Lógica Computacional

LEI, 2023/2024
FCT UNL

Aula Prática 1

Tradução de asserções em linguagem natural para fórmulas em lógica proposicional.
Verificação que sequências de símbolos são fórmulas.
Definições indutivas.

1. Identifique as asserções básicas e escreva fórmulas em lógica proposicional que representem as seguintes frases em linguagem natural.

   (a) O Pedro ficou doente em casa.

   (b) O Pedro não tem Gripe A se não tem febre.

   (c) O Pedro está doente se tiver Gripe A.

   (d) O Pedro fica em casa só se estiver doente.

   (e) O Pedro está em casa porque ficou doente.

   (f) Como ficou doente, o Pedro ficou em casa.

   (g) O Pedro ficou doente, mas já foi ao médico.

   (h) O Pedro foi ao médico e ficou doente.

   (i) O Pedro fica de mau humor se estiver doente em casa.

   (j) Estar doente ou ir ao médico deixam o Pedro de mau humor.

   (k) O Pedro vai ao médico desde que não esteja mau tempo.

   (l) Se o Pedro foi ao médico porque está doente, então não está em casa.

   (m) Se o Pedro foi ao médico e está doente, então não está em casa.

   (n) O Pedro vai ao médico se estiver doente, a não ser que esteja mau tempo e a Ana esteja aborrecida.

   (o) O Pedro vai ao médico se estiver doente e a Ana estiver aborrecida, a não ser que esteja mau tempo.

   (p) O Pedro está em casa ou a Rita está em casa e a Ana está feliz.

   (q) A Ana está feliz e, além disso, ou o Pedro está em casa ou a Rita está em casa.

2. Mostre que as seguintes sequências de símbolos de Alf_P são fórmulas de F_P

   (a) $\neg\top$

   (b) $(a \vee \neg a)$

   (c) $(a \rightarrow (a \vee b))$

   (d) $((a \vee a) \rightarrow a)$

   (e) $((a \wedge b) \rightarrow a)$

   (f) $(a \rightarrow (b \rightarrow a))$

(g) $(\neg(a \vee b) \rightarrow \neg a)$

(h) $(\neg a \rightarrow (a \rightarrow b))$

(i) $((b \rightarrow c) \rightarrow ((a \wedge b) \rightarrow c))$

(j) $((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (b \vee c)))$

(k) $(((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$

(l) $(((a \rightarrow b) \wedge \neg b) \rightarrow \neg a)$

(m) $((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)))$

(n) $(a \leftrightarrow \neg\neg a)$

3. Considere a função $\mathsf{npe} : F_P \rightarrow \mathbb{N}_0$ que calcula o número de parênteses esquerdos de dada fórmula de lógica proposicional.

   (a) Defina indutivamente a função

   (b) Prove que $\mathsf{npe}((p \vee (q \rightarrow (r \wedge s)))) = 3$, justificando cada passo.

4. Prove por indução estrutural que qualquer fórmula de lógica proposicional tem o mesmo número de parênteses esquerdos e direitos.

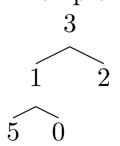
5. Considere o conjunto *NatP* dos números naturais pares.

   (a) Defina indutivamente o conjunto com as regras:
   - *ZERO*, que gera o primeiro valor do conjunto;
   - *PROX*, que gera um novo valor do conjunto a partir de um valor já existente.

   (b) Mostre que 4 pertence ao conjunto *NatP*.

6. Considere o conjunto *ArvBinNat* das árvores binárias de naturais (na notação usual).

   Exemplo: o termo $junta(junta(raiz(5), 1, raiz(0)), 3, raiz(2))$ denota a árvore



   (a) Defina indutivamente o conjunto *ArvBinNat* com as regras:
   - *RAIZ*, que gera o valor $raiz(n)$ do conjunto a partir de dado natural n (a árvore degenerada só com um nó, que tem o valor dado nesse nó);
   - *JUNTA*, que gera um novo valor do conjunto a partir de dois valores já existentes (serão as subárvores esquerda e direita) e de um dado natural (que ficará na raíz da nova árvore).

   (b) Mostre que o termo acima pertence ao conjunto *ArvBinNat*.