第三次作业

5.1 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $A^T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$

$\because AA^T=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore \det(AA^T-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\2&2-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\therefore \lambda^2(\lambda-4)=0$ $\therefore$可求得特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\lambda_3=4$.
对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{bmatrix}$

$\because$同理 $A^TA=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$

$\therefore \det(A^TA-\lambda I)=0$

$\therefore$解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=4$ $\therefore$对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

$\therefore$根据奇异值的性质可得 $\sigma_1=\sqrt4=2$, $\sigma_2=0$.

$\therefore A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

5.9. $\because A$为$m\times n$的矩阵,

$\therefore$对A进行奇异值分解可得 $A=U\Sigma V^H$

$\because P$是酉矩阵

$\therefore PA=PU\Sigma V^H$

$\therefore PA$与A的奇异值和右奇异向量一样, PA的左奇异向量为PU的列向量
A的左奇异向量为U的列向量

5.10.

证明：∵ 由奇异值性质可知 $\lambda_i = \sigma_i^2$

∴ $A^T A u_i = \sigma_i^2 u_i$

∴ 左乘 u_i^T 得 $u_i^T A^T A u_i = \sigma_i^2 u_i^T u_i$

$$(Au_i)^T A u_i = \sigma_i^2 u_i^T u_i$$

∴ 当 u_i 为单位向量时 $\sigma_i = \sqrt{(Au_i)^T A u_i} = \|Au_i\|$

5.15. 先利用公式构造出 $M \times 2p+1$ 的自相关矩阵，再对自相关矩阵进行奇异值分解，再将奇异值归一化，找到 $\Sigma = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \geq$ 阈值的最大整数，即有效秩，详见代码注释