Inhaltsverzeichnis

1 Einfaches

1.1 Vollständige Induktion

Kann für ein Prädikat $P(n)$ bewiesen werden, dass $P(n_0)$ und $\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \wedge P(n) \to P(n+1)$ gilt, dann folgt daraus $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \to P(n)$.

Induktionannahme (IA) bezeichnet das Prädikat $P(n)$.

Induktionsverankerung (IV) ist der Beweis von $P(n_0)$.

Induktionsschritt (IS) ist der Beweis von $P(n) \to P(n+1)$.

1.2 Logik

Wahrheitstafel als Definition gängiger, bool'scher Operatoren

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

1.3 Mengen

1.3.1 Definitionen

Seien im Folgenden A, B Mengen.

(1) $A \cup B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ – *Vereinigung*

(2) $A \cap B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ – *Durchschnitt*

(3) $A \backslash B := A - B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ – *Differenz*

(4) $A^C := \overline{A} := x \mid x \notin A = M \backslash A$ – *Komplement (bzgl. M)*

(5) $A \subseteq B := \forall x \in A : x \in B.$ – *Teilmenge*

1.3.2 Rechenregeln

Diese Beweise (und ähnliche) können durch Einsetzen der obigen Definitionen und logisches Umformen geführt werden.

(1) $A \cup B = B \cup A$,
$A \cap B = B \cap A$.

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) $(A \backslash B) \cup C = (A \cup B) \cap (B^C \cup C)$,
$(A \backslash B) \cap C = A \backslash (B \cup C^C)$.

(5) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$,
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

(6) $(A \backslash B) = A \cap B^C$.

(7) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

1.3.3 Wichtige Mengen

$\mathbb{N}_0$, natürliche Zahlen mit 0 $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$\mathbb{N}$, natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

$\mathbb{Z}$, ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

$\mathbb{Q}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_0\}$.

$\mathbb{R}$, reelle Zahlen $\mathbb{R} :=$ rationale und irrationale Zahlen, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$, reelle Zahlen $\mathbb{C} := \{a - bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, mit $i^2 = -1$.

1.3.4 Intervalle

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossen
$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} := (a, b]$	halboffen (links)
$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} := [a, b)$	halboffen (rechts)
$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} := (a, b)$	offen

(1) Offene Intervalle sind offene Mengen

(2) Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossene Mengen

(3) Abgeschlossene, beschränkte Intervalle ($a, b \neq \infty$) sind kompakt.

1.3.5 Mächtigkeit

Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt. Wir schreiben $|A| = |B|$.
Es gilt $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |[a, b]| = |\mathbb{C}|$.

1.3.6 Topologie

Sei im Folgenden $\Omega, A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definitionen

(1) Die Menge $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - x_0| < r\}$ heißt *offener Ball* mit Radius $r > 0$ um $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

(2) $x_0 \in \Omega$ heißt *innerer Punkt* von Ω falls $\exists r > 0 : B_r(x_0) \subseteq \Omega$.

(3) Ω heißt *offen* falls alle $x \in \Omega$ innere Punkte sind.

(4) A heißt *abgeschlossen* falls $\mathbb{R}^d \backslash A$ offen ist.

(5) $\Omega^o := \operatorname{int}(\Omega) = \bigcup_{U \subseteq \Omega, U \text{offen}} U$ heißt *offener Kern* von Ω.

(6) $\operatorname{clos}(\Omega) := \bigcap_{A \supseteq \Omega}, A \text{abgeschlossen} A$ heißt *Abschluss* von Ω.

(7) $\partial\Omega := \operatorname{clos}(\Omega) \backslash \operatorname{int}(\Omega)$ heißt *Rand* von Ω.

(8) Ω heißt *kompakt*, falls alle Folgen $(x_n) \subseteq \Omega$ ein Häufungspunkt (s. u.) in K haben.

Sätze

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^d$ sind offen und abgeschlossen.

(2) $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\implies \Omega_1 \cap \Omega_2$ offen.

(3) $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\implies \bigcup_{i \in I} \Omega_l$ offen.

(4) $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen $\implies A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

(5) $A_i \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen $\implies \bigcap_{i \in I} A_l$ abgeschlossen.

2 Mittleres

2.1 Zwischenwertsatz

2.2 Folgen

2.2.1 Definitionen

Falls nicht anders angegeben, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Der **Grenzwert** a einer Folge existiert genau dann, wenn $\forall\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \epsilon$ Wir schreiben dann $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder auch $a_n \to a$.

konvergent Der Grenzwert existiert.

divergent Der Grenzwert existiert nicht.

Nullfolge $a = 0$.

beschränkt $\exists C \in \mathbb{R} : |a_n| \leq C$.

unbeschränkt Falls nicht beschränkt. Immer *divergent*!

monoton wachsend $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

monoton fallend $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

streng monoton wachsend $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

streng monoton fallend $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

alternierend $a_n < 0 \implies a_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

bestimmt divergent / uneigentlich konvergent $a = \pm\infty$

Teilfolge Durch Weglassen von Gliedern aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entstandene, unendliche Folge.

Häufungspunkt $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolge.

$\limsup$ $\max\{b_n \text{ konvergente Teilfolge} \mid \lim_{n\to\infty} b_n\}$.

$\liminf$ $\min\{b_n \text{ konvergente Teilfolge} \mid \lim_{n\to\infty} b_n\}$.

2.2.2 Konvergenzkriterien

(1) $a_n \to a \implies a_n - a \to 0 \implies |a_n - a| \to 0$.

(2) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen ihren Grenzwert. Eine konvergente Folge hat also genau einen Häufungspunkt.

(3) (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt $\implies$ (a_n) konvergent.

(4) (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt $\implies$ (a_n) konvergent.

(5) $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ konvergent $\implies a = 0$, siehe Reihen.

(6) $\exists f, f(n) = a_n \wedge \lim_{x\to\infty} f(x) = a \implies \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(7) $\exists (a_n), (b_n), (c_n)$ mit $a_n \leq b_n \leq c_n \wedge a = c \implies b = a$, sogenanntes **Einschließungskriterium**.

Cauchy-Kriterium Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall\epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \epsilon$$

Insbesondere gilt, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\iff$ (a_n) Cauchy-Folge. Siehe auch **Tipps an Beispielen** für angewandte Kriterien.

2.2.3 Rechenregeln für Eigenschaften

Addition

(1) $(a_n), (b_n)$ konvergent $\implies$ $(a_n + b_n)$ konvergent.

(2) $(a_n), (b_n)$ beschränkt $\implies$ $(a_n + b_n)$ beschränkt.

(3) (a_n) konvergent, (b_n) divergent $\implies$ $(a_n + b_n)$ divergent.

(4) (a_n) beschränkt, (b_n) unbeschränkt $\implies$ $(a_n + b_n)$ unbeschränkt.

(5) (a_n) beschränkt, $(b_n) \to \pm\infty \implies (a_n + b_n) \to \pm\infty$.

(6) $(a_n) \to \pm\infty$, $(b_n) \to \pm\infty \implies (a_n + b_n) \to \pm\infty$.

Multiplikation

(1) (a_n) Nullfolge, (b_n) beschränkt $\implies$ $(a_n \cdot b_n)$ Nullfolge.

(2) $(a_n), (b_n)$ konvergent $\implies$ $(a_n \cdot b_n)$ konvergent.

(3) $(a_n), (b_n)$ beschränkt $\implies$ $(a_n \cdot b_n)$ beschränkt.

(4) $(a_n) \to a, a \neq 0$, (b_n) divergent $\implies$ $(a_n \cdot b_n)$ divergent.

Grenzwerte Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n, b := \lim_{n\to\infty} b_n$.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(2) $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$.

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(4) $\lim_{n\to\infty}((a_n)^c) = a^c, c$ konstant.

(5) $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}, b \neq 0$.

2.2.4 Hilfsmethoden

Referenzfolgen Für folgende Folgen gilt: weiter rechts stehende wachsen schneller gegen $+\infty$.

$$1, \ln(n), n^a (a > 0), q^n (q > 1), n!, n^n$$

Bernoullische Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + nx, x \geq -1, n \in \mathbb{N}$.

Stirlingformel – Abschätzungen für $n!$

$$\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \cdot e^{\frac{1}{12n}},$$

insbesondere gilt $\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \approx n!$

2.2.5 Tipps an Beispielen

Gruppieren von Gliedern

Wurzel

Bruch

n im Exponent

Satz von l'Hospital

2.3 Reihen

2.3.1 Definitionen

Eine *Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent* mit Grenzwert s, wenn die Folge der *Partialsummen* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ gegen s konvergiert. Es gilt also wie folgt.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$$

2.3.2 Konvergenzkriterien

Nullfolge als Notwendigkeit Falls (a_n) keine Nullfolge, gilt Folgendes nicht und somit konvergiert auch nicht folgende Reihe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ϵ-Kriterium $\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |\sum_{k=1}^{n} a_k - s| < \epsilon$

Absolute Konvergenz Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so sagen wir die Reihe konvergiert absolut. Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Die Umkehrung gilt i. A. nicht.

Majorantenkriterium Ist $|a_n| \leq b_n$ und gibt es eine konvergente *Majorante* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Minorantenkriterium Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ und gibt es eine divergente *Minorante* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Leibnizkriterium Wenn folgende 3 Kriterien erfüllt sind, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(1) (a_n) ist alternierend, also $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 0 \implies a_{n+1} > 0$

(2) $a_n \to 0$ oder $|a_n| \to 0$

(3) $(|a_n|)$ ist monoton fallend

Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to q \implies \begin{cases} q < 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \implies \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \implies \begin{cases} q < 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \implies \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

2.3.3 Potenzreihe

Die *Potenzreihe* hat die allgemeine Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

dabei nennt man x_0 den *Entwicklungspunkt*.

Konvergenzradius Der *Konvergenzradius* sei wie folgt definiert.

$$r := \sup\{|z| \;\Big|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ist konvergent}\}$$

Es gilt also insbesondere, dass die Reihe für alle $|z| < r$ konvergiert und für für alle $|z| > r$ divergiert. Er kann mit der *Formel von Cauchy-Hadamard* wie folgt berechnet werden.

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Gilt außerdem, dass ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ für alle $n \geq n_0$ $a_n \neq 0$ gilt, so können wir auch wie folgt r berechnen.

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Randpunkte Der Konvergenzradius gibt keine Hinweise auf das Konvergenzverhalten der Reihe an den sogenannten *Randpunkten* $\pm r$. Hierzu können z. B. die Randpunkte in die Reihe eingesetzt werden und anschließend die Konvergenz überprüft bzw. widerlegt werden.

2.3.4 Rechenregeln

Für *konvergente* Reihen gilt Folgendes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \implies \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$$

Für *absolut konvergente* Reihen gilt außerdem, dass folgende Reihe absolut und unabhängig von der Summationsreihenfolge konvergiert.

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} b_l$$

2.4 Funktionen

Falls nicht angegeben, ist f Abkürzung für $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$.

2.4.1 Grenzwerte

2.4.2 Stetigkeit

ϵ-δ-Kriterium $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, wenn Folgendes gilt.

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Definition

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \implies f(x)$ *stetig* im Punkt x_0.

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \implies f(x)$ *stetig ergänzbar* in x_0.

(3) $\forall x_0 \in \Omega : f(x)$ stetig in $x_0 \implies f(x)$ *stetig*.

Sätze über punktweise Stetigkeit Sei f stetig in x_0.

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$.

(2) $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\searrow x_0} x)$ wenn existent.

(3) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, für alle Folgen (x_n). – *Folgenkriterium.*

Gleichmäßige Stetigkeit f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \Omega : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Unterschied zur punktweisen Stetigkeit ist, dass δ unabhängig von der Wahl von y bzw. x_0 ist.

Lipschitz-Stetigkeit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante* L, wenn gilt:

$$\forall x, y \in \Omega : \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Lokale Lipschitz-Stetigkeit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heißt *lokal Lipschitz-stetig*, falls zu jedem $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $U = B_r(x_0) \cap \Omega$ existiert, so dass $f|_U : x \in U \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ist.

Sätze über gleichmäßige und Lipschitz-Stetigkeit

(1) Ist f Lipschitz-stetig mit Konstante L, so ist f gleichmäßig stetig, z. B. mit $\delta = \epsilon/L$.

(2) Ist f gleichmäßig stetig, dann ist f in Ω^C stetig ergänzbar.

(3) Ist umgekehrt Ω beschränkt, f stetig und in Ω^C stetig ergänzbar, so ist f auch gleichmäßig stetig.

2.4.3 Folgen von Funktionen

2.4.4 Differentialrechnung

2.5 Taylorreihe & -entwicklung

3 Schweres

3.1 Integration

Im Folgenden seien F, f definiert auf $]a, b[$.

(1) F heißt Stammfunktion von f falls $F' = f$.

(2) Für Stammfunktionen F_1, F_2 von f gilt: $F_1 - F_2$ konstant.

(3) $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx := F(x_1) - F(x_0)$ heißt Integral von f über $[x_0, x_1]$. Dabei ist $a < x_0 <= x_1 < b$ und $F' = f$.

(4) **Hauptsatz:** $F(y) = \int_a^y f(x)dx, y \in]a, b[\implies F' = f$.

3.1.1 Rechenregeln

Das Integral ist ein *lineares* und *monotones* Funktional, wie folgende zwei Sätze zeigen!

Linearität $\int_{x_0}^{x_1} \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \beta \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx$.

Monotonie Sei $f, g\ :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ beschränkt und R-integrabel dann gilt $f \leq g \implies \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \leq \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx$.

Gebietsadditivität $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, wobei $x_0 \leq x_1 \leq x_2$.

Substitution Ausgehend von der Ableitungsregel $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ können wir folgende Integrationsregel herleiten.

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x))|_{x_0}^{x_1} = \int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f'(u)du$$

Substituiert man $u := g(x)$, ergibt sich $\frac{du}{dx} = g'(x) \iff du = g'(x)dx$. Bleibt noch ein Restterm $i(x)$, löse $u = g(x)$ nach $x = h(u)$ auf und ersetzte $i(x)$ durch $h(i(x))$.

Die neuen Grenzen – nur bei bestimmten Integralen – sind nun $g(x_0)$ und $g(x_1)$. Bei unbestimmten Integralen müssen keine Grenzen angepasst werden!

Nach Berechnung des Integrals resubstituiere u durch $g(x)$.

Partielle Integration So ähnlich lässt sich auch aus der Ableitungsregel $\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ eine Integrationsregel aufstellen.

$$\int_{x_0}^{x_1} (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)|_{x_0}^{x_1}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x)dx$$

$$\iff \int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x)dx.$$

3.2 Differentialgleichungen

3.2.1 DGL erster Ordnung

Definition Eine Gleichung, in der (ausschließlich) die Unbekannten $y = y(x), y' = y'(x)$ und x vorkommen, heißen *Differentialgleichung erster Ordnung.*

Seperation der Variablen $y' = g(y)f(x)$ lässt sich mittels *Seperation der Variablen* lösen. Dazu bringen wir die "ys auf die eine, die xs auf die andere Seite" der Gleichung. Anschließend integrieren wir auf beiden Seiten nach dx und erhalten so Folgendes.

$$y' = g(y)f(x) \iff \frac{y'}{g(y)} = f(x) \iff \int \frac{y'}{g(y)} dx = \int f(x)dx$$

$$\iff \int \frac{1}{g(y)} dy = F(x) + C_0 \iff ln|g(y)| = F(x) + C_1.$$

Durch Anwenden von exp auf beiden Seiten und anschließendes Umformen der Konstanten, erhalten wir schließlich.

$$g(y) = C \cdot e^{F(x)} \iff y = g^{-1}(C \cdot e^{F(x)})$$

Bemerke, dass es zusätzliche konstante Lösungen für y geben kann, nämlich für alle y mit $g(y) = 0$.

Variation der Konstanten Für $y' = y + x$ betrachte die Lösung der linearen, homogenen DGL $y' - y = 0$. Diese hat ungefähr die Form $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Nun ersetze $C_1 := u_1(x), C_2 := u_2(x)$ und löse anschließend das Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

3.2.2 DGL zweiter Ordnung

3.2.3 Lineare, homogene DGL beliebiger Ordnung

Definition Eine lineare, homogene DGL der Ordnung n über eine Funktion $f \in C^n$ ist eine Gleichung der Form

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0.$$

Lösungsansatz Der Lösungsansatz für homogene DGL basiert auf einer Eigenwertberechnung über das charakteristische Polynom. Man berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ mit Vielfachheiten $c_1, \ldots, c_l$ durch Lösen von $a_n \lambda^n + \cdots + a_0 \lambda^0 = 0$. Es gilt jetzt:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{c_l} k_{i,j} x^{j-1} e^{\lambda_l x}$$

$$= k_{1,0} e^{\lambda_1 x} + k_{1,1} x e^{\lambda_1 x} + \cdots + k_{1,c_1 - 1} x^{c_1 - 1} e^{\lambda_l x} + \cdots$$

Partikuläre Lösung für Anfangswertproblem Haben wir auch $f(0) = w_0, f'(0) = w_1, \ldots, f^{(n)}(0) = w_n$ gegeben, können wir die Koeffizienten $k_{i,j}$ wie folgt ausrechnen. Durch Lösen des folgenden Gleichungssystems erhalten wir dann die entsprechenden Koeffizienten.

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ \vdots \\ f^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

3.2.4 Lineare, inhomogene DGL beliebiger Ordnung

3.3 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Definitionen Sei im Folgenden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ und $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.
Betrachte f als $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$, dann heißt f *partiell differenzierbar* in Richtung $(0, \ldots, e_i, \ldots, 0)$ bzw. nach x_i, wenn die Funktion $g : x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ differenzierbar ist. Wir betrachten dabei $x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ als Konstanten.

(1) F wie oben heißt *Vektorfunktion*.

(2) Bei $m = 1$ sprechen wir von einem *Skalarfeld*.

(3) Bei $n = m$ sprechen wir von einem *Vektorfeld*.

(4) Ist $v = \mathrm{grad}(f)$, heißt f das *Potential* oder die *Stammfunktion* zu dem *Potentialfeld* v.

∇-Operator, Gradient, Divergenz, Rotation

Nabla-Operator $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, nur im Kartesischem!

Gradient(enfeld) $\mathrm{grad}(f) := \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Divergenz $\mathrm{div}(F) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}$, $\mathrm{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle$

Rotation $\mathrm{rot}(F) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$, $\mathrm{rot}(F) = \nabla \times F, n = 3$

Jacobi-Matrix

hesse'sche Matrix

konservative Vektorfelder

3.3.1 Koordinatentransformation

Diffeomorphismus $\Phi : \Omega \mapsto \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus, wenn Φ bijektiv und Φ^{-1} differenzierbar ist.

Transformationssatz $f : \Phi(\Omega) \mapsto \mathbb{R}^n$ ist genau dann integrierbar, wenn $g(x) = f(\Phi(x))|\det(D(\Phi(x))|$ integrierbar ist. Es gilt:

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(x)dx = \int_{\Omega} f(\Phi(x))|\det(D(\Phi(x)))|dx$$

Dies nutzen wir aus, um Integrale durch geignete Wahl von Φ zu vereinfachen. Für Kugel- und Zylinderkoordinaten, siehe Anhang *Formeln und Tafeln*.

3.3.2 Ableitung und Integration

4 Formeln und Tafeln

Hier ist alles nur aufgelistet, für Begründungen an der jeweiligen Stelle nachgucken!

4.1 Rechentricks

4.1.1 Fakultät, Binomialkoeffizienten

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1, n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \binom{n}{n-k},\ 0 \le k \le n$$

4.1.2 Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.1.3 Partialbruchzerlegung

Sonderfall Nenner Grad zwei

$$B = \frac{a_z x + b_z}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)} = \frac{u}{(a_1x+b_1)} + \frac{v}{(a_2x+b_2)},$$

mit $ua_1 + va_2 = a_z \wedge ub_1 + vb_2 = b_z$.

Allgemeiner Fall Betrachte den Bruch $\frac{z(x)}{n(x)}$, wobei z, n Polynome mit Grad n, m sind.

Fall 1: $n \ge m$ Dividiere $\frac{z(x)}{n(x)} = v(x) + \frac{u(x)}{n(x)}$. Ist $u(x) \neq 0$, so fahre mit $\frac{u(x)}{n(x)}$ wie in *Fall 2* weiter, sonst sind wir fertig.

Fall 2: $n < m$ Faktorisiere $n(x)$ in seine i Nullstellen: $n(x) = (x-x_1)^{r_1} \cdot (x-x_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (x-x_i)^{r_i}$. Jetzt lösen wir das folgende Gleichungssystem durch Ausmultiplikation.

$$\frac{a_1}{(x-x_1)^{r_1}} + \frac{a_2}{(x-x_2)^{r_2}} + \dots + \frac{a_i}{(x-x_i)^{r_i}} = \frac{z(x)}{n(x)}$$

4.1.4 Ungleichungen

(1) $a < b \iff a + c < b + c$, genauso für $\le, =, >, \ge$

(2) $a < b \wedge c > 0 \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

(3) $a < b \wedge c < 0 \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(4) $|a+b| \le |a| + |b|$ – *Dreiecksungleichung*

(5) $|x \cdot y| \le \|x\| \cdot \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$ – *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

(6) $2|x \cdot y| \le \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2, \epsilon > 0$ – *Young-Ungleichung*

4.1.5 Exponentialfunktion und Potenzen

Exponentialfunktion Im Folgenden gilt $x \in \mathbb{R}$.

(1) $e^x := Exp(x)$, definiert über Reihe, siehe unten.

(2) $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(4) $e^0 = 1, e^1 = e \approx 2.718281$

(5) $e^{-\infty} = 0, e^{\infty} = \infty$

(6) $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ – *Eulerformel*

(7) $e^{i\pi} = -1$ – *Euleridentität*

(8) $e^{-1}(x) = \ln(x)$ also $e^{\ln(x)} = x = \ln(e^x)$.

Potenzen Im Folgenden gilt $a, b, n, m \in \mathbb{R}$.

(1) $a^x = e^{ln(a)^x} = e^{ln(a)x}$

(2) $a^{n+m} = a^n a^m$

(3) $a^{nm} = (a^n)^m = a^{(n^m)}$

(4) $(ab)^n = a^n b^n$

(5) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Wurzeln Im Folgenden gilt $a, b, n, m \in \mathbb{R}$.

(1) $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$

(2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

(4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

4.1.6 Logarithmen

Im Folgenden gilt $a, r, x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $\ln(x) := Exp^{-1}(x)$, also $x > 0$.

(2) $\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$

(3) $\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

(4) $\log_a(\infty) = \infty$

(5) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(6) $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$

(7) $\log_a(x^r) = n \log_a(x)$

(8) $\log_a(x \pm y) = \log_a(x) + \log_a(1 \pm \frac{y}{x})$

4.1.7 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Sei $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$.

(1) $c := a + ib = \Re(a) + i\Im(b)$

(2) $\overline{c} = a - ib$

(3) $z_0 + z_1 := (a_0 + a_1) + i(b_0 + b_1)$

(4) $z_0 \cdot z_1 := (a_0a_1 - b_0b_1) + i(a_0b_1 + a_1b_0)$

(5) $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

4.2 Trigonometrische Funktionen

(1) $\sin(x) := \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(2) $\cos(x) := \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(3) $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(4) $\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$

(5) $\sin(a)^2 + \cos(a)^2 = 1$

(6) $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

(7) $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

(8) $\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$

(9) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

(10) $\cos(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

(11) $\tan(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 = 1 - 2\sin(a)^2$

(12) $\sin(a \pm \frac{\tau}{4}) = \sin(a \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos(a)$

(13) $\cos(a \pm \frac{\tau}{4}) = \cos(a \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\sin(a)$

(14) $\sin(a \pm \frac{\tau}{2}) = \sin(a \pm \pi) = -\sin(a)$

(15) $\cos(a \pm \frac{\tau}{2}) = \cos(a \pm \pi) = -\cos(a)$

4.3 Hyperbelfunktionen

(1) $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i\sin(ix)$

(2) $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$

(3) $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$

(4) $\mathrm{arcsinh}(x) := \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

(5) $\mathrm{arccosh}(x) := \cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

(6) $\mathrm{arctanh}(x) := \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

4.4 Folgen mit Grenzwerten

Folgende Folgen sind sortiert nach “Wachstumsschnelligkeit”.

$$(1), (\ln(n)), (n^a), (q^n), (n!), (n^n) \text{ mit } a > 0, q > 1.$$

Im Folgenden ist $a_n \to a$ gleichbedeutend mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Außerdem seien $a, k \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Konvergente Folgen

(1) $\sqrt[n]{a} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1, a \geq 0$

(2) $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$, $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$

(3) $(\frac{n+1}{n})^n \to e$

(4) $(1 + \frac{a}{n})^n \to e^a$

(5) $(a^n n^k)^n \to 0, |a| < 1$

(6) $n(\sqrt[n]{a} - 1) \to ln(a), a > 0$

Divergente Folgen

$$(\sqrt[n]{n!}), (\frac{n^n}{n!}), (\frac{a^n}{n^k})$$

Bernoullische Ungleichung

$$\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

4.5 Reihen mit Grenzwerten

Sei mal $\sum_{n_0}$ Abkürzung für $\sum_{n=n_0}^{\infty}$.

(1) $\sum_1 \frac{1}{n}$ divergiert – *harmonische Reihe*

(2) $\sum_1 (-1)^n \frac{1}{n} = \ln(\frac{1}{2})$ – *alternierende harmonische Reihe*

(3) $\sum_1 \frac{1}{n^a}$ konvergiert für $a > 1$, sonst divergent.

(4) $\sum_0 q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$ – *geometrische Reihe*

(5) $\sum_0 q^n = \frac{1}{1+q}, |q| < 1$ – *alternierende geometrische Reihe*

(6) $\sum_1 \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Partialsummen

(1) $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n-1)}{2}$ – *kleiner Gauß*

(2) $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3) $\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(4) $\sum_{i=0}^n q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

4.6 Ableitungen

Im Folgenden sei $f(x) \to g(x)$ Abkürzung für $\frac{d}{dx}f(x) = g(x)$.

4.6.1 Rechenregeln

(1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(3) $(\frac{z(x)}{n(x)})' = \frac{z(x)n'(x)-z'(x)n(x)}{n(x)^2}$

(4) $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$

4.6.2 Polynome und Wurzeln

(1) $x^a \to ax^{a-1}$

(2) $\frac{1}{x^a} = x^{-a} \to -ax^{-a-1} = \frac{-a}{x^{a+1}}$

(3) $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}} \to \frac{b}{a}x^{\frac{b}{a}-1}$

4.6.3 Exponenten und Logarithmen

(1) $e^{ax} \to ae^{ax}$

(2) $e^{x^a} \to ax^{a-1}e^{x^a}$

(3) $a^x = e^{ln(a)^x} = e^{\ln(a)x} \to \ln(a) \cdot a^x$

(4) $x^x \to (1+\ln(x))x^x$

(5) $x^{x^a} \to (1+a\ln(x))x^{x^a+a-1}$

(6) $\ln(x) \to \frac{1}{x}$

(7) $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x) \to \frac{1}{\ln(a)x}$

4.6.4 Trigonometrische Funktionen

(1) $\sin(x) \to \cos(x)$

(2) $\cos(x) \to -\sin(x)$

(3) $\sin(ax+b) \to a\cos(ax+b)$

(4) $\tan(x) \to \frac{1}{(\cos(x))^2}$

(5) $\arcsin(x) \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(6) $\arccos(x) \to \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(7) $\arctan(x) \to \frac{1}{x^2+1}$

(8) $\sinh(x) \to \cosh(x)$

(9) $\cosh(x) \to \sinh(x) \neq -\sinh(x)!$

(10) $\tanh(x) \to \frac{1}{(\cosh(x))^2}$

(11) $\operatorname{arcsinh}(x) \to \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(12) $\operatorname{arccosh}(x) \to \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$

(13) $\operatorname{arctanh}(x) \to \frac{1}{1-x^2}$

4.7 Unbestimmte Integrale

4.7.1 Rechenregeln

(1) $\int(f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

(3) $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$

(4) $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(x)dx$

(5) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(x+b)$

(6) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|)$

(7) $\int f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2$

(8) $\int |f(x)|dx = |\int f(x)dx|$

4.7.2 Polynome und Wurzeln

(1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$

(2) $\int \frac{1}{x^a}dx = \int x^{-a}dx = \frac{x^{-a+1}}{-a+1} = -\frac{a-1}{x^{a-1}}, a \neq 1$

(3) $\int \sqrt[a]{x^b}dx = \int x^{\frac{b}{a}}dx \to \frac{x^{\frac{b}{a}+1}}{\frac{b}{a}+1} = \frac{a}{b+a}\sqrt[a]{x^{b+a}}$

4.7.3 Exponenten und Logarithmen

(1) $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

(2) $\int xe^x dx = (x-1)e^x$

(3) $\int a^x dx = \int e^{ln(a)x}dx = \frac{1}{ln(a)}a^x$

(4) $\int \frac{1}{x}dx = \ln(x)$

(5) $\int \ln(x)dx = x(\ln(x)-1)$

4.7.4 Trigonometrische Funktionen

(1) $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$

(2) $\int \cos(x)dx = \sin(x)$

(3) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$

(4) $\int \tan(x)dx = -\ln(|\cos(x)|)$

(5) $\int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$

(6) $\int \arccos(x)dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$

(7) $\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln 1 + x^2$

(8) $\int \sinh(x)dx = \cosh(x)$

(9) $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) \neq -\sinh(x)$

(10) $\int \tanh(x)dx = \ln(\cosh(x))$

(11) $\int \operatorname{arcsinh}(x)dx = x\operatorname{arcsinh}(x) + \sqrt{x^2+1}$

(12) $\int \operatorname{arccosh}(x)dx = x\operatorname{arccosh}(x) + \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$

(13) $\int \operatorname{arctanh}(x)dx = x\operatorname{arctanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

4.8 Hilfen für Diff'rechnung in $\mathbb{R}^n$

4.8.1 Koordinatentransformationen

Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arccos(\frac{z}{r}) \\ \operatorname{atan2}(y,x) \end{pmatrix}$$

Wobei $\operatorname{atan2}(y,x) = \operatorname{atan2}(y,x) = 2\arctan\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$

Jacobi-Matrix:

$$J = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Determinante: $\det(J) = r^2\sin(\theta)$
Volumenelement: $dV = r^2\sin(\theta)\,d\varphi\,d\theta\,dr$

Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix:

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Determinante: $\det(J) = r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2 = r$
Volumenelement: $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$