ДЗ 3

Михаил Воронов

15 ноября 2019 г.

1.

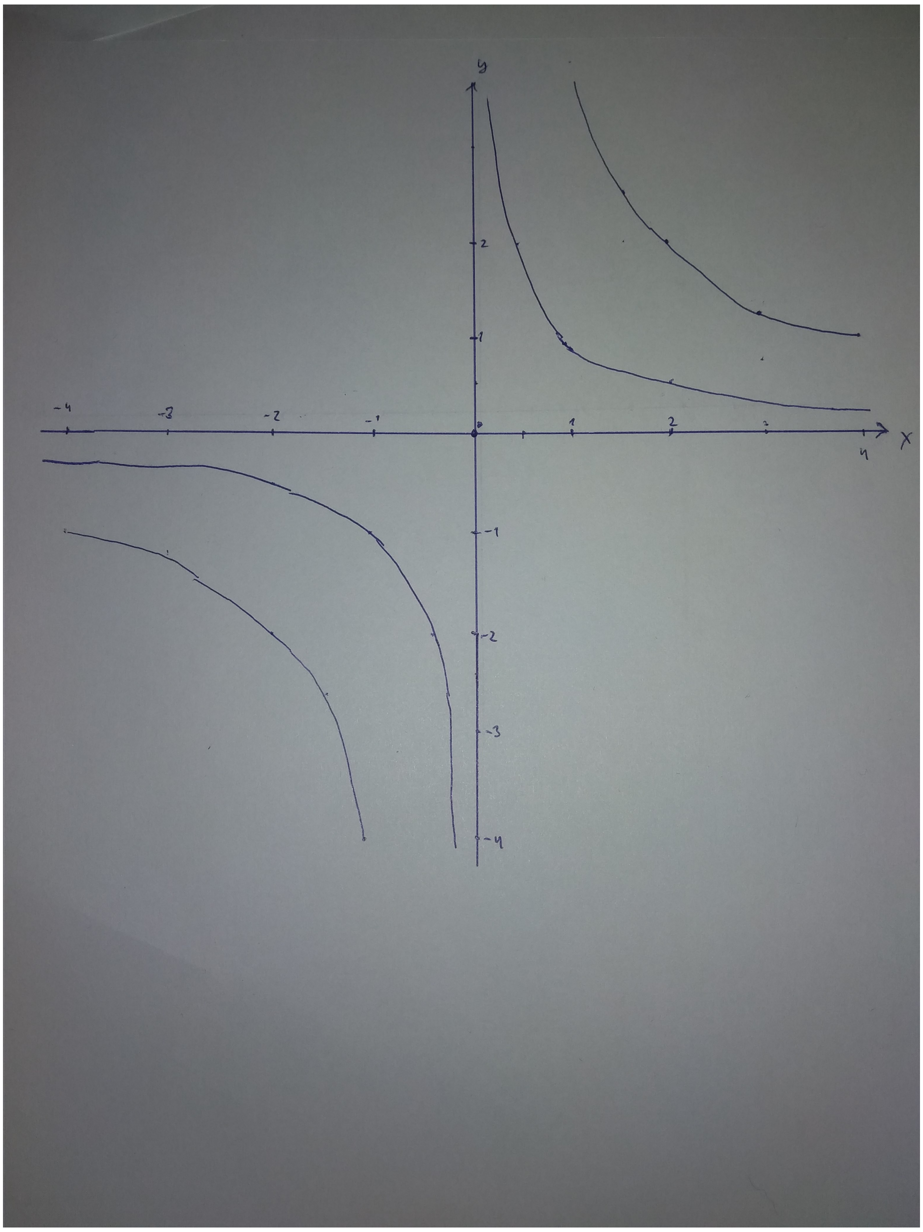
$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

Первое, что можно сразу заметить, это то, что у линий уровня удет иметь место симметрия по $y = -x$.

$$y = \frac{f^2(x, y)}{x}$$

Итак, мы знаем, что линии уровня будут гиперболой с коэффициентом равным выбранной константе в квадрате.

Возьмём значения 0, 1 и 2: $(0, 0)$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$. Построим график:



2.

$$f(x, y) = x^2 \text{-} xy + y^2$$

Найдём частные производные:

$$f_x^{'}(x, y) = 2 - y\big|_{(-1,2)} = 0$$

$$f_y^{'}(x, y) = -x + 2y\big|_{(-1,2)} = 5$$

Вспомним формулу производной в точке по направлению вектора:

$$f_v^{'} = f_x^{'}(x,y)\big|_A cos\left(\frac{v_x}{|v|}\right) + f_y^{'}(x,y)\big|_A cos\left(\frac{v_y}{|v|}\right)$$

Заметим, что первое слагаемое в любом случае будет равно нулю. Значит, производная будет максимальной тогда, когда второе слагаемое будет максимальным. Итак, нам нужен единичный вектор, у которого будет максимальное значение y: это вектор $(0,1)$.

Ответ: $(0,1)$.

3.

Найдём частные производные:

$$f_x^{'}(x,y) = 4x - 12y + 4$$

$$f_y^{'}(x,y) = 3y^2 - 12x - 12$$

Найдём критические точки:

$$\begin{cases} 4x - 12y + 4 = 0 \\ 3y^2 - 12x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$x = 3y - 1$$

$$y^2 - 12y = 0$$

$$y(y-12) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1, y = 0 \\ x = 35, y = 12 \end{cases}$$

Итак, две критические точки: $(-1,0,6)$ и $(35,12,-858)$.

Найдём частные производные второго порядка:

$$f_{xx}^{''} = 4$$

$$f_{xy}^{''} = -12$$

$$f_{yy}^{''} = 6y$$

Теперь можно проверять точки.

Начнём с первой. Правда ли, что:

$$f_{xx}^{''}\big|_{(-1,0)} f_{yy}^{''}\big|_{(-1,0)} - \left(f_{xy}^{''}\big|_{(-1,0)}\right)^2 > 0 \equiv -(-12)^2 > 0 \equiv -144 > 0$$

Не правда. Значит, это седловая точка, а не экстремум.

Вторая точка. Правда ли что:

$$f_{xx}^{''}\big|_{(35,12)} f_{yy}^{''}\big|_{(35,12)} - \left(f_{xy}^{''}\big|_{(35,12)}\right)^2 > 0 \equiv -12 \times 6 \times 4 - 144 > 0 \equiv 144 < 288$$

Правда. $f_{xx}^{''}\big|_{(35,12)} = 4 > 0$, значит, это минимум.

Ответ: имеется минимум в точке $(35,12,-858)$ и седловая точка $(-1,0,6)$.

4.

$$f(x, y) = ye^{xy}$$
$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 1$$
$$z_0 = 1$$

Вспомним уравнение касательной плоскости в общем виде:

$$z - z_0 = f_x^{'}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y^{'}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)$$

Найдём частные производные:

$$f_x^{'}(x, y) = ye^{xy}y = y^2e^{xy}$$
$$f_y^{'}(x, y) = e^{xy} + e^{xy}xy$$

Остаётся подставить в формулу:

$$z - 1 = 1^2e^0(x) + (e^0 + e^0 0)(y - 1)$$
$$z - 1 = x + y - 1$$
$$z = x + y$$

Ответ на пункт *a*: $x + y$.

У нас теперь есть касательная плоскость в точке $(0, 1)$, а нам требуется найти линейное приближение для точки $(-0.1, 1.1)$: достаточно близко для того, чтобы сделть вид, что это точка лежит на найденной плоскости.

$$f(-0.1, 1.1) \approx x_0 + y_0 = -0.1 + 1.1 = 1$$

Ответ на пункт *b*: $f(-0.1, 1.1) \approx 1$.