3. CVIČENÍ K PŘEDMĚTU BI-LIN

KAM FIT ČVUT

19. března 2015

1 Součin matic

Příklad 1.1. Vypočtěte součiny $\mathbb{AB}$ a $\mathbb{BA}$ následujících matic:
a)

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & -7 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b)

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

c)

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}.$$

Výsledek.

$$\text{a) } \mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{BA} \text{ není definován,}$$

$$\text{b) } \mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 28 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbb{BA} = \begin{pmatrix} 22 & 12 & 12 & 24 \\ -7 & 8 & -7 & -19 \\ 10 & -4 & 8 & 20 \\ -7 & 8 & -7 & -19 \end{pmatrix}.$$

c) $\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,1}$, $\mathbb{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Příklad 1.2. Spočtěte $\mathbb{A}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, je-li

a)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

c)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

Výsledek.

$$\text{a) } \mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A}^n = \begin{cases} \mathbb{E}, & \text{pro n sudé,} \\ \mathbb{A}, & \text{pro n liché,} \end{cases} \quad \text{c) } \mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

2 Hodnost matice

Příklad 2.1. Určete hodnosti následujících matic:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 17 & 34 \\ -4 & -8 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek. a) $h(\mathbb{A}) = 4$, b) $h(\mathbb{A}) = 2$, c) $h(\mathbb{A}) = 1$, d) $h(\mathbb{A}) = 4$, e) $h(\mathbb{A}) = 3$.

Příklad 2.2. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ určete hodnosti následujících matic:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha+1 & 2 & 2 \\ \alpha+2 & \alpha+1 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledek. a) $h(\mathbb{A}) = 3$ pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ b) $h(\mathbb{A}) = 3$ pro $\alpha = 0$, $h(\mathbb{A}) = 4$ jinak, c) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, $h(\mathbb{A}) = 2$ jinak, d) $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = 3$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, e) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\alpha = 1$, $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = -\frac{1}{2}$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, f) $h(\mathbb{A}) = 3$ pro $\alpha \in \{0, 1\}$, $h(\mathbb{A}) = 4$ jinak.

Další úlohy k procvičování:

Příklad 2.3. Jak je třeba volit parametry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, aby následující matice měly hodnost rovnou třem:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ \alpha & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ \beta & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \alpha \\ 1 & 4 & -2 & 2 & \beta \\ 1 & -12 & 8 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Výsledek. a) $\alpha + 2 \neq \beta$, b) $\alpha + 2\beta + 2 = 0$, c) $2\alpha \neq 3\beta + \gamma$.

Příklad 2.4. Nalezněte všechny parametry $\alpha \in \mathbb{R}$, tak aby následující matice měly minimální hodnost:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha+2 & \alpha+4 \\ 2 & \alpha+4 & \alpha(\alpha+2) \end{pmatrix}, \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix}, \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & -5 & 5 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Výsledek. a) $\alpha \in \{-2, 0, 2\}$, b) $\alpha = 0$, c) $\alpha \in \{-2, 15\}$.

Příklad 2.5. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ určete hodnosti následujících matic:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ -1 & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^2 & \alpha\beta^2 \\ 1 & \beta & \alpha\beta \\ 1 & \beta & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek. a) $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = \pm\beta$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, b) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\alpha = 1$, $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = -2 \vee (\alpha \neq 1 \wedge \beta = 0)$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, c) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\beta = 0 \vee \alpha = \beta$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak.

Příklad 2.6.

Buď $n \geq 2$. Určete pravdivostní hodnotu následujících tvrzení:

a) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A})$,
b) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A}\mathbb{B} = \Theta \;\Rightarrow\; \mathbb{B}\mathbb{A} = \Theta)$,
c) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A} \neq \Theta \wedge \mathbb{B} \neq \Theta \;\Rightarrow\; \mathbb{A}\mathbb{B} \neq \Theta)$,
d) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})((\mathbb{A} + \mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2)$,
e) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A}^2 - \mathbb{B}^2 = (\mathbb{A} + \mathbb{B})(\mathbb{A} - \mathbb{B}))$.

Výsledek. Ani jedno z tvrzení neplatí. (Najděte protipříklady!)

Příklad 2.7. * *Stopou* $\operatorname{Tr}\mathbb{A}$ čtvercové matice $\mathbb{A}$ rozumíme součet jejích prvků na diagonále. Dokažte, že pro matice $\mathbb{B} \in T^{m,n}$ a $\mathbb{C} \in T^{n,m}$ platí

$$\operatorname{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}) = \operatorname{Tr}(\mathbb{C}\mathbb{B}).$$

Příklad 2.8. S využitím výsledku předchozího cvičení dokažte, že neexistují matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$ takové, aby $\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{E}$.

Příklad 2.9. Je množina čtvercových matic s nulovou stopou podprostor $T^{n,n}$? Pokud ano, jakou má tento podprostor dimenzi?

Výsledek. Ano, $n^2 - 1$.

Příklad 2.10. * Matice $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je *symetrická*, právě když $(\forall i, j \in \hat{n})(\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{A}_{ji})$. Je množina symetrických matic podprostor $T^{n,n}$? Pokud ano, jakou má tento podprostor dimenzi?

Výsledek. Ano, $n(n+1)/2$.

3 Regularita a inverzní matice

Příklad 3.1. Rozhodněte, zda jsou následující matice regulární a v kladném případě k nim nalezněte matice inverzní:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3i & 1 & 2-i \\ 0 & 3 & 5 \\ 2i & i & 3+i \end{pmatrix}.$$

Výsledek.

$$\text{a) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} \text{ není regulární,}$$

$$\text{d) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{f) } \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 5 & 1 \\ -8 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -2-9i & 1+2i & 3+i \\ 10 & 5+5i & -15 \\ -6 & 2-3i & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.2. Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ jsou následující matice regulární, a nalezněte k nim matice inverzní:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{h) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledek.

$$\text{a) } \forall\alpha \in \mathbb{C},\ \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \nexists\alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{c) } \alpha \neq 0,\ \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\alpha & 1/\alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \alpha \neq \pm 1,\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 - 1}\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \alpha \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2\alpha^2 - 1}\begin{pmatrix} -\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 - 1 \\ \alpha & -1 & \alpha \\ \alpha^2 - 1 & \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{f) } \alpha \notin \{0, \pm\sqrt{2}\},\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha(2 - \alpha^2)}\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 1 - \alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & \alpha \\ 1 - \alpha^2 & \alpha & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{g) } \alpha \notin \left\{-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha^3+1}\begin{pmatrix} \alpha^2 & -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.3. Nalezněte neznámou matici $\mathbb{X}$ vyhovující rovnici

a) $\mathbb{X}\mathbb{A} = (\mathbb{X} - \mathbb{B})\mathbb{B}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

b) $\mathbb{X}\mathbb{B} - \mathbb{A} = \mathbb{B}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

c) $\mathbb{A}\mathbb{X} - \mathbb{B} = \mathbb{X}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

d) $\mathbb{A}\mathbb{X} + 2\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{X} - 2\mathbb{C}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix},$$

e) $\mathbb{A}\mathbb{X} + i\mathbb{X} = \mathbb{B}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & i-1 \\ 0 & 3i \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 13+i & 4i \\ -8 & -4i \end{pmatrix}.$$

Výsledek.

$$\text{a) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 14 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & -7 \\ -8 & -6 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{X} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -12 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Další úlohy k procvičování:

Příklad 3.4. * Dokažte, že matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je regulární a najděte $\mathbb{A}^{-1}$, je-li

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledek.

$$\text{a) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^n & (-1)^{n-1} & (-1)^n & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)} \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \dots & (-\alpha)^{n-1} \\ 0 & 1 & -\alpha & \alpha^2 & \dots & (-\alpha)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & \dots & (-\alpha)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \text{e) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.5. Buďte $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ regulární a $\mathbb{B} \in T^{n,n}$ singulární. Potom obě matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$, $\mathbb{B}\mathbb{A}$ jsou singulární. Dokažte.

Příklad 3.6. Musí být součet dvou regulárních matic regulární matice? Může být součet dvou matic, z nichž jedna, resp. žádná není regulární, regulární matice? Uveďte vhodné příklady.

Výsledek. Ne, ano.

Příklad 3.7. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$. Potom matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou obě regulární, právě když matice $\mathbb{A}\mathbb{B}, \mathbb{B}\mathbb{A}$ jsou obě regulární. Dokažte.

Příklad 3.8. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ vyhovuje rovnici $\mathbb{A}^2 - \mathbb{A} + \mathbb{E} = \Theta$. Dokažte, že $\mathbb{A}$ je regulární. Co musí platit pro matici $\mathbb{A}^{-1}$?

Výsledek. $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E} - \mathbb{A}$.

Příklad 3.9. * Nechť pro matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathbb{A}^k = \Theta$ (taková $\mathbb{A}$ se nazývá *nilpotentní* matice). Potom je matice $\mathbb{E} - \mathbb{A}$ regulární a platí $(\mathbb{E} - \mathbb{A})^{-1} = \mathbb{E} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \cdots + \mathbb{A}^{k-1}$. Dokažte.

Příklad 3.10. * Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární. Jak se změní matice $\mathbb{A}^{-1}$, jestliže v matici $\mathbb{A}$:

a) prohodíme i-tý a j-tý řádek,
b) i-tý řádek vynásobíme číslem $\alpha \in T \setminus \{0\}$,
c) k i-tému řádku přičteme j-tý řádek, $i \neq j$?

Jak se změní inverzní matice při podobných transformacích sloupců?

Výsledek. a) Zamění se i-tý a j-tý sloupec, b) i-tý sloupec se vynásobí číslem $1/\alpha$, c) od j-tého sloupce se odečte i-tý. Varianta pro sloupce: jako a), b), c) ale s řádky.