特殊函数 (四)

OnceBeta

2024 年 9 月 27 日

Email: OnceBeta@hotmail.com

本文为科普性文章，是该系列文章的第四卷，内容主要为超几何函数，这类函数最早源于二阶线性常微分方程的级数解，我也将以此为切入点进行讨论。与前面的章节类似地，本卷内容的背景知识的范围局限于初等数学、数学分析及复变函数论，主要采用积分、级数等复分析范围内的方法对超几何函数的性质进行讨论。此外，由于文章结构安排及篇幅长短问题，文中会对严谨性较高的内容进行一定压缩，只保留重要的技术细节。

在最后的习题部分，我安排了一些简单的题目，内容均是与对应章节的内容相关的，读者可以通过它们检验自己对文章内容的掌握程度。

最后，由于笔者尚且才疏学浅，行文过程也略微仓促，如有谬误敬请指出。

OnceBeta 于汕尾市城区
2024 年 9 月

目录

1 超几何方程 **3**

2 超几何函数 **4**

2.1 定义 4

2.2 初等函数退化情形 4

2.3 积分表达式 4

3 超几何变换 **5**

3.1 一次变换 5

3.2 二次变换 6

3.3 高次变换 6

3.4 李代数参数 7

3.5 特殊值 8

4 广义超几何函数 **8**

4.1 简介 8

4.2 合流超几何极限函数 9

4.3 合流超几何函数 9

5 习题 **9**

1 超几何方程

所谓超几何方程，是指刑如下式的二阶线性常微分方程：

$$z(1-z)u'' + (c-(a+b+1)z)u' - abu = 0 \tag{1}$$

可以证明 $0, 1, \infty$ 是它的三个正则奇点，且分别有指标方程：

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0} zp(z) = \lim_{z\to 0} \frac{c-(a+b+1)z}{1-z} = c \\
&\lim_{z\to 0} zq(z) = \lim_{z\to 0} \frac{-abz}{1-z} = 0 \\
&\rho(\rho-1) + c\rho = 0
\end{aligned}$$

解之得 $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1-c$。当 $c \notin \mathbb{Z}$ 时，超几何方程有两个线性无关的特解，它们可被表示为形式幂级数：

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}$$

求导可得：

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{du}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho) z^{k+\rho-1} \\
u'' &= \frac{d^2u}{dz^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho)(k+\rho-1) z^{k+\rho-2}
\end{aligned}$$

将 u, u', u'' 代入到超几何方程中可得：

$$\begin{aligned}
0 &= z(1-z)\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho)(k+\rho-1) z^{k+\rho-2} + (c-(a+b+1)z)\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho) z^{k+\rho-1} - ab\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} \\
&= c_k((k+\rho)(k+\rho-1) + c(k+\rho)) - c_{k-1}((a+b+1)(k+\rho-1) + (k+\rho-1)(k+\rho-2) + ab)
\end{aligned}$$

解之可得：

$$c_k = \frac{(a+\rho)_k (b+\rho)_k}{(c+\rho)_k (1+\rho)_k}$$

其中

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\cdots(a+k-1)$$

为波夏默尔符号 (Pochhammer Symbol)，又称为上升阶乘 (Rising Factorial)。

令 $c_0 = 1$，代入 $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1-c$ 即可得到超几何方程在奇点 0 处的两个线性无关的特解为：

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \\
u_2 &= z^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-c)_k (1+b-c)_k}{(2-c)_k} \frac{z^k}{k!}
\end{aligned}$$

其中特解 u_1 即所谓超几何函数 (Hypergeometric Function)，又被称为高斯超几何函数 (Gauss Hypergeometric Function)，记作 ${}_2F_1\left[\begin{matrix} a\ b \\ c \end{matrix}; z\right]$。

2 超几何函数

2.1 定义

定义 1. 对于 a,b,c，z：

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a\ \ b \\ c \end{bmatrix}; z\Bigg] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!} \tag{2}$$

利用超几何函数，超几何方程在 $0,1,\infty$ 处的 6 个特解便可以按如下方式表示出来：

$$\begin{aligned}
u_1 &= {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}; z\right] \\
u_2 &= z^{1-c}{}_2F_1\left[\begin{matrix} 1+a-c, 1+b-c \\ c-a-b+1 \end{matrix}; 1-z\right] \\
u_3 &= {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ a+b-c \end{matrix}; 1-z\right] \\
u_4 &= (1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix} c-a, c-b \\ c-a-b+1 \end{matrix}; 1-z\right] \\
u_5 &= z^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, a-c+1 \\ a-b+1 \end{matrix}; \frac{1}{z}\right] \\
u_6 &= z^{-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix} b, b-c+1 \\ b-a+1 \end{matrix}; \frac{1}{z}\right]
\end{aligned}$$

2.2 初等函数退化情形

当参数为某些特殊值时，超几何函数可以退化为初等函数，如：

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1,1 \\ 1 \end{matrix}; z\right] = \frac{1}{1-z} \tag{3}$$

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1,1 \\ 2 \end{matrix}; z\right] = -\frac{\log(1-z)}{z} \tag{4}$$

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1,2 \\ 1 \end{matrix}; z\right] = \frac{1}{(1-z)^2} \tag{5}$$

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1,2 \\ 2 \end{matrix}; z\right] = \frac{1}{1-z} \tag{6}$$

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1,1 \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; z\right] = \frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z(1-z)}} \tag{7}$$

2.3 积分表达式

注意到波夏默尔符号可以用 Gamma 函数表出为：

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

则：

$$\begin{aligned}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} &= \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)} \\ &= \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(k+1)}\frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+k)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \\ &= \binom{k+a-1}{k}\frac{B(b+k,c-b)}{B(b,c-b)} \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\binom{-a}{k}\int_0^1 x^{b+k-1}(1-x)^{c-b-1}dx\end{aligned}$$

于是可以得到：

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}z^kx^kdx \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}dx\end{aligned}$$

这便是超几何函数的积分表达式，同时容易注意到的是参数 a,b 的对称性，我们有：

定理 1.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] = \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}dx \tag{8}$$

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] = \frac{1}{B(a,c-a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-zx)^{-b}dx \tag{9}$$

3 超几何变换

形如：

$$z^p(1-z)^q{}_2F_1\left[\begin{matrix}a\ \ b\\c\end{matrix};z\right] = w^{p'}(1-w)^{q'}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a\ \ b\\c\end{matrix};w\right]$$

的含超几何函数的恒等式称为超几何变换 (Hypergeometric Transformation)。

3.1 一次变换

如果变换前后被超几何函数作用的变量 z 的次数均为 1，则称该变换为一次变换，或称为线性变换 (Linear Transformation)。在一次变换中，参数的值在保证超几何函数有意义的前提下是任意的。与一次变换相对的是高次变换，不同的是，在进行高次变换时，参数的取值范围会受到约束。

首先注意到，在积分表达式 (8) 中作代换 $x \mapsto 1-x$ 可得：

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}dx \\ &= \frac{(1-z)^{-a}}{B(b,c-b)}\int_0^1 x^{c-b-1}(1-x)^{b-1}(1-\frac{z}{z-1}x)^{-a}dx \\ &= (1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,c-b\\c\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right]\end{aligned}$$

这就是超几何函数的普法夫变换 (Pfaff)，它也有一种关于参数 b 的对称形式，可总结为如下定理：

定理 2 (Pfaff).

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a\ b\\ c\end{matrix};z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a\ c-b\\ c\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right]=(1-z)^{-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a\ b\\ c\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right] \tag{10} $$

将这两种变换复合起来，则可以得到欧拉变换 (Euler's Transformation)：

定理 3 (Euler).

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a\ b\\ c\end{matrix};z\right]=(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a\ c-b\\ c\end{matrix};z\right] \tag{11} $$

这便是超几何函数最基本的两种线性变换。

3.2 二次变换

二次变换将两个超几何函数联系起来，其中一个函数中的变量是另一个函数的二次函数，或者是分数线性变换与二次函数的复合。德国数学家库默尔 (Kummer, 1810-1893) 在这方面进行了大量的研究，例如下面的两种二次变换就是由他发现的。

定理 4 (Kummer).

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}2a\ 2b\\ a+b+\frac{1}{2}\end{matrix};z\right]={}_2F_1\left[\begin{matrix}a\ b\\ a+b+\frac{1}{2}\end{matrix};4z(1-z)\right] \tag{12} $$

上式称为著名的库默尔关系，是最常见也是最基本的二次变换，其他二次变换均可通过对上式复合 Pfaff 变换得出。

此外，我们也可以得到库默尔二次变换：

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a\ b\\ a-b+1\end{matrix};z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}\ \ \frac{a+1}{2}-b\\ a-b+1\end{matrix};1-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \tag{13} $$

此外，法国数学家古尔萨 (Goursat, 1858-1936) 证明了，二次变换在本质上只有一种形式，所有的二次变换都可以由它加上普法夫变换转化得到。

3.3 高次变换

次数高于二次的变换统称为高次变换 (Higher-order Transformation)。古尔萨在这方面进行了十分深入的研究，他发现在所有的超几何变换中，变量 z 和 w 必须受到某个六次方程的约束，即变换的最高次数是六次，而次数高于六次的变换将仅对某些特殊的参数值才存在。

下面是两个三次变换的例子：

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}3a\ \ 3a+\frac{1}{2}\\ 4a+\frac{2}{3}\end{matrix};z\right]=\left(1-\frac{9}{8}z\right)^{-2a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a\ \ a+\frac{1}{2}\\ 2a+\frac{5}{6}\end{matrix};\frac{27z^2(z-1)}{(9z-8)^2}\right] \tag{14} $$

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\\ 1\end{matrix};1-\left(\frac{1-z}{1+2z}\right)^3\right]=(1+2z){}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\\ 1\end{matrix};z^3\right] \tag{15} $$

3.4 李代数参数

* 本节中所讨论的内容涉及到一部分交换代数的知识，且对下文而言不是必须的，读者在阅读时可以选择性跳过本节。

在讨论超几何变换时，如果根据超几何方程在三个正则奇点处的指标之差来定义参数，则会使变换更加容易表示，这样的参数指标体系称为李代数参数 (Parameters of Lie Algebra)。倘若记：

$$F_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = {}_2F_1\begin{bmatrix} a\ b \\ c \end{bmatrix}; z\end{bmatrix}$$

它与传统的参数指标体系具有如下关系：

$$\begin{cases} \alpha = a-1 \\ \beta = a+b-c \\ \gamma = b-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1+\alpha+\beta-\gamma}{2} \\ b = \frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{2} \\ c = 1+\alpha \end{cases}$$

运用李代数参数，我们可以把上文中提到的超几何函数在正则奇点 $0, 1, \infty$ 处的六个正则解表示为：

$$\begin{aligned} u_1 &= F_{\alpha,\beta,\gamma}(z) \\ u_2 &= z^{-\alpha}F_{-\alpha,\beta,-\gamma}(z) \\ u_3 &= F_{\beta,\alpha,\gamma}(1-z) \\ u_4 &= (1-z)^{-\beta}F_{-\beta,\alpha,-\gamma}(1-z) \\ u_5 &= (-z)^{(-1-\alpha-\beta+\gamma)/2}F_{-\gamma,\beta,-\alpha}(z^{-1}) \\ u_6 &= (-z)^{(-1-\alpha-\beta-\gamma)/2}F_{\gamma,\beta,\alpha}(z^{-1}) \end{aligned}$$

记：

$$G(k; m, n) = G(k; n, m) = \frac{\pi}{\sin(k\pi)\Gamma(m)\Gamma(n)}$$

$$\mathbf{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \frac{1}{1+\alpha}F_{\alpha,\beta,\gamma}(z)$$

则我们还有如下关系：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\beta,\alpha,\gamma}(1-z) &= G(-\alpha; a-\alpha, b-\alpha)\mathbf{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) + G(\alpha; a, b)z^{-\alpha}\mathbf{F}_{-\alpha,\beta,-\gamma}(z) \\ (1-z)^{-\beta}\mathbf{F}_{-\beta,\alpha,-\gamma}(1-z) &= G(-\alpha; 1-a, 1-b)\mathbf{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) + G(\alpha; a-\beta, b-\beta)z^{-\alpha}\mathbf{F}_{-\alpha,\beta,-\gamma}(z) \\ (-z)^{-a}\mathbf{F}_{-\gamma,\beta,-\alpha}(z^{-1}) &= G(-\alpha; a-\alpha, 1-b)\mathbf{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) + G(\alpha; a, a-\beta)z^{-\alpha}\mathbf{F}_{-\alpha,\beta,-\gamma}(z) \\ (-z)^{-b}\mathbf{F}_{\gamma,\beta,\alpha}(z^{-1}) &= G(-\alpha; 1-a, b-\alpha)\mathbf{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) + G(\alpha; b, b-\beta)z^{-\alpha}\mathbf{F}_{-\alpha,\beta,-\gamma}(z) \end{aligned}$$

上述恒等式即为超几何函数在不同点处特解的连接关系。

将上面的连接关系与普法夫变换和欧拉变换结合起来，就得到完整的库默尔表格 (Kummer's Table)。给定一组李代数参数 (α, β, γ)，$(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$ 对应着 24 个不同的超几何函数，利用普法夫变换和连接关系可以将它们联系在一起，即其中的任意一个可以由任意另外两个表出。

例如，利用李代数参数，欧拉变换可表示为：

$$F_{\alpha,\beta,\gamma} \xrightarrow{\text{Pfaff}} F_{\alpha,\gamma,\beta} \equiv F_{\alpha,\gamma,-\beta} \xrightarrow{\text{Pfaff}} F_{\alpha,-\beta,\gamma}$$

而一般的二次变换则可表示为：

$$F_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = f(z)F_{\alpha',\beta',\gamma'}(g(z)), P(z)$$

其中 $f(z), g(z)$ 均为多项式函数与分式线性变换的复合，且 $g(z)$ 中 z 的次数不超过二次，$P(z)$ 表示变换成立的约束条件。

3.5 特殊值

我们首先注意到，当 $z = 0$ 时：

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a\ b \\ c \end{bmatrix}; 0 = 1 \tag{16}$$

在超几何函数的积分表达式 (8) 中代入 $z = 1$ 即可得到：

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a\ b \\ c \end{bmatrix}; 1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{17}$$

上式也称为超几何函数的高斯定理 (Gauss)。

在库默尔二次变换 (13) 中令 $z = -1$ 可得：

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a\ b \\ a-b+1 \end{bmatrix}; -1 = \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+1)\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(\frac{a}{2}-b+1)} \tag{18}$$

此即在 $z = -1$ 处的特殊值，也称为超几何函数的库默尔定理。

在普法夫变换 (10) 中代入 $z = -1$ 可知：

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a, 1-a \\ b \end{bmatrix}; \frac{1}{2} = \frac{\Gamma(\frac{b}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})}{\Gamma(\frac{a+b}{2})\Gamma(\frac{b-a+1}{2})}$$

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a, b \\ \frac{a+b+1}{2} \end{bmatrix}; \frac{1}{2} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{a+b+1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})}$$

上两式分别称为超几何函数的高斯第二定理和贝利定理 (Belley)。

4 广义超几何函数

4.1 简介

上文中所讨论的事实上是被称为高斯超几何函数的一类函数，属于超几何函数的一个特例。利用高斯超几何函数，我们可以表示出所有具有三个正则奇点的二阶线性常微分方程的解。

形式上，所谓广义超几何函数 (Generalized Hypergeometric Function) 是指形如如下形式的一类函数：

定义 2. 对于 $p, q \in \mathbb{Z}^+$ 和有效的 $a_1, a_2, \cdots, a_p, b_1, b_2, \cdots, b_q$：

$$ {}_pF_q\begin{bmatrix} a_1\ a_2 \cdots\ a_p \\ b_1\ b_2\ \cdots\ b_q \end{bmatrix}; z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1,2,\cdots,p}(a_i)_k}{\prod_{j=1,2,\cdots,q}(b_j)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{19}$$

我们首先注意到，当 $p, q = 0$ 时，广义超几何函数就退化为指数函数：

$$ {}_0F_0\left[\begin{matrix}\cdot\\ \cdot\end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \tag{20} $$

其次，当 $p = 1$ 且 $q = 0$ 时，广义超几何函数等同于一个有理函数：

$$ {}_1F_0\left[\begin{matrix}a\\ \cdot\end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k \frac{z^k}{k!} = (1-z)^{-a} \tag{21} $$

4.2 合流超几何极限函数

当 $p = 0$ 且 $q = 1$ 时，广义超几何函数的这一退化情形称为合流超几何极限函数 (Confluent Hypergeometric Limit Function)，即：

$$ {}_0F_1\left[\begin{matrix}\cdot\\ b\end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(b)_k k!} $$

它是二阶线性常微分方程

$$ z\frac{d^2u}{dz^2} + b\frac{du}{dz} - u = 0 $$

的一个解。

此外，合流超几何极限函数与第一类贝塞尔函数也有十分密切的联系，它们满足如下关系：

$$ J_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}z\right)^n {}_0F_1\left[\begin{matrix}\cdot\\ n+1\end{matrix}; -\frac{1}{4}z^2\right] \tag{22} $$

4.3 合流超几何函数

当 $p = q = 1$ 时，广义超几何函数的这一退化情形称为合流超几何函数 (Confluent Hypergeometric Function)，也被称为库默尔函数 (Kummer Function)，常以符号 M 表示，即：

$$ M(a, b; z) = {}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!} $$

这一函数与如下形式的二阶线性常微分方程有关：

$$ z\frac{d^2u}{dz^2} + (b-z)\frac{du}{dz} - au = 0 $$

可以证明对任意的 a, b，以上方程的特解都可以由合流超几何函数表出，且：

$$ \begin{aligned} u_1 &= {}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}; z\right] \\ u_2 &= z^{1-b}{}_1F_1\left[\begin{matrix}a-b+1\\ 2-b\end{matrix}; z\right] \end{aligned} $$

5 习题

习题 1：
证明普法夫变换 (10) 和欧拉变换 (11)。

习题 2:

证明:

$$\frac{d}{dz}{}_2F_1\begin{bmatrix}a\ \ b\\ c\end{bmatrix};z\Bigg] = \frac{ab}{c}{}_2F_1\begin{bmatrix}(a+1)\ \ (b+1)\\ c+1\end{bmatrix};z\Bigg] \tag{23}$$

并求

$$\frac{d^n}{dz^n}{}_2F_1\begin{bmatrix}a\ \ b\\ c\end{bmatrix};z\Bigg], n\in\mathbb{Z}^+$$

习题 3:

利用留数定理，证明:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}{}_2F_1\begin{bmatrix}a\ \ b\\ c\end{bmatrix};z\Bigg] = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s ds \tag{24}$$

特别地，上式也称为超几何函数的巴恩斯积分表达式 (Barnes, 1874-1953)。

习题 4:

证明:

$$ {}_1F_1\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix};z\Bigg] = \lim_{b\to\infty}{}_2F_1\begin{bmatrix}a\ \ b\\ c\end{bmatrix};z\Bigg] \tag{25}$$

即合流超几何函数是高斯超几何函数的极限情形。

习题 5:

证明:

$$ {}_0F_1\begin{bmatrix}\cdot\\ b\end{bmatrix};z\Bigg] = \lim_{a\to\infty}{}_1F_1\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix};z\Bigg] \tag{26}$$

即合流超几何极限函数是合流超几何函数的极限情形。

习题 6:

证明几何级数可以被超几何函数表示为如下形式:

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix}1\ \ b\\ b\end{bmatrix};z\Bigg] = {}_1F_0\begin{bmatrix}1\\ \cdot\end{bmatrix};z\Bigg] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

习题 7:

应用超几何函数，求贝塞尔方程 (Bessel Equation)

$$z^2u'' + zu' + (z^2-\nu^2)u = 0 \tag{27}$$

在其正则奇点处的特解。

习题 8:

证明多重对数函数与广义超几何函数具有如下关系：对于 $k\in\mathbb{N}$ 有:

$$\mathrm{Li}_k(z) = z\,{}_{k+1}F_k\begin{bmatrix}1\ 1\ \cdots\ 1\ 1\\ 2\ 2\ \cdots\ 2\end{bmatrix};z\Bigg] \tag{28}$$