z) \tag{17}$$

此外，高斯发现了勒让德公式的一种更广义情形：

定理 12. *对于正整数* $n \geq 2$：

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{n})\cdots\Gamma(z+\frac{n-1}{n}) = (2\pi)^{(n-1)/2}n^{(1/2)-nz}\Gamma(nz) \tag{18}$$

其中左边 Gamma 函数均不取非正的偶数值。

这一性质也可以由魏尔斯特拉斯无穷乘积公式证得。

3.3.4 斯特林公式

当 n 的数值很大时，$n!$ 的值通常变得很大且难以计算，研究阶乘的渐近性质就成为了一个重要的问题。历史上在这一方面有突出贡献的是斯特林 (Stirling, 1692-1730)，他发现：

定理 13. *当正整数* $n \to \infty$ *时*：

$$n! = \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n \tag{19}$$

由于斯特林公式将阶乘的运算近似为纯代数的运算，且其精度非常高，因此在自然科学的许多领域都有重要的应用。在斯特林公式的基础上，一个更为精密的渐近展开式是：

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n}-\frac{139}{51840n}-\frac{571}{2488320n}+\cdots\right)$$

3.4 欧拉-马歇罗尼常数

在推导 Gamma 函数的无穷乘积公式 (13) 时，我们引入了欧拉-马歇罗尼常数。这里对它进行进一步地讨论。首先，我们给出极限 γ 的存在性证明：

定理 14. *极限*

$$\gamma = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{k}-\log k\right) \tag{20}$$

存在且收敛。

证明. 考虑级数：

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$

不难发现：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}+\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

而 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛，故由比值判别法可知该级数收敛。另一方面，注意到该级数的部分和即为 $\gamma-1$：

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}+\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)+\left(\log\left(\frac{1}{2}\right)+\log\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log\left(\frac{1}{N}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N\end{aligned}$$

故极限 $\gamma=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{k}-\log k\right)$ 存在。 □

级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p},p\in\mathbb{Z}^+$$

又被称为 p 级数。当 $p=1$ 时即为著名的调和级数 (Harmonic Series)，其部分和 H_n 也被称为调和数 (Harmonic Number)。调和级数最早在 14 世纪被法国数学家奥雷姆 (Oresme, 1325-1382) 证明发散，而欧拉则发展了这一成果，他证明了：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\log n+\gamma+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

欧拉-马歇罗尼常数 γ 也是由此得名。p 级数在数学分析中极为重要，利用它可以通过比较审敛法判断许多其他无穷级数和反常积分的敛散性。

此外，欧拉-马歇罗尼常数本身也是数学分析中一个非常重要的常数，它具有多种积分表示，这里对其中一种进行证明：

定理 15.

$$\gamma=\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}dx-\int_1^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx \tag{21}$$

证明. 注意到：

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

作代换 $x\mapsto x/n$ 可得：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx\\&=\int_0^n\frac{1-(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx\\&=\int_0^1\frac{1-(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx+\int_1^n\frac{1-(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx\\&=\int_0^1\frac{1-(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx+\int_1^n\frac{1}{x}dx-\int_1^n\frac{(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx\\&=\int_0^1\frac{1-(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx-\int_1^n\frac{(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx+\log n\end{aligned}$$

故：

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}-\log n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{1-(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx-\int_1^n \frac{(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx\right)\\ &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx-\int_1^n \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{x}{n})^n}{x}dx\\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx-\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx\end{aligned}$$

□

该积分也可以通过下文中介绍到的欧拉-马歇罗尼积分得到。

3.5 特殊值

由余元公式，我们可以简单地得到：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

继而有：

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4 黎曼 Zeta 函数

4.1 定义

解析数论中和 Gamma 函数密切相关的另一个特殊函数是黎曼 Zeta 函数，因德国数学家黎曼 (Riemann, 1826-1866) 对它和素数定理进行了开拓性的研究而得名。黎曼 Zeta 函数的经典定义源于对 p 级数的扩充：

定义 6. 对于 $\mathrm{Re}(z)\geq 1$：

$$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z} \tag{22}$$

黎曼 Zeta 函数 (p 级数) 本身便是数学分析中一个相当重要的级数，而欧拉证明的下述定理，首次将黎曼 Zeta 函数同素数也联系起来，为后续解析数论的大量工作奠定了基础。

定理 16 (欧拉乘积公式)**.**

$$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}=\prod_{p\ prime}\frac{1}{1-p^{-z}} \tag{23}$$

证明. 注意到：

$$\frac{1}{2^z}\zeta(z)=\frac{1}{2^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{6^z}+\frac{1}{8^z}+\frac{1}{10^z}+\cdots$$

则：

$$\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)=1+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{7^z}+\frac{1}{9^z}+\frac{1}{11^z}+\cdots$$

对 3 重复上面的步骤可得：

$$\frac{1}{3^z}\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)=\frac{1}{3^z}+\frac{1}{9^z}+\frac{1}{15^z}+\frac{1}{21^z}+\frac{1}{27^z}+\cdots$$

减去这些项：

$$\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)=1+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{7^z}+\frac{1}{11^z}+\frac{1}{13^z}+\frac{1}{17^z}+\cdots$$

对所有素数重复以上步骤，最终可得：

$$\zeta(z)\prod_{p\ \text{prime}}\left(1-p^{-z}\right)=1$$

□

后来，黎曼在欧拉工作的基础上，首先将 Zeta 函数的定义域延拓到了复平面的右半边 $\operatorname{Re} z>1$。他首先注意到：

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx=\int_0^\infty ke^{-kx}(kx)^{z-1}dx=k^z\int_0^\infty e^{-kx}x^{z-1}dx$$

这意味着：

$$\frac{1}{k^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty x^{z-1}e^{-kx}dx$$

对上式求和可得：

$$\begin{aligned}\zeta(z)&=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty x^{z-1}\left(\sum_{k=1}^\infty e^{-kx}\right)dx\\&=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty x^{z-1}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-1\right)dx\end{aligned}$$

上式右边的积分在复平面的右半边 $\operatorname{Re} z>1$ 内收敛，该定义也称为黎曼 Zeta 函数的第一积分形式：

定义 7. 对于 $\operatorname{Re} z>1$：

$$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{e^x-1}dx \tag{24}$$

4.2 性质

除了欧拉乘积公式，欧拉还对黎曼 Zeta 函数进行了大量的研究，他的另一项重要成果是解决了该函数在正偶数点处的值的问题。

定理 17. 对于 $n\in\mathbb{Z}^+$：

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n} \tag{25}$$

证明. 由 $\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(k\pi)^2}\right), |x|<\pi$ 可得：

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-k^2\pi^2}$$

即：

$$x\cot x = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2-k^2\pi^2}$$

另一方面，注意到：

$$\frac{x^2}{x^2-k^2\pi^2} = -\frac{\frac{x^2}{k^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^n$$

代入得：

$$\begin{aligned} x\cot x &= 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^n \\ &= 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^n \\ &= 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}} \\ &= 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}} \end{aligned}$$

而由 $\cot x$ 的幂级数展开式可得：

$$x\cot x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_{2n}\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$$

比较 x^{2n} 项的系数即得所证。 □

由上面的定理可以很容易地求出 $\zeta(2n), n=1,2,\cdots$ 的值，其中当 $n=1$ 时就是著名的巴塞尔问题 (Basel Problem)，即：

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

然而遗憾的是，对于奇数点处的黎曼 Zeta 函数值 $\zeta(2n), n=1,2,\cdots$ 却似乎并不存在一个这样的通项公式，这使得我们难以对这些数值进行深入的研究，如在 $\zeta(2n+1), n=1,2,\cdots$ 的无理性研究上，目前只证明了 $\zeta(3)$ 和 $\zeta(5)$ 是无理数。

4.3 函数方程

定理 18.

$$\zeta(z) = 2^z\pi^{z-1}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(1-z)\zeta(1-z) \tag{26}$$

证明. 注意到：

$$\frac{1}{k^z}\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \int_0^{\infty}e^{-k^2\pi x}x^{z/2-1}dx, \mathrm{Re}\, z > 1$$

记

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \pi x}$$

则两边同时对 k 求和可得：

$$\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \int_0^{\infty} \phi(x) x^{z/2-1} dx$$

注意到：

$$\frac{1+2\phi(x)}{1+2\phi(1/x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

由分部积分法可得：

$$\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \int_1^{\infty} \phi(x)(x^{z/2} + x^{(1-z)/2})\frac{dx}{x} + \frac{1}{z(1-z)}$$

上式右边在代换 $z \mapsto 1-z$ 下不变，故：

$$\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \pi^{-(1-z)/2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)$$

即得所证。 □

4.4 黎曼 Xi 函数

观察黎曼 Zeta 函数的函数方程证明过程，我们可以构建一个函数使其关于 $\mathrm{Re}\, z = 1$ 的直线对称，即：

定理 19. 对于 $z \neq 0, 1$，黎曼 Λ 函数定义如下：

$$\Lambda(z) = \pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{27}$$

满足：

$$\Lambda(z) = \Lambda(1-z) \tag{28}$$

但按上述方式定义的黎曼 Λ 函数在 $z = 0, 1$ 处有单极点，我们可以通过乘一个多项式 $z(z-1)$ 简单地消除这两个极点，使其成为复平面上的全纯函数。这就是正则化的黎曼 ζ 函数：

定理 20. 对于 $z \in \mathbb{C}$，黎曼 ξ 函数定义如下：

$$\xi(z) = \frac{1}{2}\pi^{-z/2} z(z-1)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{29}$$

满足：

$$\xi(z) = \xi(1-z) \tag{30}$$

4.5 关于素数分布和黎曼猜想

在近代数学的发展史中，有关素数分布的问题，一直是解析数论的核心课题之一。黎曼 Zeta 函数的欧拉乘积公式，若隐若现地揭示了这一函数和素数分布的密切联系。然后，黎曼在他的著名 8 页论文《论小于给定数值的素数个数》(德文：Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse) 和一些未发表的手稿中，对该领域进行了史无前例的开拓性研究。具体地说，黎曼的工作主要包括：

- 黎曼 Zeta 函数的解析开拓；
- 正则化的黎曼 Zeta 函数，即黎曼 Xi 函数 $\xi(z)$；
- 黎曼 Xi 函数的积分表示，也称黎曼 Zeta 函数的第二积分表示；
- 黎曼 Zeta 函数的第三积分表示；
- 指出黎曼 Zeta 函数的零点分布，即黎曼 Zeta 函数的零点除了位于负偶数点处的平凡零点 (Trivial Zeros)，还有无穷多个零点位于带状区域 $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ 中，该带状区域也被称为临界带 (Critical Region)；
- 初步估计了虚部介于 0 和 T 之间的非平凡零点数量。即黎曼-曼戈尔特公式 (Riemann-von Mangoldt Formula)：
$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T)$$
- 给出计算黎曼 Xi 函数值的方法，即黎曼-西格尔公式 (Riemann-Siegel Formula)；
- 定义了黎曼素数计数函数 $\Pi_0(x)$，并揭示了它和黎曼 Zeta 函数的联系。

黎曼的工作将黎曼 Zeta 函数同素数分布紧密联系起来，在当时是开创性的，但其正确性也在之后的研究中被多次验证。在 1896 年，在阿达玛 (Hadamard) 和普桑 (Poussin) 对素数定理 (Prime Number Theorem) 的证明当中，就用到了许多复分析的定理，这一工作同时也证明了黎曼 Zeta 函数的非平凡零点不可能位于直线 $\operatorname{Re} z = 0$ 和 $\operatorname{Re} z = 1$ 上，再次揭示了黎曼 Zeta 函数和素数分布的密切联系。

定理 21 (素数定理). 对于 $x \in \mathbb{R}^+$，素数计数函数 $\pi(x)$ 表示不大于 x 的素数个数。则当 $x \to \infty$ 时：
$$\pi(x) \sim \frac{\log x}{x}$$

黎曼在他的论文中还指出：黎曼 Zeta 函数的非平凡零点很可能全部位于直线 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 上(临界线, Critical Line)。这也就是著名的黎曼猜想 (Riemann Hypothesis, RH)。如果这一猜想被证明，将给素数分布理论方面带来新的重大进展。这一猜想的成立与否，对基础数学和物理学、密码学等许多学科而言至关重要。为了激励数学界人士重视这一方面的工作，克雷数学研究所 (Clay Mathematics Institute, CMI) 设立了一项 $ 1,000,000 美元的基金，奖励第一个证明或证否黎曼猜想的人。

5 Polygamma 函数

5.1 定义

与 Gamma 函数关系最为密切的另一类特殊函数是 Polygamma 函数，它们在数学上同样有许多重要应用。所谓 Polygamma 函数是 Gamma 函数的各阶对数导数：

定义 8. 对于 $z \neq 0, -1, -2, \cdots$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$：
$$\Psi_n(z) = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \left(\log \Gamma(z)\right) \tag{31}$$

其中，当 $n=0$ 时，$\Psi(z)=\Psi_0(z)=\frac{d}{dz}(\log\Gamma(z))$ 通常被称为 Digamma 函数。

我们从 Gamma 函数的无穷乘积公式 (13) 出发，可以得到：

$$\begin{aligned}\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}&=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right)\\&=-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k-1}\right)\\&=-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z-1}{k(z+k-1)}\end{aligned}$$

同样地，上式当 $z\neq 0,-1,-2,\cdots$ 时有效。我们对上式求导可以进而得到：

$$\begin{aligned}\Psi_1(z)=\Psi'(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+z-1)^2}\\\Psi_2(z)=\Psi''(z)&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+z-1)^3}\\&\vdots\\\Psi_n(z)=\Psi^{(n)}(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{(k+z-1)^n}\end{aligned}$$

即：

定理 22. 对于 $z\neq 0,-1,-2,\cdots$ 和 $n\in\mathbb{Z}^+$：

$$\Psi_n(z)=\Psi^{(n)}(z)=\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}(\log\Gamma(z))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{(k+z-1)^n} \tag{32}$$

这一定理对于我们研究 Polygamma 函数的性质而言是十分重要的。

5.2 性质

Digamma 函数的许多性质都可由 Gamma 函数的性质得出，如对 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 两端取对数可得：

$$\log\Gamma(z+1)=\log z\log\Gamma(z)$$

求导可得：

$$\Psi(z+1)=\frac{1}{z}+\Psi(z)$$

这就是 Digamma 函数的递归公式。同样地，我们也可以用类似的方法得到 Digamma 函数的余元公式与倍元公式。

定理 23.

$$\Psi(z+1)=\Psi(z)+\frac{1}{z} \tag{33}$$

$$\Psi(1-z)=\Psi(z)+\pi\cot\pi z \tag{34}$$

$$\Psi(2z)=\frac{1}{2}\Psi(z)+\frac{1}{2}\Psi\left(z+\frac{1}{2}\right)+\log 2 \tag{35}$$

对于高阶 Polygamma 函数 $\Psi_n(z)$，类似的性质可以由 Digamma 函数的性质求微分得到：

$$\Psi_n(z+1)=\Psi_n(z)+\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \tag{36}$$

5.3 级数展开式

注意到：

$$\frac{1}{1+z}-1=-\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k z^{k-1}$$

我们可以立即得到：

定理 24.

$$\Psi(z+1)=-\gamma+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\zeta(k)z^{k-1},|x|<1 \tag{37}$$

$$=-\frac{1}{1-z}-(\gamma-1)+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(\zeta(k)-1)z^{k-1},|x|<1 \tag{38}$$

逐项积分之，我们又可以得到：

$$\log(\Gamma(z+1))=-\gamma z+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\zeta(k)\frac{z^k}{k},|x|<1 \tag{39}$$

$$=-\log(z+1)-(\gamma-1)z+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(\zeta(k)-1)\frac{z^k}{k},|x|<1 \tag{40}$$

5.4 特殊值

上面已经提到了欧拉-马歇罗尼常数 γ 的定义，它和 Gmma 函数、Polygamma 函数有着及其密切的联系，下面将进一步讨论该常数的积分表示及一些性质。首先，对 (8) 积分号下求导可得：

$$\Gamma'(z)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{z-1}\log x dx$$

更进一步地有：

$$\Gamma^{(n)}(z)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{z-1}\log^n x dx, n\in\mathbb{N} \tag{41}$$

上式也称为欧拉-马歇罗尼积分 (Euler-Mascheroni Integrals)。由此可以得到 γ 一个重要的积分表示：

$$\gamma=-\Gamma'(1)=-\int_0^{\infty}e^{-x}\log x dx \tag{42}$$

这是由于 $\Gamma'(1)=\Psi(1)=-\gamma$。

下面我们讨论 Polygamma 函数的一些特殊值。首先，由 (32) 可得：

$$\Psi_n(1)=(-1)^{n+1}n!\zeta(n+1)$$

此外，由 Digamma 函数的性质可得：

$$\Psi(n)=\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=-\gamma+\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}=-\gamma+H_{n-1}, n=2,3,\cdots$$

其中

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, n \in \mathbb{Z}^+$$

是调和级数的部分和，或简称为调和数 (Harmonic Number)。

在 Digamma 函数的余元公式中，令 $z = \frac{1}{2}$ 可得：

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2$$

对于更多有理数的 Digamma 函数值，高斯曾给出过一个有效的计算方法：

定理 25. 对于 $p, q \in \mathbb{Z}^+$，且 $0 < p < q$：

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi p}{q}\right) - \log(2q) + \sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2\pi kp}{q}\right)\log\left(\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)\right) \tag{43}$$

这一定理是十分有用的，利用它可以解析地求出任何一个 $(0,1)$ 间有理数的 Digamma 函数值，再应用递推公式则可以得到任意有理数的 Digamma 函数值。

6 Beta 函数

6.1 定义

在数学分析中，Beta 函数是一类在定积分计算中十分重要的函数，由于欧拉在这方面进行了大量的研究，它又被称为第一类欧拉积分。此外，Beta 函数和 Gamma 函数的关系也十分密切，所以 Gamma 又被称为第二类欧拉积分。

Beta 函数 $B(x,y)$ 是一个双变量函数，其定义如下：

定义 9. 对于 $\mathrm{Re}\, x > 0, \mathrm{Re}\, y > 0$：

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{44}$$

6.2 性质

在上式右边的积分中作代换 $t \mapsto 1-t$ 很容易发现 Beta 函数对于其变量 x, y 是对称的。事实上，我们有下面的定理：

定理 26. 对于 $\mathrm{Re}\, x > 0, \mathrm{Re}\, y > 0$：

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x) \tag{45}$$

证明. 在 Gamma 函数的积分定义 (8) 中作换元 $x^2 \mapsto -\log x$ 可得：

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1} dt$$

故：

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}dv\\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2x-1}v^{2y-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv\\ &= 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}drd\theta\\ &= \left(2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}dr\right)\left(2\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta\right)\\ &= \Gamma(x+y)B(y,x)\end{aligned}$$

□

由以上性质可得：

$$B(x+1,y)=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)}=\frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)}=\frac{x}{x+y}B(x,y)$$

这就是 Beta 函数的递推公式：

定理 27. 对于 $\operatorname{Re}x>0,\operatorname{Re}y>0$：

$$B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y) \tag{46}$$

$$B(x,y+1)=\frac{y}{x+y}B(x,y) \tag{47}$$

6.3 特殊值

由于 Beta 函数与 Gamma 函数的密切联系，Beta 函数的函数值计算在很多时候是借助对应的 Gamma 函数值来完成的。

$$\begin{aligned}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)&=\pi\\ B(x,1-x)&=\frac{\pi}{\sin\pi x}\\ B(x,1)&=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

6.4 沃利斯积分

Beta 函数常被用来计算一些含有三角函数幂的定积分，这是因为注意到 $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ 对其进行三角换元 $t\mapsto\sin^2\theta$ 或 $t\mapsto\cos^2\theta$ 就可以得到：

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2y-1}\theta\cos^{2x-1}\theta d\theta \tag{48}$$

这里以著名的沃利斯积分 (Wallis' Integrals) 为例。所谓沃利斯积分，是指具有如下形式的一类定积分：

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta, n \in \mathbb{Z}^+$$

借助 Gamma 函数和 Beta 函数，可以很容易地计算沃利斯积分的值，由 (48) 可得：

$$W_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

上式的结果还可以推广到 n 不为整数的情况，更一般地：

$$W_\alpha = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \operatorname{Re}\alpha > -1$$

利用该公式可以得到一些十分有趣的结果，例如：

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \frac{1}{4} B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{2\pi}}$$

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{2\Gamma^2(1/4)}$$

故：

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}\sqrt{1-y^4}} dxdy = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}} dt = \frac{\pi}{4}$$

7 习题

Bernoulli 数

习题 1：

求 B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 的值。

习题 2：

求 Bernoulli 数定义中的幂级数

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$$

之收敛半径。

习题 3：

证明：

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k} B_{2k} = n - \frac{1}{2}$$

习题 4：

利用

$$\frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^{2x} - 1}$$

证明：

$$B_{2n} = -\frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{\infty} (4^k - 1) \binom{2n}{2k} B_{2k} B_{2n-2k}$$

由此再证明：

- 当 $k = 1, 3, 5, \cdots$ 时，$B_{2k} < 0$；
- 当 $k = 0, 2, 4, \cdots$ 时，$B_{2k} > 0$。

习题 5：
求 $\csc x$ 的幂级数展开式。

Euler 数

习题 6：
求 E_0, E_1, E_2, E_3, E_4 的值。
习题 7：
对于 $n = 2, 3, \cdots$，证明：

$$E_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} E_{2k}$$

习题 8：
欧拉 Zigzag 数 (Euler Zigzag Number)A_k 定义为下述幂级数展开式的系数：

$$\sec x + \tan x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{x^k}{k!} \tag{49}$$

讨论 A_k 和 B_k, E_k 的关系，并证明：

1. $2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}$；
2. 当 $n \to \infty$ 时，$A_n \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1} n!$；
3. $B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2k}{4^{2k} - 2^{2k}} A_{2k-1}$；
4. $E_{2k} = (-1)^{k/2} A_{2k}$。

Gamma 函数

习题 9：
证明 $\sin z$ 的无穷乘积公式：

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

它在 Gamma 函数余元公式的证明过程中是一个非常重要引理。
习题 10：
求极限：

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \Gamma(x)\right)$$

习题 11：
证明欧拉给出的 Gamma 函数的无穷乘积公式与积分定义等价，即对于 $\operatorname{Re} z > 0$，写：

$$\Gamma_n(z) = \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{n^z}{z(1+z/1)\cdots(1+z/n)}$$

则：

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(z)$$

习题 12：

对于 $\operatorname{Re} z>1$，证明：

$$\frac{1}{k^z}\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-k^2\pi x}x^{z/2-1}dx$$

这一结果将被用于证明黎曼 Zeta 函数的函数方程。

习题 13：

证明上文中用到的一个积分：

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$$

习题 14：

证明：

$$\gamma=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$$

习题 15：

求积分：

$$\int_0^1\log\Gamma(x)dx$$

习题 16：

对于 $a=0,1,2,\cdots$，证明：

$$\int_a^{a+1}\log\Gamma(x)dx=\frac{1}{2}\log(2\pi)+a\log a-a$$

黎曼 Zeta 函数

习题 17：

求 $\zeta(-2),\zeta(-1),\zeta(0),\zeta(4),\zeta(6),\zeta(8)$ 的值。

习题 18：

证明在推导黎曼 Zeta 函数的函数方程时所用到的：

$$\frac{1+2\phi(x)}{1+2\phi(1/x)}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

习题 19：

证明：对于 $n\in\mathbb{N}$：

$$\zeta(-n)=\frac{B_{n+1}}{n+1}$$

习题 20：

求积分：

$$\int_0^\infty\frac{x}{e^x-1}dx$$

习题 21：

求积分：

$$\int_0^1\frac{\log^n(1-x)}{x}dx$$

其中 n 为正整数。

习题 22：

证明：

$$\int_0^1 \frac{\log^n x}{1-x} = (-1)^n \zeta(n+1)\Gamma(n+1)$$

其中 n 为正整数。

习题 23：

证明级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1)$$

收敛，且其值为 1。同理，试求级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(2n)-1)$$

的值。

习题 24：

对于 $\operatorname{Re} z > 1$，狄利克雷 Eta 函数 (Dirichlet Eta Function) 是指交错 p 级数：

$$\eta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{k^z} \tag{50}$$

证明：

$$\eta(z) = (1-2^{1-z})\zeta(z)$$

习题 25：

证明当 $n \to \infty$ 时，Bernoulli 数具有如下近似：

$$B_{2n} \sim (-1)^{n+1} 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}$$

并由此讨论 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的幂级数展开式之收敛半径。

Polygamma 函数

习题 26：

求 $\Psi\left(\frac{1}{3}\right), \Psi\left(\frac{1}{4}\right), \Psi\left(\frac{1}{5}\right), \Psi\left(\frac{1}{6}\right)$ 的值。

习题 27：

对于 $n = 1, 2, \cdots$ 证明：

$$\Psi\left(n+\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1}$$

习题 28：

考虑欧拉-马歇罗尼积分，证明：

$$\gamma = -\frac{0}{1}\log\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x}\right)dx$$

习题 29：
证明：

$$\Psi(z)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right)dx$$

习题 30：
证明下面的欧拉-马歇罗尼积分：

$$\Gamma''(1)=\int_0^\infty e^{-t}\log^2 t dt=\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}$$

$$\Gamma^{(3)}(1)=\int_0^\infty e^{-t}\log^3 t dt=-\gamma^3-\frac{1}{2}\pi^2\gamma-2\zeta(3)$$

习题 31：
证明：

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\log x dx=-\frac{1}{4}(\gamma+2\log 2)\sqrt{\pi}$$

Beta 函数

习题 32：
利用 Beta 函数求下列积分：

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^5}}dx$$

$$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^5}}dx$$

习题 33：
证明：

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}dx=\pi$$

习题 34：
用 Gamma 函数表示积分

$$\int_0^1 x^m(1-x^n)^p dx$$

并计算：

$$\int_0^1 x^{3/2}\sqrt{1-\sqrt{x}}dx$$

习题 35：
对于 $\mathrm{Re}\,x>0,\mathrm{Re}\,y>0$，证明：

$$B(x,y)=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$

习题 36：

对于 $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0, \operatorname{Re} c > 0$，证明：

$$\int_{0\le x,y,z\le 1, x+y+z=1} (1-x)^{a-1}(1-y)^{b-1}(1-z)^{c-1} dxdydz = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}$$