

Inhaltsverzeichnis

1 Einfaches	2
1.1 Vollständige Induktion	2
1.2 Logik	2
1.3 Mengen	2
1.3.1 Definitionen	2
1.3.2 Rechenregeln	2
1.3.3 Wichtige Mengen	2
1.3.4 Intervalle	2
1.3.5 Mächtigkeit	2
1.3.6 Topologie	2
2 Mittleres	3
2.1 Zwischenwertsatz	3
2.2 Folgen	3
2.2.1 Definitionen	3
2.2.2 Konvergenzkriterien	3
2.2.3 Rechenregeln für Eigenschaften	3
2.2.4 Hilfsmethoden	3
2.2.5 Tipps an Beispielen	3
2.3 Reihen	3
2.3.1 Definitionen	3
2.3.2 Konvergenzkriterien	4
2.3.3 Potenzreihe	4
2.3.4 Rechenregeln	4
2.4 Funktionen	4
2.4.1 Grenzwerte	4
2.4.2 Stetigkeit	4
2.4.3 Folgen von Funktionen	4
2.4.4 Differentialrechnung	4
2.5 Taylorreihe & -entwicklung	4
3 Schweres	5
3.1 Integration	5
3.1.1 Rechenregeln	5
3.2 Differentialgleichungen	5
3.2.1 DGL erster Ordnung	5
3.2.2 DGL zweiter Ordnung	5
3.2.3 Lineare, homogene DGL beliebiger Ordnung	5
3.3 Differentialrechnung in \mathbb{R}^n	5
4 Formeln und Tafeln	6
4.1 Rechentricks	6
4.1.1 Fakultät, Binomialkoeffizienten	6
4.1.2 Mitternachtsformel	6
4.1.3 Partialbruchzerlegung	6
4.1.4 Ungleichungen	6
4.1.5 Exponentialfunktion und Potenzen	6
4.1.6 Logarithmen	6
4.1.7 Komplexe Zahlen \mathbb{C}	6
4.2 Trigonometrische Funktionen	6
4.3 Hyperbelfunktionen	7
4.4 Folgen mit Grenzwerten	7
4.5 Reihen mit Grenzwerten	7
4.6 Ableitungen	8
4.6.1 Rechenregeln	8
4.7 Ableitungstafel	8
4.7.1 Polynome und Wurzeln	8
4.7.2 Exponenten und Logarithmen	8
4.7.3 Trigonometrische Funktionen	8
4.8 Unbestimmte Integrale	8
4.8.1 Rechenregeln	8
4.8.2 Polynome und Wurzeln	8
4.8.3 Exponenten und Logarithmen	8
4.8.4 Trigonometrische Funktionen	8
4.9 Hilfen für Diff'rechnung in \mathbb{R}^n	9

1 Einfaches

1.1 Vollständige Induktion

Kann für ein Prädikat $P(n)$ bewiesen werden, dass $P(n_0)$ und $\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)$ gilt, dann folgt daraus $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \rightarrow P(n)$.

Induktionsannahme (IA) bezeichnet das Prädikat $P(n)$.

Induktionsverankerung (IV) ist der Beweis von $P(n_0)$.

Induktionsschritt (IS) ist der Beweis von $P(n) \rightarrow P(n+1)$.

1.2 Logik

Wahrheitstafel als Definition gängiger, bool'scher Operatoren

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

1.3 Mengen

1.3.1 Definitionen

Seien im Folgenden A, B Mengen.

- (1) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ – Vereinigung
- (2) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ – Durchschnitt
- (3) $A \setminus B := A - B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ – Differenz
- (4) $A^C := \overline{A} := \{x \mid x \notin A\} = M \setminus A$ – Komplement (bzgl. M)
- (5) $A \subseteq B := \forall x \in A : x \in B$ – Teilmenge

1.3.2 Rechenregeln

Diese Beweise (und ähnliche) können durch Einsetzen der obigen Definitionen und logisches Umformen geführt werden.

- (1) $A \cup B = B \cup A$,
 $A \cap B = B \cap A$.
- (2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.
- (3) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- (4) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup B) \cap (B^C \cup C)$,
 $(A \setminus B) \cap C = A \setminus (B \cap C^C)$.
- (5) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$,
 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
- (6) $(A \setminus B) = A \cap B^C$.
- (7) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

1.3.3 Wichtige Mengen

\mathbb{N}_0 , natürliche Zahlen mit 0 $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

\mathbb{N} , natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

\mathbb{Z} , ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

\mathbb{Q} , rationale Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_0\}$.

\mathbb{R} , reelle Zahlen $\mathbb{R} :=$ rationale und irrationale Zahlen, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

\mathbb{C} , reelle Zahlen $\mathbb{C} := \{a - bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, mit $i^2 = -1$.

1.3.4 Intervalle

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossen
$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} := (a, b]$	halboffen (links)
$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} := [a, b)$	halboffen (rechts)
$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} := (a, b)$	offen

- (1) Offene Intervalle sind offene Mengen
- (2) Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossene Mengen
- (3) Abgeschlossene, beschränkte Intervalle $(a, b \neq \infty)$ sind kompakt.

1.3.5 Mächtigkeit

Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt. Wir schreiben $|A| = |B|$.

Es gilt $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |[a, b]| = |\mathbb{C}|$.

1.3.6 Topologie

Sei im Folgenden $\Omega, A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definitionen

- (1) Die Menge $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - x_0| < r\}$ heißt *offener Ball* mit Radius $r > 0$ um $x_0 \in \mathbb{R}^d$.
- (2) $x_0 \in \Omega$ heißt *innerer Punkt* von Ω falls $\exists r > 0 : B_r(x_0) \subseteq \Omega$.
- (3) Ω heißt *offen* falls alle $x \in \Omega$ innere Punkte sind.
- (4) A heißt *abgeschlossen* falls $\mathbb{R}^d \setminus A$ offen ist.
- (5) $\Omega^\circ := \text{int}(\Omega) = \bigcup_{U \subseteq \Omega, U \text{ offen}} U$ heißt *offener Kern* von Ω .
- (6) $\text{clos}(\Omega) := \bigcap_{A \supseteq \Omega, A \text{ abgeschlossen}} A$ heißt *Abschluss* von Ω .
- (7) $\partial\Omega := \text{clos}(\Omega) \setminus \text{int}(\Omega)$ heißt *Rand* von Ω .

Sätze

- (1) \emptyset, \mathbb{R}^d sind offen und abgeschlossen.
- (2) $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\implies \Omega_1 \cap \Omega_2$ offen.
- (3) $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\implies \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ offen.
- (4) $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen $\implies A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.
- (5) $A_i \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen $\implies \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

2 Mittleres

2.1 Zwischenwertsatz

2.2 Folgen

2.2.1 Definitionen

Falls nicht anders angegeben, ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Der **Grenzwert** a einer Folge existiert genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \epsilon$. Wir schreiben dann $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder auch $a_n \rightarrow a$.

konvergent Der Grenzwert existiert.

divergent Der Grenzwert existiert nicht.

Nullfolge $a = 0$.

beschränkt $\exists C \in \mathbb{R} : |a_n| \leq C$.

unbeschränkt Falls nicht beschränkt. Immer *divergent*!

monoton wachsend $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

monoton fallend $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

streng monoton wachsend $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

streng monoton fallend $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

alternierend $a_n < 0 \implies a_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

bestimmt divergent / uneigentlich konvergent $a = \pm\infty$

Teilfolge Durch Weglassen von Gliedern aus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entstandene, unendliche Folge.

Häufungspunkt $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Teilfolge.

$\limsup \max\{b_n \text{ konvergente Teilfolge} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\}$.

$\liminf \min\{b_n \text{ konvergente Teilfolge} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\}$.

2.2.2 Konvergenzkriterien

- (1) $a_n \rightarrow a \implies a_n - a \rightarrow 0 \implies |a_n - a| \rightarrow 0$.
- (2) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen ihren Grenzwert. Eine konvergente Folge hat also genau einen Häufungspunkt.
- (3) (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt $\implies (a_n)$ konvergent.
- (4) (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt $\implies (a_n)$ konvergent.
- (5) $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ konvergent $\implies a = 0$, siehe Reihen.
- (6) $\exists f, f(n) = a_n \wedge \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
- (7) $\exists (a_n), (b_n), (c_n)$ mit $a_n \leq b_n \leq c_n \wedge a = c \implies b = a$, sogenanntes **Einschließungskriterium**.

Cauchy-Kriterium Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \epsilon$$

Insbesondere gilt, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\iff (a_n)$ Cauchy-Folge. Siehe auch **Tipps an Beispielen** für angewandte Kriterien.

2.2.3 Rechenregeln für Eigenschaften

Addition

- (1) $(a_n), (b_n)$ konvergent $\implies (a_n + b_n)$ konvergent.
- (2) $(a_n), (b_n)$ beschränkt $\implies (a_n + b_n)$ beschränkt.
- (3) (a_n) konvergent, (b_n) divergent $\implies (a_n + b_n)$ divergent.
- (4) (a_n) beschränkt, (b_n) unbeschränkt $\implies (a_n + b_n)$ unbeschränkt.
- (5) (a_n) beschränkt, $(b_n) \rightarrow \pm\infty \implies (a_n + b_n) \rightarrow \pm\infty$.
- (6) $(a_n) \rightarrow \pm\infty, (b_n) \rightarrow \pm\infty \implies (a_n + b_n) \rightarrow \pm\infty$.

Multiplikation

- (1) (a_n) Nullfolge, (b_n) beschränkt $\implies (a_n \cdot b_n)$ Nullfolge.
- (2) $(a_n), (b_n)$ konvergent $\implies (a_n \cdot b_n)$ konvergent.
- (3) $(a_n), (b_n)$ beschränkt $\implies (a_n \cdot b_n)$ beschränkt.
- (4) $(a_n) \rightarrow a, a \neq 0, (b_n)$ divergent $\implies (a_n \cdot b_n)$ divergent.

Grenzwerte Wir setzen $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((a_n)^c) = a^c, c$ konstant.
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}, b \neq 0$.

2.2.4 Hilfsmethoden

Referenzfolgen Für folgende Folgen gilt: weiter rechts stehende wachsen schneller gegen $+\infty$.

$$1, \ln(n), n^a (a > 0), q^n (q > 1), n!, n^n$$

Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx, x \geq -1, n \in \mathbb{N}$.

Stirlingformel – Abschätzungen für $n!$

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n}},$$

insbesondere gilt $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \approx n!$

2.2.5 Tipps an Beispielen

Gruppieren von Gliedern

Wurzel

Bruch

n im Exponent

Satz von l'Hospital

2.3 Reihen

2.3.1 Definitionen

Eine *Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent* mit Grenzwert s , wenn die Folge der *Partialsummen* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}, S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ gegen s konvergiert. Es gilt also wie folgt.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s$$

2.3.2 Konvergenzkriterien

Nullfolge als Notwendigkeit Falls (a_n) keine Nullfolge, gilt Folgendes nicht und somit konvergiert auch nicht folgende Reihe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ϵ -Kriterium $\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |\sum_{k=1}^n a_k - s| < \epsilon$

Absolute Konvergenz Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so sagen wir die Reihe konvergiert absolut. Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}$. Die Umkehrung gilt i. A. nicht.

Majorantenkriterium Ist $|a_n| \leq b_n$ und die *Majorante* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Minorantenkriterium Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ und die *Minorante* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Leibnizkriterium Wenn folgende 3 Kriterien erfüllt sind, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- (1) (a_n) ist alternierend, also $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 0 \implies a_{n+1} > 0$
- (2) $a_n \rightarrow 0$ oder $|a_n| \rightarrow 0$
- (3) $(|a_n|)$ ist monoton fallend

Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow q \implies \begin{cases} q < 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \implies \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Quotientenkriterium

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow q \implies \begin{cases} q < 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \implies \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

2.3.3 Potenzreihe

Die *Potenzreihe* hat die allgemeine Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

dabei nennt man x_0 den *Entwicklungspunkt*.

Konvergenzradius Wir definieren den *Konvergenzradius* wie folgt.

$$r := \sup\{|z| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ist konvergent}\}$$

Es gilt also insbesondere, dass die Reihe für alle $|z| < r$ konvergiert und für für alle $|z| > r$ divergiert. Er kann mit der *Formel von Cauchy-Hadamard* wie folgt berechnet werden.

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Gilt außerdem, dass ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ für alle $n \geq n_0$ $a_n \neq 0$ gilt, so können wir auch wie folgt r berechnen.

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Randpunkte Der Konvergenzradius gibt keine Hinweise auf das Konvergenzverhalten der Reihe an den sogenannten *Randpunkten* $\pm r$. Hierzu können z. B. die Randpunkte in die Reihe eingesetzt werden und anschließend die Konvergenz überprüft bzw. widerlegt werden.

2.3.4 Rechenregeln

Für *konvergente* Reihen gilt Folgendes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \implies \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$$

Für *absolut konvergente* Reihen gilt außerdem, dass folgende Reihe absolut und unabhängig von der Summationsreihenfolge konvergiert.

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} b_l$$

2.4 Funktionen

2.4.1 Grenzwerte

2.4.2 Stetigkeit

2.4.3 Folgen von Funktionen

2.4.4 Differentialrechnung

2.5 Taylorreihe & -entwicklung

3 Schweres

3.1 Integration

Im Folgenden seien F, f definiert auf $]a, b[$.

- (1) F heißt Stammfunktion von f falls $F' = f$.
- (2) Für Stammfunktionen F_1, F_2 von f gilt: $F_1 - F_2$ konstant.
- (3) $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx := F(x_1) - F(x_0)$ heißt Integral von f über $[x_0, x_1]$. Dabei ist $a < x_0 \leq x_1 < b$ und $F' = f$.
- (4) **Hauptsatz:** $F(y) = \int_a^y f(x) dx, y \in]a, b[\implies F' = f$.

3.1.1 Rechenregeln

Das Integral ist ein *lineares* und *monotones* Funktional, wie folgende zwei Sätze zeigen!

Linearität $\int_{x_0}^{x_1} \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \beta \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx$.

Monotonie Sei $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und R-integrierbar dann gilt $f \leq g \implies \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \leq \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx$.

Gebietsadditivität $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$, wobei $x_0 \leq x_1 \leq x_2$.

Substitution Ausgehend von der Ableitungsregel $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ können wir folgende Integrationsregel herleiten.

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f'(u) du$$

Substituiert man $u := g(x)$, ergibt sich $\frac{du}{dx} = g'(x) \iff du = g'(x) dx$. Bleibt noch ein Restterm $i(x)$, löse $u = g(x)$ nach $x = h(u)$ auf und ersetze $i(x)$ durch $h(i(x))$.

Die neuen Grenzen – nur bei bestimmten Integralen – sind nun $g(x_0)$ und $g(x_1)$. Bei unbestimmten Integralen müssen keine Grenzen angepasst werden!

Nach Berechnung des Integrals resubstituiere u durch $g(x)$.

Partielle Integration So ähnlich lässt sich auch aus der Ableitungsregel $\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ eine Integrationsregel aufstellen.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx &= f(x)g(x) \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x) dx \\ \iff \int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x) dx &= f(x)g(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x) dx. \end{aligned}$$

3.2 Differentialgleichungen

3.2.1 DGL erster Ordnung

Definition Eine Gleichung, in der (ausschließlich) die Unbekannten $y = y(x), y' = y'(x)$ und x vorkommen, heißen *Differentialgleichung erster Ordnung*.

Separation der Variablen $y' = g(y)f(x)$ lässt sich mittels *Separation der Variablen* lösen. Dazu bringen wir die “ys auf die eine, die xs auf die andere Seite” der Gleichung. Anschließend integrieren wir auf beiden Seiten nach dx und erhalten so Folgendes.

$$\begin{aligned} y' = g(y)f(x) &\iff \frac{y'}{g(y)} = f(x) \iff \int \frac{dy}{g(y)} dx = \int f(x) dx \\ &\iff \int \frac{1}{g(y)} dy = F(x) + C_0 \iff \ln|g(y)| = F(x) + C_1. \end{aligned}$$

Durch Anwenden von *exp* auf beiden Seiten und anschließendes Umformen der Konstanten, erhalten wir schließlich.

$$g(y) = C \cdot e^{F(x)} \iff y = g^{-1}(C \cdot e^{F(x)})$$

Bemerkung, dass es zusätzliche konstante Lösungen für y geben kann, nämlich für alle y mit $g(y) = 0$.

Variation der Konstanten Für $y' = y + x$ betrachte die Lösung der linearen, homogenen DGL $y' - y = 0$. Diese hat ungefähr die Form $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Nun ersetze $C_1 := u_1(x), C_2 := u_2(x)$ und löse anschließend das Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

3.2.2 DGL zweiter Ordnung

3.2.3 Lineare, homogene DGL beliebiger Ordnung

Definition Eine lineare, homogene DGL der Ordnung n über eine Funktion $f \in C^n$ ist eine Gleichung der Form

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0.$$

Lösungsansatz Der Lösungsansatz für homogene DGL basiert auf einer Eigenwertberechnung über das charakteristische Polynom. Man berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ mit Vielfachheiten c_1, \dots, c_l durch Lösen von $a_n \lambda^n + \dots + a_0 \lambda^0 = 0$. Es gilt jetzt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{c_i} k_{i,j} x^{j-1} e^{\lambda_i x} \\ &= k_{1,0} e^{\lambda_1 x} + k_{1,1} x e^{\lambda_1 x} + \dots + k_{1,c_1-1} x^{c_1-1} e^{\lambda_1 x} + \dots \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung für Anfangswertproblem Haben wir auch $f(0) = w_0, f'(0) = w_1, \dots, f^{(n)}(0) = w_n$ gegeben, können wir die Koeffizienten $k_{i,j}$ wie folgt ausrechnen. Durch Lösen des folgenden Gleichungssystems erhalten wir dann die entsprechenden Koeffizienten.

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ \vdots \\ f^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

3.3 Differentialrechnung in \mathbb{R}^n

4 Formeln und Tafeln

Hier ist alles nur aufgelistet, für Begründungen an der jeweiligen Stelle nachgucken!

4.1 Rechentricks

4.1.1 Fakultät, Binomialkoeffizienten

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1, n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

4.1.2 Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.1.3 Partialbruchzerlegung

Sonderfall Nenner Grad zwei

$$B = \frac{a_z x + b_z}{(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)} = \frac{u}{(a_1 x + b_1)} + \frac{v}{(a_2 x + b_2)},$$

mit $ua_1 + va_2 = a_z$ und $ub_1 + vb_2 = b_z$.

Allgemeiner Fall Betrachte den Bruch $\frac{z(x)}{n(x)}$, wobei z, n Polynome mit Grad n, m sind.

Fall 1: $n \geq m$ Dividiere $\frac{z(x)}{n(x)} = v(x) + \frac{u(x)}{n(x)}$. Ist $u(x) \neq 0$, so fahre mit $\frac{u(x)}{n(x)}$ wie in Fall 2 weiter, sonst sind wir fertig.

Fall 2: $n < m$ Faktorisiere $n(x)$ in seine i Nullstellen: $n(x) = (x-x_1)^{r_1} \cdot (x-x_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (x-x_i)^{r_i}$. Jetzt lösen wir das folgende Gleichungssystem durch Ausmultiplikation.

$$\frac{a_1}{(x-x_1)^{r_1}} + \frac{a_2}{(x-x_2)^{r_2}} + \dots + \frac{a_i}{(x-x_i)^{r_i}} = \frac{z(x)}{n(x)}$$

4.1.4 Ungleichungen

- (1) $a < b \iff a + c < b + c$, genauso für $\leq, =, >, \geq$
- (2) $a < b \wedge c > 0 \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- (3) $a < b \wedge c < 0 \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- (4) $|a+b| \leq |a| + |b|$ – Dreiecksungleichung
- (5) $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$ – Cauchy-Schwarz-Ungleichung
- (6) $2|x \cdot y| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2, \epsilon > 0$ – Young-Ungleichung

4.1.5 Exponentialfunktion und Potenzen

Exponentialfunktion Im Folgenden gilt $x \in \mathbb{R}$.

- (1) $e^x := \text{Exp}(x)$, definiert über Reihe, siehe unten.
- (2) $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- (3) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- (4) $e^0 = 1, e^1 = e \approx 2.718281$
- (5) $e^{-\infty} = 0, e^{\infty} = \infty$
- (6) $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ – Eulerformel
- (7) $e^{i\pi} = -1$ – Euleridentität
- (8) $e^{-1}(x) = \ln(x)$ also $e^{\ln(x)} = x = \ln(e^x)$.

Potenzen Im Folgenden gilt $a, b, n, m \in \mathbb{R}$.

- (1) $a^x = e^{\ln(a)^x} = e^{\ln(a)x}$
- (2) $a^{n+m} = a^n a^m$
- (3) $a^{nm} = (a^n)^m = a^{(n^m)}$
- (4) $(ab)^n = a^n b^n$
- (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Wurzeln Im Folgenden gilt $a, b, n, m \in \mathbb{R}$.

- (1) $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$
- (2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
- (3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- (4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

4.1.6 Logarithmen

Im Folgenden gilt $a, r, x, y \in \mathbb{R}$.

- (1) $\ln(x) := \text{Exp}^{-1}(x)$, also $x > 0$.
- (2) $\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$
- (3) $\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
- (4) $\log_a(\infty) = \infty$
- (5) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- (6) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- (7) $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$
- (8) $\log_a(x \pm y) = \log_a(x) + \log_a\left(1 \pm \frac{y}{x}\right)$

4.1.7 Komplexe Zahlen \mathbb{C}

Sei $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$.

- (1) $c := a + ib = \Re(a) + i\Im(b)$
- (2) $\bar{c} = a - ib$
- (3) $z_0 + z_1 := (a_0 + a_1) + i(b_0 + b_1)$
- (4) $z_0 \cdot z_1 := (a_0 a_1 - b_0 b_1) + i(a_0 b_1 + a_1 b_0)$
- (5) $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

4.2 Trigonometrische Funktionen

- (1) $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- (2) $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- (3) $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- (4) $\cos(x) + i \sin(x) = e^{ix}$
- (5) $\sin(a)^2 + \cos(a)^2 = 1$
- (6) $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$
- (7) $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- (8) $\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \tan(b)}$
- (9) $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$
- (10) $\cos(2a) = 2 \cos(a) \cos(a)$

$$(11) \quad \tan(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 = 1 - 2\sin(a)^2$$

$$(12) \quad \sin(a \pm \frac{\pi}{4}) = \sin(a \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos(a)$$

$$(13) \quad \cos(a \pm \frac{\pi}{4}) = \cos(a \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin(a)$$

$$(14) \quad \sin(a \pm \frac{\pi}{2}) = \sin(a \pm \pi) = -\sin(a)$$

$$(15) \quad \cos(a \pm \frac{\pi}{2}) = \cos(a \pm \pi) = -\cos(a)$$

4.3 Hyperbelfunktionen

$$(1) \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i \sin(ix)$$

$$(2) \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$$

$$(3) \quad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

$$(4) \quad \operatorname{arcsinh}(x) := \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(5) \quad \operatorname{arccosh}(x) := \cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$(6) \quad \operatorname{arctanh}(x) := \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

4.4 Folgen mit Grenzwerten

Folgende Folgen sind sortiert nach “Wachstumsschnelligkeit”.

$$(1), (\ln(n)), (n^a), (q^n), (n!), (n^n) \text{ mit } a > 0, q > 1.$$

Im Folgenden ist $a_n \rightarrow a$ gleichbedeutend mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Außerdem seien $a, k \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Konvergente Folgen

$$(1) \quad \sqrt[n]{a} \rightarrow 1, \sqrt[n]{n} \rightarrow 1, a \geq 0$$

$$(2) \quad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e, \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

$$(3) \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

$$(4) \quad \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow e^a$$

$$(5) \quad (a^n n^k)^n \rightarrow 0, |a| < 1$$

$$(6) \quad n(\sqrt[n]{a} - 1) \rightarrow \ln(a), a > 0$$

Divergente Folgen

$$(\sqrt[n]{n!}), \left(\frac{n^n}{n!}\right), \left(\frac{a^n}{n^k}\right)$$

Bernoullische Ungleichung

$$\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$$

4.5 Reihen mit Grenzwerten

Sei mal \sum_{n_0} Abkürzung für $\sum_{n=n_0}^{\infty}$.

$$(1) \quad \sum_1 \frac{1}{n} \text{ divergiert} - \textit{harmonische Reihe}$$

$$(2) \quad \sum_1 (-1)^n \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \textit{alternierende harmonische Reihe}$$

$$(3) \quad \sum_1 \frac{1}{n^a} \text{ konvergiert für } a > 1, \text{ sonst divergent.}$$

$$(4) \quad \sum_0 q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1 - \textit{geometrische Reihe}$$

$$(5) \quad \sum_0 q^n = \frac{1}{1+q}, |q| < 1 - \textit{alternierende geometrische Reihe}$$

$$(6) \quad \sum_1 \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partialsummen

$$(1) \quad \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} - \textit{kleiner Gauß}$$

$$(2) \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$(4) \quad \sum_{i=0}^n q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

4.6 Ableitungen

4.6.1 Rechenregeln

- (1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- (2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- (3) $\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)' = \frac{z(x)n'(x) - z'(x)n(x)}{n(x)^2}$
- (4) $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$

4.7 Ableitungstafel

4.7.1 Polynome und Wurzeln

- (1) $x^a \rightarrow ax^{a-1}$
- (2) $\frac{1}{x^a} = x^{-a} \rightarrow -ax^{-a-1} = \frac{-a}{x^{a+1}}$
- (3) $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}} \rightarrow \frac{b}{a}x^{\frac{b}{a}-1}$

4.7.2 Exponenten und Logarithmen

- (1) $e^{ax} \rightarrow ae^{ax}$
- (2) $e^{x^a} \rightarrow ax^{a-1}e^{x^a}$
- (3) $a^x = e^{\ln(a)x} = e^{\ln(a)x} \rightarrow \ln(a) \cdot a^x$
- (4) $x^x \rightarrow (1 + \ln(x))x^x$
- (5) $x^{x^a} \rightarrow (1 + a \ln(x))x^{x^a+a-1}$
- (6) $\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$
- (7) $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) \rightarrow \frac{1}{\ln(a)x}$

4.7.3 Trigonometrische Funktionen

- (1) $\sin(x) \rightarrow \cos(x)$
- (2) $\cos(x) \rightarrow -\sin(x)$
- (3) $\sin(ax + b) \rightarrow a \cos(ax + b)$
- (4) $\tan(x) \rightarrow \frac{1}{(\cos(x))^2}$
- (5) $\arcsin(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (6) $\arccos(x) \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (7) $\arctan(x) \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$
- (8) $\sinh(x) \rightarrow \cosh(x)$
- (9) $\cosh(x) \rightarrow \sinh(x) \neq -\sinh(x)!$
- (10) $\tanh(x) \rightarrow \frac{1}{(\cosh(x))^2}$
- (11) $\operatorname{arcsinh}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- (12) $\operatorname{arccosh}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$
- (13) $\operatorname{arctanh}(x) \rightarrow \frac{1}{1-x^2}$

4.8 Unbestimmte Integrale

4.8.1 Rechenregeln

- (1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- (2) $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$
- (3) $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$
- (4) $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(x)dx$
- (5) $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(x + b)$
- (6) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|)$
- (7) $\int f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2$
- (8) $\int |f(x)|dx = \left| \int f(x)dx \right|$

4.8.2 Polynome und Wurzeln

- (1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$
- (2) $\int \frac{1}{x^a} dx = \int x^{-a} dx = \frac{x^{-a+1}}{-a+1} = -\frac{a-1}{x^{a-1}}, a \neq 1$
- (3) $\int \sqrt[a]{x^b} dx = \int x^{\frac{b}{a}} dx \rightarrow \frac{x^{\frac{b}{a}+1}}{\frac{b}{a}+1} = \frac{a}{b+a} \sqrt[a]{x^{b+a}}$

4.8.3 Exponenten und Logarithmen

- (1) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax}$
- (2) $\int xe^x dx = (x - 1)e^x$
- (3) $\int a^x dx = \int e^{\ln(a)x} dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x$
- (4) $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$
- (5) $\int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1)$

4.8.4 Trigonometrische Funktionen

- (1) $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$
- (2) $\int \cos(x) dx = \sin(x)$
- (3) $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$
- (4) $\int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|)$
- (5) $\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
- (6) $\int \arccos(x) dx = x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
- (7) $\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
- (8) $\int \sinh(x) dx = \cosh(x)$
- (9) $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) \neq -\sinh(x)$
- (10) $\int \tanh(x) dx = \ln(\cosh(x))$
- (11) $\int \operatorname{arcsinh}(x) dx = x \operatorname{arcsinh}(x) + \sqrt{x^2+1}$
- (12) $\int \operatorname{arccosh}(x) dx = x \operatorname{arccosh}(x) + \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$
- (13) $\int \operatorname{arctanh}(x) dx = x \operatorname{arctanh}(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$

4.9 Hilfen für Diff'rechnung in \mathbb{R}^n