Věta (1):

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má kladnou diagonálu, A i A^T jsou ostře diagonálně dominantní. Pak A je pozitivně definitní.

Důkaz věty (1):

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Zkusme matici A ekvivalentními úpravami upravit na matici A':

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{11}^A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Kde M_{11}^A je minor A. Jaké vlastnosti má M_{11}^A?

Zaprvé si rozmysleme, co se stane, když přičteme $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$-násobek 1. řádku k 2. řádku A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & \cdots & a_{2n} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

První prvek 2. řádku se vynuluje a ostatní si označíme jako $a'_{2j} \coloneqq a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j}$.

Dokažme, že nově vzniklý řádek je ostře diagonálně dominantní.

Z ostré diagonální dominance A si upravíme vztah:

$$a_{11} > |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|$$

$$a_{11}|a_{21}| > |a_{21}|(|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|)$$

$$a_{11}(a_{22} - |a_{23}| - \cdots - |a_{2n}|) > |a_{21}a_{12}| + |a_{21}a_{13}| + \cdots + |a_{21}a_{1n}|$$

$$a_{22} - |a_{23}| - \cdots - |a_{2n}| > \left|\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}\right| + \left|\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}\right|$$

$$a_{22} - \left|\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}\right| > |a_{23}| + \left|\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}\right| + \cdots + |a_{2n}| + \left|\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}\right|$$

A protože $-x \geq -|x|$ a $|x| + |y| \geq |x - y|$:

$$a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} > \left|a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}\right| + \cdots + \left|a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}\right|$$

$$a'_{22} > |a'_{23}| + \cdots + |a'_{2n}|$$

Tedy nově vzniklý řádek je vskutku ostře diagonálně dominantní.

Stejným postupem se tohle dá ukázat i pro jakýkoliv jiný řádek (kromě prvního) a dokonce i pro každý sloupec (kromě prvního), kde pro změnu vycházíme z předpokladu, že A^T je ostře diagonálně dominantní.

Dále z výše uvedeného vztahu vyplývá, že každý diagonální prvek bude stále kladný.

Minor M_{11}^A má tedy stejné vlastnosti jako A. Postup tedy můžeme opakovat na M_{11}^A a pak dále tak dlouho, dokud nezískáme horní trojúhelníkovou matici U.

Všimněme si, že ekvivalentní úpravy, které jsme prováděli, byly pouze přičítání nějakého násobku řádku k jinému, řádky jsme nenásobili ani nevyměňovali. Z vlastností determinantů vyplývá, že matice A a U mají nejen stejný determinant, ale i stejné subdeterminanty. Jelikož U je horní trojúhelníková matice, její determinant je součin diagonálních prvků. Ty jsou ale všechny kladné. Všechny subdeterminanty i determinant U budou kladné, a tedy podle Sylvesterova kritéria je U, a tedy i A, pozitivně definitní. ■