ДЗ 2

Михаил Воронов

26 октября 2019 г.

1. Задача 1.

(a) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3), x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = 2$$

Ответ: да, верно.

(b) $x + x^2 sinx = O(x^3), x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + x^2 sinx}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{sinx}{x} \right)$$

В этом пределе первая часть стремится к нулю. Числитель функции может принимать значения от -1 до 1, поэтому вторая часть тоже стремится к нулю. Значит, предел равен нулю. Ответ: да, верно.

(c) $xsinx = o(x^3), x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{xsinx}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx + xcosx}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2cosx - xsinx}{6x} = +\infty$$

Ответ: нет, неверно.

(d) $x^n e^{-x} = o(x^2), x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{n-2}}{e^x} = 0$$

Требуется пояснение к последнему шагу: там есть неопределённость, поэтому мы применим правило Лопиталя $n-2$ раза, тогда в числителе останется константа, а в знаменателе e^x, которое стремится к $+\infty$. Ответ: да, верно.

2. Задача 2.

(a) $cos(x)$ до x^7

$cox(x) = cos(0) + \frac{-sin0}{1!}x + \frac{-cos0}{2!}x^2 + \frac{sin0}{3!}x^3 + \frac{cos0}{4!}x^4 + \frac{-sin0}{5!}x^5 + \frac{-cos0}{6!}x^6 +$
$+ \frac{sin0}{7!}x^7 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$

(b) e^{2x-x^2} до x^3

$\left(e^{2x-x^2}\right)' = 2(1-x)e^{2x-x^2}$

$\left(e^{2x-x^2}\right)'' = e^{2x-x^2}(2-2x)(2-2x) - 2e^{2x-x^2} = 2(2(1-x)^2-1)e^{2x-x^2}$

$\left(e^{2x-x^2}\right)''' = \left(2-8x+4x^2\right)' e^{2x-x^2} + (2-8x+4x^2)(2x-2)e^{2x-x^2} =$

$= (-8x^3+24x^2-12x-4)e^{2x-x^2}$

$e^{2x-x^2} = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \ldots = 1 + 2x + x^2 + \ldots$

(c) $cos(e^{2x-x^2})$ до x^3

$cos(e^{2x-x^2})\left[\text{ до } x^3\right] = 1 - \frac{(x^2+2x+1)^2}{2}$

3. Задача 3.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x^2}x = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2!}}{x^2}x = \lim_{x\to 0} -0,5x = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x-x^2}-1-2x+3x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x+x^2-1-2x+3x^2}{x^2} = 4$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} cos(e^{2x-x^2}) = cos1$$

Я бы рад здесь что-то пораскладывать, но неопределённости нет

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x sinx - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x-\frac{x^3}{3!}) - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}(1+x)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1+x}{6} = -\frac{1}{6}$$

.

4. Задача 4.

$$y = ln(1+7x)$$

$$y' = \frac{7}{1+7x}$$

$$y'' = \frac{-49}{(1+7x)^2}$$

$$y''' = \frac{646}{(1+7x)^3}$$

$$y = ln(1+7x) = ln(22) + \frac{7(x-3)}{22} - \frac{49(x-3)^2}{968} + \frac{686(x-3)^3}{63888} - \ldots$$

5. Задача 5.

(a)

$$y = ln(1+x)$$

$$y' = \frac{1}{x+1}$$

$$y'' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y''' = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$y'''' = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

$$ln(1+x) = ln(1) + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}(-1)^{n+1}$$

Попробуем доказать, что это действительно так. Каждая производная от функции $ln(x+1)$ содержит выражение $x+1$ в отрицательной степени, значит, знак с каждой новой производной будет меняться. Остаётся понять, куда уходит факториал. С каждой новой производной мы умножаем значения всех степеней предыдущих производных, то есть берём факториал $n-1$. Так как $\frac{n!}{(n-1)!} = n$, в знаменателе остаётся n.

(b)

$$ln(1,1) = ln(1+0,1) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{500000} =$$

$$= \mathbf{0.09531}0(3)$$