Věta (1):

Nechť má kladnou diagonálu, i jsou ostře diagonálně dominantní. Pak je pozitivně definitní.

Důkaz věty (1):

Mějme matici :

Zkusme matici ekvivalentními úpravami upravit na matici :

Kde je minor . Jaké vlastnosti má ?

Část 1. je ostře diagonálně dominantní

Podívejme se, co se stane, když přičtu nějaký -násobek () řádku 1 matice k řádku 2.

Označme .

Nyní se podívejme, co platí pro 2. řádek matice . Z ostré diagonální dominance a její kladné diagonály máme, že pro 1. řádek platí následující nerovnosti:

Jelikož :

A pro 2. řádek platí:

Pro 2. řádek bude platit součet nerovností řádků 1 a 2 matice :

Využijeme :

Zvolme :

Neboli 2. řádek , a tedy i minoru je ostře diagonálně dominantní. Navíc je patrné, že (kvůli toho jsme zvolili tak, jak jsme jej zvolili).

Podobně, pokud budeme volit u ostatních řádků, i tyto řádky budou ostře diagonálně dominantní. A tedy, celý minor je ostře diagonálně dominantní.

Část 2. je ostře diagonálně dominantní

Podívejme se, co se stane s 2. sloupcem , když vynulujeme 1. sloupec.

A opět označme pro .

Z ostré diagonální dominance máme:

A protože a :

Neboli 2. sloupec je ostře diagonálně dominantní.

Opět jako u řádků stejný postup můžu využít na každý sloupec minoru , takže i je ostře diagonálně dominantní.

Část 3. Prvky na diagonále jsou kladné

Ačkoliv tohle jsme už mohli vidět v minulých částech, radši to tu ještě jednou zmíním.

Po vynulování 1. sloupce pod diagonálou dostanu, že -tý diagonální prvek je ve tvaru

Tento prvek je kladný, protože platí

Vychází to z diagonální dominance .

Závěr

Podařilo se nám převést matici na , která má v prvním sloupci pod diagonálou samé nuly a ve zbylých sloupcích řádků 2- minor , který má stejné vlastnosti jako .

Na minor můžeme tudíž použít stejný postup a vynulovat i druhý sloupec pod diagonálou. Takto budeme postupovat, dokud nevynulujeme úplně všechny prvky pod diagonálou a nedostaneme horní trojúhelníkovou matici .

Vzhledem k tomu, že matice má kladnou diagonálu, její determinant i všechny její subdeterminanty budou kladné. Podle Sylvestrova kritéria je pozitivně definitní.

Během ekvivalentních úprav na jsme vždy jen přičítali násobky jednoho řádku ke druhému, nikdy jsme řádky neprohazovali ani jsme je nenásobili. Z vlastností determinantů plyne, že má determinant i všechny subdeterminanty stejné jako . Z tohoto vyplývá, že je pozitivně definitní.

Věta (1):

Nechť má kladnou diagonálu, i jsou ostře diagonálně dominantní. Pak je pozitivně definitní.

Důkaz věty (1):

Mějme matici :

Zkusme matici ekvivalentními úpravami upravit na matici :

Kde je minor . Jaké vlastnosti má ?

Zaprvé si rozmysleme, co se stane, když přičteme -násobek 1. řádku k 2. řádku .

První prvek 2. řádku se vynuluje a ostatní si označíme jako .

Dokažme, že nově vzniklý řádek je ostře diagonálně dominantní.

Z ostré diagonální dominance si upravíme vztah:

A protože a :

Tedy nově vzniklý řádek je vskutku ostře diagonálně dominantní.

Stejným postupem se tohle dá ukázat i pro jakýkoliv jiný řádek (kromě prvního) a dokonce i pro každý sloupec (kromě prvního), kde pro změnu vycházíme z předpokladu, že je ostře diagonálně dominantní.

Dále z výše uvedeného vztahu vyplývá, že každý diagonální prvek bude stále kladný.

Minor má tedy stejné vlastnosti jako . Postup tedy můžeme opakovat na a pak dále tak dlouho, dokud nezískáme horní trojúhelníkovou matici .

Všimněme si, že ekvivalentní úpravy, které jsme prováděli, byly pouze přičítání nějakého násobku řádku k jinému, řádky jsme nenásobili ani nevyměňovali. Z vlastností determinantů vyplývá, že matice a mají nejen stejný determinant, ale i stejné subdeterminanty. Jelikož  je horní trojúhelníková matice, její determinant je součin diagonálních prvků. Ty jsou ale všechny kladné. Všechny subdeterminanty i determinant budou kladné, a tedy podle Sylvesterova kritéria je , a tedy i , pozitivně definitní.