专业：信息工程
姓名：蔡松成
学号：3200103584
日期：2022.11.5

浙江大学实验报告

课程名称：矩阵论　成绩：

实验名称：人脸数据分析　实验类型：设计

一、实验目的和要求

结合课上学习到的 SVD 相关的知识，学习了解 PCA(Principle Component Analysis)方法，并利用给定的 Extend Yale B Faces 数据集进行人脸的特征分析和预处理。

二、实验内容与步骤

1. 在 Matlab 中加载并画出数据集
2. 将人脸数据去均值,画出平均脸，再用 SVD 处理数据，计算特征脸，提取并可视化前 4 张特征脸（左奇异向量）。
3. 利用SVD 得到的奇异向量进行低秩矩阵近似(包括一张测试集中的人脸和一张你自己挑选的图片)，直观理解秩的大小对矩阵近似效果的影响。
4. 将两个不同的人的脸投影到特征空间并可视化，说明如何将 PCA 应用于人脸识别或分类任务。

三、主要仪器设备

Matlab 编程。

四、实验结果记录分析与程序实现

任务一：在 Matlab 中加载并画出数据集

① Matlab 编程思路

(1) 用 load 函数将 YaleBExtend.mat 数据集导入到 matlab 脚本中，获得一个名为 X 的 1×38 的 cell 元胞数据类型，每个 cell 是最大为 32256×64 的 double 矩阵。对应不同人的 64 张图片(部分人没有 64 张图片)。

(2) 获得输入 num，该脚本显示训练集中 36 个人的第 num 张图片

(3) 将每个 cell 转换为矩阵，把矩阵的第 num 列 reshape 成 192×168 的小矩阵，再将小矩阵当成分块矩阵，合并成 6×6 个 192×168 的大矩阵，最后用 imagesc 函数输出矩阵。

*若某人没有第 num 张图片，则将他的第 num 张图片默认成全白图(各值均为 255)。

② 实验结果

以前 36 个人的第一张图片为例，输出图像如下：

③ 个人理解

一个 cell 单位代表一个人的照片集，在数据形式表现为 $32256 \times$ column 的矩阵，column 表示图片的张数，一个列向量即一张图片，cell 中矩阵的一个列向量是一个 192×168(图片像素)矩阵的列向量化，因此，cell 中矩阵的有 $32256 = 192 \times 168$ 行。输出前 36 个人的图片，即将矩阵列向量恢复成 192×168 矩阵再合并输出。

任务二：用 SVD 处理数据，画出平均脸和前四张特征脸

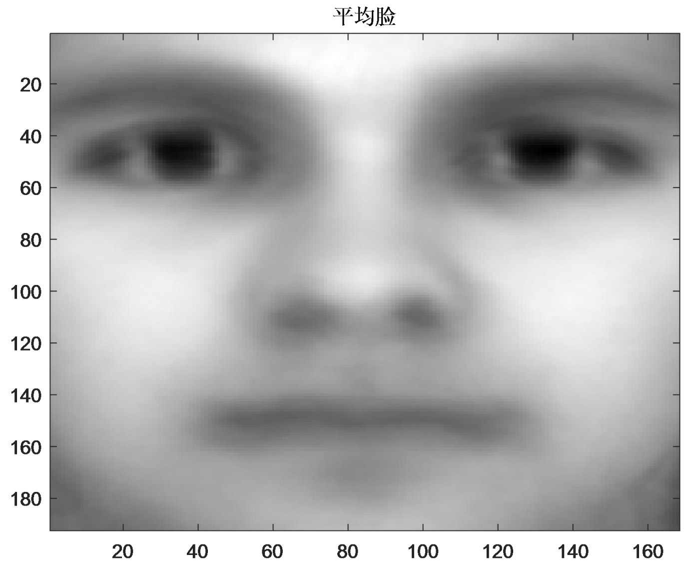
①Matlab 编程思路

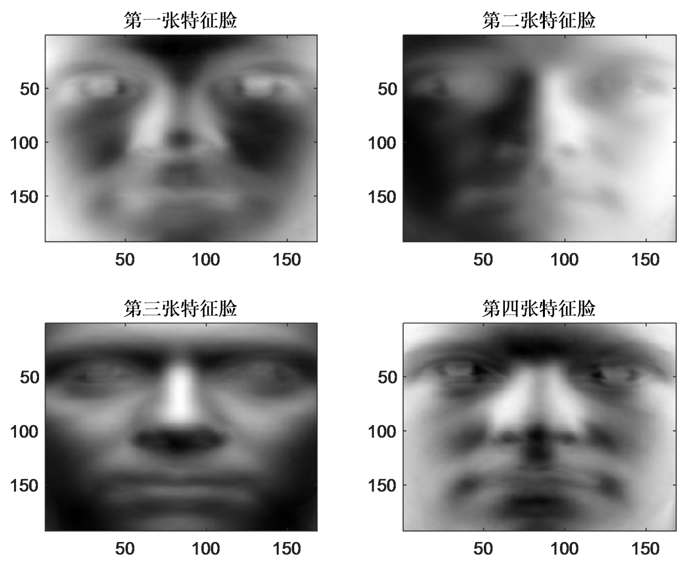
(1)先将前 36 个人的全部 2286 张照片(训练集)转化为矩阵类型，对该矩阵按列求均值，得到平均脸。

(2)对训练集每张照片去均值处理，即在编程中体现为，训练集矩阵每列减平均脸，再对处理好的矩阵进行 SVD 分解，得到左奇异向量矩阵 U，组成 U 的列向量即为训练集数据的特征脸。

② 实验结果

提取可视化的平均脸和前四张特征脸分别如下：





③ 个人理解

上述 matlab 编程思路是基于下列式子推导得来的：

设 R 为原训练集组成的矩阵，X 为去均值后的矩阵，即 $X = R - E(R)$

E(R)为 R 的均值列向量组成的和 X 维度一致的矩阵

对 X 做奇异值分解可得

$$X = U\begin{bmatrix} \Lambda^{\frac{1}{2}} & O \\ O & 0 \end{bmatrix} V^H \quad (1)$$

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} \end{bmatrix} \in R^{r\times r}$$

其中 Λ 是对角矩阵，对角线上的值是对应于 $X^H X$ 或者 XX^H 的特征值.

又因为$X^H X$ 或 XX^H为 R 的协方差矩阵

所以 U 的列向量不仅为 X 的奇异向量，也是 R 的协方差矩阵的特征向量，物理意义为 R 数据集的特征脸，特征脸代表了图像与均值图像差别的不同方向。通常来说，这个过程的计算代价很高。

任务三：利用 SVD 得到的奇异向量进行低秩近似(包括一张测试集和自己选的图片)

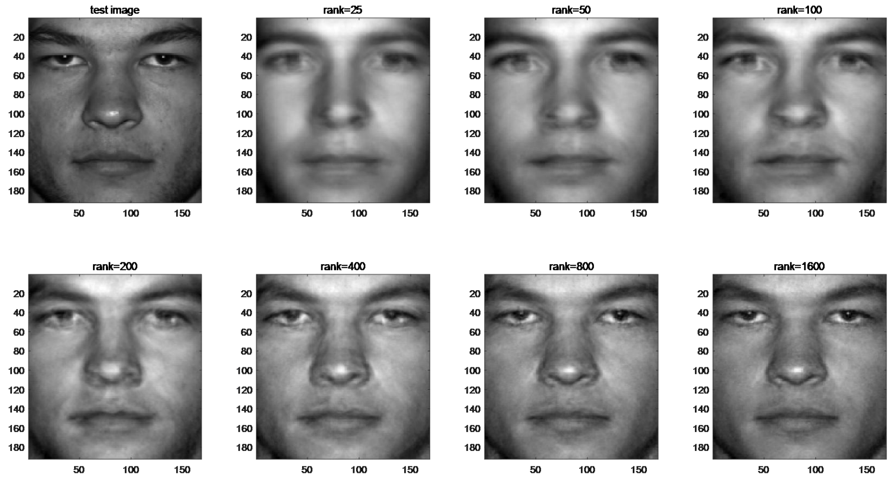
① Matlab 编程思路

(1)在任务二代码的基础上，导入训练集图片数据或者导入自己选的图片并且用 matlab 内置函数进行灰度化，转换数据类型为 double 类型。

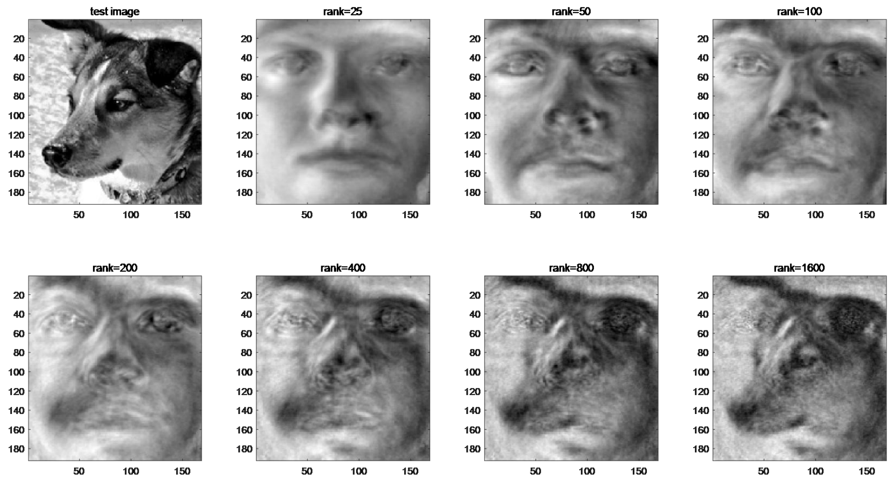
(2)根据低秩数的不同，取左奇异向量 U 矩阵的前 rank 个较大的列向量看作低秩近似后的 U(选取主成分)，根据投影公式，近似的 U 乘以近似 U 的转置再乘以图片列向量，可以得到估计后的图片数据。

② 实验结果

利用训练集中第一个人的第一张照片估计的结果如下：



利用自己的选取的小狗图片估计的结果如下：



③ 个人理解

从投影结果可视化后的结果可以看出将图像投影到特征向量的子集(低秩近似后的矩阵)上可能丢失信息，但是通过保留那些具有较大特征值的特征向量的方法可以减少这个损失，保留的特征向量越多即 rank 越大，图像信息损失的越少，从图像结果中看出秩取得越大，越近似于原始图像。

从两组测试图片的对比结果可以看出，相同秩的情况下，测试集的图片估计后的结果与与原始图像的偏差较小，小狗图片估计后的结果与原始图像偏差较大，说明了估计后的图像是特征脸的线性组合，例如，一张人脸图像可能是特征脸 1 的 10%，加上特征脸 2 的 55%，在减去特征脸 3 的 3%，因此和特征脸越近似的图像，在投影到保留相同数目的特征向量的情况下，越近似原始图像。

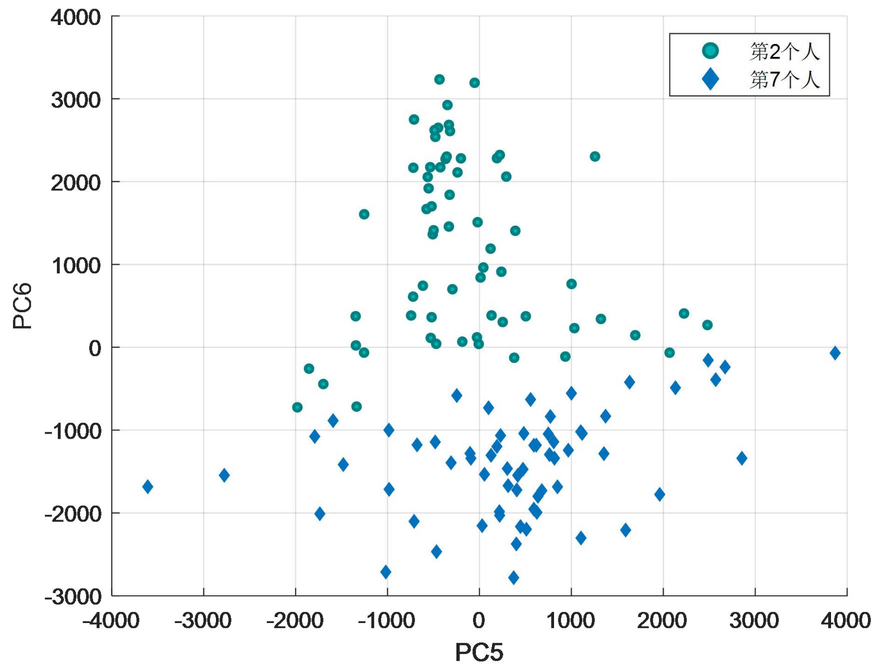
任务四：将不同的人脸投影到特征空间并且可视化，说明如何将 PCA 应用到人脸识别和分类任务

① Matlab 编程思路

(1) 在任务二奇异值分解的代码基础上，取出左奇异向量矩阵 U 的第 5 列和第 6 列的列向量(即第 5 大和第 6 大特征值所对应的特征向量，也称第 5 个和第 6 个主成分)

(2) 导入第 2 个人和第 7 个人的 64 张图片数据，再将每张图片列向量，分别投影到第 5 个和第 6 个主成分，投影结果作为散点图的 x 轴和 y 轴坐标值，绘制出散点图。

② 实验结果



③ 个人理解

在任务四中，训练集中第 2 个人和第 7 个人的每一张图片向量 d 乘以第 5 张和第 6 张特征脸的图片向量，得到二维特征脸空间和在二维特征脸空间上的投影值，投影值即为人脸向量与特征脸向量的欧式距离的平方，结合书中所学知识，可以将投影值视作两个向量的相异度的平方，相异度越小，两个图片越相似。从上图中我们可以观察到不同的人脸在二维特征脸空间中有明确的界限，我们观察图片向量在二维特征空间的哪一侧即可判断是训练集中的哪个人的图片。

同理，当我们把训练集中每一张图片向量 d 乘以所有的特征脸向量，获得图片向量在 n 维特征脸空间上的投影向量 pi，而测试集的图片同样做这个操作，得到投影向量 p，此时可以通过计算 p 与上面所有的 pi 的欧氏距离，与 p 的距离最小的 pi 所对应的训练集人脸即是识别的人脸类别。以上是 PCA 方法运用在人脸识别任务的主体思路。

五、附加题

PCA 算法其主要思想是数据经过某种投影，或者说乘以一个矩阵之后，得到的新的矩阵在所投影的维度上数据的方差最大，以此使用较少的数据维度，同时保留住较多的原数据点的特性。但是 PCA 追求的是在降维之后能够最大化保持数据的内在信息，并通过衡量在投影方向上的数据方差的大小来衡量该方向的重要性。但是这样投影以后对数据的区分作用并不大，反而可能使得数据点揉杂在一起无法区分。从实验的任务四结果图中，可以观察到不同人的图像集中有部分图片很接近另一类人的图像，难以区分。

我们可以采用 LDA 方法进行图片分类，方法如下：

假设我们现已有如下的数据集 $D=(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_m,y_m)$, 其中样本

x_i 为任意 n 维向量，类别 $y_i\in C_1,C_2,\ldots,C_k$ ，定义 $N_{j\in 1,2,\ldots,k}$ 是第 j 类样本的个数，$X_{j(j\in 1,2,\ldots,k)}$ 是第 j 类样本的集合，$\mu_{j(j\in 1,2,\ldots,k)}$ 是第 j 类样本的均值，$\Sigma_{j(j\in 1,2,\ldots,k)}$ 是第 j 类样本的均值。

其中，$\sum_j=\sum_{x\in Xj}(x-\mu_j)(x-\mu_j)^T$

$$\mu_{\mathrm{j}}=\frac{1}{N_j}\sum_{x\in X_j}x(j\in\{0,1\})$$

我们定义类间散度矩阵为:

$$S_b=\sum_{j=1}^{k}N_j(u_j-u)(u_j-u)^T$$

其中 u 为所有数据点求平均值所得。

类内散度矩阵为：

$$S_W=\sum_{j=1}^{k}\sum_{x\in X_j}(x-u_j)(x-u_j)^T$$

此时设我们投影到的低维空间维度为 d ，对应的基向量为 $w_1, w_2, ..., w_d$ ，构成矩阵 W 。函数 J 的定义如下:

$$J = \frac{W^T S_b W}{W^T S_w W}$$

此时 J 是一个矩阵，不是一个标量，为了可以最优化，我们常常使用对角线的元素来代替。此时 J 的定义如下:

$$J = \prod_{i=1}^{d} \frac{w_i^T S_b w_i}{w_i^T S_w w_i}$$

求解方法与二分类类似，当

$$S_w^{-1} S_b w_i = \lambda_i w_i$$

时，函数有最大值。所以我们取前 d 个最大的特征值对应的特征向量组成 W 。由于 S_b 是k个秩为1的矩阵相加而成，所以其秩小于等于k。又由于我们知道前k-1的 μ_j 之后，最后一个 μ_k 可以由前k-1个表示，因此，LDA降维算法降维之后的维度最高为k-1。

最后计算投影后的数据点 $Y = W^T X$。

LDA 相比于 PCA 的优点在于它的计算速度快，应用了先验知识，降维之后的维数最多为类别数-1。所以当数据维度很高，但是类别数少的时候，算法并不适用。

六、实验心得

本次实验我应用了上课所学的 SVD 知识，求出训练集的特征脸，并且将特征脸运用在人脸估计和图像分类等任务中。在编程和 PCA 算法原理理解的过程中，我对 SVD 的理解和掌握加深了，也对 PCA 算法的应用过程有了自己的思考和感悟，如果不同图像数据在主成分上的投影的方差较大，PCA 的分类效果较好，否则较差。总而言之，本次实验对于我们掌握课堂所学，作用匪浅。