Wydział Nauk Ekonomicznych

Uniwersytet Warszawski

Analiza i zastosowanie twierdzenia Kuhna-Tuckera

Autorzy:

Barbara Gacek

Olga Pieńkowska

Justyna Socha

Praca przygotowana w ramach zajęć Zaawansowanej Mikroekonomii

na Wydziale Nauk Ekonomicznych Uniwersytetu Warszawskiego.

Warszawa 2012

SPIS TREŚCI

SPIS RYSUNKÓW

Wprowadzenie

Problemy optymalizacyjne nieodłącznie towarzyszą nauce ekonomii. Na zajęciach mikro i makroekonomii wielokrotnie pojawiają się zadania polegające na szukaniu równowagi w modelach, maksymalizacji zysku, minimalizacji kosztów czy najefektywniejszym doborze składników portfela inwestycyjnego. Do najpopularniejszych metod rozwiązywania powyższych zagadnień należą: metoda mnożników Lagrange'a czy metoda sympleks (programowanie liniowe) oraz równania Hamiltona (optymalizacja dynamiczna). Niestety w programach nauczania właściwie omija się zagadnienia programowania nieliniowego lub optymalizacji z warunkami ograniczającymi w postaci nierówności[1]. Są to natomiast kwestie niezwykle ważne jeśli wziąć po uwagę ilość ich zastosowań w różnorodnych dziedzinach, również ekonomii. W klasycznych zagadnieniach optymalizacji liniowej spotykanych na zajęciach mikroekonomii, korzysta się najczęściej z funkcji Lagrange'a i przyrównując do zera pochodne pierwszego rzędu po wszystkich zmiennych decyzyjnych i mnożnikach Lagrange'a, uzyskuje się ekstrema funkcji. W optymalizacji nieliniowej, odpowiednikiem powyższych warunków są warunki Kuhna-Tuckera[2], które oprócz sprawdzania się w zadaniach optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi, są alternatywą do popularniejszej metody Lagrange'a, jeśli zastąpimy nierównościowe warunki ograniczające równościami. Metoda warunków Kuhna-Tuckera jest ogólniejsza, a co za tym idzie mająca dużo więcej zastosowań praktycznych, tym bardziej dziwi pomijanie jej w programach nauczania ekonomii.

Niniejsza praca ma ambicje wyjaśnić treść warunków Kuhna-Tuckera oraz za pomocą licznych przykładów, również z zakresu nauk ekonomicznych, przybliżyć możliwości ich wykorzystania. Wyrażamy pewność, że ze względu na mnogość zastosowań, ta metoda optymalizacji może okazać się bardzo użyteczna w pisaniu pracy dyplomowej czy rozwiązywaniu bardziej skomplikowanych problemów na zajęciach na wydziale ekonomii.

1. Tło teoretyczne[3]

Zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami nierównościowymi można określić jako minimalizację/maksymalizację funkcji Q(x) przy ograniczeniach $g_i(\boldsymbol{x})$, dla i=1,…,m, gdzie $\boldsymbol{x} = [x_1 \ldots\ x_i \ldots x_n]^T$. Formalnie można to zapisać następująco:

$$\begin{array}{lll} \textit{min.} & Q(x) & \\ \textit{p.o.} & g_i(\boldsymbol{x}) \geq\ b_i & (i=1,..,u), \\ & g_i(\boldsymbol{x}) \leq\ b_i & (i=u+1,...,v), \\ & g_i(\boldsymbol{x}) =\ b_i & (i=v+1,...,m), \\ & x_j\ \geq\ 0 & (j=1,...,s), \end{array}$$

[1] http://coin.wne.uw.edu.pl/tzylicz/matekon.pdf
[2] Chiang A. C. Podstawy ekonomii matematycznej, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1994
[3] Stadnicki J, Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2006

$$x_j \le 0 \qquad (j=s+1,...,t),$$

$$x_j \in \mathbb{R} \qquad (j=t+1,...,n).$$

Dla uproszczenia dalszych rozważań musimy przyjąć ponadto założenie, że ograniczenie nierównościowe jest nieaktywne w punkcie $\hat{\boldsymbol{x}}$ (czyli $g_i(\boldsymbol{x}) < 0$ albo $g_i(\boldsymbol{x}) > 0$) jeżeli $\lambda_i = 0$. Jeśli natomiast $\lambda_i \neq 0$, to ograniczenie nierównościowe jest aktywne (czyli spełnione równościowo, a więc $g_i(\boldsymbol{x}) = b_i$).

Warto wprowadzić także definicję punktu regularnego, czyli takiego w którym gradienty ograniczeń aktywnych są liniowo niezależne. Założenie to musi być spełnione w odniesieniu do $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Dla n zmiennych decyzyjnych i m ograniczeń, funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = Q(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{u}\lambda_i(b_i - g_i(\boldsymbol{x})) + \sum_{i=u+1}^{v}\lambda_i(b_i - g_i(\boldsymbol{x})) + \sum_{i=v+1}^{m}\lambda_i(b_i - g_i(\boldsymbol{x})) = Q(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T(b_i - g_i(\boldsymbol{x})).$$

gdzie $\boldsymbol{x} = [x_1 \dots x_i \dots x_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \dots \lambda_{\boldsymbol{j}} \dots \lambda_{\boldsymbol{m}}]^{\mathbf{T}}$.

Zakładamy, że funkcje $Q(\boldsymbol{x})$ i $g_i(\boldsymbol{x})$ dla i=1, …, m są klasy C^1 (o ciągłych pierwszych pochodnych) w punkcie $\hat{\boldsymbol{x}}$ będącym punktem regularnym. Wówczas jeśli funkcja $Q(\boldsymbol{x})$ ma w tym punkcie minimum warunkowe w zbiorze dopuszczalnym $\Phi = \{\, \boldsymbol{x}: g_i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m\}$, to są spełnione następujące warunki (zwane **warunkami Kuhna-Tuckera**[4]):

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x},\hat{\lambda}) \ge 0 \qquad (j = 1, \dots, s),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x},\hat{\lambda}) \le 0 \qquad (j = s+1, \dots, t),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x},\hat{\lambda}) = 0 \qquad (j = t+1, \dots, n),$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=1,...,s),$$

$$x_j \le 0 \qquad (j=s+1,...,t),$$

$$x_j \in \mathbb{R} \qquad (j=t+1,...,n),$$

$$x_j \frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x},\hat{\lambda}) = 0 \qquad (j = 1, \dots, n),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\hat{x},\hat{\lambda}) \le 0 \qquad (i = 1, \dots, u),$$

[4] Horla D. *Metody obliczeniowe optymalizacji w zadaniach*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\hat{x}, \hat{\lambda}) \geq 0 \qquad (i = u+1, \dots, v),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0 \qquad (i = v+1, \dots, m),$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1, \dots, u),$$

$$\lambda_i \leq 0 \qquad (i = u+1, \dots, v),$$

$$\lambda_i \in \mathbb{R} \qquad (i = v+1, \dots, m),$$

$$\lambda_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0 \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Na podstawie powyższych założeń otrzymujemy zestaw równań i nierówności, rozwiązujemy tylko układ równań i sprawdzamy na podstawie ograniczeń nierównościowych, które z rozwiązań spełniają warunki. Wśród rozwiązań spełniających warunki wybieramy oczywiście to, które minimalizuje (maksymalizuje) funkcję celu.

Powyższe warunki są konieczne do istnienia minimum warunkowego funkcji $Q(\boldsymbol{x})$ w punkcie $\hat{\boldsymbol{x}}$. Problem warunków wystarczających jest nieco bardziej złożony, jednak na podstawie badania otoczenia punktu $\hat{\boldsymbol{x}}$ można rozstrzygnąć czy dany punkt faktycznie jest minimum. Przyjmuje się, że spośród wszystkich par spełniających warunki Kuhna-Tuckera wybiera się te, dla których $Q(\boldsymbol{x})$ ma minimalną wartość (lub maksymalną przy zadaniu maksymalizacji).

Warunki Kuhna-Tuckera są konieczne i **wystarczające** istnienia globalnego minimum warunkowego funkcji tylko dla zadań programowania wypukłego, a więc takich, w których funkcja $Q(\boldsymbol{x})$ oraz funkcje ograniczeń $g_i(\boldsymbol{x})$ dla j=1,…,m są funkcjami wypukłymi. W praktyce bardzo trudno jest jednak ocenić czy dane zadanie programowania nieliniowego jest zadaniem programowania wypukłego (warunek wypukłości zbioru musi być sprawdzony we wszystkich punktach). Warto jednak zaznaczyć, że w problemach ekonomicznych, zadania programowania wypukłego są powszechne, więc w tym wypadku warunki Kuhna-Tuckera są idealnym i wystarczającym rozwiązaniem.

Na pierwszy rzut oka twierdzenie może się wydawać skomplikowane, tym bardziej, że w toku studiów nigdy nie mieliśmy okazji zapoznać się z nim szczegółowiej. Postaramy się jednak wytłumaczyć jego najważniejsze założenia na przykładach oraz przedstawić algorytm działania za jego pomocą, aby nawet osoby które nie są obyte z zaawansowaną matematyką mogły je bez trudu stosować.

2. Zastosowanie twierdzenia

2.1. Przykład 1

Zadanie[5] jest opisane daną funkcją celu:

min $\frac{1}{2}x_1^2 - 2x_2$

p.o. $x_1^2 + x_2^2 \le 4;$ $x_1 \ge 0;$ $x_2 \ge 0.$

Z powyższych ograniczeń wynika następująca funkcja Lagrange'a:

$$L(\underline{x}, \lambda) = \frac{1}{2}x_1^2 - 2x_2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 4)$$

Deklaracja początkowych danych i warunków w Maxima:

```
/*tutaj wpisz funkcję*/
f:1/2*x1^2-2*x2;

/*tutaj wpisz ograniczenie*/
w1:x1^2+x2^2-4;

Lagr:f-lambda*w1;
```

Warunki konieczne dla danego lagranżjanu wyglądają następująco:

$$\frac{\partial L(\underline{x}, \lambda)}{\partial x_1} \ge 0; \quad \frac{\partial L(\underline{x}, \lambda)}{\partial x_2} \ge 0;$$

$$x_1 \frac{\partial L(\underline{x}, \lambda)}{\partial x_1} = 0; \quad x_2 \frac{\partial L(\underline{x}, \lambda)}{\partial x_2} = 0;$$

ponieważ $x_1 \ge 0;$ $x_2 \ge 0.$

$$\frac{\partial L(\underline{x}, \lambda)}{\partial \lambda} \ge 0; \quad \lambda \frac{\partial L(\underline{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0;$$

ponieważ $\lambda \le 0.$

W ten sposób dostajemy następujące warunki:

$$x_1 - 2\lambda x_1 \ge 0; \quad -2 - 2\lambda x_2 \ge 0; \quad x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0;$$

$$x_1^2(1 - 2\lambda) = 0; \quad -2x_2(1 + \lambda x_2) = 0; \quad 4 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0; \quad \lambda(4 - x_1^2 - x_2^2) = 0; \quad \lambda \le 0.$$

[5] Zadanie oraz schemat rozwiązania pochodzi z książki D.Horla „*Metody obliczeniowe optymalizacji w zadaniach*", Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008

Do obliczenia x1, x2 oraz lambdy wykorzystujemy warunki równościowe. Następnie znalezione punkty porównujemy z ograniczeniami nierównościowymi i wybieramy punkty, które je spełniają.

Zapis ograniczeń nierównościowych oraz warunków równościowych w Maxima:

```
--> /*ograniczenia nierownosciowe - wykorzystujemy na koniec*/
    og1:diff(Lagr,x1,1)>=0;
    og2:diff(Lagr,x2,1)>=0;
    og3:diff(Lagr,lambda,1)>=0;
```

```
--> /*warunki równościowe*/
    eq1:x1*diff(Lagr,x1,1)=0;
    eq2:x2*diff(Lagr,x2,1)=0;
    eq3:lambda*diff(Lagr,lambda,1)=0;
```

Polecenie znajdujące rozwiązania na podstawie warunków równościowych:

```
d:solve([eq1,eq2,eq3], [x1,x2,lambda]);
```

Wyniki równań najwygodniej przedstawić w postaci tabelki w celu porównania wyników z ograniczeniami nierównościowymi, które zakładaliśmy wcześniej. Pośród wszystkich wyników szukamy tego, który jednocześnie spełnia wszystkie warunki i ma najmniejszą wartość funkcji.

Rys. 1 Tabela wyników

x1	*0*	*0*	*0*	*2*	*-2*
x2	*0*	*2*	*-2*	*0*	*0*
λ	*0*	*-1/2*	*1/2*	*1/2*	*1/2*
x1≥0, x2≥0, λ≤0	+	+	-	+	-
$\frac{\partial L}{\partial x_1} \geq 0$	+	+			
$\frac{\partial L}{\partial x_2} \geq 0$	-	+			
$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \geq 0$		+			
f(x)		***-4***			

Źródło: D.Horla „Metody obliczeniowe optymalizacji w zadaniach”, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008

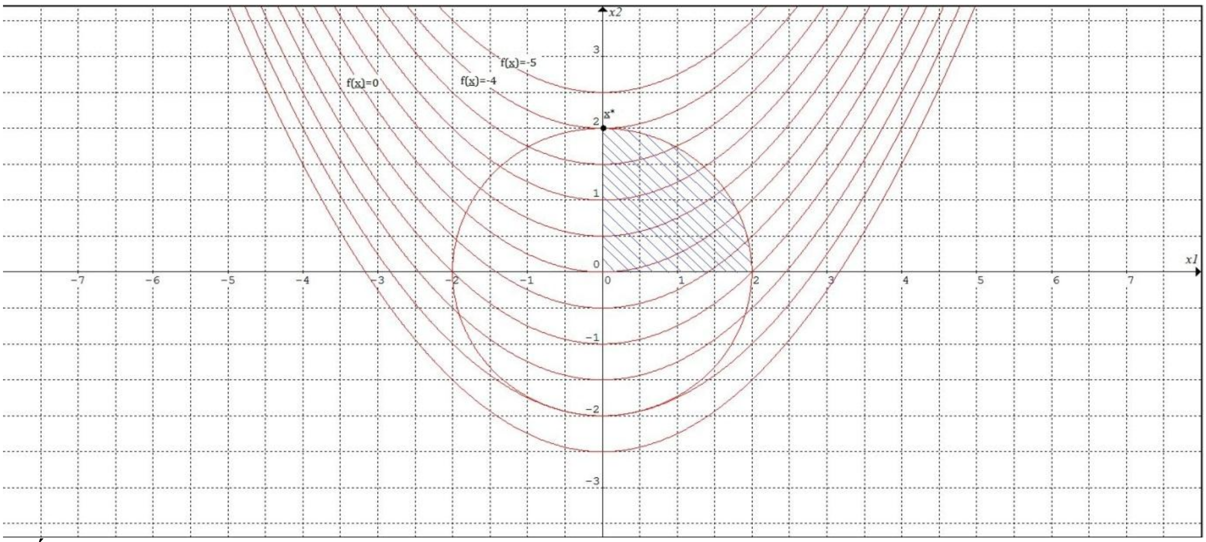
Instrukcja w Maximie została napisana tak, aby wypisywała x1, x2, lambdę, wartość funkcji oraz informację czy dla znalezionych wartości spełnione są ograniczenia nierównościowe (jeżeli chcemy zbudować wyżej pokazaną tabelkę sami). Jeżeli interesuje nas tylko ostateczny wynik Maxima zapamiętuje parametry, które spełniają wszystkie warunki i dla których funkcja przyjmuje wartość minimalną (ostatnia linijka instrukcji w każdym podpunkcie).

Cztery pierwsze polecenia wyciągają wyniki z listy jaką jest output po użyciu polecenia solve. „war” sprawdza czy spełnione są ograniczenia nierównościowe. Ostatnie polecenie w instrukcji służy do zapamiętywania parametrów spełniających ograniczenia oraz do wybrania rozwiązania, które przyjmuje najmniejszą wartość funkcji.

```
--> /*wybierz tyle ponizszych elementów ile wyszło rozwiązań rzeczywistych*/
    r1:d[1]$
    x1:rhs(r1[1])$
    x2:rhs(r1[2])$
    lambda:rhs(r1[3])$
    disp("dla x1, x2, lambda", x1,x2,lambda)$
    disp ("funkcja rowna sie", ''f)$
    disp("czy spełnia warunki?")$
    war: maybe (maybe (x1>=0)and maybe (x2>=0)and maybe(lambda<=0)and maybe(''og1)and maybe(''og2)and maybe (''og3));
    if war then (fm: ''f) and (x1m: ''x1) and (x2m: ''x2) and (lambdam: ''lambda)and p:1 else p:0$


    r2:d[2]$
    x1:rhs(r2[1])$
    x2:rhs(r2[2])$
    lambda:rhs(r2[3])$
    disp("dla x1, x2, lambda", x1, x2,lambda)$
    disp ("funkcja rowna sie", ''f)$
    disp("czy spełnia warunki?")$
    war: maybe (maybe (x1>=0)and maybe (x2>=0)and maybe(lambda<=0)and maybe(''og1)and maybe(''og2)and maybe (''og3));
    if war and p=0 then (fm: ''f) and (x1m: ''x1) and (x2m: ''x2) and (lambdam: ''lambda) and p:1 else if war and p=1 t
```

Rys. 2 Wykres obrazujący warunki zadania



Źródło: Opracowanie własne przy wykorzystaniu programu Graphmatica

2.2. Przykład 2

Zadanie[6] jest opisane następującą funkcją:

max $\quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2$

p.o. $\quad x_1 + 3x_2 \leq 6; \qquad 4x_1 - 3x_2 \leq 9; \qquad x_1 \geq 0.$

[6] Zadanie oraz schemat rozwiązania pochodzi z Horla D. *Metody obliczeniowe optymalizacji w zadaniach*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008

Z powyższych ograniczeń wynika następująca funkcja Lagrange'a:

$$L(\underline{x},\underline{\lambda}) = -(x_1-1)^2 - x_2^2 - \lambda_1(x_1+3x_2-6) - \lambda_2(\,4x_1-3x_2-9)$$

Deklaracja początkowych danych i warunków w Maxima:

```
/*tutaj wpisz funkcję*/
f:(x1-1)^2+x2^2;

/*tutaj wpisz ograniczenia*/
w1:x1+3*x2-6;
w2:4*x1-3*x2-9;

Lagr:-f-lambda1*w1-lambda2*w2;
```

Warunki konieczne dla danego lagranżjanu wyglądają następująco:

$$\frac{\partial L(\underline{x},\underline{\lambda})}{\partial x_1} \geq 0; \qquad \frac{\partial L(\underline{x},\underline{\lambda})}{\partial x_2} = 0;$$

$$x_1\frac{\partial L(\underline{x},\underline{\lambda})}{\partial x_1} = 0; \qquad x_2\frac{\partial L(\underline{x},\underline{\lambda})}{\partial x_2} = 0;$$

ponieważ $x_1 \geq 0;$ $x_2 \in R.$

$$\frac{\partial L(\underline{x},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_1} \geq 0; \qquad \lambda\,\frac{\partial L(\underline{x},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_2} = 0;$$

$$\lambda_1\frac{\partial L(\underline{x},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_1} = 0; \qquad \lambda_2\,\frac{\partial L(\underline{x},\underline{\lambda})}{\partial \lambda_2} = 0;$$

ponieważ $\lambda_1 \leq 0;$ $\lambda_2 \leq 0.$

W ten sposób dostajemy następujące warunki:

$$-2(x_1-1) - \lambda_1 - 4\lambda_2 \geq 0; \quad -2\,x_2 - 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \in R;$$

$$x_1 - 2(x_1-1) - \lambda_1 - 4\lambda_2 = 0; \quad x_2(-2\,x_2 - 3\lambda_1 + 3\lambda_2) = 0;$$

$$6 - x_1 - 3x_2 \geq 0; \quad 9 - 4x_1 + 3x_2 \geq 0; \quad \lambda_1 \leq 0; \quad \lambda_2 \leq 0;$$

$$\lambda_1(6 - x_1 - 3x_2) = 0; \quad \lambda_2(\,9 - 4x_1 + 3x_2) = 0.$$

Do obliczenia x1, x2, lambdy1 oraz lambdy2 wykorzystujemy warunki równościowe. Następnie znalezione punkty porównujemy z ograniczeniami nierównościowymi i wybieramy punkty, które je spełniają. Warunek zapisany w eq2 nie wnosi nic nowego (mamy układ 5 równań z 4 niewiadomymi), jednak nie zawsze musimy to zauważyć, dlatego zostawiamy obliczenia Maximie.

Zapis ograniczeń nierównościowych oraz warunków równościowych w Maxima:

```
--> /*ograniczenia nierownosciowe - wykorzystujemy na koniec */
    og1:diff(Lagr,x1,1)>=0;
    og2:diff(Lagr,lambda1,1)>=0;
    og3:diff(Lagr,lambda2,1)>=0;

--> /*wybierz warunki równościowe*/
    eq0:diff(Lagr,x2,1)=0;
    eq1:x1*diff(Lagr,x1,1)=0;
    eq2:x2*diff(Lagr,x2,1)=0;
    eq3:lambda1*diff(Lagr,lambda1,1)=0;
    eq4:lambda2*diff(Lagr,lambda2,1)=0;
```

Polecenie znajdujące rozwiązania na podstawie warunków równościowych:

```
d:solve([eq0,eq1,eq2,eq3,eq4],[x1,x2,lambda1,lambda2]);
```

Wyniki równań najwygodniej przedstawić w postaci tabelki w celu porównania wyników z ograniczeniami nierównościowymi, które zakładaliśmy wcześniej. Pośród wszystkich wyników szukamy tego, który jednocześnie spełnia wszystkie warunki i ma największą wartość funkcji.

Rys. 3 Tabela wyników

x1	0	1	0	3/2	0	9/5	3
x2	0	0	2	3/2	-3	-3/5	1
λ1	0	0	-4/3	-1	0	0	-4/3
λ2	0	0	0	0	-2	-2/5	-2/3
x1≥0, λ1≤0, λ2≤0	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{\partial L}{\partial x_1} \geq 0$	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{\partial L}{\partial x_2} \geq 0$	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{\partial L}{\partial \lambda 1} \geq 0$	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{\partial L}{\partial \lambda 2} \geq 0$	+	+	+	+	+	+	+
f(x)	1	0	5	5/2	**10**	1	5

Źródło: D.Horla „Metody obliczeniowe optymalizacji w zadaniach", Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008

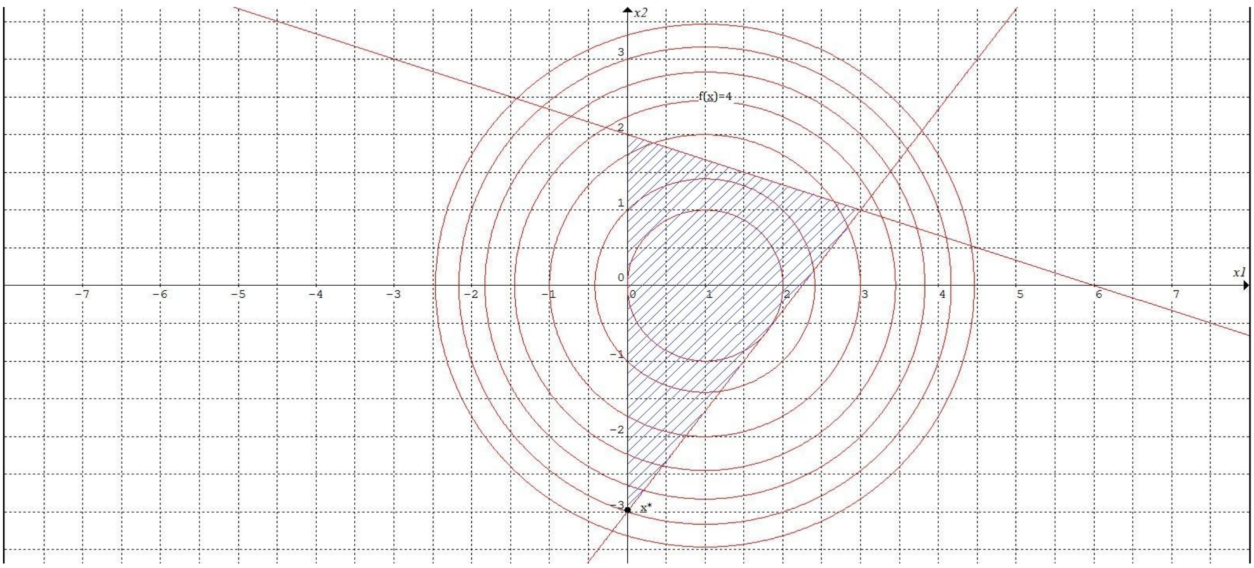
Instrukcja w Maximie została napisana tak, aby wypisywała x1, x2, lambdę1, lambdę2, wartość funkcji oraz informację czy dla znalezionych wartości spełnione są ograniczenia nierównościowe (jeżeli chcemy zbudować wyżej pokazaną tabelkę sami). Jeżeli interesuje nas tylko ostateczny wynik Maxima zapamiętuje parametry, które spełniają wszystkie warunki i dla których funkcja przyjmuje wartość maksymalną (ostatnia linijka instrukcji w każdym podpunkcie).

Pięć pierwszych poleceń wyciąga wyniki z listy jaką jest output po użyciu polecenia solve. „war” sprawdza czy spełnione są ograniczenia nierównościowe. Ostatnie polecenie w instrukcji służy do zapamiętywania parametrów spełniających ograniczenia oraz do wybrania rozwiązania, które przyjmuje największą wartość funkcji.

```
--> /*wybierz tyle ponizszych elementów ile wyszło rozwiązań rzeczywistych*/
r1:d[1]$
x1:rhs(r1[1])$
x2:rhs(r1[2])$
lambda1:rhs(r1[3])$
lambda2:rhs(r1[4])$
disp("dla x1, x2, lambda1, lambda2", x1,x2,lambda1,lambda2)$
disp ("funkcja rowna sie", ''f)$
disp("czy spełnia warunki?")$
war:maybe (maybe (x1>=0)and maybe (lambda1<=0)and maybe(lambda2<=0)and maybe(''og1)and maybe(''og2)and maybe (''og3));
if war then (fm: ''f) and (x1m: ''x1) and (x2m: ''x2) and (lambda2m: ''lambda2) and (lambda1m: ''lambda1)and p:1 else p:0$


r2:d[2]$
x1:rhs(r2[1])$
x2:rhs(r2[2])$
lambda1:rhs(r2[3])$
lambda2:rhs(r2[4])$
disp("dla x1, x2, lambda1, lambda2", x1,x2,lambda1,lambda2)$
disp ("funkcja rowna sie", ''f)$
disp("czy spełnia warunki?")$
war:maybe (maybe (x1>=0)and maybe (lambda1<=0)and maybe(lambda2<=0)and maybe(''og1)and maybe(''og2)and maybe (''og3));
if war and p=0 then (fm: ''f) and (x1m: ''x1) and (x2m: ''x2) and (lambda2m: ''lambda2) and (lambda1m: ''lambda1) and p:1 e
```

Rys. 4 Wykres obrazujący warunki zadania



Źródło: Opracowanie własne przy wykorzystaniu programu Graphmatica

3. Przykłady zastosowań tw. Kuhna-Tuckera w ekonomii

3.1. Zadanie 1 – minimalizacja kosztów

Zadanie pochodzi w wykładów dr inż. Zbigniewa Tarapaty i jest przykładem na to, że dany algorytm rozwiązania można zastosować także w przypadku optymalizacji z ograniczeniami równościowymi(równoważne z metodą Lagrange'a)[7].

Energia z elektrociepłowni przesyłana jest do dwóch zużywających ją zakładów produkcyjnych. Firma chce tak rozdzielić pomiędzy zakłady dzienną produkcję energii wynoszącą 16MWh, aby minimalizować koszty przesyłu energii. Funkcja kosztów przesyłania energii do tych zakładów w zależności od wielkości przesyłu dana jest wzorem:

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 - 12x_1 - 4x_2 + 81$$

Gdzie: x_1 – wielkość przesyłanej energii do zakładu pierwszego,

x_2 – wielkość przesyłanej energii do zakładu drugiego.

W celu rozwiązania zadania należy utworzyć funkcję Lagrange'a oraz określić ograniczenia parametrów.

```
/*tutaj wpisz funkcję*/
f:5*x1^2-8*x1*x2+7*x2^2-12*x1-4*x2+81;

/*tutaj wpisz ograniczenie*/
w1:x1+x2-16;

Lagr:f-lambda*w1;
```

(%o2) $7\,x2^2-8\,x1\,x2-4\,x2+5\,x1^2-12\,x1+81$

(%o3) $x2+x1-16$

(%o4) $-(x2+x1-16)\,lambda+7\,x2^2-8\,x1\,x2-4\,x2+5\,x1^2-12\,x1+8$

Warunki równościowe oraz ograniczenia nierównościowych:

```
(%i7) /*warunki równościowe*/
      eq1:x1*diff(Lagr,x1,1)=0;
      eq2:x2*diff(Lagr,x2,1)=0;
      eq3:lambda*diff(Lagr,lambda,1)=0;
      eq4:diff(Lagr,lambda,1)=0;
```

(%o7) $x1\,(-lambda-8\,x2+10\,x1-12)=0$

(%o8) $x2\,(-lambda+14\,x2-8\,x1-4)=0$

(%o9) $(-x2-x1+16)\,lambda=0$

(%o10) $-x2-x1+16=0$

```
(%i5) /*ograniczenia nierownosciowe*/
      og1:diff(Lagr,x1,1)>=0;
      og2:diff(Lagr,x2,1)>=0;
```

(%o5) $-lambda-8\,x2+10\,x1-12>=0$

(%o6) $-lambda+14\,x2-8\,x1-4>=0$

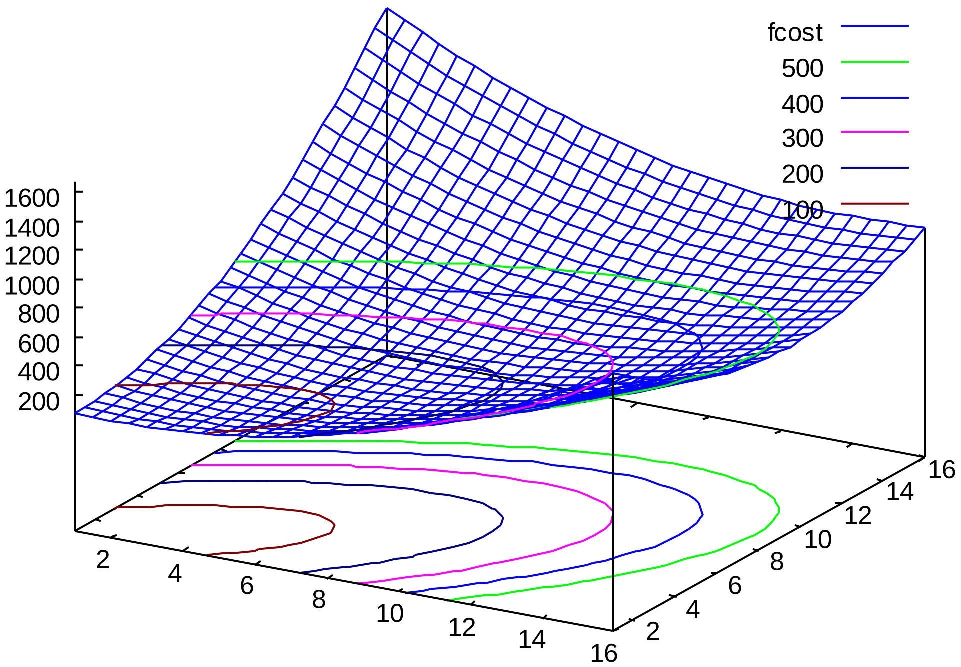
[7] http://tarapata.strefa.pl/p_ekonometria/download/ekonometria_cz3_5.pdf

Po rozwiązaniu wygenerowanych równań otrzymujemy listę rzeczywistych rozwiązań, wśród których jedno spełnia warunki minimalizacji funkcji kosztów w omawianym zadaniu. Dla danego zadnia optymalna ilość dostarczanej energii do zakładu pierwszego (x_1*) wynosi 9MWh, natomiast do drugiego zakładu (x_2*) 7MWh. Wartość funkcji celu w danym rozwiązaniu wynosi f(x_1*,x_2*)=189.

```
dla x1, x2, lambda
9
7
22
funkcja rowna sie
189
czy spełnia warunki?
 (%o288) true
```

Dla pewności możemy nasze wyniki porównać z wykresem funkcji:

Rys. 5 Funkcja celu firmy



Źródło: Opracowanie własne przy wykorzystaniu programu Maxima.

3.2. Zadanie 2 – szacowanie portfela akcji

Przy założeniu posiadania wiarygodnych informacji dotyczących podejmowania przyszłościowych decyzji, twierdzenie Kuhna-Tuckera ma niezwykle istotne znaczenie dla konstruowania portfela akcji. Przedstawione poniżej zadanie ukazuje zastosowanie omawianej metody w kształtowaniu portfela[8].

Chcemy zbudować optymalny portfel, który będzie składał się z dwóch spółek Amka i Bamek, które charakteryzują się następującymi parametrami:

- oczekiwane stopy zwrotu dla obu spółek wynoszą: R_A=0.0209, R_B=0.0095

- odchylenia standardowe stopy zwrotu dla obu spółek wynoszą: S_A=0.0547, S_B=0.0361

- współczynnik korelacji między akcjami spółek wynosi: ρ_{AB}=0.5

Inwestor charakteryzuje się awersją do ryzyka, więc interesuje go portfel, który minimalizuje ryzyko. Jednakże wymaga przy tym stopy zwrotu z portfela nie mniejszej niż 2%.

Funkcja celu inwestora przedstawia się następująco:

$$f(x_A, x_B) = x_A^2 * 0.0547^2 + x_B^2 + 2x_A * 0.0547 * x_B * 0{,}0361 * 0{,}5$$

Gdzie: x_A – udział akcji spółki Amka w portfelu inwestora

x_B – udział akcji spółki Bamek w portfelu inwestora

Skalkulowanie optymalnego portfela inwestycyjnego we wstępie wymaga stworzenia funkcji Lagrange'a oraz określenia ograniczeń.

```
(%i1) kill(all)$
      load(draw)$
      f: x1^2*0.0547^2+x2^2*0.0361^2+2*x1*0.0547*x2*0.0361*0.5;
      w1: x1*0.0209+x2*0.0095-0.02;
      w2: x1+x2-1;
      Lagr: f-lambda1*w1-lambda2*w2;
(%o2) 0.00130321 x2^2+0.00197467 x1 x2+0.00299209 x1^2
(%o3) 0.0095 x2+0.0209 x1-0.02
(%o4) x2+x1-1
(%o5) 0.00130321 x2^2-lambda2(x2+x1-1)+0.00197467 x1 x2-lambda1(0.0095 x2+0.0209 x1-0.02)+0.00299209 x1^2
```

Następnym etapem jest ustalenie warunków równościowych, które pozwolą na uzyskanie listy rozwiązań spełniających warunki zadania.

[8] http://tarapata.strefa.pl/p_ekonometria/download/ekonometria_cz3_5.pdf

```
(%i5) /*ograniczenia nierównościowe*/
      og1:diff(Lagr,x1,1)<=0;
      og2:diff(Lagr,x2,1)<=0;
      og3:diff(Lagr,lambda1,1)>=0;
```

(%o2) $0.00130321\ x2^2+0.00197467\ x1\ x2+0.00299209\ x1^2$

(%o3) $0.0095\ x2+0.0209\ x1-0.02$

(%o4) $x2+x1-1$

(%o5) $0.00130321\ x2^2-lambda2\,(x2+x1-1)+0.00197467\ x1\ x2-lambda$
$(0.0095\ x2+0.0209\ x1-0.02)+0.00299209\ x1^2$

```
(%i6) /*warunki równościowe*/
      eq1:x1*diff(Lagr,x1,1)=0;
      eq2:x2*diff(Lagr,x2,1)=0;
      eq3:lambda1*diff(Lagr,lambda1,1)=0;
      eq4:lambda2*diff(Lagr,lambda2,1)=0;
      eq5:diff(Lagr,lambda2,1)=0;
```

(%o6) $x1\,(0.00197467\ x2+0.00598418\ x1-lambda2-0.0209\ lambda1)=0$

(%o7) $(0.00260642\ x2+0.00197467\ x1-lambda2-0.0095\ lambda1)\ x2=0$

(%o8) $lambda1\,(-0.0095\ x2-0.0209\ x1+0.02)=0$

(%o9) $lambda2\,(-x2-x1+1)=0$

(%o10) $-x2-x1+1=0$

Rozwiązanie warunków równościowych pozwala nam na ustalenie optymalnego udziału akcji obu spółek w portfelu inwestora. Minimalizację funkcji celu zapewnia x_A*=0,921 oraz x_B*=0,079. Taka proporcja udziału akcji ustala wartość funkcji na poziomie f(x_A*,x_B*)=0,00269. Dana wartość zapewnia najmniejszą osiągalną wartość ryzyka, gdy inwestor chcę osiągnąć minimum 2 procentowy poziom dochodu.

dla x1, x2, lambda1, lambda2

$\frac{35}{38}$

$\frac{3}{38}$

$\frac{137134790303356250}{429123237971757119}$

$-\frac{182737347399739}{18068346861968720\,8}$

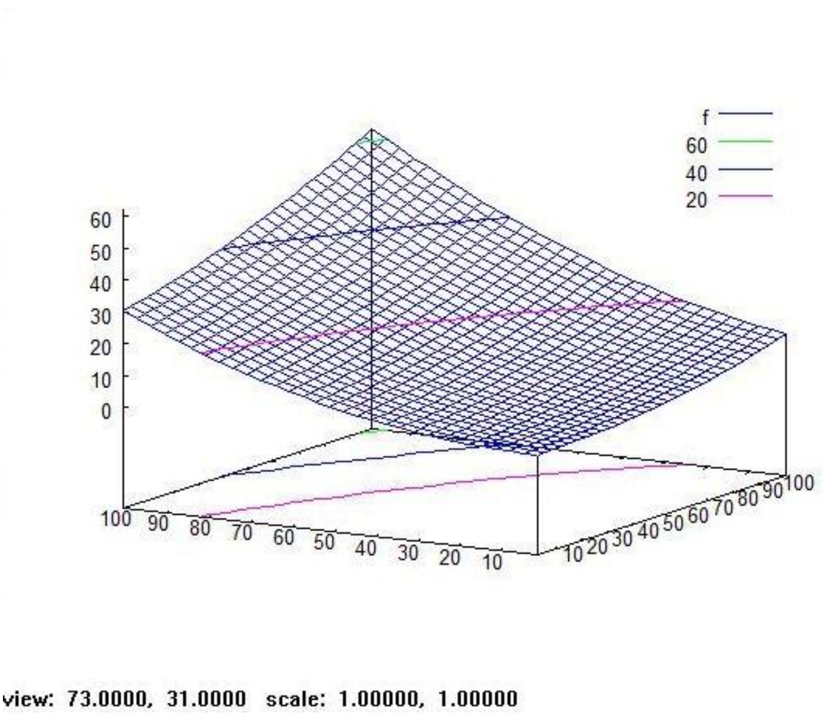
funkcja rowna sie

0.0026900134972299

czy spełnia warunki?

(%o98) *true*

Rys. 6 Funkcja celu inwestora



Źródło: Opracowanie własne przy wykorzystaniu programu Maxima.

Bibliografia

Chiang A. C., *Podstawy ekonomii matematycznej*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1994.

Horla D., *Metody obliczeniowe optymalizacji w zadaniach*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008

Runka H. J., *Programowanie matematyczne: część II Programowanie nieliniowe*, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań 1997.

Stadnicki J., *Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2006.

Źródła internetowe

Tarapata Z., Wykład nr 5: Optymalizacja nieliniowa. Dostęp 4 lutego 2012. http://tarapata.strefa.pl/p_ekonometria/download/ekonometria_cz3_5.pdf

Żylicz T., *Czy należy uczyć matematyki studentów ekonomii?* Dostęp 1 lutego 2012. http://coin.wne.uw.edu.pl/tzylicz/matekon.pdf