特殊函数 (二)

OnceBeta

2024 年 9 月 13 日

Email: OnceBeta@hotmail.com

本文为科普性文章，是该系列文章的第二卷，内容主要为多重对数函数，我将主要采用积分、级数等复分析范围内的方法对多重对数函数的性质进行讨论，背景知识的范围局限于初等数学、数学分析及复变函数论。此外，由于文章结构安排及篇幅长短问题，文中会对严谨性较高的内容进行一定压缩，只保留重要的技术细节。

在最后的习题部分，我安排了一些简单的题目，内容均是与对应章节的内容相关的，读者可以通过它们检验自己对文章内容的掌握程度。

最后，由于笔者尚且才疏学浅，行文过程也略微仓促，如有谬误敬请指出。

OnceBeta 于深圳市罗湖区
2024 年 9 月

目录

1 简介

1.1 定义

多重对数函数 (Polylogarithm Function) 是数学中另一类十分重要的特殊函数，它的经典定义是由幂级数展开式给出的：

定义 1. 对于 $|z|<1$ 和 $k\in\mathbb{Z}^+$：

$$\mathrm{Li}_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k} \tag{1}$$

1.2 积分表达式

我们首先从多重对数函数的经典定义出发，即：

$$\mathrm{Li}_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k}$$

在上式中，令 $z=1$ 可得：

$$\mathrm{Li}_k(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\zeta(k)$$

注意到右边黎曼 Zeta 函数对 $k\neq1$ 都有良好的定义，这就完成了对阶数 k 的解析开拓。且有积分表达式：

$$\mathrm{Li}_s(1)=\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$$

这使得我们将多重对数函数同黎曼 Zeta 函数联系起来。与黎曼 Zeta 函数的解析开拓类似地，注意到：

$$\frac{z^k}{k^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}x^{s-1}z^ke^{-kx}dx$$

故：

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_s(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s}&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}x^{s-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}z^ke^{-kx}\right)dx\\&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}x^{s-1}\left(\frac{z}{e^x-z}\right)dx\end{aligned}$$

这就给出了多重对数函数的积分表达式：

定理 1. 对于 $\mathrm{Re}\,s>0$ 和 $z\in\mathbb{C}$：

$$\mathrm{Li}_s(z)=\frac{z}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-z}dx \tag{2}$$

1.3 阶数为非正数的情形

当阶数为非正数时，多重对数函数的经典定义显然不再适用，因为幂级数不收敛，但我们可以通过多重对数函数的性质

$$\mathrm{Li}_k(z)=\int_0^{z}\frac{\mathrm{Li}_{k-1}(x)}{x}dx$$

将其定义推广到阶数为非正数的情形。

由多重对数函数的这一性质，可以相反地得出：

$$\mathrm{Li}_{k-1}(z) = z\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_k(z)$$

由此我们可以递归地得出一系列定义：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_0(z) &= z\frac{d}{dz}(-\log(1-z)) = \frac{z}{1-z} \\
\mathrm{Li}_{-1}(z) &= z\frac{d}{dz}\frac{z}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2} \\
\mathrm{Li}_{-2}(z) &= z\frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z(1-z)}{(1-z)^3} \\
\mathrm{Li}_{-3}(z) &= z\frac{d}{dz}\frac{z(1-z)}{(1-z)^3} = \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

通过观察可以得出，当 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 时，$\mathrm{Li}_{-k}(z)$ 是一系列的有理函数。事实上，我们有下述更一般的定理：

定理 2. 对于 $n \in \mathbb{N}$：

$$\mathrm{Li}_{-n}(z) = \left(z\frac{d}{dz}\right)^n \frac{z}{1-z} = \sum_{k=0}^{n} k!S(n+1,k+1)\left(\frac{z}{1-z}\right)^{k+1} \tag{3}$$

2 性质

之所以称这一类幂级数为多重对数函数，是因为当 $k = 1$ 时，我们有：

$$\mathrm{Li}_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\log(1-z), |z| < 1$$

多重对数函数的一个重要性质是递推关系，我们先考虑不定积分：

$$\int \frac{\log(1-x)}{x}dx$$

容易发现：

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{\log(1-x)}{x}dx &= -\int_0^z \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx \\
&= -\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right]_{x=0}^{x=z} \\
&= -\mathrm{Li}_2(z)
\end{aligned}$$

这表明：

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-x)}{x}dx = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_1(x)}{x}dx$$

同样地，对高阶多重对数，我们也可以得出类似的性质：

定理 3. 对于 $|z| < 1$：

$$\mathrm{Li}_k(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_{k-1}(x)}{x}dx \tag{4}$$

3 双重对数函数

3.1 解析开拓

到目前为止，在经典的幂级数展开式和积分表达式中，我们都只讨论了双重对数函数的主值分支。在这种情形下，倘若我们沿支点割破复平面，双重对数函数是复平面上的单值解析函数。然而，如果我们允许积分变量沿任意路径在复平面上运动，包括绕支点作越过支割线的周线运动，那么积分结果就有可能从双重对数函数的一个分支变化到另一个分支，这就给出了双重对数函数的一般定义。为了更好地描述这一过程，我们重新考虑双重对数函数的解析开拓过程。

多重对数函数的幂级数展开式只在开圆盘 $|z|<1$ 内收敛，但通过解析开拓，我们可以把该定义域解析开拓到整个复平面。首先，对于

$$\mathrm{Li}_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\log(1-z),|z|<1$$

上式中的幂级数只在单位圆盘 $|z|<1$ 内收敛，而右边的 $-\log(1-z)$ 则在除支点 $z=1$ 外的区域具有良好的定义。因此，$-\log(1-z)$ 在 $\mathbb{C}\backslash[1,\infty)$ 上连续且解析，本身作为 $\mathrm{Li}_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 的一种解析开拓。

对于双重对数，在积分

$$\mathrm{Li}_2(z)=-\int_0^z\frac{\log(1-x)}{x}dx$$

中，考虑复对数：

$$\log z=\log(re^{i\theta})=\log r+(2k\pi+\theta)i,k\in\mathbb{Z}$$

则被积函数 $f(z)=\frac{\log(1-z)}{z}$ 在复平面上有支点 $1,\infty$。对于 $|z|\geq 1$，我们只需沿割线 $[1,\infty)$ 割开复平面，然后由路径积分即可由此定义出 $\mathrm{Li}_2(z)$。

注意到当 $z\in[1,\infty)$ 时：

$$\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x}dx=-\zeta(2)=-\frac{\pi^2}{6}$$

故：

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_2(z)&=-\int_0^z\frac{\log(1-x)}{x}dx\\&=-\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x}dx-\int_1^z\frac{\log(x-1)}{x}dx-i\pi\log z\\&=\frac{\pi^2}{6}-i\pi\log z-\int_1^z\frac{\log(x-1)}{x}dx\end{aligned}$$

在上式中，把 $\log(1-x)$ 展开为幂级数作逐项积分可得：

$$\mathrm{Li}_2(z)=\frac{\pi^2}{3}-i\pi\log z-\frac{1}{2}\log^2 z-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2z^k}$$

更一般地，如果考虑双重对数函数的所有分支，则函数值取决于所选取的积分路径，包括每个支点以何种方式被包括在积分路径中，则我们有下述定理：

定理 4. 设 $\mathrm{Li}_2^*(z)$ 表示一般的双重对数函数，而 $\mathrm{Li}_2(z)$ 表示它的一个主值分支，则：

$$\mathrm{Li}_2^*(z) = \mathrm{Li}_2(z) + 2m\pi i \log z + 4n\pi^2 \tag{5}$$

其中 $m, n \in \mathbb{Z}$。

3.2 性质

3.2.1 线性变换

与多重对数函数相关的一些性质主要是一些变换 (Transformation) 和恒等式，根据变量的次数又可以把它们分为线性变换和高次变换。

首先，由积分表达式：

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-x)}{x} dx$$

可得：

$$\frac{d}{dz} \mathrm{Li}_2(z) = -\frac{\log(1-z)}{z}$$

这表明双重对数的性质可以与对数函数的一些性质联系起来。挪威数学家阿贝尔 (Abel, 1802-1829) 发现了下述性质：

定理 5.

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{1-y}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{1-x}\right) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right) = \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(y) + \log(1-x)\log(1-y) \tag{6}$$

在等式两端同时对 x, y 求导即可证得。

在上式中，令 $y = 1 - x$ 可以得到欧拉反射公式 (Euler Reflection Formula)：

定理 6.

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \log(1-x) \tag{7}$$

而若令 $u = x/(1-y), v = y/(1-x)$ 则可以得到罗格公式 (Roger's Formula of Dilogarithm Function)：

定理 7.

$$\mathrm{Li}_2(u) + \mathrm{Li}_2(v) - \mathrm{Li}_2(uv) = \mathrm{Li}_2\left(\frac{u-uv}{1-uv}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{v-uv}{1-uv}\right) \log\left(\frac{1-u}{1-uv}\right) \log\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) \tag{8}$$

此外，令 $x = y = 1 - z$ 可得：

定理 8. 对于 $z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$：

$$\mathrm{Li}_2(1-z) + \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2}\log^2 z \tag{9}$$

对上式应用欧拉反射公式可得：

定理 9. 当 $z \in \mathbb{C} \backslash [0, 1)$ 时：

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\log^2(-z) \tag{10}$$

当 $z \in \mathbb{R} \backslash (-\infty, 1)$ 时：

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\log^2 z - i\pi \log z \tag{11}$$

3.2.2 高次变换

对于 $z \notin (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$：

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(-z) = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(z^2) \tag{12}$$

更一般地，对于 $n = 1, 2, \cdots$，我们有：

$$\sum_{z^n = x} \mathrm{Li}_2(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Li}_2(x) \tag{13}$$

3.3 Bloch-Wigner 函数

当 z 沿着连续路径作越过支割线 $[1, \infty)$ 的运动时，双重对数函数的函数值将变化 $2\pi i \log|z|$。于是函数：

$$f(z) = \mathrm{Li}_2(z) + i\arg(1-z)\log|z|$$

是连续的。它的虚部被定义为 Bloch-Wigner 函数 (Bloch-Wigner Function)，即：

定义 2.

$$D(z) = \mathrm{Im}(\mathrm{Li}_2(z)) + \arg(1-z)\log|z| \tag{14}$$

这一函数在复平面上具有十分良好的性质：

定理 10. *Bloch-Wigner 函数 $D(z)$ 满足以下性质：*

(1). $D(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上连续；

(2). $D(z)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 上实解析；

(3). 所有双重对数函数 $\mathrm{Li}_2(z)$ 的函数方程可以在删去常数项和对数函数乘积项后用 $D(z)$ 改写之。

上述性质是 Bloch-Wigner 函数十分重要的性质，特别是由最后一条性质，我们可以推出一些 $D(z)$ 的性质：

$$D(z) = D\left(\frac{1}{1-z}\right) = D\left(\frac{z-1}{z}\right) = -D\left(\frac{1}{z}\right) = -D(1-z) = -D\left(\frac{z}{z-1}\right) \tag{15}$$

$$D(x) + D(1-xy) + D(y) + D\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + D\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = 0 \tag{16}$$

此外，作为一个复平面上的实值函数，$D(z)$ 的函数值可由实变函数表出：

$$D(z) = \frac{1}{2}\left(D\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) + D\left(\frac{1-1/z}{1-1/\bar{z}}\right) + D\left(\frac{1/(1-z)}{1/(1-\bar{z})}\right)\right) \tag{17}$$

对于单位复数，作代换 $z = e^{i\theta}$ 也可得到：

$$D(e^{i\theta}) = \mathrm{Im}(\mathrm{Li}_2(e^{i\theta})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2} \tag{18}$$

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Li}_2(e^{i\theta})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2} \tag{19}$$

3.4 Bloch 群

* 这部分内容涉及到对 Bloch-Wigner 函数更深刻的性质及背后代数结构的讨论，严谨性程度较高，读者可以选择性地进行阅读。

事实上，Bloch 在建立他的理论时，是站在双重对数函数背后的代数结构的角度上进行考虑的。具体地说，他的工作考虑了阿贝尔群和上面的形式和 (Formal Sum)：

$$[z_1]+[z_2]+\cdots+[z_n], z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^\times\backslash\{1\}, \sum_{k=1}^{n} z_k \wedge (1-z_k) = 0$$

容易验证对于 $x, y \in \mathbb{C}^\times\backslash\{1\}, xy \neq 1$：

$$[x]+[\frac{1}{x}], [x]+[1-x], [x]+[y]+[\frac{1-x}{1-xy}]+[1-xy]+[\frac{1-y}{1-xy}] \tag{20}$$

对应于 Bloch-Wigner 函数的对称关系。由此，我们可以定义 Bloch 群：

$$\mathcal{B}_\mathbb{C} = \{[z_1]+[z_2]+\cdots+[z_n] \text{ satisfying } \sum_{k=1}^{n} z_k \wedge (1-z_k) = 0\}/\text{subgroup generated by the elements of (20)}$$

换一种说法，倘若我们定义一个从 $\mathcal{B}_\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性变换：

$$D : \mathcal{B}_\mathbb{C} \mapsto \mathbb{R} : [z_1]+[z_2]+\cdots+[z_n] \mapsto D(z_1)+D(z_2)+\cdots+D(z_n)$$

则 Bloch 的结果表明：

$$D(\mathcal{B}_\mathbb{C}) \equiv D(\mathcal{B}_{\bar{\mathbb{Q}}})$$

Bloch 群的理论还和三维空间中的双曲几何有关，有兴趣的读者可以查阅相关资料作进一步的了解，这里不做过多介绍。

3.5 特殊值

英国工程师略文 (Lewin, 1919-2007) 发现了一系列双重对数函数的特殊值及它们之间的关系，为后来 K-理论的发展提供了参考和验证。现在，这些与多重对数函数相关的特殊值及它们之间的关系一般被称为梯子 (Polylogarithm Ladder)。

在此之前，我们先引入黄金比例的概念。在数学中，所谓的黄金比例 (Golden Ratio) 被定义为：

$$\phi := \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}, a > b > 0$$

通过简单的代数方程求解，我们可以算得这一常数的值为：

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

对于双重对数函数而言，一些经典的梯子如下：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2(0) &= 0 \\
\mathrm{Li}_2(1) &= \frac{\pi^2}{6} \\
\mathrm{Li}_2(-1) &= \frac{\pi^2}{12} \\
\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\log^2 2 \\
\mathrm{Li}_2(2) &= \frac{\pi^2}{4} - i\pi\log 2 \\
\mathrm{Li}_2(\phi) &= \frac{11\pi^2}{15} + \frac{1}{2}\log^2(\phi^{-1}) \\
\mathrm{Li}_2(\phi^2) &= -\frac{11\pi^2}{15} - \log^2(-\phi) \\
\mathrm{Li}_2(\phi^6) &= 4\,\mathrm{Li}_2(\phi^3) + 3\,\mathrm{Li}_2(\phi^2) - 6\,\mathrm{Li}_2(\phi) + \frac{7\pi^2}{30} \\
\mathrm{Li}_2(-\phi) &= -\frac{\pi^2}{10} + \log^2\phi \\
\mathrm{Li}_2(\phi^{-1}) &= \frac{\pi^2}{10} - \log^2\phi \\
\mathrm{Li}_2(-\phi^{-1}) &= -\frac{\pi^2}{15} + \log^2\phi \\
\mathrm{Li}_2(\phi^{-2}) &= \frac{\pi^2}{15} - \log^2\phi
\end{aligned}
$$

4 多重对数函数

4.1 Bloch-Wigner 函数族

对于 $n \in \mathbb{Z}$，我们可以定义对应的 Bloch-Wigner 函数：

$$
D_n(z) = \mathrm{Re}\left(i^{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(-\log|z|)^{n-k}}{(n-k)!}\,\mathrm{Li}_k(z) - \frac{(-\log|z|)^n}{2n!}\right]\right) \tag{21}
$$

它满足性质：

$$
D_n\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^{n-1}D_n(z) \tag{22}
$$

可以证明：

$$
\begin{aligned}
D_1(z) &= \log|z^{1/2} - z^{-1/2}| \\
D_2(z) &= D(z)
\end{aligned}
$$

但是我们显然无法期望高阶的 $D_n(z), n = 3, 4, \cdots$ 满足 $D(z)$ 的许多性质，例如：

$$
D_3(z) + D_3(1-z) + D_3\left(\frac{z}{z-1}\right) = D_3(1) + \frac{1}{12}\log|x(1-x)|\log\left|\frac{z}{(1-z)^2}\right|\log\left|\frac{z^2}{1-z}\right|
$$

$$D_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right)+D_3(xy)+D_3\left(\frac{x}{y}\right)-2D_3\left(\frac{y(1-x)}{y-1}\right)-2D_3(x)-2D_3(y)$$
$$=2D_3(1)-\frac{1}{4}\log|xy|\log\left|\frac{x}{y}\right|\log\left|\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right|$$

4.2 性质

5 欧拉和与对数积分

5.1 简介

* 欧拉和与对数积分是当前特殊函数论领域一项十分前沿的课题，所涉及到的理论体系十分严谨且庞大，在此仅进行简单的介绍。许多数学家相信在欧拉和的背后有着十分精密的代数结构，在该领域的大量课题目前仍处于开放状态。

欧拉曾经在给哥德巴赫 (Goldbach) 的一封回信中，对形如下式的一类无穷级数进行讨论：

$$s_h(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^m(n+1)^{-n}$$

并发现：

$$s_h(1,n)=\frac{n}{2}\zeta(n+1)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}\zeta(n-k)\zeta(k+1)$$

由于这类无穷级数在代数结构上拥有十分精妙的对称性，在后来陆续有许多学者对其进行研究，并发展成一套系统的理论体系，称为欧拉和 (Euler Sum)。

欧拉和与黎曼 Zeta 函数和多重对数函数 (包括对数函数) 有着十分密切的联系，绝大多数的欧拉和都可以在经过一番处理后由这些函数的函数值表出。

对数积分 (Logarithm Integral) 则是和欧拉和关系密切的一类由多重对数函数和多项式函数而成的定积分，它们中的大多数也可经过处理后变成欧拉和，并由黎曼 Zeta 函数和多重对数函数 (包括对数函数) 的函数值表出。

5.2 欧拉和

在定义上，美国数学家 Bailey 在其研究中大致将欧拉和分为以下几类：

$$s_h(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^m(n+1)^{-n}$$
$$s_a(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)^m(n+1)^{-n}$$
$$a_h(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^m(-1)^{n+1}(n+1)^{-n}$$
$$a_a(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)^m(-1)^{n+1}(n+1)^{-n}$$
$$\sigma_h(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^m}(n+1)^{-n}$$
$$\sigma_a(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^m}(n+1)^{-n}$$
$$\alpha_h(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^m}(-1)^{n+1}(n+1)^{-n}$$
$$\alpha_a(m,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^m}(-1)^{n+1}(n+1)^{-n}$$

它们有着十分精妙的数学关系，目前数学界中已经有大量该方面的研究，许多已知的研究结果都表明欧拉和与黎曼 Zeta 函数和多重对数函数 (事实上二者可以被作为多变量 Zeta 函数进行归一化地讨论) 有着密切的联系，从事该方面研究的学者相信在欧拉和理论的背后蕴藏着一套十分精密的代数结构和深刻的理论体系，有关的研究很可能给代数数论等数学分支的发展带来推动，但由于这些理论过于深奥且庞大，故在此不进行详细讨论。

作为黎曼 Zeta 函数的一种推广，所谓多变量 Zeta 函数 (Multivariate Zeta Function) 定义如下：

定义 3. 对于 $\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \cdots, \operatorname{Re} z_j > 1$：

$$\zeta\begin{pmatrix} z_1, \cdots, z_n \\ \sigma_1, \cdots, \sigma_n \end{pmatrix} = \sum_{k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Z}^+}\prod_{j=1}^{n}\frac{{\sigma_j}^{k_j}}{{n_j}^{z_j}} \tag{23}$$

5.3 对数积分

多重对数函数在许多特殊函数的积分计算中起着重要的作用，特别地，与之关系密切的一类定积分被称为对数积分 (Logarithm Integrals)，它和欧拉和也有着十分密切的关系，事实上，通过一些数学上的处理，许多欧拉和和对数积分之间可以建立起等价关系。

6 反正切积分

6.1 简介

在特殊函数论中，所谓的反正切积分 (Inverse Tangent Integral) 是指定积分：

$$\mathrm{Ti}_2(z)=\int_0^z \frac{\arctan x}{x}dx$$

首先，对于 $|z|<1$，反正切函数具有如下幂级数展开式：

$$\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$$

故：

$$\mathrm{Ti}_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

容易证明，它与双重对数函数具有如下关系：

$$\mathrm{Ti}_2(z)=\frac{1}{2i}(\mathrm{Li}_2(iz)-\mathrm{Li}_2(-iz)) \tag{24}$$

与多重对数函数类似地，我们对反正切积分有如下推广的定义：

定义 4.

$$\mathrm{Ti}_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)^k} \tag{25}$$

容易发现，按上述方式定义的函数满足性质：

$$\mathrm{Ti}_1(z)=\arctan z \tag{26}$$

$$\mathrm{Ti}_k(z)=\int_0^z \frac{\mathrm{Ti}_{k-1}(x)}{x}dx \tag{27}$$

这也可以与多重对数的有关性质对应起来。

6.2 卡塔兰常数

与反正切积分密切相关的一个重要的数学常数是卡塔兰常数 (Catalan's Constant)，其定义如下：

定义 5.

$$G=\mathrm{Ti}_2(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \tag{28}$$

它有如下几种常见的积分表示：

$$G=-\int_0^{\pi/4}\log\tan x dx=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}dxdy \tag{29}$$

这一常数由比利时数学家卡塔兰 (Eugène Charles Catalan, 1814-1894) 命名，他发现了与该常数相关的一个快速收敛的级数。

目前人们对卡塔兰常数 G 的了解还很少，甚至不知道其是否为无理数。但这一常数在数学许多领域中都有十分重要的应用，例如在拓扑学中，一个双曲正八面体的体积为 $4G$。

6.3 迪利克雷 Beta 函数

此外，我们用剩余的篇幅讨论一下迪利克雷 Beta 函数 (Dirichlet's Beta Function)：

定义 6. 对于 $\operatorname{Re} z \geq 1$：

$$\beta(z) = \mathrm{Ti}_z(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^z} \tag{30}$$

该函数则对应于黎曼 Zeta 函数，它也可以通过 Gamma 函数被解析开拓到 $\operatorname{Re} z > 0$：

定理 11. 对于 $\operatorname{Re} z > 0$：

$$\beta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1+e^{-2x}} dx \tag{31}$$

上述积分在 $\operatorname{Re} z \geq 1$ 时等同于以级数方式定义的迪利克雷 Beta 函数，而在带状区域 $0 < \operatorname{Re} z < 1$ 内也收敛，因此将 $\beta(z)$ 的定义域解析开拓到了整个右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$。此外，该函数也有与黎曼 Zeta 函数类似的函数方程：

定理 12.

$$\beta(1-z) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-z} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z) \beta(z) \tag{32}$$

上式可以将 $\beta(z)$ 解析开拓到整个复平面。

对于 $\operatorname{Re} z \geq 1$，$\beta(z)$ 也有一个欧拉乘积公式：

定理 13.

$$\beta(z) = \prod_{p \equiv 1 \mod 4} \frac{1}{1-p^{-z}} \prod_{p \equiv 3 \mod 4} \frac{1}{1+p^{-z}} \tag{33}$$

与黎曼 Zeta 函数不同的是，迪利克雷 Beta 函数在正偶数点处的函数值目前暂未被发现有一般的通项公式，而其在正奇数点处的函数值则由下面的定理给出：

定理 14. 对于 $n \in \mathbb{N}$：

$$\beta(2n+1) = \frac{(-1)^n E_{2n}}{2(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \tag{34}$$

此外，对于非正数则有：

$$\beta(-2n) = \frac{1}{2} E_{2n}, n \in \mathbb{N} \tag{35}$$

$$\beta(-2n-1) = 0, n \in \mathbb{N} \tag{36}$$

与黎曼 Zeta 函数类似地，目前暂时没有发现迪利克雷 Beta 函数在正偶数点处的函数值的通项公式，这也使得我们无法确定这些点上的函数值是否为无理数。

7 习题

习题 1：

证明：

$$\mathrm{Li}_s(z) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^1 \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1-zx}$$

并说明为什么积分路径只能沿实轴，即必须 $\operatorname{Im} x = 0$。

习题 2：
证明：

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Li}_k(z)}{z}=1$$

习题 3：
对于 $k\in\mathbb{Z}^+$，证明：

$$\mathrm{Li}_k(z)+\mathrm{Li}_k(-z)=2^{1-k}\,\mathrm{Li}_k(z^2)$$

上述等式也被称为多重对数函数的反射公式 (Reflection Fromula)。
习题 4：
证明：

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)=(1+\sqrt{2})\,\mathrm{Li}_{1/2}(-1)$$

习题 5：
证明：

$$2[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]+[\frac{-1+\sqrt{-7}}{4}]\in\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$$

习题 6：
证明上文中 Bloch-Wigner 函数 $D_n(z)$ 满足：

$$D_1(z)=\log|z^{1/2}-z^{-1/2}|$$
$$D_2(z)=D(z)$$

习题 7：
证明上文 Bloch-Wigner 函数的性质：

$$D_n\left(\frac{1}{z}\right)=(-1)^{n-1}D_n(z)$$

习题 8：
对于 $z_1,\cdots,z_n$ 多变量 Zeta 函数 (Multivariate Zeta Function) 定义为：

$$\zeta(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Z}^+}\frac{1}{{k_1}^{z_1}\cdots{k_n}^{z_n}} \tag{37}$$

证明：对于 $z\neq 1$：$2\zeta(z,z)=\zeta^2(z)-\zeta(2z)$
习题 9：
Rogers L 函数定义为：

$$L(z)=\frac{6}{\pi^2}\left(\mathrm{Li}_2(z)+\frac{1}{2}\log z\log(1-z)\right) \tag{38}$$

证明：

$$L(z)+L(1-z)=1 \tag{39}$$

$$L(x)+L(y)=L(xy)+L\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right)+L\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right) \tag{40}$$

* 此外，这一函数有一个十分漂亮的级数：

$$\sum_{n=2}^{\infty}L\left(\frac{1}{n^2}\right)=1 \tag{41}$$

习题 10：

证明：

$$G=-\int_0^{\pi/4}\log\tan x dx$$

习题 11：

证明：

$$G=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}dxdy$$

习题 12：

证明迪利克雷 Beta 函数的解析开拓、函数方程及性质，即上文中的 (31)-(36)。

* 提示：请注意迪利克雷 Beta 函数与黎曼 Zeta 函数的相似性 (事实上它们是对偶的)，参考黎曼 Zeta 函数的对应内容来完成本题。