

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Рязанов Даниил Александрович

Бигармонические аттракторы внутренних волн

01.02.05 — Механика жидкости газа и плазмы

Научно-квалификационная работа

Научный руководитель:

д.ф.-м.н.,
Веденеев В. В.

Москва – 2020

Содержание

Введение	3
1 Общая теория внутренних гравитационных волн	10
1.1 Обзор литературы	13
1.2 Математические модели для изучения внутренних гравитационных и инерционных волн	17
1.3 Линеаризованная теория внутренних гравитационных волн	20
1.4 Исследование свойств волновых течений с помощью трассировки лучей	22
2 Численное моделирование атTRACTоров внутренних гравитационных волн	27
2.1 Численное моделирование атTRACTоров внутренних волн с помощью метода спектральных элементов	28
2.2 Численное моделирование атTRACTоров внутренних волн с помощью метода контрольного объема	30
2.3 Численное моделирование атTRACTоров внутренних волн с помощью метода контрольного объема на базе квазигидродинамического подхода	33
2.3.1 Верификация	40
2.3.2 Валидация	45
2.4 Критические частоты и диапазон существования атTRACTоров внутренних волн	47
2.5 Волновые движения в замкнутом резервуаре при воздействии с двумя частотами	49
2.6 Кинетическая энергия для монохроматического и бигармонического режимов	51
3 Заключение	68
Список использованных источников	71

Введение

Важной задачей изучения аттракторов внутренних волн с помощью численных методов является обеспечение возможности проводить численные эксперименты с геометрией, приближенной к геометрии реального дна океана. Выполнение этой задачи ускорило и удешевило бы процесс непосредственного поиска аттракторов внутренних волн в океане, и изучение влияния аттракторов на турбулентные режимы. Метод спектральных элементов, который обеспечивает достаточную точность воспроизведения результатов эксперимента, ограничен в своей реализации сложностью геометрии расчетной области. В свою очередь, метод конечного объема позволяет работать со сложной геометрией, которая способна имитировать поверхность океанического дна, но стандартные реализации не обладают достаточной точностью. Кроме того, монохроматический источник возмущений может не описывать реальные внешние воздействия. Зачастую, при моделировании явлений, связанных с образованием аттракторов в реальных условиях, необходимо учитывать несколько приливных воздействий [1] и изменение стратификации.

Цель работы

Цель работы – изучение свойств волновых режимов, возникающих при бигармонических воздействиях на стратифицированную жидкость в области с наклонной границей по отношению к силе тяжести. Для этого поставлены следующие задачи:

- Изучение интервалов частот внешних воздействий и других параметров, при которых происходит аккумуляция волновой энергии, в частности волновых аттракторов типа (1,1).
- Обзор существующих методов моделирования аттракторов внутренних волн. Выявление их достоинств и недостатков.
- Реализация численных экспериментов с помощью двух подходов: спектрально-элементного и конечно-объемного.
- Разработка новой программы для моделирования аттракторов внутренних волн на основе анализа существующих подходов.
- Верификация результатов численного моделирования.

- Описание особенностей волновых режимов при бигармоническом воздействии и значительно отличающихся частотах воздействия и малых амплитудах.
- Описание особенностей волновых режимов при бигармоническом воздействии, близких частотах воздействия и малых амплитудах.
- Описание особенностей нелинейных волновых режимов при бигармоническом воздействии и близких частотах воздействия.
- Сравнение динамики средней кинетической энергии и пульсации кинетической энергии для монохроматического режима и различных бигармонических режимов.

Объектом исследования являются волновые режимы возникающие при двух источниках внешних воздействий на стратифицированную жидкость в областях общей (не прямоугольной) геометрии. Приложения включают в себя задачи океанологии, астрофизики и технических вращающихся систем при периодических воздействиях.

В исследовании использованы *следующие методы*:

- методы численного моделирования конечного объема;
- метод спектральных элементов;
- метод трассировки лучей;
- Фурье анализ полученных результатов, в том числе по скользящему окну;
- разложение по эмпирическим модам;
- частотно-временные диаграммы.

Актуальность работы

Волновые структуры, называемые волновыми атTRACTорами, в явном виде воспроизводятся в лабораторных установках, но их изучение в природных условиях представляет значительные сложности [2]. Прежде всего из-за сложной геометрии и переходу к турбулентному режиму. Численно моделирование в условиях сложной геометрии, приближенной к реальной орографии морского дна может пролить свет на некоторые явления в океане, до сих пор не получившие объяснения. К таким явлениям относятся связь крупномасштабных приливных эффектов и мелко-

масштабных внутренних волн малой длины. Одним из объяснений этой связи может послужить фокусировка внутренних гравитационных волн.

Решение задач моделирования атTRACTоров внутренних волн в условиях сложных геометрий, порождаемых источниками возмущения различной частоты и амплитуды поможет описать течения, возникающие в результате многократных отражений внутренних волн от рельефа дна океана. Результаты моделирования позволяют дать первичную оценку влияния атTRACTоров на перемешивание в стратифицированной жидкости, на процессы седиментации различных веществ, на эрозию конструкций и рельефа в областях повышенной интенсивности движения жидкости, на паттерны поведения различных форм жизни в условиях существования с атTRACTором внутренних волн. Результаты работы представляют собой интерес для приложений в океанологии, экологии, биологии, астрофизики и врачающихся технических систем.

В работе рассматриваются резервуары в форме трапеций различных конфигураций, заполненных стратифицированной жидкостью. Одна из стенок резервуара представляет собой волнопродуктор, который порождает внутренние волны в стратифицированной среде. Результаты разработки предоставляют возможность проводить моделирование атTRACTоров внутренних волн в условиях сложной геометрии и неортогональных сетках.

Научная новизна работы

1. Получены аналитические выражения для границ частотного интервала существования атTRACTоров внутренних волн конфигурации (1,1).
2. Получена геометрия течения, которая возникает в трапециевидном резервуаре, наполненном стратифицированной жидкостью при воздействии на жидкость внешних возмущений с двумя различными частотами.
3. Проведён анализ результатов моделирования атTRACTора внутренних волн при бигармоническом воздействии, полученных с помощью метода спектральных элементов. Для различных комбинаций возмущаю-

щих частот построен спектр, частотно-временная диаграмма и зависимость средней кинетической энергии от времени.

4. Реализован квазигидродинамический подход на базе метода конечного элемента. Проведено сопоставление результатов моделирования методов конечных объемов и методом спектральных элементов.

Научная и практическая значимость

Среди возможных приложений результатов работы — задачи моделирования аттракторов внутренних волн на сложных геометриях, задачи моделирования течений со сложным спектром частотных воздействий на стратифицированную жидкость. Работа является первым шагом к моделированию течений, возникающих в условиях, приближенных к реальным океаническим, что позволит выяснить форму и вид природных аттракторов. Комбинация методов конечного объёма и квазигидродинамических уравнений позволила добиться существенного улучшения в точности моделирования и дала инструмент к усложнению геометрии расчётной области. Разработанная программа может быть применена не только к задачам моделирования аттрактора, но и к другим задачам гидродинамики с дозвуковыми и трансзвуковыми скоростями.

Ранее эксперименты по исследованию бигармонических аттракторов, как численные так и натурные, не проводились. Теоретически бигармонический аттрактор представляет собой новую устойчивую структуру, которая образуется в стратифицированной жидкости. Практически же это вкупе с разработанным программным обеспечением предоставляет инструмент для моделирования аттракторов внутренних волн в геометриях, приближенных к природным.

Разработанный программный инструмент и проведённые расчёты представляют теоретический и практический интерес.

На защиту выносятся следующие положения:

- Найдены аналитические выражения для границ диапазонов частот колебаний волнопродуктора, которые способны порождать атTRACTоры формы (1,1).
- Показано, что при значительном отличии частот внешних воздействий и малых амплитудах воздействий волновой режим представляет из себя совокупность независимо существующих волновых атTRACTоров.
- Показано, что при близких частотах внешних воздействий и малых амплитудах возникает режим с биениями, характерной особенностью которых является малая амплитуда пульсаций на убывающем склоне огибающей.
- Показано, что при близких частотах внешних воздействий и средних амплитудах возникают биения, на одном цикле которых успевает происходить переход к турбулентности через триадные резонансы, и реLаминаризация.
- Обнаружено наличие фазового сдвига между биениями на волнопродукторе и биениями средней кинетической энергии во всем объеме.
- Разработана и верифицирована новая программа для моделирования атTRACTоров внутренних волн и в целом динамики стратифицированных сред.

Аппробация

Список конференций, на которых апробирована работа:

- 2019 Регуляризованные уравнения для моделирования бигармонических атTRACTоров внутренних волн. (Стендовый) Авторы: Даниил Рязанов, Ильяс Сибгатуллин Открытая конференция ИСП РАН им. В.П.Иванникова, Главное здание Российской академии наук, Москва, Россия, 5-6 декабря 2019.
- 2019 Моделирование бигармонических атTRACTоров внутренних гравитационных волн в трапециевидном резервуаре. (Устный) Автор: Рязанов Даниил. IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'19), г. Москва, Россия, 19-21 июня 2019

— 2018 New OpenFOAM solvers for transonic and incompressible flow simulations. (Устный) Автор: Ryazanov D.A. 13th OpenFOAM Workshop, Address: 800 Dongchuan Road, Minhang District, Shanghai, China, Китай, 24-29 июня 2018.

— 2018 БИГАРМОНИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ ВНУТРЕННИХ ВОЛН (Стендовый) Авторы: Рязанов Д.А., Ерманюк Е.В., Сибгатуллин И.Н. XXIII международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность», Московская область, г. Звенигород, Россия, 25 февраля - 4 марта 2018

— 2017 Бигармонические аттракторы внутренних волн (Стендовый) Авторы: Сибгатуллин И.Н., Ерманюк Е.В., Рязанов Д.А. Открытая конференция ИСП РАН им. В.П. Иванникова 2017, Москва, Россия, 30 ноября - 1 декабря 2017

Результаты работы были опубликованы в сборниках тезисов конференций и периодических изданиях, входящих в РИНЦ, scopus и web of science:

— Numerical simulation of three-dimensional wave attractors / I. N. Sibgatullin, E. V. Ermanyuk, K. A. Vatutin, D. A. Ryazanov, Xiulin Xu, // The XXVII workshop of the Council of nonlinear dynamics of the Russian Academy of Sciences. — 2019. — Vol. 47, no. 1. — P. 112–115.

— Numerical simulation of internal wave attractors in horizontally elongated domains with sloping boundaries / I. Sibgatullin, X. Xiulin, E. Ermanuyk et al. // GISTAM 2019 5th International Conference on Geographical Information Systems Theory, Applications and Management. — SCITEPRESS Heraklion, Crete, Greece, 2019. — P. 366–370.

— Openfoam solver based on regularized hydrodynamic equations for high performance computing / M. V. Shatskiy, D. A. Ryazanov, K. A. Vatutin et al. // 2019 Ivannikov Memorial Workshop (IVMEM) / Ed. by C. П. Прокхоров. — IEEE, 2019.

— Numerical simulation of compressible gas flows using regularized gas dynamic equations solver qgdfoam / M. V. Kravoshin, T. G. Elizarova, M.

A. Istomina et al. // AIP Conference Proceedings 1959, 030013 (2018). — Author(s), 2018.

— Openfoam high performance computing solver for simulation of internal wave attractors in stratified flows using regularized hydrodynamic equations / M. Kraposhin, D. Ryazanov, T. Elizarova et al. // Proceedings of the 2018 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS, 22-23 Nov. 2018).

— IEEE Xplore Digital Library. — United States: United States, 2018.

— Development of openfoam solver for compressible viscous flows simulation using quasi-gas dynamic equations / M. V. Kraposhin, D. A. Ryazanov, E. V. Smirnova et al. // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS). — Vol. 1. — United States: United States, 2017.

1 Общая теория внутренних гравитационных волн

Явление внутренних волн представляется собой нарушение состояния равновесия на границе раздела водяных слоев различной плотности. Выеденные из равновесия частицы жидкости начинают совершать колебания под действием силы тяжести и силы Архимеда.

Считается установленным, что впервые внутренние волны наблюдал американский ученый Франклин в восемнадцатом веке с помощью простой экспериментальной установки. Она представляла собой емкость, заполненную несмешивающимися жидкостями различной полости[3]. Однако в конце восемнадцатого века вблизи полуострова Таймыр произошло событие, которое заострило внимание научного сообщества на этом интересном явлении. В то время в этом районе пролегал маршрут исследовательского судна «Фрам»(Рис. 1.3) под руководством Фритьофа Нансена (Рис. 1.4).

Однажды во время штиля судно остановилось. Скорость его движения резко снизилась. «чтобы пройти то небольшое расстояние, которое мы и на веслах прошли бы в полчаса или того меньше, «Фраму» понадобилась целая вахта», – как писал сам Нансен. При этом исследователь отмечал, что вода на поверхности была пресной, потому как натекла с оттаявших ледников. А на глубине сравнимой с осадкой судна, резко становилась соленой. Позднее его записи послужили стимулом для теоретических исследований этого явления. В итоге было установлено, что почти вся энергия судового двигателя сдвигает не судно, а образует волны на поверхности раздела между слоями пресной и соленой воды. Это явление получило название «мертвая вода».

Также существует еще одно свидетельство этого явления. Теплоход «Маршал Жуков» при проходе пролива Дарданеллы угодил в «мертвую воду» летом 1981 года. Уже в сентябре в отраслевой газете «черноморец» капитан-наставник Александр Косилов подробно описал как в течение четырех суток судно, держащее курс из Канады в Новороссийск, боролось с феноменом. Согласно комментариям руководителя аналитико-

исследовательской группы управления инвестиций и проектов ОАО «Новомиц», кандидата технических наук, профессора кафедры судовождения ГМУ им. адмирала Ф.Ф. Ушакова Юрия Пескова современные суда в значительной степени подвержены влиянию подобных явлений[4]. На то есть причины:

- Экономия топлива вынуждает снижать скоростные режимы
- Борьба за уменьшение углекислых выбросов предписывает снижать мощность двигателя



Рисунок 1.1 — Теплоход «Маршал Жуков»

И подобные явления, как оказалось, описывались и задолго до франклина. В своей «естественной истории» Плиний Старший говорит о похожем явлении [5]. Позднее «мертвая вода» была воспроизведена в лабораторных условиях исследователями из франции [6]. Запись эксперимента доступна на видеохостинге youtube [7].

Математически описать возникновение внутренних волн можно записав уравнение для сил, которые действуют на выведенную из равновесия частицу жидкости(Рис. 1.2):

$$m_b \vec{a}_b = \vec{P} + \vec{G} \quad (1.1)$$

где $\vec{P} = \rho_w \vec{g} S \cdot h$ это сила Архимеда, ρ_w плотность жидкости того слоя на котором находится частица, \vec{g} – ускорение свободного падения, S –

площадь стороны частицы, h – глубина. $\vec{G} = \rho_b \vec{g} S \cdot h$, ρ_b – плотность частицы жидкости.

В проекции на вертикальную ось:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{(\rho_w - \rho_b)}{\rho_b} \cdot g \quad (1.2)$$

Тут ξ будет обозначать отклонение от положения равновесия z_0 , тогда очевидно что плотность воды вокруг частицы и плотность частицы будет равна в положении равновесия при $\xi = 0$ $\rho_w(z_0) = \rho_b$ тогда уравнение можно переписать:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\rho_w(z_0 + \xi) - \rho_b}{\rho_b} \cdot g \quad (1.3)$$

Введем переобозначение, $z = z_0 + \xi$ тогда правая часть уравнения запишется

$$\frac{\rho_w(z_0 + \xi) - \rho_b}{\rho_b} \cdot g = \frac{\rho_w(z) - \rho_w(z_0)}{\rho_w(z_0)} \cdot g = \frac{1}{\rho(z_0)} \frac{\rho_w(z) - \rho_w(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)g$$

При достаточно малом t отклонении от положения равновесия z будет также мало, что дает нам возможность перейти к производной по z , а ρ_w переобозначим как ρ и окончательно запишем:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \xi \cdot g \quad (1.4)$$

Решение этого дифференциального уравнения ищется в виде периодической функции, это значит, что частица совершает колебания около своего положения равновесия:

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.5)$$

подставим выражения $\xi(t)$ в уравнение:

$$\ddot{\xi} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (1.6)$$

или если выразить правую часть через ξ

$$\ddot{\xi} = -\omega^2 \xi \quad (1.7)$$

Подставим (1.7) в (1.3):

$$-\omega^2 \xi = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho}{dz} \xi g \quad (1.8)$$

Выразим частоту колебаний частицы:

$$\omega(z) = N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho(z)}{dz}} \quad (1.9)$$

Эта частота называется частота плавучести или Частота Брента – Вийсяля. В океане она составляет величину порядка $10^{-3} \frac{1}{c}$ [8].

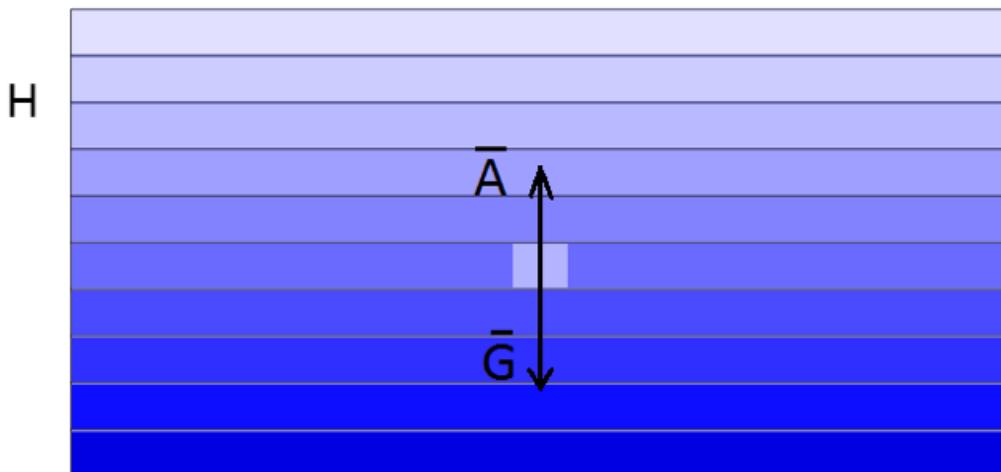


Рисунок 1.2 — Схематичное представление сил действующие на частицу выведенную из равновесия в стратифицированной жидкости, цветом показана плотность.

1.1 Обзор литературы

Внутренние волны очень распространенное явление в океане. Существуют они благодаря перепадам плотности на разной глубине, сила плавучести играет роль восстанавливающей силы. Океаны являются одним из естественных примеров стратифицированных сред. Основные источники внутренних волн в океане это приливные эффекты, которые со-

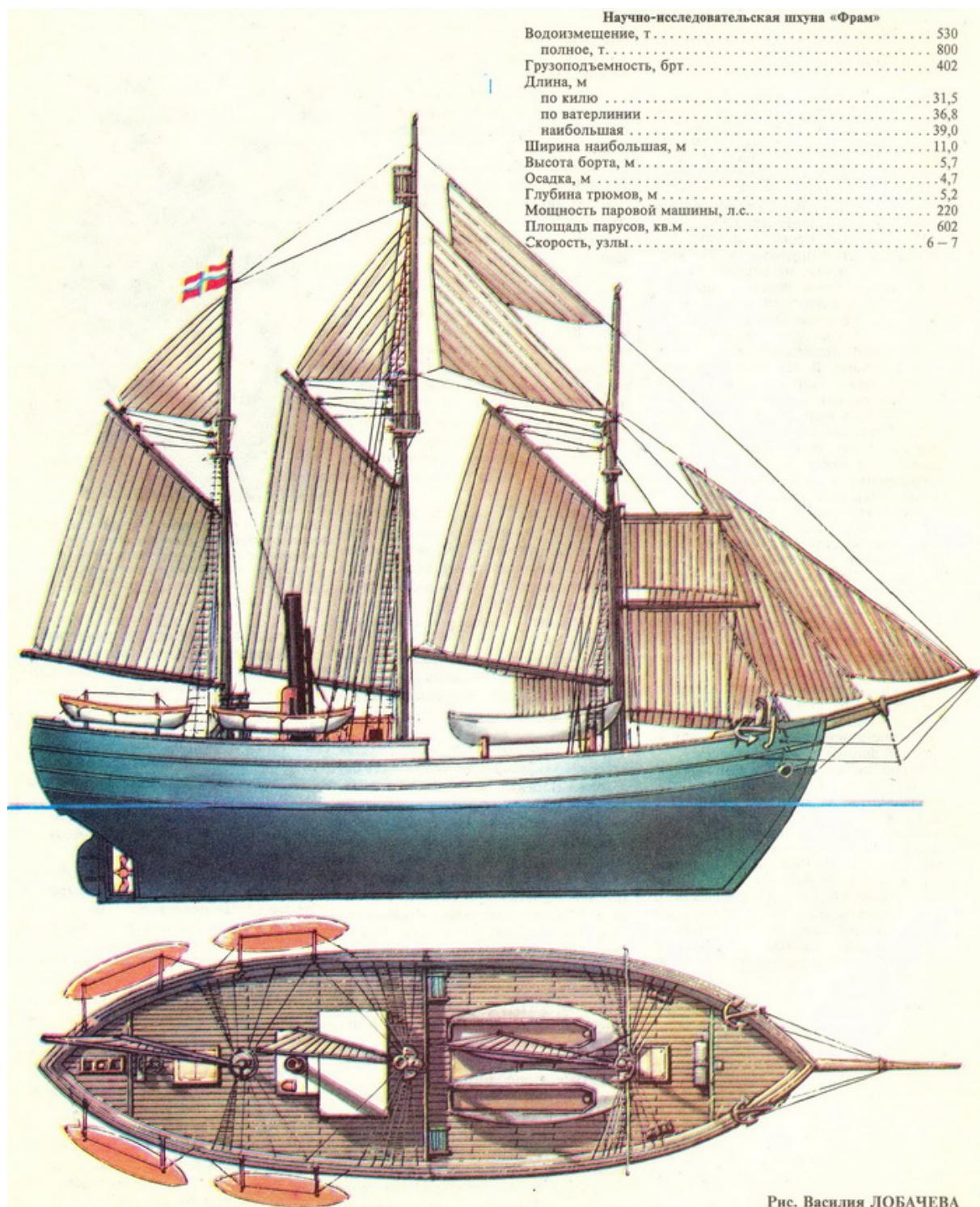


Рисунок 1.3 — Исследовательское судно «Фрам»

пряжены с движением Земли относительно Солнца и Луны относительно Земли.

Внутренние волны активно взаимодействуют с другими океаническими структурами [9] и с неровностями океанического дна [10]. Процессы перемещения внутренних волн их взаимодействия друг с другом и океаническими структурами различных масштабов образуют собой явление называемое энергетическим каскадом[1]. Энергетический каскад способствует поддержанию глобальной океанической циркуляции и перемешиванию[11, 12]. Тем не менее, механизмы вносящие крупномасштабный приливный вклад в движение внутренних волн недостаточно понятны [13, 14] и каскадный процесс остается одной из фундаментальных проблем современной океанографии. Главным образом остаются вопросы связи крупномасштабных и мелкомасштабных явлений.

Одним из объяснений этой связи могут послужить аттракторы внутренних гравитационных волн. Это явление, при котором внутренние волны многократно отражаясь от поверхности океана, его дна и неровностей движутся по замкнутым орбитам. Возникновение такого явления возможно лишь в том случае, когда на дне океана имеются определенные комбинации геометрических неровностей. Аттракторы передают кинетическую энергию крупномасштабных эффектов, такие как приливы и внутренние волны большой длины к мелкомасштабным явлениям волновой турбулентности и перемешиванию. Происходит это благодаря явлению фокусировки, в результате которого длина внутренних волн уменьшается, но увеличивается амплитуда.

Возможность возникновения аттракторов в океане с реальной геометрией дна уже исследовалась[15]. Например, топология северной части хребта Лусона имеет соответствующую геометрию. Эксперименты [2] подтверждают возможность образования аттракторов внутренних волн. Кроме того при моделировании внутренних волн в условиях случайного разреза геометрии океанического дна, был сделан вывод, что с немалой вероятностью возможны возникновения аттракторов по одному на каждую сотню километров океанического дна [16]. Тем не менее стоит отметить, что на данный момент нет свидетельств наблюдаемых волновых

аттракторов. Возможно это связано с тем, что теоретические работы[16] относятся к двумерному океану, но также существуют трехмерные конфигурации геометрий в которых возможны существования трехмерных волновых аттракторов[17, 18]. Кроме того, в теоретическом представлении аттракторов внутренних волн не учитывается шероховатость поверхностей отражения. Однако надежность теоретических соображений о возможности существования трехмерных аттракторов была экспериментально проверена[19]. Кроме того волновые явления в океане часто имеют целый спектр частот[1], в то время как многочисленные эксперименты проводятся лишь с монохроматическим источником внутренних волн.

Предполагается, что аттракторы могут влиять не только на перемешивание, но и на движение мелких животных, явление седimentации и эрозию прибрежных конструкций.

Работы по фокусировке внутренних волн и образованию устойчивых аттракторов ведутся с конца двадцатого века. Первое теоретическое предсказание аттракторов было сделано Лео Маасом в 1995 году[20]. Через два года последовали экспериментальные исследования этого явления, теоретические результаты были воспроизведены[21]. Эффекты фокусировки характерны не только для стратифицированной жидкости, но и для вращающихся [22, 23]. В дальнейшем теоретические основы явления были пересмотрены на основании данных эксперимента[24].

Вместе с развитием вычислительной техники развивались и инструменты численного моделирования физических явлений. Во втором десятилетии двадцать первого века стало возможным численное моделирование трехмерных аттракторов внутренних волн. Первая удачная попытка была предпринята с использованием метода спектральных элементов[25, 26]. При сравнении с экспериментом ошибка численного моделирования составила не больше 10%. Также была предпринята попытка моделирования аттрактора внутренних волн с помощью метода конечного объема[27]. Количественно воспроизвести результаты, полученные с помощью метода спектральных элементов не удалось. Традиционно для моделирования аттракторов применяются уравнения Навье-Стокса в

приближении Буссинеска. Однако существует ряд работ, где вместо классического подхода используется квазигидродинамический[28]. Квазигидродинамические уравнения позволяют добиться большей точности[29] при моделировании методом конечного объема.

1.2 Математические модели для изучения внутренних гравитационных и инерционных волн

Для описания движения несжимаемой жидкости используется уравнение Навье-Стокса. Но при небольшом перепаде плотности допустимо использовать уравнение Навье-Стокса в приближении Буссинеска, которое учитывает сжимаемость в члене с плавучестью.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla \hat{p} + \nu \Delta \vec{U} + \vec{f}, \quad (1.10)$$

Уравнение переноса соли s :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho_s = \nabla \cdot \frac{\nu}{Sc} (\nabla \rho_s), \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0. \quad (1.12)$$

Здесь \vec{U} – вектор скорости с компонентами u_x, u_y ; ν – кинематическая вязкость жидкости; ρ_m – значение плотности на верхней границе; ρ_s – добавка к плотности обусловленная наличием солености; приведенное давление $\hat{p} = p - p_0$, разница между полным и гидростатическим давлением; $\vec{f} = \frac{\rho_s}{\rho_m} \vec{g}$ – восстанавливающая сила; Число Шмидта представляет собой отношение кинематической вязкости и коэффициента диффузии: $Sc = \frac{\nu}{D}$.

В данной работе помимо классических уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска используются квазигидродинамические уравнения, работа над которыми ведется в институте прикладной математики имени Келдыша с восьмидесятых годов двадцатого века [30]. Различие между уравнениями Навье-Стокса несжимаемой жидкости и квазигидродинамическими уравнениями заключается в дополнительных

диссипативных слагаемых. Эти слагаемые были первоначально введены для разреженного газа как способ сохранить инвариантность при пространственно-временном усреднении[31]. Физическая интерпретируемость в случае несжимаемой жидкости после обобщения теряется, но математически уравнения все еще верны [32]. Как будет показано ниже диссипативные слагаемые могут быть весьма полезны при численном моделировании.

Система приведенная ниже называется квазигидродинамической системой и впервые была получена Шеретовым [33]. Система является регуляризованным аналогом приближения Буссинеска, где $\rho = \text{const}$.

Уравнение неразрывности дополняется добавочной скоростью \vec{W} :

$$\nabla \cdot (\vec{U} - \vec{W}) = 0, \quad (1.13)$$

уравнение импульса для квазигидродинамических уравнений:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot ((\vec{U} - \vec{W}) \otimes \vec{U}) - \nabla \cdot \nu (\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^T) - \nabla \cdot (\vec{U} \otimes \vec{W}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \vec{F}, \quad (1.14)$$

где ν - кинематическая вязкость; ρ - плотность на верхней границе; \vec{F} - объемная сила; \tilde{p} давление без учета статического.

Дополнительную скорость можно записать как правую часть уравнения движения Эйлера:

$$\vec{W} = \tau \left(\vec{U} \cdot \nabla \vec{U} + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} - \vec{F} \right), \quad (1.15)$$

Массовая сила $\vec{F} = \beta g \tilde{s}$ может определять поведение стратифицированной жидкости. τ - параметр регуляризации. β - коэффициент соленоидного сжатия $\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s}$. В этом случае системе требуется дополнительное уравнение для отклонения начальной соленности $\tilde{s} = s(x, y, z, t) - s(x, y, z, 0)$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot ((\vec{U} - \vec{W}) s) - \nabla \cdot \frac{\nu}{Sc} (\nabla s) - \nabla \cdot (\tau \vec{U} \cdot (\vec{U} \cdot \nabla s)) = 0, \quad (1.16)$$

Уравнение для давления может быть получено напрямую путем подстановки выражения для дополнительной скорости в уравнение неразрывности 1.13:

$$\nabla \cdot \frac{\tau}{\rho} \nabla \tilde{p} = \nabla \cdot (\vec{U} - \tau(\vec{U} \cdot \nabla \vec{U}) + \tau \vec{F}). \quad (1.17)$$

Эти уравнение описывают движение соленой несжимаемой вязкой жидкости. Они могут быть сведены к классической системе уравнение если положить $\tau = 0$.

Для замыкания системы уравнений требуется задать граничные условия. Вход потока устанавливается как значение скорости, которое может зависеть от координат и времени по известному закону. Также необходимо определить градиент давления и солености:

$$\vec{U} = \vec{U}_b, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \vec{n}} = \rho_0 \vec{n} \cdot (-\vec{U}_b \cdot \nabla \vec{U} + \vec{F}), \quad s = s_b, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \tilde{p} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (1.19)$$

$$\vec{U} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \vec{n}} = \rho_0 \vec{n} \cdot (-\vec{U}_b \cdot \nabla \vec{U} + \vec{F}), \quad \lambda \frac{\partial s}{\partial \vec{n}} + \gamma s = \psi, \quad (1.20)$$

Где \vec{U}_b – известное значение скорости на входе в поток, s_b – известное значение солености на входе, λ , γ and ψ – специальные постоянные для переключения граничных условий между условием Неймана и Дерихле скалярной величины s , Граничные условия Неймана для давления определяются из следующего условия для регуляризованного потока: $\vec{n} \cdot \vec{W} = 0$.

Таким образом описано два подхода к моделированию стратифицированной жидкости. Первый, классический представляет собой систему уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. Второй, регуляризованный представляет собой систему квазигидродинамических уравнений.

1.3 Линеаризованная теория внутренних гравитационных волн

Ранее рассмотрена полная система уравнений, описывающая движение стратифицированной жидкости. Чтобы упростить задачу, можно предположить, что поток является двумерным и содержится в плоскости xOz без изменений в направлении y . В этих рамках, используя уравнение неразрывности (1.12), можно ввести функцию тока, определяемую как

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_z \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -u_x \quad (1.21)$$

тогда можно переписать уравнения (1.10), (1.11) и (1.12) как

$$\partial_{tz}\psi + J(\partial_z\psi, \psi) = -\frac{1}{\rho}\partial_x P + \nu\partial_z\Delta\psi, \quad (1.22)$$

$$\partial_{tx}\psi + J(\partial_x\psi, \psi) = \frac{\rho_s}{\rho_m}\vec{g} + \frac{1}{\rho}\partial_z P + \nu\partial_x\Delta\psi, \quad (1.23)$$

$$\partial_t\rho_s + J(\rho_s, \psi) = \nabla \cdot \frac{\nu}{S_c}(\nabla\rho_s) + \frac{d\rho}{dz}\partial_x\psi, \quad (1.24)$$

где J это якобиан определенный как $J(f,g) = \partial_x f \partial_z g - \partial_z f \partial_x g$. Обозначим как $\partial_j\psi = \frac{\partial\psi}{\partial j}$, где j обозначает x, y или t .

В дальнейшем предполагается, что возмущения плотности $\rho_s(x; z; t)$ малы по сравнению с фоновой стратификацией $\rho(z)$. Это предположение полностью верно как в океане, так и экспериментах, рассматриваемых тут. Таким образом, возмущения плотности ограничиваются менее чем 10% средней стратификации.

Дифференцируя уравнение (1.22) по z , а (1.23) по x и складывая их получаем

$$\partial_t(\Delta\psi) + J(\Delta\psi, \psi) - \nu\Delta(\Delta\psi) = \frac{g}{\rho_m}\partial_x\rho_s, \quad (1.25)$$

$$\partial_t\rho_s + J(\rho_s, \psi) - \nabla \cdot \frac{\nu}{S_c}(\nabla\rho_s) = -N^2\frac{\rho_m}{g}\partial_x\psi. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.25) и (1.26) описывают нелинейную динамику вязкой стратифицированной жидкости с диффузией. Уравнения для линейной динамики получаются путем пренебрежения нелинейными членами. Это приводит к

$$\partial_t(\Delta\psi) + \nu\Delta(\Delta\psi) = \frac{g}{\rho_m}\partial_x\rho_s, \quad (1.27)$$

$$\partial_t\rho_s - \nabla \cdot \frac{\nu}{Sc}(\nabla\rho_s) = -N^2\frac{\rho_m}{g}\partial_x\psi. \quad (1.28)$$

Рассмотрим решение в виде плоской волны к линеаризованной системе: $\psi = \psi_0 \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$ и $\rho_s = \rho_m \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$. Волновой вектор $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_z \vec{e}_z$ и его модуль k .

Линейная система может быть записана в матричном виде

$$\begin{pmatrix} -k^2(i\omega + \nu k^2) & i\frac{g}{\rho_m}k_x \\ iN^2\frac{\rho_m}{g}kx & i\omega + \frac{\nu}{Sc}k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \rho_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Можно найти нетривиальное решение этой системы

$$k^2(i\omega + \nu k^2) \left(i\omega \frac{\nu}{Sc} k^2 \right) + N^2 k_x^2 = 0. \quad (1.30)$$

Если рассмотреть систему без диссипативных членов, убрать диффузию и теплопроводность то уравнение примет вид:

$$\left(\frac{\omega}{N} \right)^2 = \frac{k_x^2}{k^2} \quad \frac{\omega}{N} = \pm \frac{|k_x|}{k}. \quad (1.31)$$

Это дисперсионное соотношение линейных внутренних волн в невязкой и недиффузионной жидкости. Его можно записать, используя угол θ между вертикальной осью z и волновым вектором \vec{k}

$$\frac{\omega}{N} = \pm \sin\theta. \quad (1.32)$$

Это чисто геометрическое соотношение, которое показывает как распространяются волны в стратифицированной жидкости (Рис. 1.5). Угол распространения определяется только частотой плавучести и ча-

стотой вынужденных колебаний. Наконец, стоит отметить, что в дисперсионном соотношении отсутствует характерный масштаб длины. Таким образом, длина внутренних волн определяется граничными условиями, только источником волн.

1.4 Исследование свойств волновых течений с помощью трассировки лучей

Дисперсионное соотношение дает мощный инструмент позволяющий качественно предсказать траекторию движения пучков внутренних волн, не только по удалению от источника но и при отражении от припятской(Рис. 1.6). Поле отражения внутренняя волна сохраняет угол с вертикалью. Кроме того внутренние волны обладают свойством фокусировки что выражается в сокращении расстояния между двумя параллельнопущенными лучами поле отражения от наклонной стенки.

Трассировка лучей позволяет последовательно проследовать по траектории движения линейных внутренних волн без дисперсии и диффузии. В 1995 году Лео Маас обнаружил, что в трапециевидном резервуаре после множественных отражений внутренние волны зацикливаются около траектории которая имеет форму параллелограмма[20]. Рис. 1.7 показывает результат трассировки лучей в трапециевидном резервуаре.

Говоря о трассировке лучей нельзя не упомянуть о диаграмме Мааса[21]. В задачах моделирования атTRACTора имеется множество параметров:

- Угол наклона стенки
- Частота плавучести
- Частота колебаний волнопродуктора
- Длина резервуара
- Высота резервуара

Задачу трассировки лучей можно упростить, введя параметры. В своей работе он предлагает параметризовать резервуар фокусировки внутренних волн следующим образом(Рис. 1.8):



Рисунок 1.4 — Фритьоф Ведель-Ярлсберг Нансен (1861-1930)

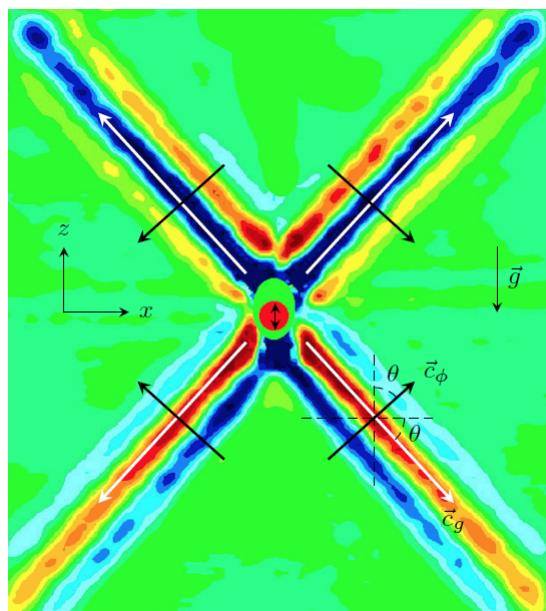


Рисунок 1.5 — Внутренние волны, излучаемые вертикально колеблющимся цилиндром, распространяются в линейно стратифицированной жидкости и показаны красным в центре рисунка. Векторы групповой скорости показаны белым цветом, а векторы фазовой скорости - черным. Цветами обозначены поля горизонтального градиента плотности, полученные экспериментально Евгением Ерманюком с использованием методики SyS. Рисунок из [34]

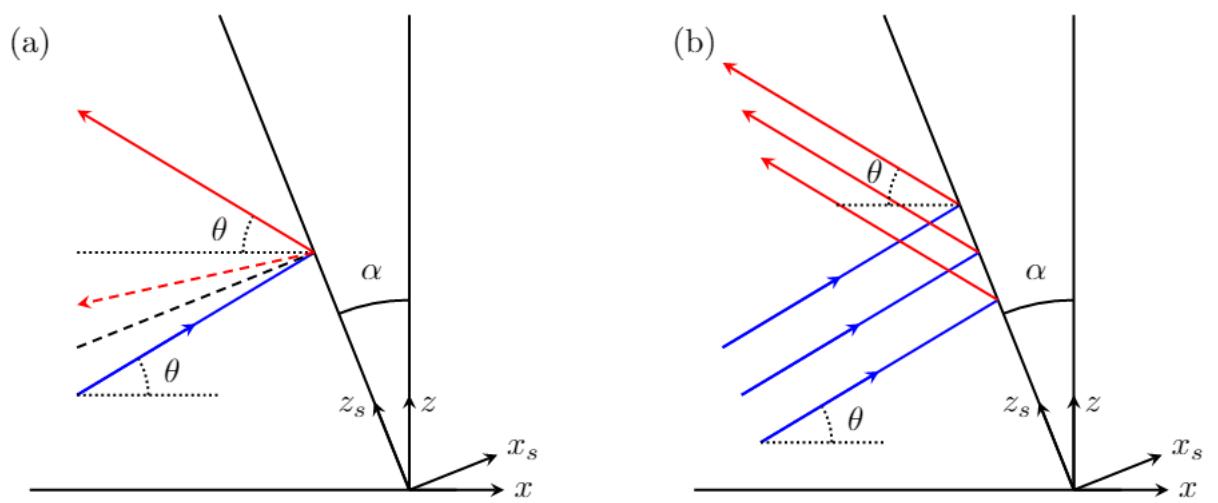


Рисунок 1.6 — Отражение пучка внутренних волн от наклонной стенки.
 а) Отражение одного пучка, падающий волновой луч изображен синим цветом, отраженный от наклонной стенки красным, точками обозначена биссектрисса. Черным пунктиром обозначен перпендикуляр к наклонной поверхности, красным пунктиром луч отраженный «зеркально» по правилу Евклида. б) Отражение нескольких волновых лучей от наклонной поверхности, отраженные лучи стали ближе, чем были падающие.

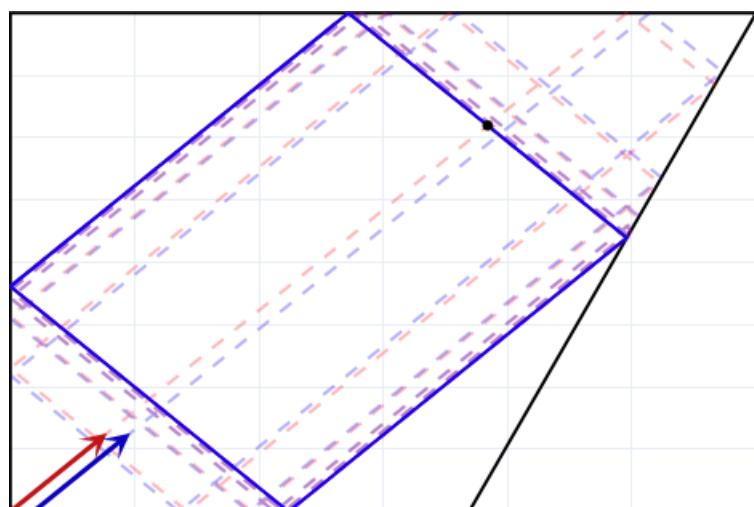


Рисунок 1.7 — Результат многократного отражения двух параллельных лучей внутренних волн

Применяется преобразование горизонтальной координаты, которое перемещает систему координат таким образом чтобы левый конец резервуара соответствовал координате -1 а правый 1 . Вводится параметр d который обозначает расстояние от нуля новой горизонтальной оси до точки соприкосновения наклонной стенки с горизонтальной осью.

$$x' = \frac{x \cdot 2}{L_1} - 1 \quad (1.33)$$

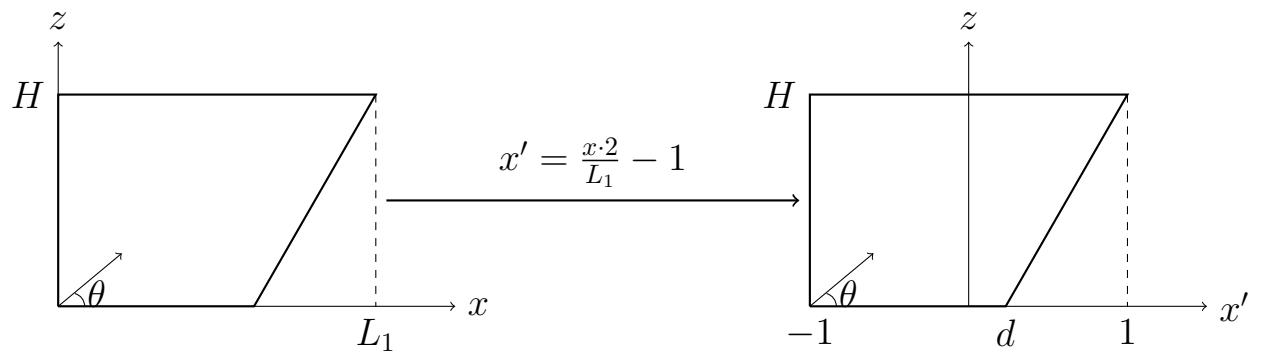
Затем преобразование вертикальной координаты, которое сжимает или растягивает высоту резервуара так чтобы угол отражения и распространения внутренних волн стал 45° . При этом вводится параметр τ , который обозначает новую высоту резервуара.

$$z' = \frac{z \cdot 2}{L_1} \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1} \quad (1.34)$$

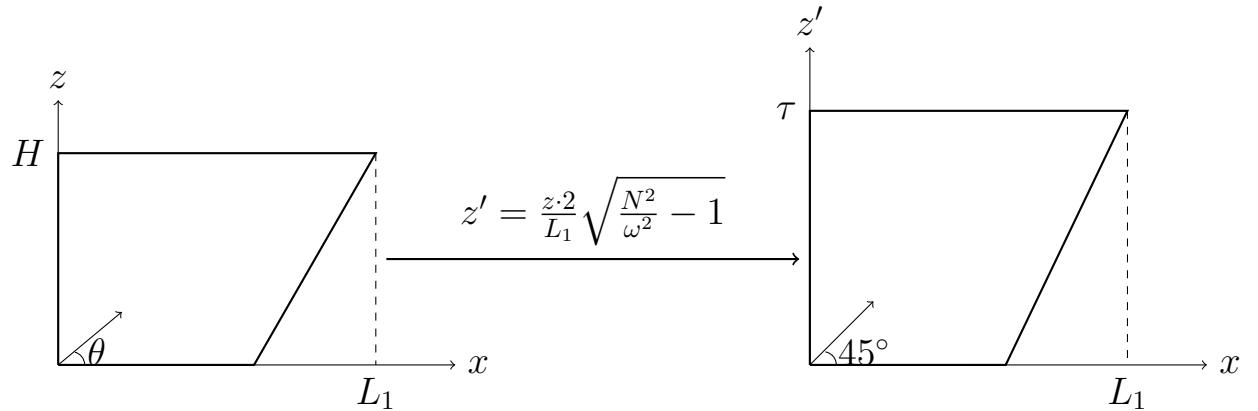
Таким образом вместо пяти определяющих параметров для геометрической задачи, остаются всего два, d и τ .

Благодаря методу трассировки лучей можно геометрически предсказать форму аттрактора внутренних волн.

На рисунке

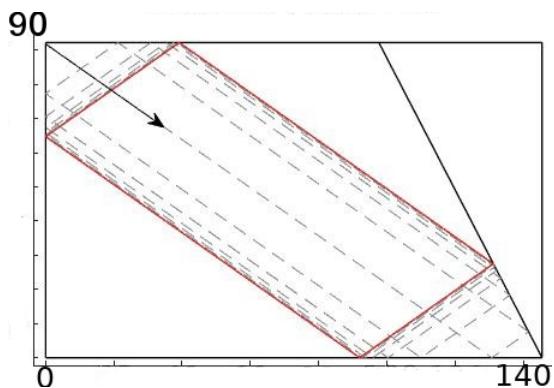


(а) Горизонтальное преобразование расчетной области

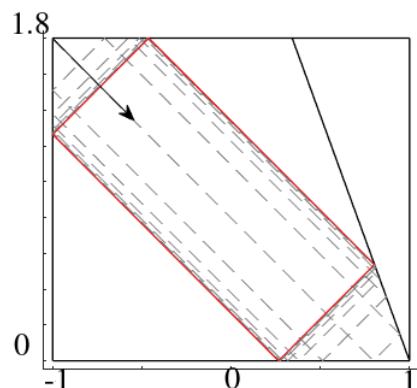


(б) Вертикальное преобразование расчетной области

Рисунок 1.8 — Преобразования расчетной области для процедуры получения диаграммы Мааса



(а) Трассировка лучей,
 $H = 92.3$, $L = 145.5$, $\theta = 35.13^\circ$,
 $\alpha = 27.4^\circ$



(б) Трассировка лучей в
преобразованной геометрии,
 $\tau = 1.8$, $d = 0.34$

Рисунок 1.9 — Результат работы процедуры трассировки лучей и результат перехода к универсальным координатам (d, τ)

2 Численное моделирование атTRACTоров внутренних гравитационных волн

В данной главе рассматриваются три принципиально различных подхода к моделированию атTRACTоров внутренних волн.

Первый, метод спектральных элементов[35]. Результаты полученные при помощи метода спектральных элементов были достаточно близки к результатам натурных экспериментов[25, 26]. Недостатком метода является отсутствие реализаций с открытым исходным кодом позволяющие встроить дополнительные физические модели и проводить расчеты на сложной геометрии приближенной к реальной топологии океанического дна.

Второй метод, метод конечных объемов на основе классических уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, качественно воспроизводит явление атTRACTоров, но количественно имеет большую погрешность. Однако его многочисленные реализации, в том числе и с открытым исходным кодом, предоставляют возможность для построения сложных сеток и геометрий. Также эти инструменты снабжены возможностями добавлять собственные реализации физических моделей, граничных условий и утилит.

Третий способ также основан на методе конечного объема и сохраняет его преимущества, но он представляет собой реализацию квазигидродинамических уравнений[28]. Такой подход, еще называемый регуляризованным, обеспечивает точность выше, чем у реализации классической системы уравнений Навье-Стокса.

В работе рассматриваются различные конфигурации расчетной области (Рис. 2.1,2.2).

Принципиальной разницы в этих двух вариантах нет в первом случае волнопродуктор располагается на левой стенке, а во втором сверху.

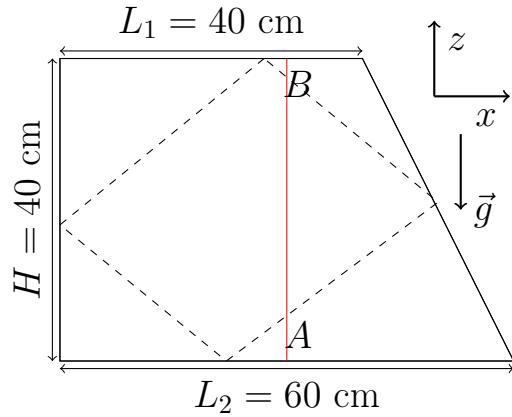


Рисунок 2.1 — Вычислительная область для аттракторов внутренних волн, красным показана линия пробы, пунктиром показана предполагаемая форма аттрактора

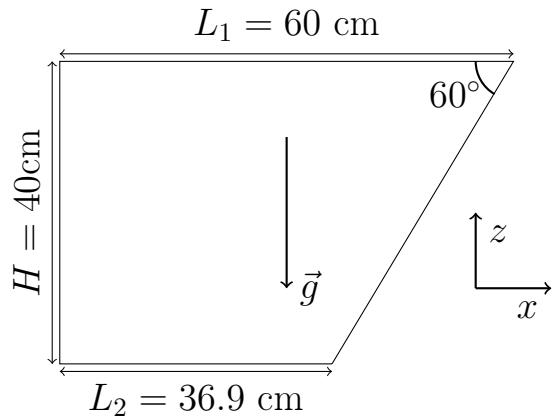


Рисунок 2.2 — Конфигурация вычислительной области для аттрактора внутренних гравитационных волн

2.1 Численное моделирование аттракторов внутренних волн с помощью метода спектральных элементов

Используемая реализация – пакет с открытым исходным кодом nek5000[36].

В методе спектральных элементов решение и данные представлены в виде полиномов тензорного произведения N -го порядка внутри каждого из E деформируемых шестигранных (кирпичных) элементов. Типичные дискретизации включают $E = 100 - 10000$ элементов порядка $N = 8 - 16$ (что соответствует $512 - 4096$ точкам на элемент). Векторизация и эффективность кэширования проистекают из локального лексикографического упорядочения в каждом макроэлементе и из того

факта, что действие дискретных операторов, которые номинально имеют $O(E \cdot N \cdot 6)$ ненулевых значений, может быть оценено только за $O(E \cdot N \cdot 4)$ и $O(E \cdot N \cdot 3)$. хранение за счет использования факторизации тензор-произведение-сумма. Метод спектральных элементов демонстрирует очень небольшую числовую дисперсию и диссипацию, что может быть важно, например, при расчетах устойчивости, для длительного интегрирования и для потоков с большим числом Рейнольдса.

Nek5000 решает нестационарные несжимаемые двумерные, осесимметричные или трехмерные уравнения Стокса или Навье-Стокса с вынужденной или естественной конвекцией теплопередачи как в стационарной (фиксированной), так и в движущейся геометрии. Он также решает уравнение Навье-Стокса для сжимаемой жидкости при низких числах Маха.

На данный момент это самый точный способ численно воспроизвести экспериментальные данные[25, 26]. Недостаток реализации заключается в том, что геометрия задается путем аффинных преобразований. Подобрать преобразование, которое отображало бы прямоугольник в сложную геометрию океанического дна представляется трудоемкой задачей.

Для моделирования методом спектральных элементов используется конфигурация расчетной области представленная на рисунке 2.2. На протяжении всего эксперимента на верхней стенке задается граничное условие для скорости:

$$U_z = A \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{L_1}\right) \cdot \omega \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (2.1)$$

Где ω_0 – частота волнопродуктора.

На остальных стенках для скорости:

$$\vec{U} = 0 \quad (2.2)$$

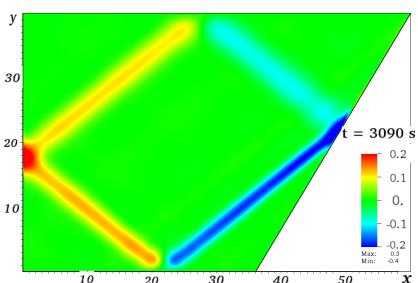
Граничные условия для давления на стенках:

$$\nabla p = 0 \quad (2.3)$$

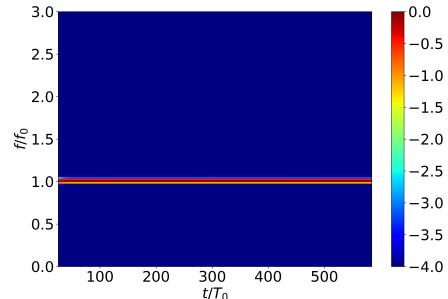
Условие для градиента солености на стенках:

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \text{grad}(s_0) \quad (2.4)$$

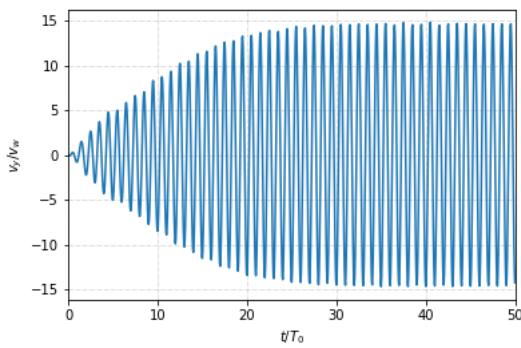
s_0 – начальное распределение соленоиды в резервуаре.



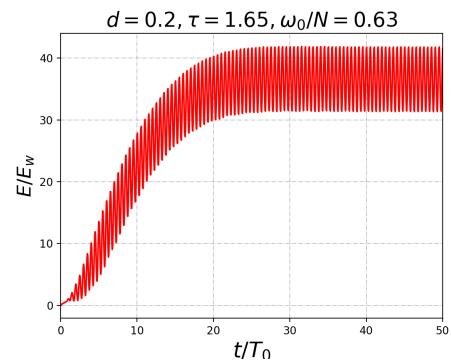
(а) Горизонтальная компонента скорости



(б) Частотно-временная диаграмма на аттракторе



(с) Амплитуда скорости в зависимости от времени на аттракторе



(д) Средняя кинетическая энергия в резервуаре

Рисунок 2.3 – Результат моделирования аттрактора внутренних волн методом спектральных элементов

В заключении можно сказать, что алгоритм высокого порядка точности хорошо воспроизводит результаты натурного эксперимента. В дальнейшем они будут использоваться как эталон для сравнения с остальными методами решения.

2.2 Численное моделирование аттракторов внутренних волн с помощью метода контрольного объема

Для моделирование методом конечного объема используется конфигурация представленная на рисунке 2.1 в этом случае волнопродуктор установлен на левой стенке и колеблется по следующему правилу:

$$U_x = A \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{H}\right) \cdot \omega \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (2.5)$$

Аналогично условия на остальных стенках:

$$\vec{U} = 0 \quad (2.6)$$

Для давления:

$$\nabla p = 0 \quad (2.7)$$

Для градиента солености:

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \text{grad}(s_0) \quad (2.8)$$

В качестве алгоритма нахождения численного решения используется PISO [37]. Вкратце изложить алгоритм нахождения полей скорости и давления можно так:

1. Устанавливаются граничные условия.
2. Решается дискредитированное уравнение движения для вычисления промежуточных значений поля скорости.
3. Вычисляются массовые потоки через границы ячеек.
4. Решается уравнение для давления.
5. Корректируются массовые потоки.
6. Корректируется поле скорости согласно новому давлению.
7. Обновляются граничные условия.
8. Вернуться к третьему шагу.
9. Перейти на следующий временной шаг и начать с первого пункта.

Внутри шага по времени тут имеется цикл между пунктом 3 и пунктом 8. Более того возможны коррекции неортогональности ячеек сетки если зациклить этот алгоритм между пунктом 4 и 5. дискредитированное уравнение движение в матричном виде можно записать следующим образом:

$$\mathcal{M}\vec{U}^* = -\frac{\nabla p}{\rho_m} + \vec{F} \quad (2.9)$$

где \mathcal{M} – матрица коэффициентов, \vec{U}^* – искомые промежуточные значения поля скоростей. Для получения уравнения давления эта матрица коэффициентов расщепляется следующим образом:

$$\mathcal{M}\vec{U}^* = \mathcal{A}\vec{U}^* - \vec{\mathcal{H}} \quad (2.10)$$

где $\vec{\mathcal{H}}$ – источниковые члены для уравнения давления. $\mathcal{A} = \text{diag}(\mathcal{M})$. Подставляем расщепленную матрицу коэффициентов в уравнение движения:

$$\mathcal{A}\vec{U}^* - \vec{\mathcal{H}} = -\frac{\nabla p}{\rho_m} + \vec{F} \quad (2.11)$$

Умножаем обе части на \mathcal{A}^{-1} , выражаем \vec{U}

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\vec{U} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathcal{H}} - \mathcal{A}^{-1}\nabla p + \mathcal{A}^{-1}\vec{F} \Rightarrow \vec{U} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathcal{H}} - \mathcal{A}^{-1}\nabla p + \mathcal{A}^{-1}\vec{F} \quad (2.12)$$

согласно уравнению неразрывности $\nabla \cdot \vec{U} = 0$, это дает нам уравнение для давления:

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\nabla p) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\vec{\mathcal{H}} + \mathcal{A}^{-1}\vec{F}) \quad (2.13)$$

Алгоритм PISO не прост в понимании и сложен из-за двух вложенных циклов внутри одного временного шага. Но очень популярен и долгое время остается одним из самых востребованных инструментов вычислительной гидродинамики.

К сожалению, результаты моделирования аттрактора внутренних волн алгоритмом PISO количественно не соответствуют результатам полученным при помощи метода спектральных элементов.

Подведя итог можно сказать следующее, популярный алгоритм качественно воспроизводит картину течения, образующуюся при много-кратном отражении внутренних волн от стенок трапециевидного резервуара. Но количественно нет. Преимуществом алгоритма является спо-

собность работать с неортогональными сетками и сложной геометрией. К недостаткам можно отнести сложность и нелинейность процедуры нахождения гидродинамических полей.

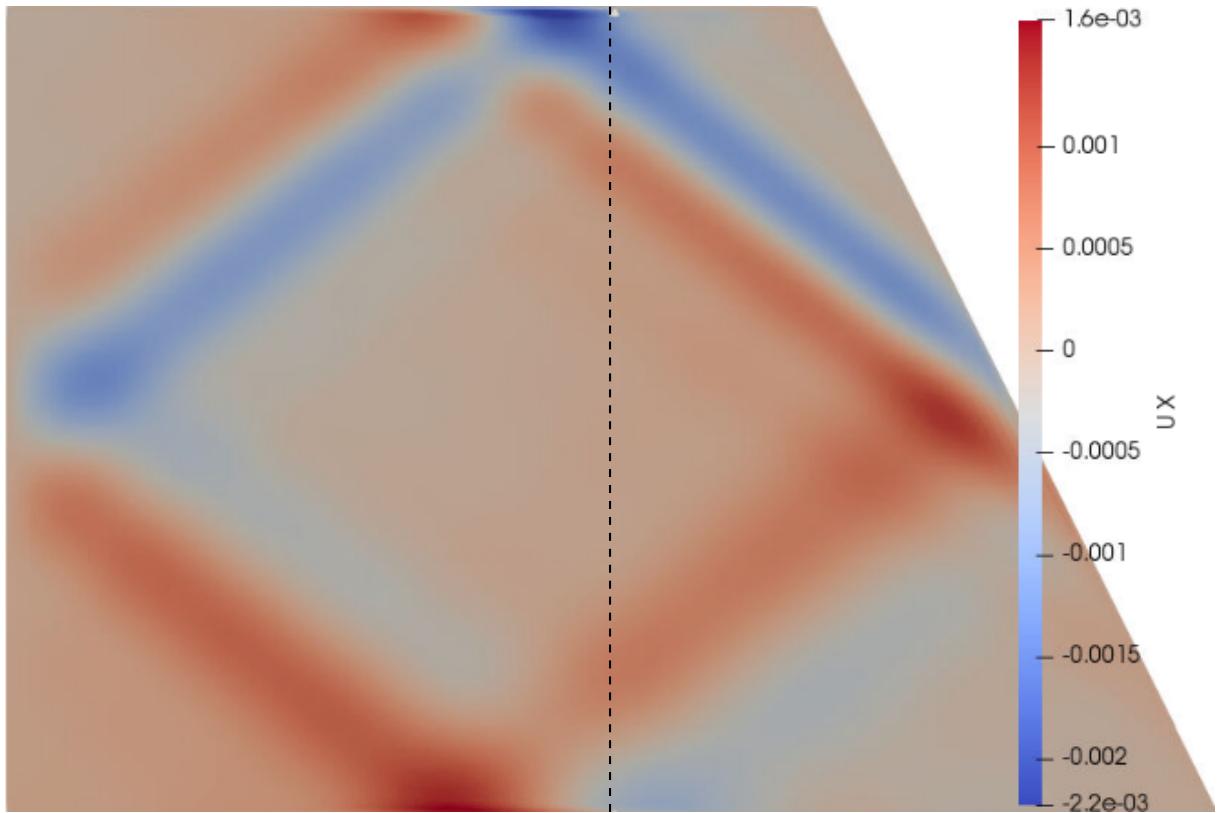


Рисунок 2.4 — Поле горизонтальной компоненты скорости, пунктиром показана линия пробы

2.3 Численное моделирование атTRACTоров внутренних волн с помощью метода контрольного объема на базе квазигидродинамического подхода

В этом разделе будут подробно разобраны способы аппроксимации слагаемых в квазигидродинамических уравнениях. Рассматриваются способы дискретизации уравнений и их реализация при помощи пакета с открытым исходным кодом OpenFOAM версии 1912[38].

OpenFOAM – математический пакет с открытым исходным кодом. Аббревиатура FOAM означает Field Operation And Manipulation, то есть операции и манипуляции с полями. В OpenFOAM реализованные гибкие и современные инструменты как численного моделирования, так

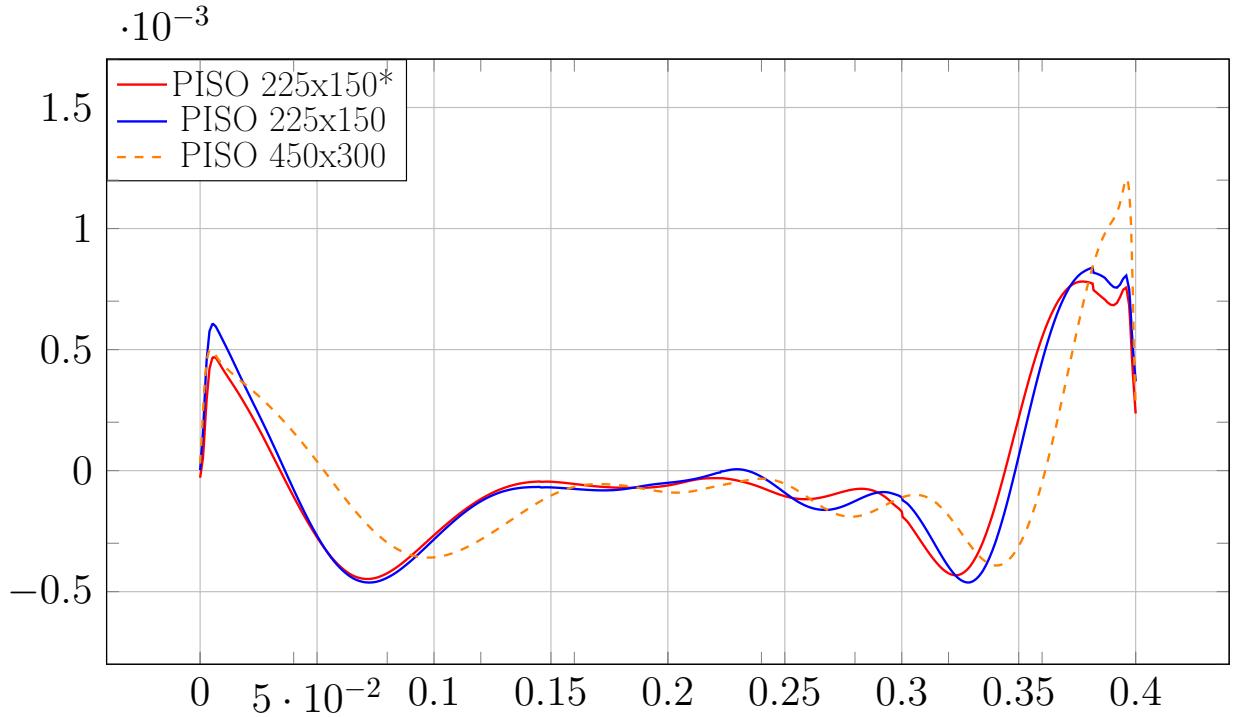


Рисунок 2.5 — Результат моделирования с помощью алгоритма PISO

и разработки согласно современным стандартам языка C++ и объектно-ориентированного программирования.

Для начала рассмотрим дискретные аналоги квазигидродинамических уравнений. Производные по времени аппроксимируются разностями согласно схеме Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \approx \frac{\vec{U}_n - \vec{U}_o}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} \approx \frac{\tilde{s}_n - \tilde{s}_o}{\Delta t}, \quad (2.14)$$

или с помощью схемы Адамса-Башфорта:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2} \vec{U}_n - 2 \vec{U}_o + \frac{1}{2} \vec{U}_{oo} \right), \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2} \tilde{s}_n - 2 \tilde{s}_o + \frac{1}{2} \tilde{s}_{oo} \right). \quad (2.15)$$

Пространственная аппроксимация имеет второй порядок точности. Конечно-объемное представление:

$$\nabla \cdot \frac{\tau}{\rho} \nabla \tilde{p} \approx \frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot \left(\frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot p \right), \quad (2.16)$$

Индекс f обозначает принадлежность к поверхности. Дискретный аналог уравнения Пуассона:

$$\frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot \left(\frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot p \right) = \frac{1}{V} \sum_f \left(\vec{U}_o - \tau \cdot (\vec{U}_o \cdot \nabla \vec{U}_o) + \tau \cdot \vec{F}_o \right) \cdot \vec{S}_f, \quad (2.17)$$

где o обозначает значение с предыдущего шага по времени. Дискретный аналог уравнения движения:

$$\frac{\vec{U}_n - \vec{U}_o}{\Delta t} + \frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot \left(\vec{U}_o \otimes \vec{U}_o - \vec{W}_o \otimes \vec{U}_o \right) \cdot \vec{S}_f - \frac{\nu}{V} \sum_f \frac{\delta \vec{U}_o}{\delta \vec{n}} \cdot |\vec{S}_f| - \frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot \left(\vec{U}_o \otimes \vec{W}_o \right) \cdot \vec{S}_f = -\frac{1}{\rho} \nabla p_n + \vec{F}_o, \quad (2.18)$$

или оно может быть записано в явной форме:

$$\frac{\vec{U}_o - \vec{U}_n}{\Delta t} + \frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot \left(\vec{U}_o \otimes \vec{U}_o - \vec{W}_o \otimes \vec{U}_o \right) \cdot \vec{S}_f - \frac{\nu}{V} \sum_f \frac{\delta \vec{U}_n}{\delta \vec{n}} \cdot |\vec{S}_f| - \frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot \left(\vec{U}_o \otimes \vec{W}_o \right) \cdot \vec{S}_f = -\frac{1}{\rho} \nabla p_n + \vec{F}_o. \quad (2.19)$$

Дискретный аналог уравнения солености:

$$\frac{s_n - s_o}{\Delta t} = \frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot \left(\vec{U}_n - \vec{W}_n \right) \cdot s_o \cdot \vec{S}_f - \frac{\nu}{Sc V} \sum_f \frac{\delta s_o}{\delta \vec{n}} \cdot |\vec{S}_f| - \frac{1}{V} \sum_f \left(\tau \vec{U}_f \cdot \vec{S}_f \cdot (\vec{U}_f \cdot \sum_f \nabla s \cdot \vec{S}_f) \right) \cdot \vec{S}_f, \quad (2.20)$$

или его явная версия:

$$\frac{s_n - s_o}{\Delta t} = \frac{1}{V} \sum_f \vec{S}_f \cdot (\vec{U}_n - \vec{W}_n) \cdot s_o \cdot \vec{S}_f - \frac{\nu}{ScV} \sum_f \frac{\delta s_n}{\delta \vec{n}} \cdot |\vec{S}_f| - \frac{1}{V} \sum_f \left(\tau \vec{U}_f \cdot \vec{S}_f \cdot (\vec{U}_f \cdot \sum_f \nabla s \cdot \vec{S}_f) \right) \cdot \vec{S}_f. \quad (2.21)$$

Аппроксимация регуляризационных членов:

- Reduced, вычисляются только нормальные составляющие производных:

$$(\nabla U)_f \approx \vec{n}_f \otimes \frac{\vec{U}_P - \vec{U}_S}{|\vec{d}|} \quad (\nabla s)_f \approx \vec{n}_f \otimes \frac{\vec{s}_P - \vec{s}_S}{|\vec{d}|}, \quad (2.22)$$

где \vec{d} — это длина вектора между центрами P и N двух соседних ячеек.

На смежной поверхности вычисляются производные.

- Метод наименьших квадратов согласно [39]
- Метод Гаусса-Остроградского, вычисление производных осуществляется по методу Шильникова [40]. Схема вычислений представлена на рисунке 2.6. Выражения для производных имеют простой вид для скалярных полей, для векторных и тензорных эта процедура производится покомпонентно:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{V_f} \sum_{m=1}^8 n_{m,x} \alpha_m, \quad (2.23)$$

где m количество ребер, α дифференцируемое значение, α_m усредненное значение по ребру α .

Для того чтобы найти решение квазигидродинамической системы необходимо проинтегрировать уравнение Пуассона для давления (2.17) и вычислить новое значение этой величины. Затем нужно найти дополнительную скорость \vec{W} . Потом проинтегрировать уравнение движения в явной (2.19) или неявной (2.18) форме чтобы найти поле скорости на новом временном шаге. И наконец, вычислить соленость проинтегрировав (2.20) или (2.21).

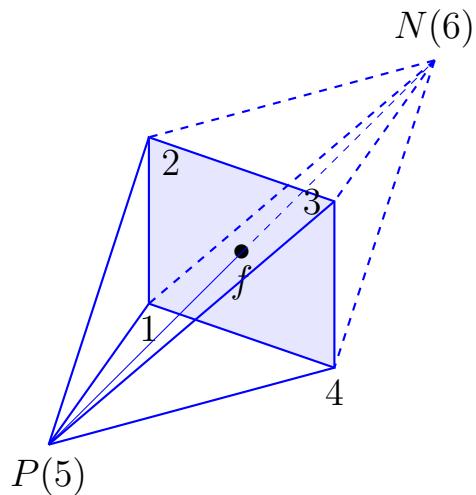


Рисунок 2.6 — Схема вычисления производных на поверхности f , P центр текущей ячейки, N центр соседней ячейки.

Преимущество квазигидродинамических уравнений в том, что алгоритм их решения линейный без вложенных циклов внутри одного временного шага. Уравнение для давления находится сразу без громоздких процедур, которые необходимо проделать в PISO. Графическое описание можно увидеть на рисунке 2.7. Алгоритм поиска решения заключается в следующем:

- 1) Обновляются поля на поверхностях для давления, солености, скорости и массовой силы на новом временном слое путем интерполяции. Также вычисляются градиенты скоростей и солености с помощью процедуры поиска производных на поверхностях(fvsc).
- 2) Обновляются потоки через границы ячеек.
- 3) Считываются параметры контроля за расчетом.
- 4) Вычисляются условия устойчивости $|\vec{U}_c| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ и $\Delta t < \tau \cdot C$
- 5) Увеличивается шаг по времени $t^n = t^o + \Delta t$.
- 6) Сохраняются значения полей из предыдущих временных слоев.
- 7) Изменение поле скорости согласно модели турбулентности.
- 8) Явное вычисление поле давления.
- 9) Явное или неявное вычисление поля скоростей.
- 10) Явное или неявное вычисление поля солености.

fvsc процедура вычисления производных на поверхностях была реализована отдельно. Для этого в OpenFOAM было разработано специаль-

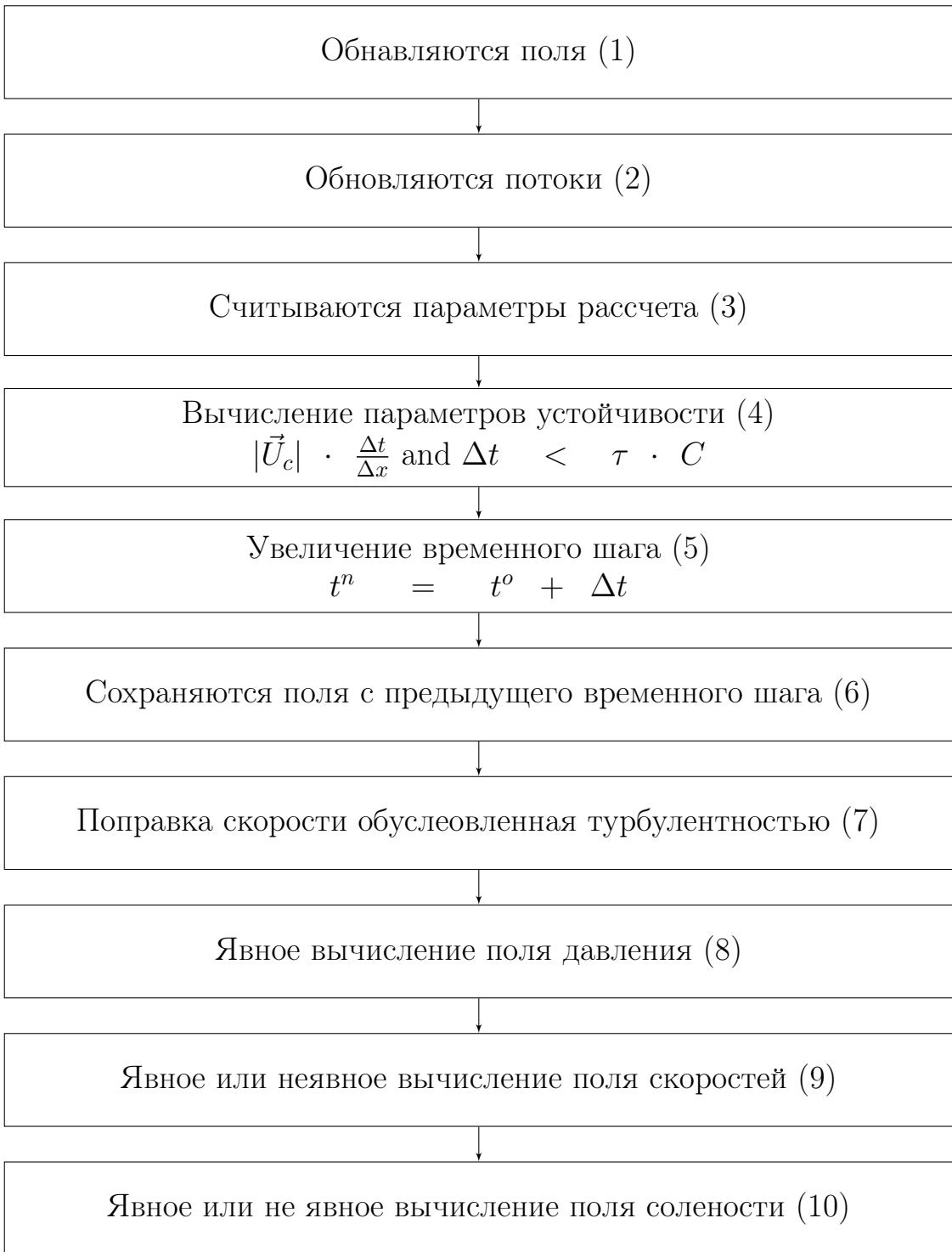


Рисунок 2.7 – Алгоритм QHDFoam

ное пространство имен с интерфейсом для конкретного кейса с задачей. Пользователь может выбрать одну из схем приведенных выше используя соответствующие ключевые слова. Также необходимо выбрать способ вычисления регуляризационного параметра τ . Предполагается что перед тем, как подстраивать этот параметр он будет выбран сообразно

некоторым характерным безразмерным числам для конкретной задачи. Параметр настраивается для каждой задачи отдельно.

Реализация неявного вычисления уравнения движения в терминах OpenFOAM представлен на рисунке 2.8.

```

1  gradPf = fvsc::grad(p);
2  Wf = tauQGdf*((Uf & gradUf) + gradPf/rhof - BdFrcf);
3  surfaceVectorField phiUfWf = mesh.Sf() & (Uf * Wf);
4  phiUf -= phiUfWf;
5
6  {
7    solve
8      (
9        fvm::ddt(U)
10       +
11       fvc::div(phiUf)
12       -
13       fvm::laplacian(muF/rhof,U)
14       -
15       fvc::div(muF/rhof * mesh.Sf()
16       & qgdInterpolate(Foam::T(fvc::grad(U))))
17       ==
18       -
19       fvc::grad(p)/rho
20       +
21       BdFrc
22       +
23       USu
24     );
25 }
```

Рисунок 2.8 — Исходный код вычисления уравнения движения

gradPf это градиент на грани который вычисляется согласно схемам, описанным выше. В файле **fvSchemes** можно найти пользовательский интерфейс для нее (см. Рис. 2.9)

```

1
2   fvsc
3   {
4     default    GaussVolPoint;
5 }
```

Рисунок 2.9 — Пользовательский интерфейс для fvsc

Пользовательский интерфейс для настройки параметра регуляризации, опорные значения для давления и переключатели для явных/-неявных вычислений содержится в файле **thermophysicalProperties** пример представлен на рис. 2.10

```

1      QGD
2  {
3      pRefCell      0;
4      pRefValue     0;
5      implicitDiffusion true;
6      QGDCoeffs constTau;
7      constTauDict
8      {
9          Tau 0.005;
10     }
11 }
12 }
```

Рисунок 2.10 — Пользовательский интерфейс для настройки параметра регуляризации, опорного значения для давления, а также переключатель для явного или неявного решения диффузионных слагаемых.

2.3.1 Верификация

QHDSolver это программа для моделирования движения несжимаемой жидкости. Важным свойством таких программ является чувствительность к физическим параметрам, таким как скорость, плотность, вязкость и размеры расчетной области. Эти параметры объединяются в число рейнольдса. Также необходимо найти корректное решения для уравнения переноса. QHDSolver позиционируется как программа призванная работать с неортогональными сетками и находить корректное решение. Для демонстрации возможности решателя было выбрано несколько типовых задач. Для верификации возможности работы с неортогональными сетками была выбрана задача скошенной каверны. Чувствительность к числу Рейнольдса проверяется на задаче обратного уступа. Корректность решения уравнения переноса проверяется на задаче естественной конвекции. Полученные результаты сравниваются с результатами других исследователей.

Скошенная каверна

Квазигидродинамический решатель сравнивается с PISO алгоритмом на метках низкого качества. Главной целью этого сравнения является демонстрация возможностей программы корректно решать задачи поставленные на неортогональных сетках и сложных геометриях. Эксперимент определяется следующими настроочными параметрами:

- Размер сетки
- Шаг по времени
- Параметр регуляризации
- Число Рейнольдса
- Угол скошенности(α)

Моделирование исследует сеточную сходимость при числах Рейнольдса 100 и 1000, углах скошенности $\alpha = \{45^\circ, 30^\circ, 15^\circ\}$. Схематично расчетная область изображена на рисунке 2.11. На верхней границе задана постоянная скорость \vec{U}_b и нулевой градиент для давления. На других стенках установлено условие нулевой скорости и градиента давления.

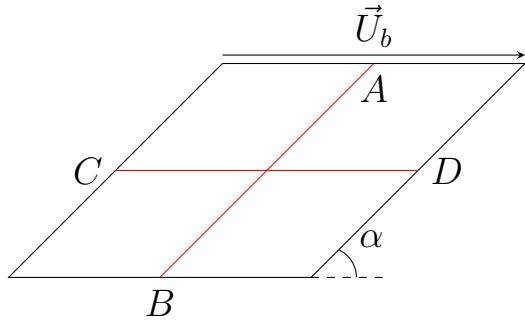


Рисунок 2.11 — Skewed cavity scratch

Компоненты поля скорости, полученные с помощью QHDFoam сравниваются с теми же компонентами полученными при помощи pimpleFOAM. Рассматривается зависимость решения от параметра регуляризации и шага по времени. Результаты моделирования также сравниваются с результатами полученными ранее другими исследователями [41, 42].

Сравнение QHD и PIMPLE алгоритмом с числами Рейнольдса $Re = 100$ и $Re = 1000$ $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ демонстрируют схожесть результатов (см рис. 2.12 - 2.15). Сетки с элементами более чем 20×20 дают отличное соответствие с эталонным решением [42]. Для случаев с маленькими углами скошенности и числами Рейнольдса алгоритмы типа PISO не могут найти решение без коррекций на неортогональность. QHDFoam могут быть применены без дополнительных коррекций, для этого требуется увеличить параметр регуляризации или уменьшить шаг по времени.

Каждая конфигурация каверны исследована на сеточную сходимость. Обычно сетки более 40×40 элементов дают точность с ошибкой не более 5%. Более подробные сетки дают точность с ошибкой меньше чем 3%. Результаты сеточной сходимости приведены на рисунке 2.19, он показывает порядок метода между теоретическими линиями соответствующих первому и второму порядку.

Разность результатов полученных при помощи квазигидродинамического подхода и при помощи PISO представлена на рисунках 2.15 – 2.17 может быть объяснена дополнительной диссипацией, которая приносится квазигидродинамическим алгоритмом. Очевидно, что ошибка тем меньше чем, меньше параметр регуляризации. Начальное значение для этого параметра может быть выбрано согласно значению числа Рейнольдса и условию устойчивости:

$$\Delta t \leq c \cdot \tau, \quad (2.24)$$

Где Δt это шаг по времени, τ это регуляризационный параметр, коэффициент c зависит от скосенности. Опытным путем установлено что для $\alpha = 90^\circ$ $c = 2$, но для $\alpha = 15^\circ$ $c = 24$.

Для увеличения точности PISO алгоритма на неортогональных сетках требуется увеличивать сеточное разрешение и количество коррекций на неортогональность. Для увеличения точности квазигидродинамического алгоритма кроме увеличения количества ячеек необходимо уменьшить шаг по времени и параметр регуляризации согласно условию устойчивости(см. рис. 2.18).

Обратный уступ

Для моделирования вязкой жидкости, алгоритму необходимо быть чувствительным к изменению числа Рейнольдса. Задача обратного уступа это простой и эффективный способ проверить эту чувствительность. На вход в расчетную область подается параболический профиль скорости. Все стенки кроме входа и выхода подчиняются условию прилипания для скорости и нулевого градиента для давления.

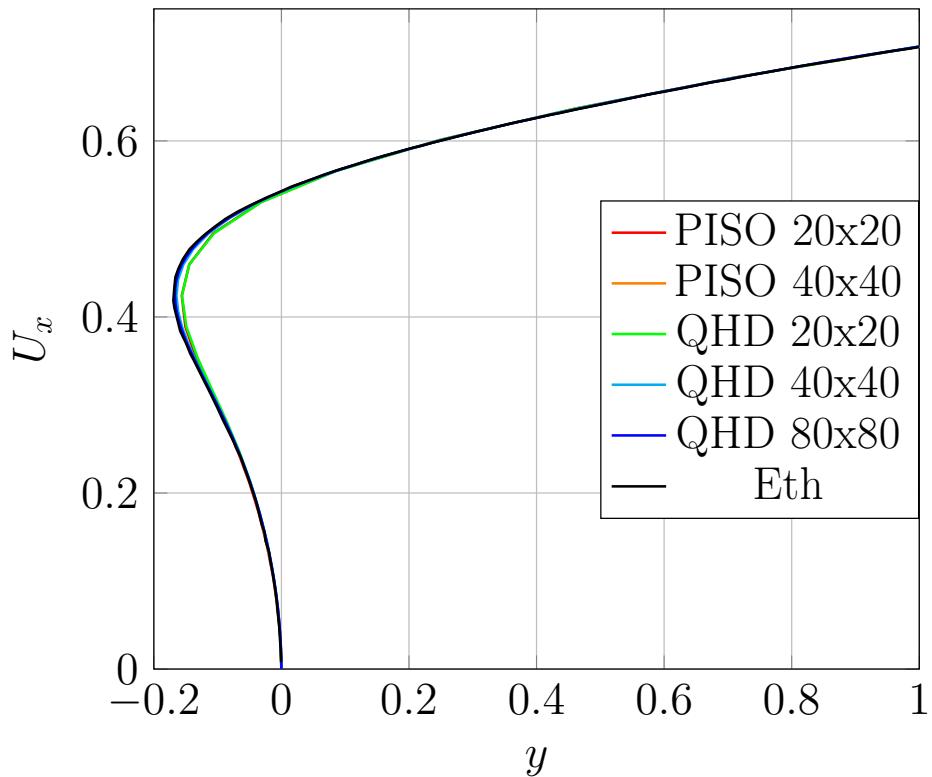


Рисунок 2.12 — $\text{Re}=100$, $\alpha = 45^\circ$, зависимость U_x от y , скорость вдоль линии АВ.

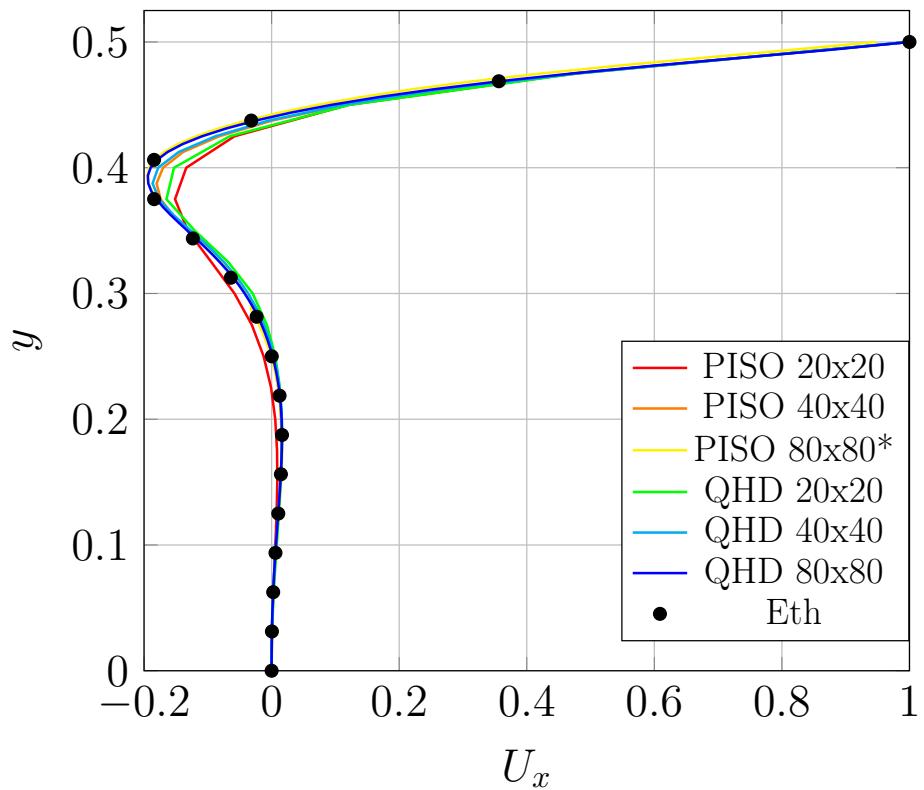


Рисунок 2.13 — $\text{Re}=1000$, $\alpha = 30^\circ$, зависимость U_x от y , горизонтальная компонента скорости вдоль линии АВ.

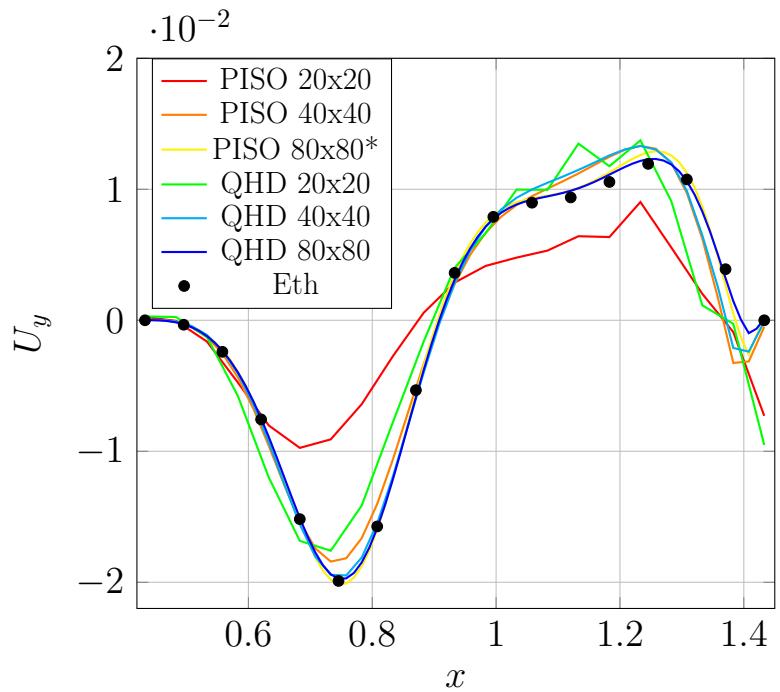


Рисунок 2.14 — $\text{Re}=1000$, $\alpha = 30^\circ$, зависимость U_y от x , вертикальная компонента скорости вдоль линии CD, звездочкой обозначен результат проведенный с помощью коррекций на неортогональность

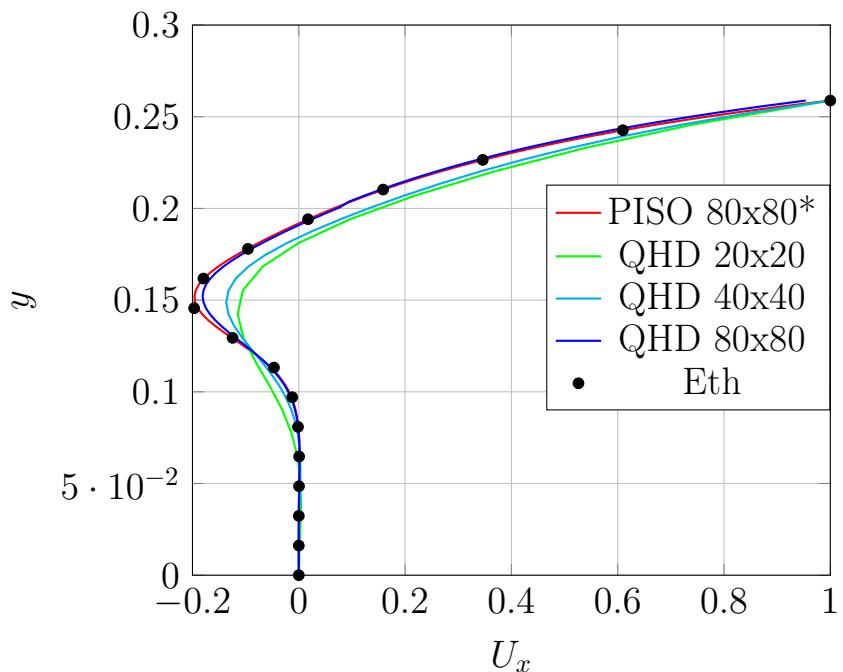


Рисунок 2.15 — $\text{Re}=100$, $\alpha = 15^\circ$, зависимость U_x от y , горизонтальная компонента скорости вдоль линии АВ, звездочкой обозначены результаты полученный с использованием поправок на неортогональность

После стабилизации потока измеряется расстояния от левой твердой стенки до точки разворота потока(d) (см рис. ??). Полученное зна-

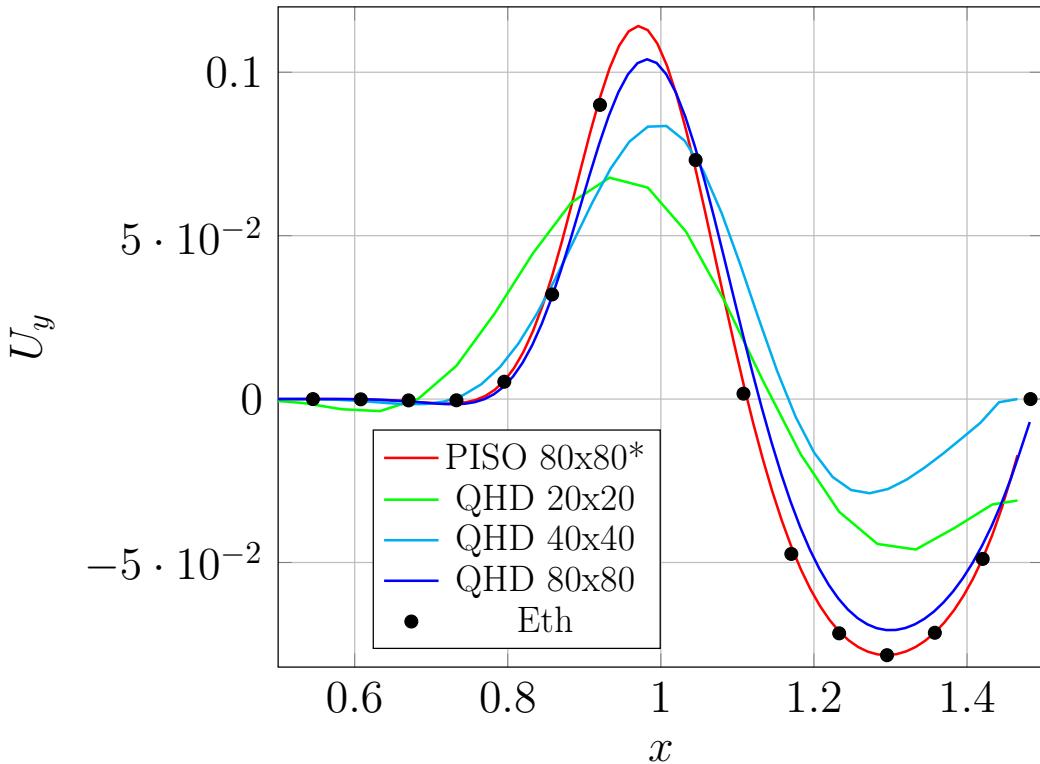


Рисунок 2.16 – $\text{Re}=100$, $\alpha = 15^\circ$, зависимость U_y от x , вертикальная компонента скорости вдоль линии АВ, звездочкой обозначены результаты полученные с использованием поправок на неортогональность

чение d сравнивается с эталонным из [28]. Результаты показывают что QHDFoam корректно разрешает вязкие течения (см. рис. 2.22)

Естественная конвекция

Рассматривается задача естественной конвекции в каверне согласно [28] значение регуляризационного параметра было вычислено пропорционально обратному числу Грастигофа Gr^{-1} , которое было порядка 10^{-4} с. Сравнение максимумов горизонтальной и вертикальной скорости с данными из [28] и [47] показывают сеточную сходимость и хорошую согласованность между QHDFoam и рассматриваемыми в работах методами. Результаты сравнения видны в таблице 2.2 . Линии тока изображены на рисунке 2.23. Схему расчетной области можно увидеть на рисунке 2.24

2.3.2 Валидация

Аттрактор внутренних волн – это сложное явление, которое происходит после многократного отражения внутренних волн от стенок ре-

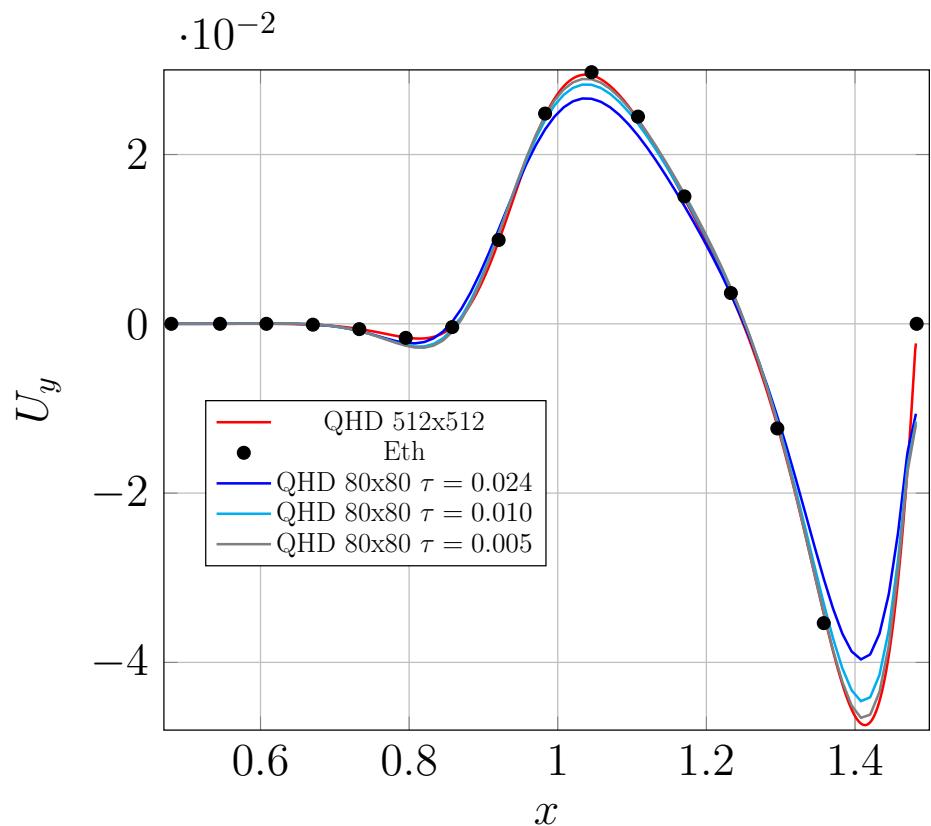


Рисунок 2.17 — $\text{Re}=1000$, $\alpha = 15^\circ$, зависимость U_y от x , влияние параметра регуляризации на решение.

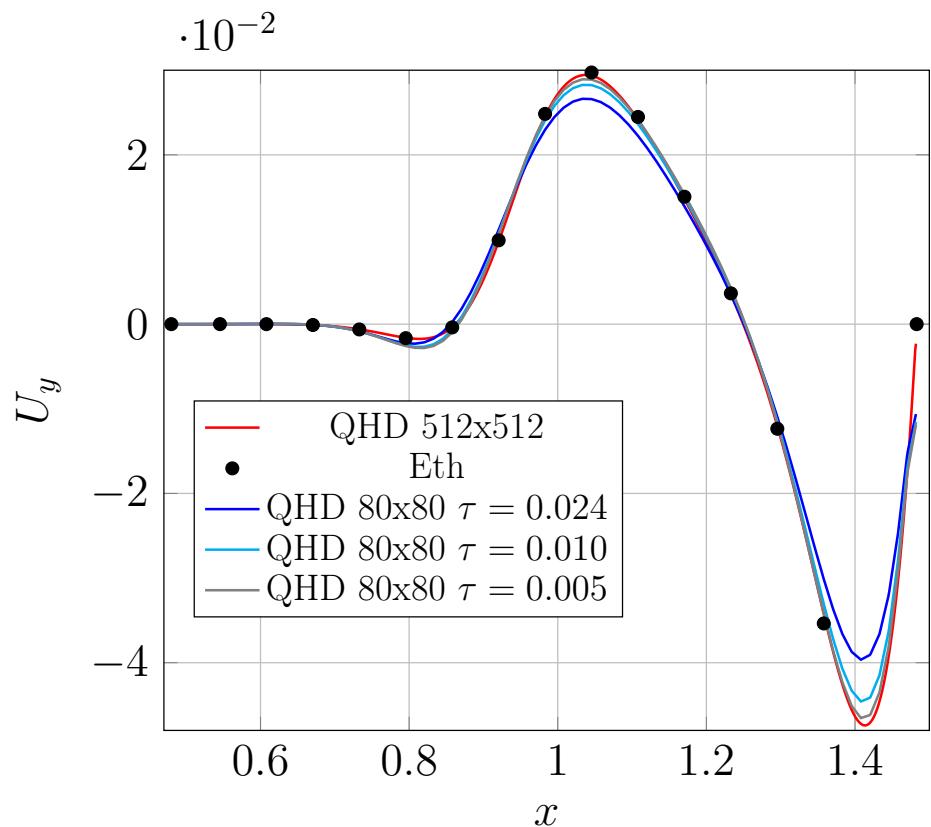


Рисунок 2.18 — $\text{Re}=1000$, $\alpha = 15^\circ$, зависимость U_y от x

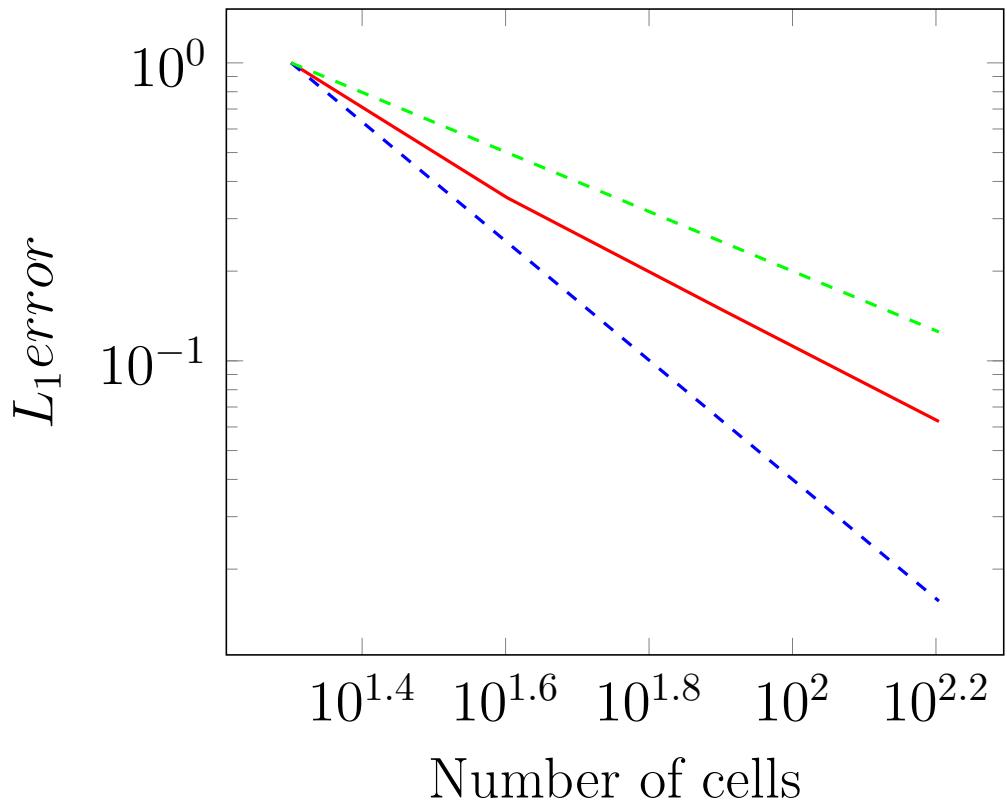


Рисунок 2.19 — Сеточная сходимость, порядок метода

зервуара. PISO алгоритмы из предыдущего раздела не справляются с моделированием этого феномена, но результаты моделирования аттрактора с помощью решателя QHDFoam показывают неплохие результаты. Удалось добиться ошибки меньше 3% см. Рис. 2.25.

Также количественные исследования демонстрируют сходимость решения получаемое с помощью квазигидродинамических уравнений к решению полученному с помощью метода высокого порядка (см. Рис. 2.26) в отличии от результатов полученных с помощью PISO (см. Рис. 2.5).

2.4 Критические частоты и диапазон существования аттракторов внутренних волн

Для фокусировки внутренних гравитационных волн используется стратифицированная жидкость с линейным профилем стратификации и трапециевидный резервуар, который может, служит линзой для внутренних гравитационных волн и фокусировать их в аттракторы внутренних гравитационных волн. При этом эффект фокусировки зависит от угла

распространения внутренних волн и геометрических параметров резервуара. Аттрактор образуется далеко не при каждой комбинации этих параметров. Возможные геометрии резервуаров подробно описаны в работе Лео Мааса[20]. Также там описывается процедура перехода к универсальным координатам (d, τ) это резко сокращает количество определяющих задачу параметров. Предполагается, что параметры резервуара являются фиксированными, а варьируется лишь частота колебания волнопроизводителя причем этого достаточно чтобы управлять формой аттрактора. В данном разделе осуществляется поиск универсальных частот волнопроизводителя, которые бы обеспечивали образование аттрактора внутренних гравитационных волн.

Для поиска использовалась диаграмма из работы Лео Мааса[21]. Найдем такие параметры системы, чтобы аттрактор вырождался в отрезки для этого положим $\tau = 2$. Выбор такого значения обусловлен углом распространения внутренних волн $\theta = 45^\circ$. Это значит, что волна пущенная из левого верхнего угла упрется в правый нижний угол так как длина резервуара = 2 от -1 до 1 (см рис. 2.27). Если в уравнение (1.34) подставить вместо z высоту резервуара H то получим:

$$\tau = \frac{2H}{L} \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1}. \quad (2.25)$$

Теперь подставим $\tau = 2$:

$$1 = \frac{H}{L} \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1}. \quad (2.26)$$

Выразим отсюда ω :

$$\omega = \frac{NH}{\sqrt{L^2 + H^2}}. \quad (2.27)$$

Теперь найдем второй случай, при котором аттрактор зажимается между двумя противоположными углами. Это означает что луч пущенный из левого нижнего угла должен попасть в точку d . То есть $\tau = 1 + d$:

$$1 + d = \frac{2H}{L} \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1}. \quad (2.28)$$

Выразим отсюда частоту ω :

$$\omega = \frac{NH}{\sqrt{(1 - H \cdot \operatorname{tg}(\alpha))^2 + H^2}}. \quad (2.29)$$

После процедуры рейтрейсинга(см рис. 2.28)

Также с помощью метода спектральных элементов случаи вырожденных аттракторов были смоделированы(см. рис. 2.29).

Критические значения замыкают собой диапазон частот, колебания волнопродуктора с которыми будет приводить к образованию аттрактора:

$$\omega_{c_1} = \frac{NH}{\sqrt{L^2 + H^2}}, \quad \omega_{c_2} = \frac{NH}{\sqrt{(1 - H \cdot \operatorname{tg}(\alpha))^2 + H^2}}, \quad (2.30)$$

$$\omega_{c_1} \leq \omega_A \leq \omega_{c_2}. \quad (2.31)$$

Этот раздел дает ответ на вопрос о том какие частоты приводят к образованию аттрактора внутренних гравитационных волн в резервуаре. Эти частоты зависят только от геометрических параметров резервуара и частоты плавучести.

2.5 Волновые движения в замкнутом резервуаре при воздействии с двумя частотами

Известно, что в океане существует великое множество волн. Вопрос будут ли волны различных частот мешать образовываться аттрактору до сих пор остается открытым. В данной работе изучается вопрос совместного воздействия на стратифицированную жидкость волнопродуктора с двумя различными частотами и одинаковой амплитудой.

Постановка задачи несколько меняется. Для моделирования используется конфигурация представленная на рисунке 2.2. Условие на волнопродукторе будет теперь записываться следующим образом:

$$U_z = A_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{L_1}\right) \cdot \omega_1 \cdot \sin(\omega_1 t) + A_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{L_1}\right) \cdot \omega_2 \cdot \sin(\omega_2 t) \quad (2.32)$$

Посчитаны различные режимы:

- Режим разнесенными частотами, $\omega_1/N = 0.58$ $\omega_2/N = 0.66$ и малой амплитудой $a = 0.02$ см.
- Режим с совпадающими частотами, $\omega_1 = \omega_2 = 0.628$ и амплитудой $a = 0.05$ см.
- Режим с приближенными частотами, $\omega_1/N = 0.66$ $\omega_2/N = 0.68$ и амплитудой $a = 0.05$ см.
- Режим с близкими частотами $\omega_1/N = 0.628$ $\omega_2/N = 0.641$ и амплитудой $a = 0.05$ см.

Первый режим демонстрирует общую картину течения при взаимодействии с двумя частотами. На рисунке 2.30 показано, что в одном резервуаре допустимо существования сразу двух аттракторов внутренних волн. Это видно по характерному распределению поля скоростей и давлений в резервуаре. В середине первого(том что соединяет нижнюю и наклонную стенку) луче аттрактора помещена точка пробы. Видно, что существует задержка между частотой колебания волнопродуктора и частотой колебаний в середине первого луча аттрактора. Помимо этого, построен спектр частот колебаний скорости, частоты на этом графике осреднены по большей из частот. Сама точка пробы также размещена на первом луче аттрактора, который возникает под воздействием большей из частот. Это объясняет то почему второй пик меньше. На протяжении всей частотно-временной диаграммы наблюдается доминация этих двух частот.

Совпадение частот означает, что амплитуда колебаний удваивается значение $a = 0.05$ см. При $a = 0.1$ на рисунке 2.31 наблюдается неустойчивость этот режим характеризуется россыпью частот на спектре и частотно-временной диаграмме.

Последующие режимы это попытка постепенно приблизить две частоты друг к другу и зафиксировать момент возникновения неустойчивости в зависимости от близости частот друг к другу. На рисунке 2.32 представлена картина течения при относительной разности частот в 0.05. При этом режиме наблюдаются дочерние волны как на изображении с вертикальной компонентой скорости, спектре так и на частотно временной диаграмме. При этом на последней наблюдаются амплитудные «всплески». Это объясняется совпадением фаз двух волновых процессов.

С приближением частот друг к другу(см. рис. 2.33) появляются дополнительные дочерние волны, но режим успевает стабилизироваться во временной промежуток разности фаз двух частот.

Помимо детального анализа результатов моделирования бигармонических аттракторов полученных с помощью метода спектральных элементов, были получены результаты моделирования с помощью метода конечного объема (см. рис. 2.34). Из рисунка видно, что качественно картина течения совпала с предсказанной при помощи трассировки лучей.

2.6 Кинетическая энергия для монохроматического и бигармонического режимов

Для геометрии, показанной на рис.2.2, нижняя и верхняя границы диапазона существования аттрактора соответствуют $\omega_{cr1}/N = 0.55$ и $\omega_{cr2}/N = 0.74$. При достижении этих критических значений частот происходит вырождение параллелограмма в диагональ трапеции. В качестве интегральной размерной меры эффективности генерации аттрактора при постоянной амплитуде волнопродуктора и неизменной форме резервуара принята кинетическая энергия жидкости, проинтегрированная по площади трапеции S : $E_k(t) = \int_S \frac{\rho_m}{2} [v_y^2(t) + v_x^2(t)] dS$. Для этой меры можно ввести значение, осредненное в скользящем временном окне по достаточно большому числу периодов колебаний $\langle E_k(t) \rangle$, и вариацию относительно среднего, рассчитываемую как $r = D(E_k(t) - \langle E_k(t) \rangle) / \langle E_k(t) \rangle$, где $D(E_k(t) - \langle E_k(t) \rangle)$ – дисперсия относительно среднего. Безразмерные величины $\bar{E}_k(t)$ и $\langle \bar{E}_k(t) \rangle$ определены

путем нормировки на величину $\rho_m S(a\omega)^2/2$. Известно, что режимы движения в аттракторах могут быть близки как к прогрессивным, так и к стоячим волнам [48]. Величина r позволяет дать количественную оценку близости наблюдаемого режима к одному из этих предельных случаев [48].

Характерный вид зависимостей, наблюдаемых в монохроматическом режиме при малой амплитуде колебаний показан на

рис. 2.2 для $a = 0.02\text{см}$ ($a/H = 5 \cdot 10^{-4}$), $\omega/N = 0.63$. Характерное время выхода системы на установившийся режим составляет порядка 30 периодов колебаний, спектр сигнала является с высокой точностью монохроматическим, колебания кинетической энергии относительно среднего имеют небольшую амплитуду ($r = 0.103$). За первую ветвь аттрактора принят пучок с наибольшим значением плотности энергии, возникающий после фокусирующего отражения от наклонной стенки. Величины интегральных параметров, характеризующих линейные монохроматические режимы при фиксированном значении $a/H = 5 \cdot 10^{-4}$ в частотном диапазоне от $\omega_{cr1}/N = 0.55$ до $\omega_{cr2}/N = 0.74$ приведены в таблице 2.4. Видно, что при фиксированной амплитуде колебаний величина кинетической энергии аттрактора максимальна при $\omega/N = 0.63$. Очевидно, что при этом значении частоты возмущающего воздействия следует ожидать сильных нелинейных эффектов при увеличении амплитуды колебаний волнопродуктора. Величина r при $\omega/N = 0.63$ достигает минимума: движение в аттракторе представлено прогрессивной волной. Характерные картины течения и зависимости, наблюдаемые в случае слабонелинейного режима при $\omega/N = 0.63$ приведены на рис.2.35 для $a = 0.05\text{см}$ ($a/H = 1.25 \cdot 10^{-3}$). В слабонелинейном режиме имеет место триадный резонанс [49], при котором генерируются две дочерние субгармонические волны малой амплитуды. Частотно-временная диаграмма, показанная на рис. 2.35, представляет собой спектр сигнала, вычисленный в скользящем окне и осредненный по окрестности точки, лежащей в середине первой ветви аттрактора. Частотный спектр внутренних волн при данном режиме является дискретным, с доминирующим вкладом, соответствующим частоте возмущения ω_0 , двумя дочерними субгармони-

ческими частотами $\omega_1^* + \omega_2^* = \omega_0$, двумя супергармоническими частотам $\omega_1^{**} = \omega_1^* + \omega_0$, $\omega_2^{**} = \omega_2^* + \omega_0$ и удвоенной частотой $2\omega_0$.

При дальнейшем увеличении амплитуды возмущения до $a = 0.1\text{см}$ ($a/H = 2.5 \cdot 10^{-3}$) происходит развитие каскада триадных взаимодействий. Характерные картины волновых полей, спектров и развития во времени процесса колебаний и кинетической энергии системы приведены на рисунках 2.31. В частотном спектре сигнала доминируют дискретные компоненты, соответствующие частотам дочерних волн, возникающих при триадном резонансе аналогичные компонентам спектра, возникающим в слабонелинейном случае ($a/H = 1.25 \cdot 10^{-3}$). При этом полный спектр сигнала представляет собой суперпозицию дискретного и непрерывного спектра. Наличие непрерывного спектра свидетельствует о возникновении режима развитой волновой турбулентности [25, 48]. Соответствующие характеристики для кинетической энергии системы в сильно нелинейном режиме приведены в таблице 2.5. Из сопоставления таблиц 2.4 и 2.5 видно, что величины глобальных безразмерных энергетических характеристик системы (средней энергии $\langle \bar{E}_k \rangle$ и вариации относительно среднего r) в случае режима развитой волновой турбулентности слабо отличаются от безразмерных величин, характерных для линейного режима. Сопоставление волновых картин в линейном и нелинейном случаях показывает, что во втором случае энергия более равномерно распределена по изучаемой области: ветви аттрактора имеют большую ширину, а дочерние волны заполняют все пространство.

Характерный пример волновой картины и основных качественных и количественных характеристик системы в линейном случае при бигармоническом внешнем воздействии приведен на рис.2.30 для следующих значений параметров: $\omega_1/N = 0.58$, $\omega_2/N = 0.66$, $a = 0.02\text{см}$. Видно, что система выходит на режим квазистационарных биений за время порядка 40 периодов колебаний, что близко к характерному времени выхода на процесс стационарных колебаний в монохроматическом случае. На частотном спектре доминируют пики, соответствующие частотам внешнего возмущения, имеются также пики, соответствующие частоте $2\omega_1/N$ и разностной частоте $(\omega_2 - \omega_1)/N$, но их величина более чем на два

порядка меньше основного пика. Моменты времени, соответствующие максимальным значениям кинетической энергии, существенно отстают от моментов времени, соответствующих максимальным значениям амплитуды колебаний волнпродуктора. Важно отметить, что после выхода системы на режим установившихся биений средняя кинетическая энергия системы, возбуждаемой бигармоническим возмущением, с высокой точностью равна сумме энергий атTRACTоров, возбуждаемых монохроматическими возмущениями по отдельности $\bar{E}_k = 21.7 \cdot 10^{-4} \approx \bar{E}_{k1} + \bar{E}_{k2} = (8.45 + 13.2) \cdot 10^{-4} = 21.65 \cdot 10^{-4} (\text{erg/cm}^2)$. Таким образом, в линейном режиме с высокой точностью соблюдается принцип линейной суперпозиции, что выполняется также при малой разности частот $(\omega_1 - \omega_2)/N$.

Примеры нелинейной динамики волновых атTRACTоров, генерируемых бигармоническими колебаниями волнопродуктора приведены на рис. 2.32 ($\omega_1/N = 0.66$, $\omega_2/N = 0.628$, $\delta\omega/N = 0.031$) и 2.33, ($\omega_1/N = 0.628$, $\omega_2/N = 0.641$, $\delta\omega/N = 0.013$). Во всех случаях амплитуды колебаний волнопродуктора составили $a_1 = a_2 = 0.05\text{см}$. Можно видеть, что в обоих случаях формируется движение, для которого характерен сложный частотный спектр, причем при уменьшении расстройки частот $\delta\omega$ наблюдается тенденция к более густому «заселению» спектра. На графиках зависимости вертикальной скорости от времени виден характерный процесс «биений». График зависимости кинетической энергии системы от времени показывает, что помимо колебаний среднего значения энергии имеет место нетривиальная динамика высокочастотных пульсаций энергии: на фазах роста и убывания огибающей амплитуды колебаний волнопродуктора амплитуды пульсаций могут отличаться на порядок. Таким образом, для нелинейного бигармонического режима характерны периодические «вспышки» волновой турбулентности. Такие «вспышки» хорошо видны на частотно-временных диаграммах, приведенных на рис. 2.32 и 2.33. В частности, на частотно-вереиенной диаграмме, приведенной на рис. 2.32, можно видеть, что «биения» амплитуды сигнала на частоте, близкой к частоте возмущающего воздействия, сдвинуты по времени относительно «биений» дочерних волн. Таким образом, «биения» огибающей колебаний волнопродуктора, «биения» средней кинетической

энергии и «вспышки» волновой турбулентности рассогласованы между собой по времени. Можно предположить, что и в природных системах имеется рассогласование по времени между огибающей амплитуды внутреннего прилива и интенсификацией внутренней волновой турбулентности и перемешивания. Предварительное исследование энергии атTRACTоров, генерируемых бигармоническим возмущением, показывает, что в нелинейном случае средняя энергия системы существенным образом отличается от суммы энергий составляющих.

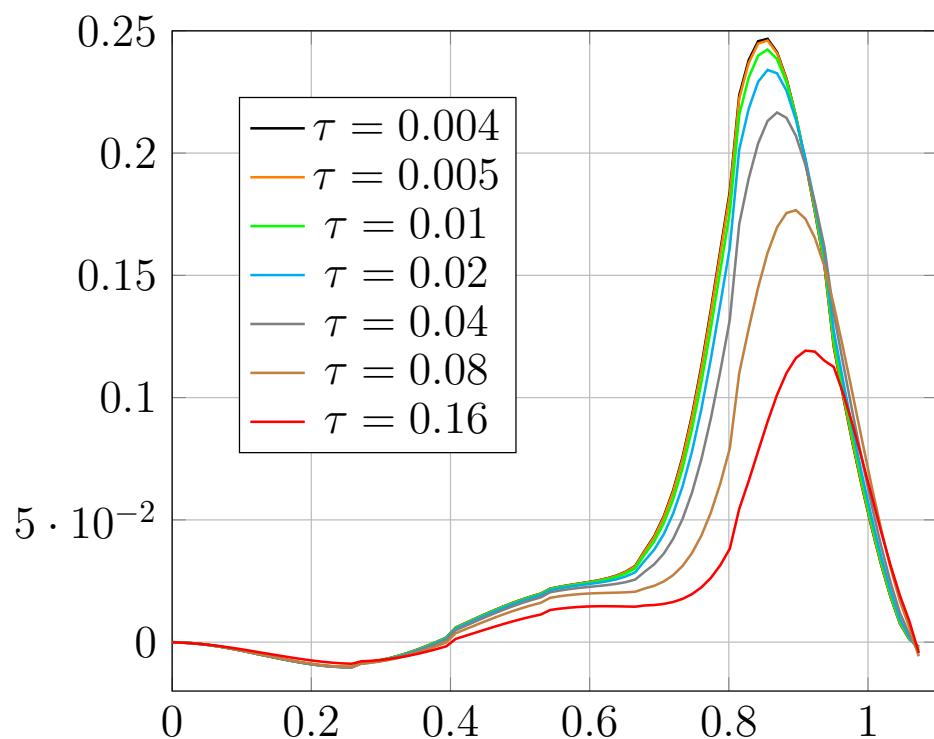


Рисунок 2.20 — $\text{Re}=1000$, $\alpha = 45^\circ$, U_y vs x , влияние параметра регуляризации на решение

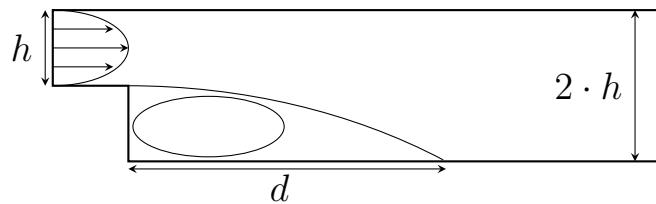


Рисунок 2.21 — Схематичное изображение задачи с обратным уступом.

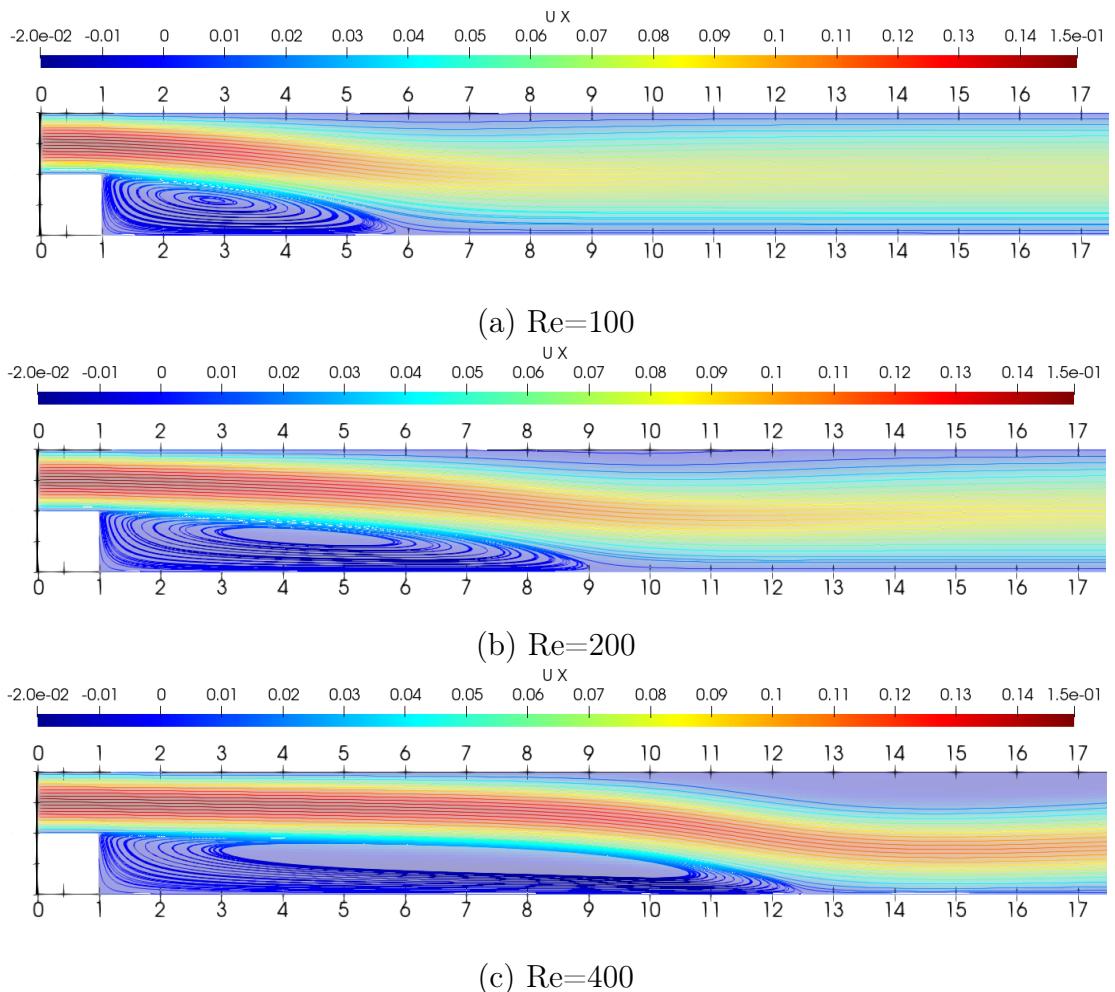


Рисунок 2.22 — Линии тока для задачи с обратным уступом

Таблица 2.1 — Сравнение результатов для задачи обратного уступа

Research	$Re = 100$	$Re = 200$	$Re = 400$
QHDFoam	5.0	8.25	11.9
Sparrow E. M. and Chuck W.[43]	5.0	7.5	-
Kim J. and Moin P.[44]	5.0	8.3	12
Hackman L. P. et al.[45]	5.0	8.5	-
Armal B. F. et al.[46]	5.0	8.5	14.2

Таблица 2.2 — Сравнение максимума горизонтальной компоненты скорости для задачи естественной конвекции.

Mesh	U_x [28]	U_x [47]	U_x QHDFoam
20×20	15.938	16.144	16.040
40×40	16.005	16.262	16.410
80×80	16.070	16.219	16.225

Таблица 2.3 — Сравнение максимума вертикальной компоненты скорости для задачи естественной конвекции.

Mesh	U_y [28]	U_y [47]	U_y mulesQHDFoam
20×20	19.513	19.363	19.670
40×40	19.663	19.602	19.910
80×80	19.663	19.648	19.757

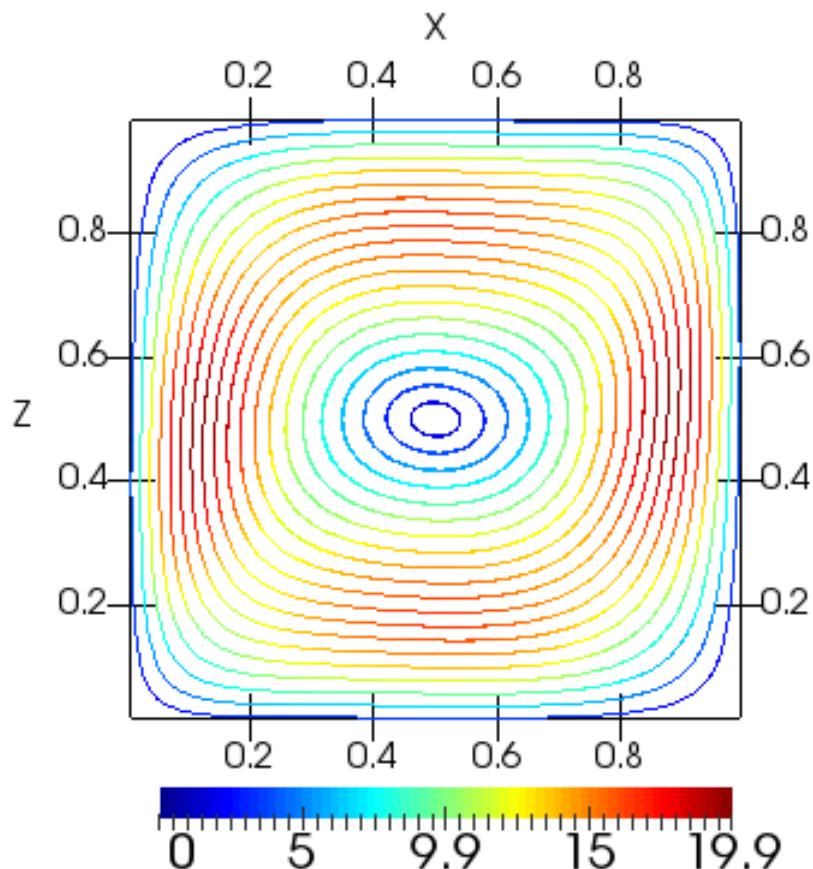


Рисунок 2.23 — Линии тока для задачи естественной конвекции

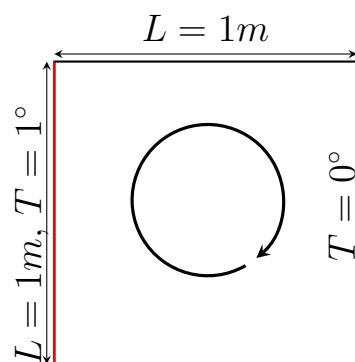


Рисунок 2.24 — Схематичное изображение задачи для естественной конвекции

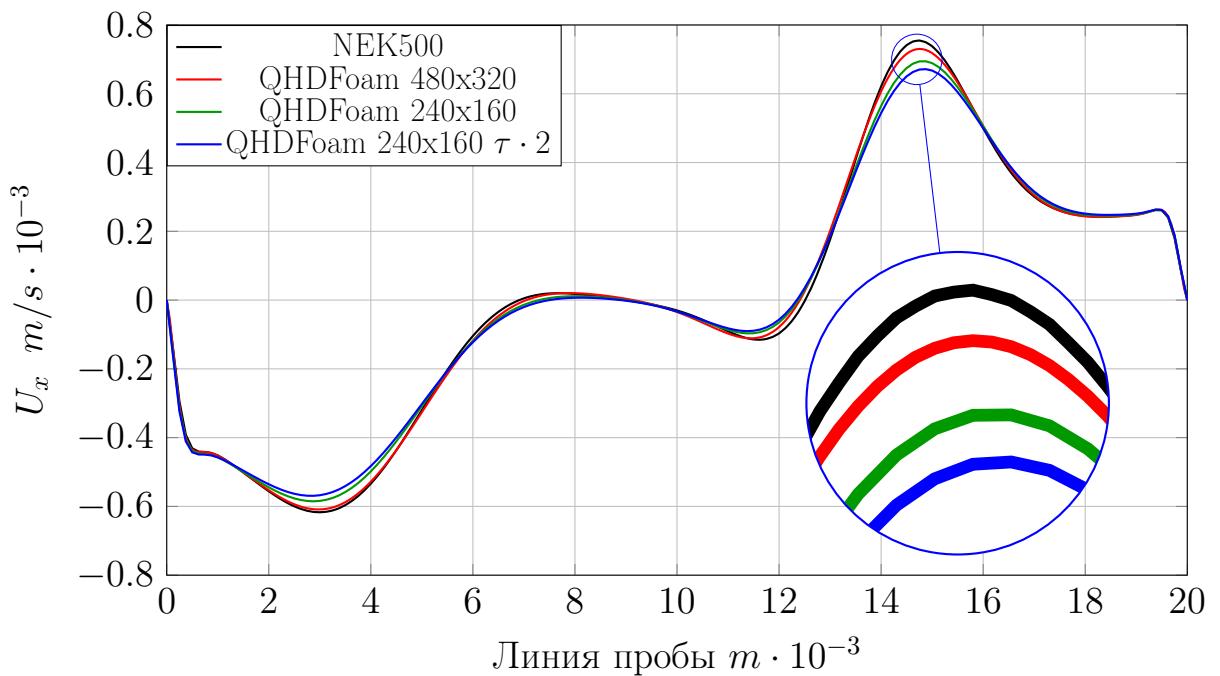


Рисунок 2.25 — Количественное сравнение результатов моделирования

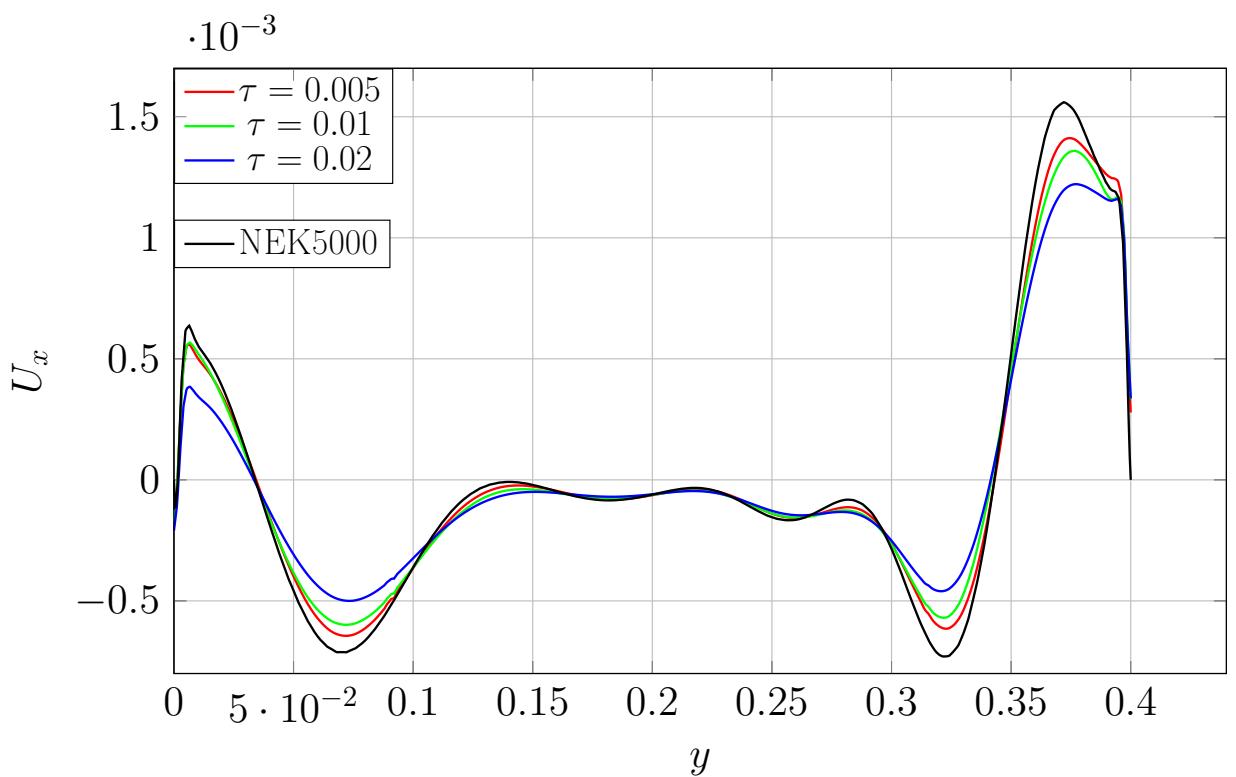


Рисунок 2.26 — Распределение скорости вдоль линии АВ.
Демонстрируется сходимость по τ .

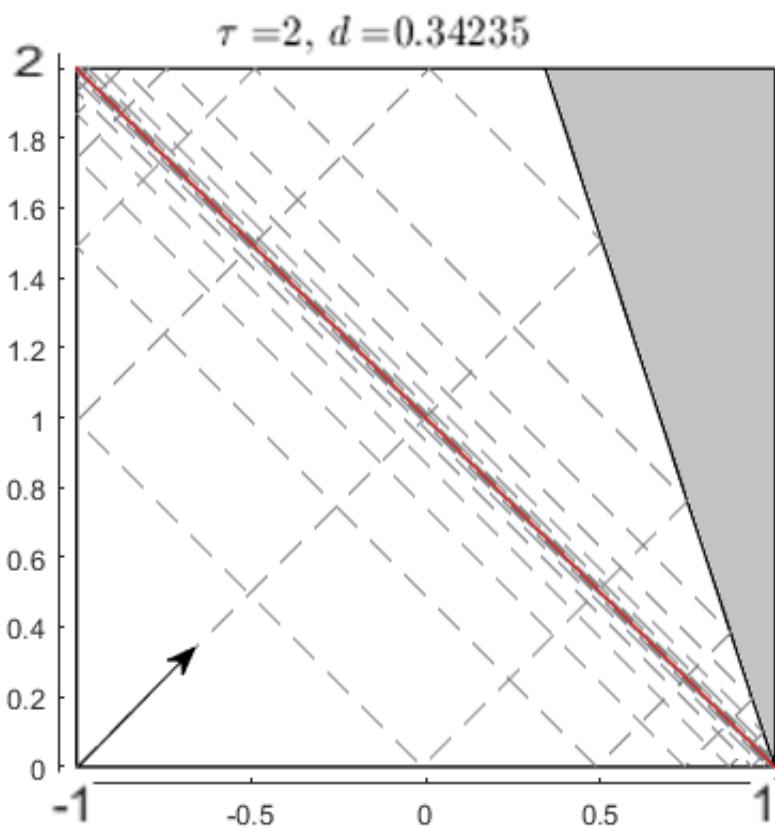


Рисунок 2.27 — Вырожденный аттрактор внутренних волн.

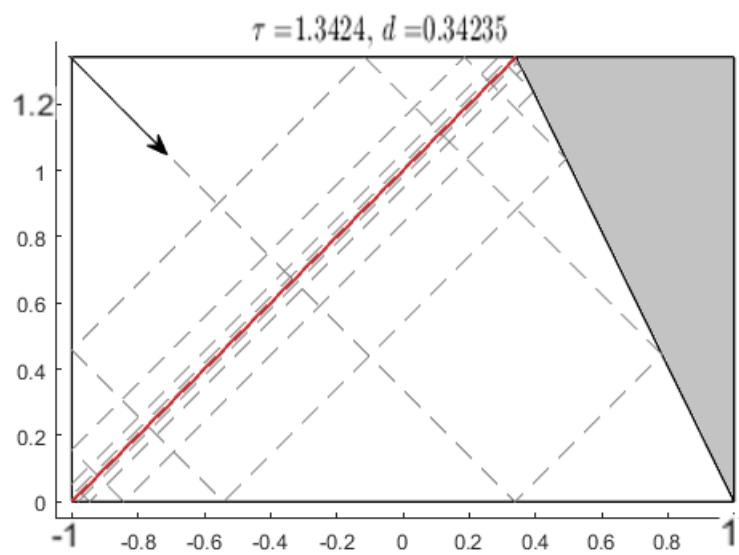
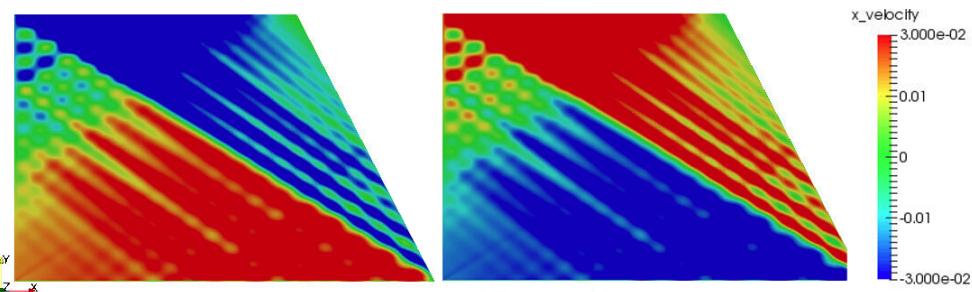
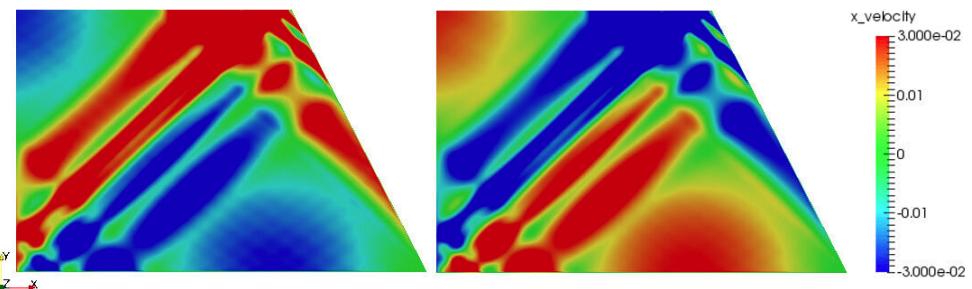


Рисунок 2.28 — Вырожденный аттрактор внутренних волн.



(a) Расчет при помощи метода спектральных элементов с первой критической частотой



(b) Расчет при помощи метода спектральных элементов со второй критической частотой

Рисунок 2.29 — Результаты расчетов при колебании волнопродуктора с критическими частотами

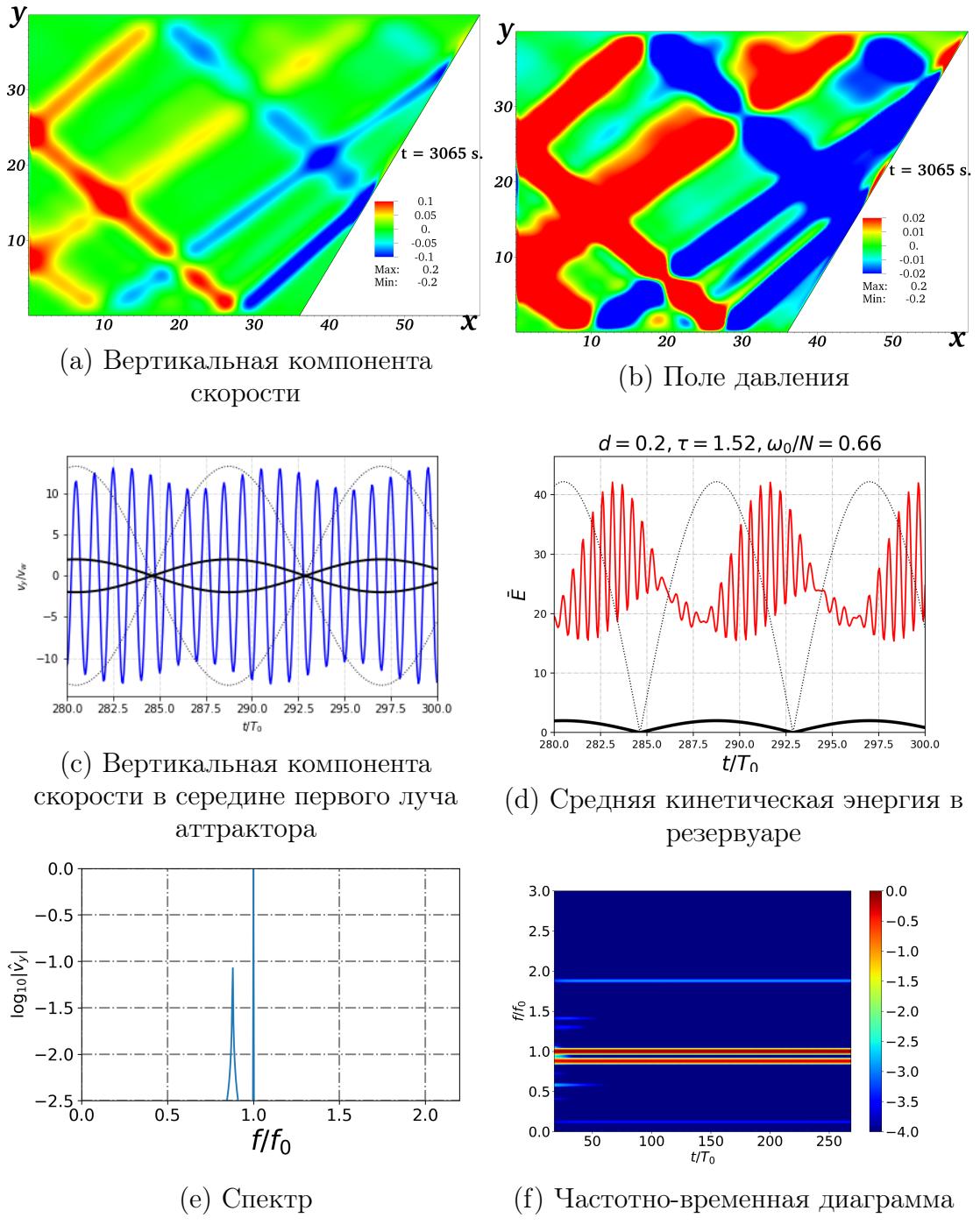
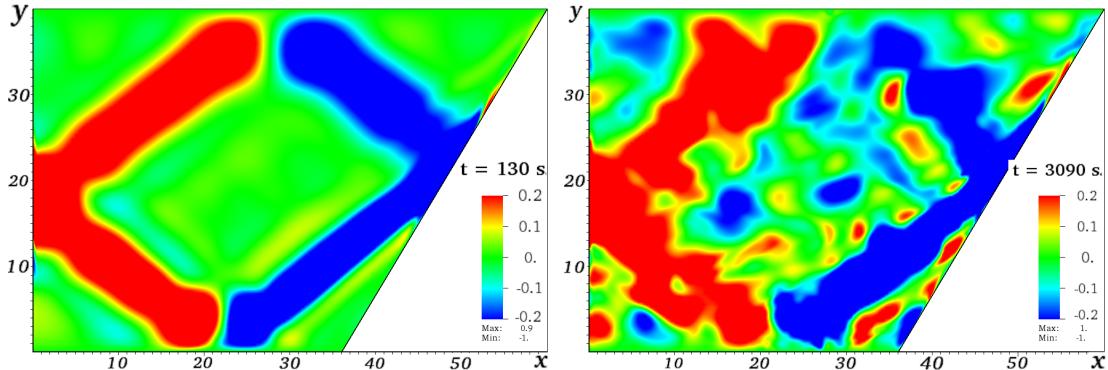
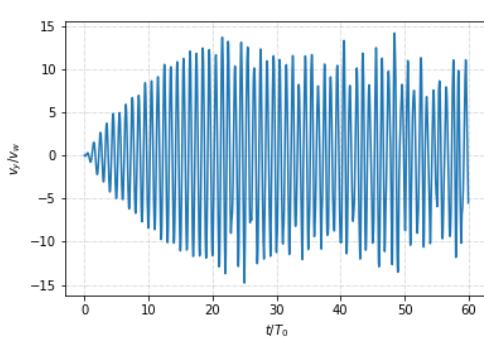


Рисунок 2.30 — Результаты количественного исследования характеристик течения стратифицированной жидкости в трапециевидном резервуаре при внешнем воздействии с двумя разнесенными частотами $\omega_1/N = 0.58$, $\omega_2/N = 0.66$. Черной линией на графиках вертикальной скорости и кинетической энергии показана огибающая амплитуды колебаний волнпородуктора.

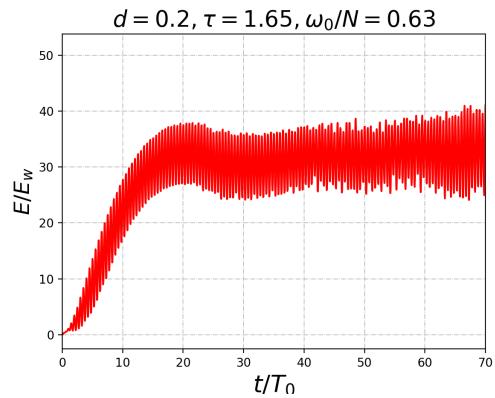


(a) Поле вертикальной скорости при образовании аттрактора

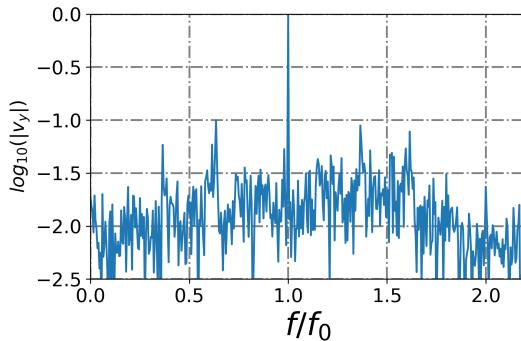
(b) Поле вертикальной скорости при образовании неустойчивостей



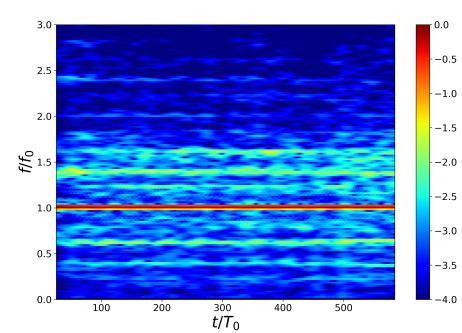
(c) зависимость скорости в середине первого луча аттрактора от времени



(d) Зависимость кинетической энергии от времени



(e) Частотный спектр скорости



(f) Частотно-временная диаграмма

Рисунок 2.31 — Количественное исследования аттрактора с совпадающими частотами и образование неустойчивости

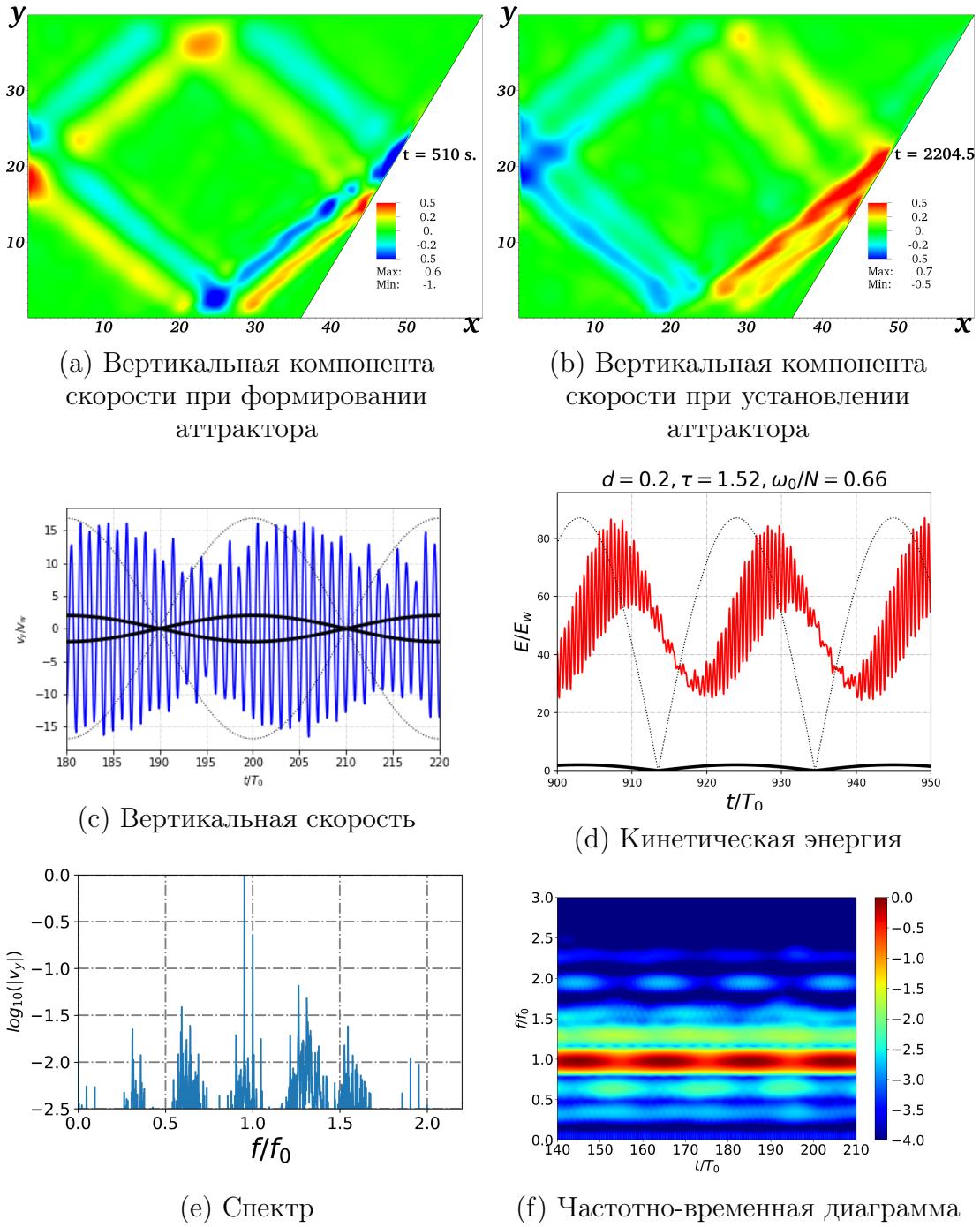


Рисунок 2.32 — Результаты количественного исследования характеристик течения стратифицированной жидкости в трапециевидном резервуаре при внешнем воздействии с двумя приближенными частотами $\omega_1/N = 0.66$ $\omega_2/N = 0.68$. Черной линией на графиках вертикальной скорости и кинетической энергии показана огибающая амплитуды колебаний волнпородуктора.

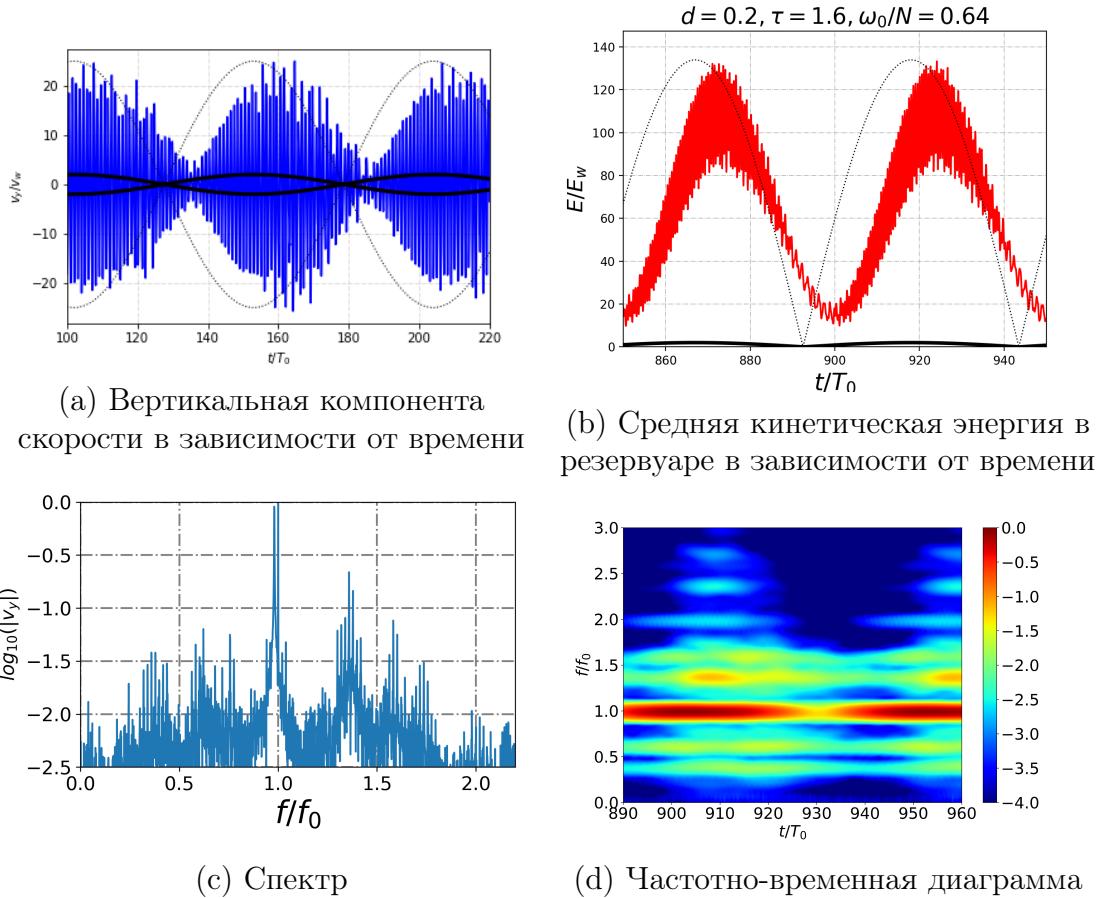


Рисунок 2.33 — Количественные результаты исследования бигармонического аттрактора внутренних волн с двумя близкими частотами $\omega_1/N = 0.628$, $\omega_2/N = 0.641$.

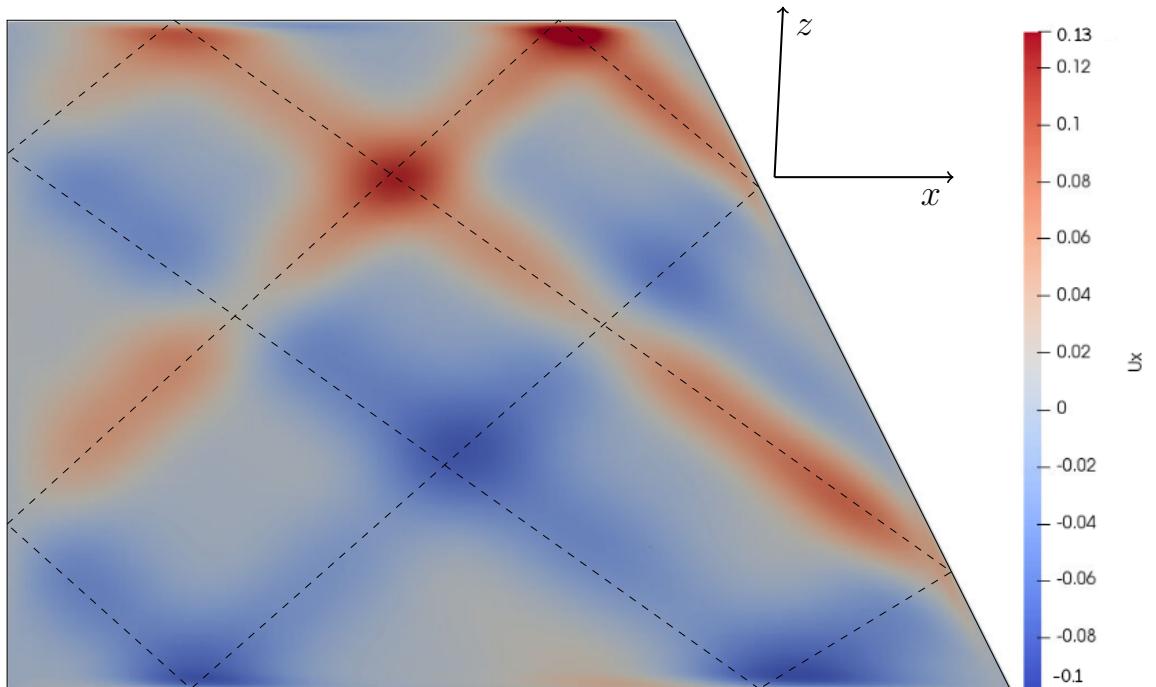


Рисунок 2.34 — Поле горизонтальной компоненты скорости для бигармонического аттрактора и трассировка лучей.

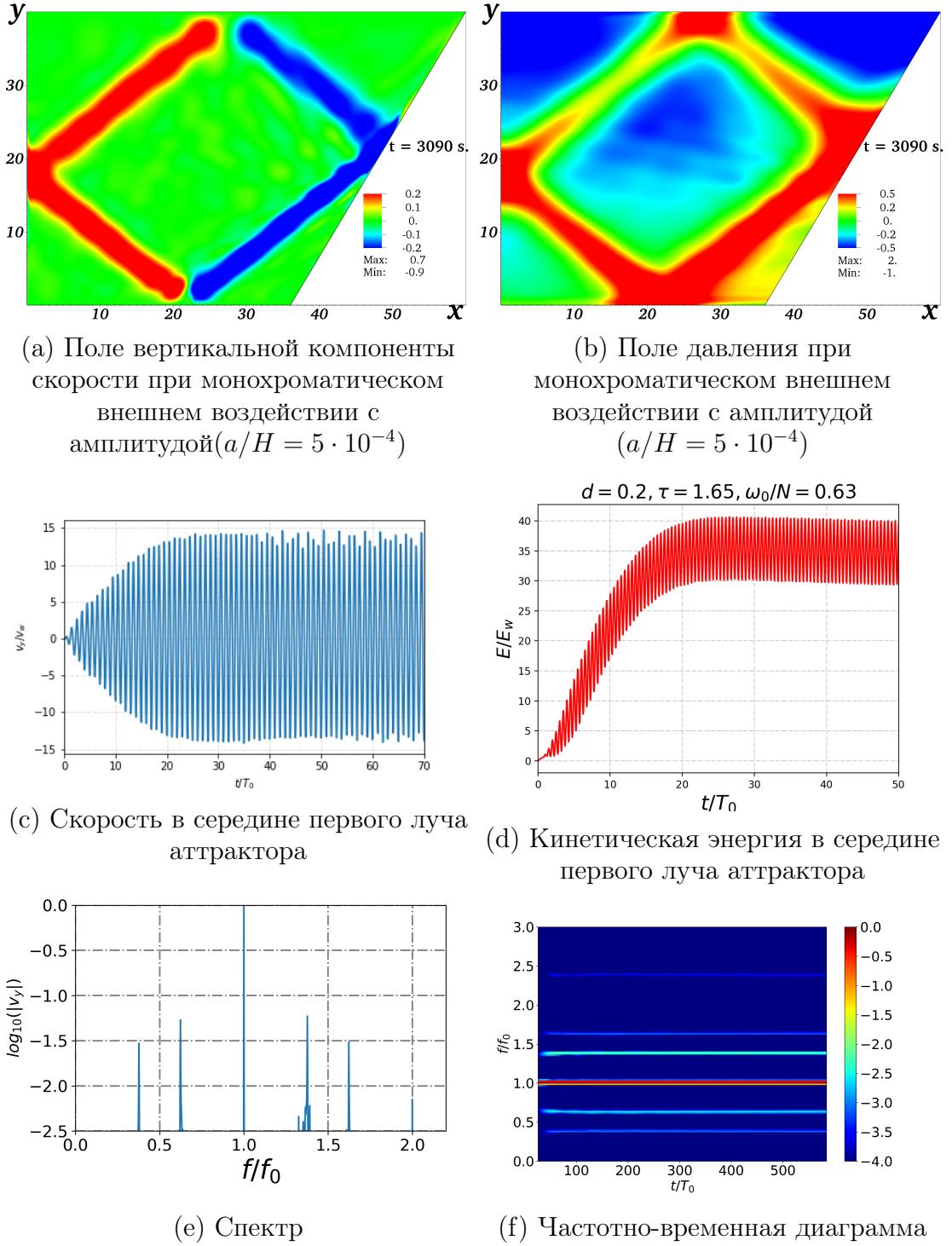


Рисунок 2.35 — Характерная картина течения при монохроматическом воздействии

Таблица 2.4 — Кинетическая энергия при монохроматических воздействиях с амплитудой $a = 0.02\text{cm}$

$\frac{\omega_0}{N}$	E_k	$\langle \bar{E}_k \rangle$	r
0.55 ($\omega_{cr,1}$)	$1.32 \cdot 10^{-4}$	2.151	0.618
0.58	$8.45 \cdot 10^{-4}$	12.56	0.281
0.59	$12 \cdot 10^{-4}$	17.33	0.3
0.63	$29 \cdot 10^{-4}$	36.68	0.103
0.641	$23 \cdot 10^{-4}$	28.55	0.1129
0.66	$13.2 \cdot 10^{-4}$	15.14	0.152
0.70	$2.84 \cdot 10^{-4}$	2.896	0.295
0.74 ($\omega_{cr,2}$)	$1.50 \cdot 10^{-4}$	1.356	0.215

Таблица 2.5 — Кинетическая энергия при монохроматических воздействиях с амплитудной $a = 0.1\text{cm}$.

$\frac{\omega_0}{N}$	$E_k(\text{erg})$	$\langle \bar{E}_k \rangle$	r
0.55 ($\omega_{cr,1}$)	$33.0 \cdot 10^{-4}$	2.14	0.6193
0.63	$725 \cdot 10^{-4}$	36.7	0.1346
0.74 ($\omega_{cr,2}$)	$37.0 \cdot 10^{-4}$	1.35	0.2192

3 Заключение

Показано, что результаты моделирования аттракторов внутренних волн, полученные с помощью методов конечного объёма при увеличении количества ячеек стремятся к результатам, полученным с помощью метода высокого порядка. Таким образом сделан вывод о целесообразности дальнейшего использования конечно объёмной реализации квазигидродинамических уравнений для моделирования аттракторов внутренних волн. Аналитически определены границы частотного диапазона существования аттрактора. Выведены формулы расчёта каждой из границ в зависимости от геометрических характеристик резервуара и частоты плавучести.

Получены результаты моделирования бигармонических аттракторов, то есть таких, которые возникают при воздействии на жидкость в трапециевидном резервуаре с двумя частотами, попадающими в интервал существования аттрактора. Установлено, что в этом случае картина течения каждой частоты по отдельности накладывается друг на друга. В резервуаре появляются два независимых аттрактора, каждый из которых совершает движение с собственной частотой, а взаимодействуют они только в точках пересечения.

Рассмотрены различные комбинации частот из диапазона существования аттракторов. Когда частоты совпадают, это фактически удваивает амплитуду колебаний волнопродуктора монохроматического аттрактора. В случае большой амплитуды колебаний волнопродуктора аттрактор начинает поражать дочерние волны и насыщает спектр. В случае разнесённых частот аттракторы практически не взаимодействуют, амплитуды не складываются. В случае, когда частоты приближены друг к другу, в момент совпадения фаз наблюдается взаимодействие аттракторов, тогда постепенно спектр частот начинает насыщаться, но в момент разности фаз спектр возвращается в исходное состояние. В случае, когда частоты располагаются еще ближе друг к другу, на частотно-временной диаграмме наблюдается еще более активное взаимодействие аттракторов, а на графике зависимости средней кинетической энергии в резервуаре от времени наблюдаются биения.

Выяснено, что с большой точностью сумма средних кинетических энергий атTRACTоров, образующихся при монохроматическом режиме колебаний волнопродуктора, равна средней кинетической энергии бигармонического атTRACTора.

Работа представляет собой первый шаг к моделированию атTRACTоров как природного явления в океане. Для этого необходимо разработать инструменты численного моделирования монохроматического атTRACTора в условиях геометрии, приближенной к реальной. А также исследовать течения возникающие при воздействии на стратифицированную жидкость суммой нескольких монохроматических колебаний.

Для реализации инструмента численного моделирования в сложной геометрии была разработана программа, которая подлежала государственной регистрации номер 2018663951. Разработанный инструмент имеет ряд преимуществ относительно уже существующих программных средств, такие как точность, гибкость, возможность встроить дополнительные модули физических процессов и возможность работать со сложной геометрией на неортогональных сетках. Количественное соответствие результатов моделирования методом конечного объема и методом спектральных элементов показывают целесообразность дальнейшего развития метода конечного объема на базе квазигидродинамических уравнений. Соответствие предсказанной трассировкой лучей формы бигармонического атTRACTора и результатов моделирования с помощью регуляризованных уравнений дает возможность сделать заключение о целесообразности дальнейшего применения.

Количественное исследование показало, что после выхода системы на режим установившихся колебаний средняя кинетическая энергия системы, возбуждаемой бигармоническим возмущением, с высокой точностью равна сумме энергий атTRACTоров, возбуждаемых монохроматическими возмущениями по отдельности. Таким образом, в линейном режиме с высокой точностью соблюдается принцип линейной суперпозиции, что выполняется также при малой разности частот.

В нелинейном случае средняя энергия системы существенным образом отличается от суммы энергий составляющих. Наблюдаются режим

«биений» сопровождающийся «вспышками» волновой турбулентности, возникающей вследствие каскада триадных взаимодействий. При этом уровень пульсаций кинетической энергии на фазе роста огибающей амплитуды волнопродуктора, может на порядок превышать уровень, соответствующий спаду амплитуды колебаний волнопродуктора.

Реализован квазигидродинамический подход на базе конечно объёмного пакета OpenFOAM. Программа охватывает дозвуковой и трансзвуковой диапазон скоростей, позволяет проводить численное моделирование вязких течений с переносом. Исходный код, тестовые примеры и документация размещена в открытом хранилище исходного кода на [github](#).

Список использованных источников

1. Garrett Christopher, Munk Walter. Space-Time scales of internal waves // Geophysical Fluid Dynamics. — 1972. — May. — Vol. 3, no. 3. — P. 225–264. — Access mode: <https://doi.org/10.1080/03091927208236082>.
2. Tidally generated internal-wave attractors between double ridges / P. ECHEVERRI, T. YOKOSSI, N. J. BALMFORTH, T. PEACOCK // Journal of Fluid Mechanics. — 2011. — Jan. — Vol. 669. — P. 354–374. — Access mode: <https://doi.org/10.1017/s0022112010005069>.
3. Судольский А.С. Динамические явления в водоемах. — — Л.: Гидрометеоиздат, 1991. — С. 263 с.
4. Морские вести России статья «Как выйти сухим из «мертвой воды»?». — <http://morvesti.ru/themes/1700/53300/>.
5. Старший. Плиний. Вопросы техники в «Естественной истории». — Вестн. древ. истории., 1946. — 3.
6. Vasseur Romain, Mercier Matthieu, Dauxois Thierry. Dead Waters: Large amplitude interfacial waves generated by a boat in a stratified fluid. — 2008. — 11.
7. Dead water video. — <https://www.youtube.com/watch?v=bzcgAshAg2o&t=1s>.
8. Buoyancy frequency profiles and internal semidiurnal tide turning depths in the oceans / Benjamin King, Mark Stone, H. P. Zhang et al. // Journal of Geophysical Research: Oceans. — 2012. — Apr. — Vol. 117, no. C4. — P. n/a–n/a. — Access mode: <https://doi.org/10.1029/2011jc007681>.
9. Rainville Luc, Pinkel Robert. Propagation of Low-Mode Internal Waves through the Ocean // Journal of Physical Oceanography. — 2006. — Jun. — Vol. 36, no. 6. — P. 1220–1236. — Access mode: <https://doi.org/10.1175/jpo2889.1>.
10. DAUXOIS THIERRY, YOUNG W. R. Near-critical reflection of internal waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1999. — Jul. — Vol. 390. — P. 271–295. — Access mode: <https://doi.org/10.1017/s0022112010005069>.

s0022112099005108.

11. Nikurashin Maxim, Vallis Geoffrey. A Theory of the Interhemispheric Meridional Overturning Circulation and Associated Stratification // *Journal of Physical Oceanography*. — 2012. — May. — Vol. 42, no. 10. — P. 1652–1667. — Access mode: <https://doi.org/10.1175/jpo-d-11-0189.1>.
12. Munk Walter, Wunsch Carl. Abyssal recipes II: energetics of tidal and wind mixing // *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*. — 1998. — Dec. — Vol. 45, no. 12. — P. 1977–2010. — Access mode: [https://doi.org/10.1016/s0967-0637\(98\)00070-3](https://doi.org/10.1016/s0967-0637(98)00070-3).
13. Ivey G.N., Winters K.B., Koseff J.R. Density Stratification, Turbulence, but How Much Mixing? // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2008. — Jan. — Vol. 40, no. 1. — P. 169–184. — Access mode: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110314>.
14. Polzin K. L. Spatial Variability of Turbulent Mixing in the Abyssal Ocean // *Science*. — 1997. — Apr. — Vol. 276, no. 5309. — P. 93–96. — Access mode: <https://doi.org/10.1126/science.276.5309.93>.
15. Tang Wenbo, Peacock Thomas. Lagrangian coherent structures and internal wave attractors // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2010. — Mar. — Vol. 20, no. 1. — P. 017508. — Access mode: <https://doi.org/10.1063/1.3273054>.
16. Guo Yuan, Holmes-Cerfon Miranda. Internal wave attractors over random, small-amplitude topography // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2015. — Dec. — Vol. 787. — P. 148–174. — Access mode: <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.648>.
17. Drijfhout Sybren, Maas Leo R. M. Impact of Channel Geometry and Rotation on the Trapping of Internal Tides // *Journal of Physical Oceanography*. — 2007. — Nov. — Vol. 37, no. 11. — P. 2740–2763. — Access mode: <https://doi.org/10.1175/2007jpo3586.1>.
18. Manders Astrid M M, Maas Leo R M. On the three-dimensional structure of the inertial wave field in a rectangular basin with one sloping boundary // *Fluid Dynamics Research*. — 2004. — Jul. — Vol. 35,

no. 1. — P. 1–21. — Access mode: <https://doi.org/10.1016/j.fluiddyn.2004.03.004>.

19. Observations on the robustness of internal wave attractors to perturbations / Jeroen Hazewinkel, Chrysanthi Tsimitri, Leo R. M. Maas, Stuart B. Dalziel // Physics of Fluids. — 2010. — Oct. — Vol. 22, no. 10. — P. 107102. — Access mode: <https://doi.org/10.1063/1.3489008>.

20. Maas Leo R. M., Lam Frans-Peter A. Geometric focusing of internal waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1995. — Oct. — Vol. 300. — P. 1–41. — Access mode: <https://doi.org/10.1017/s0022112095003582>.

21. Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid / Leo R. M. Maas, Dominique Benielli, Joël Sommeria, Frans-Peter A. Lam // Nature. — 1997. — Aug. — Vol. 388, no. 6642. — P. 557–561. — Access mode: <https://doi.org/10.1038/41509>.

22. Manders A., Maas Leo. Inertial Wave Focusing and Attraction in a Rectangular Tank With a Sloping Boundary. — 2003. — 04.

23. Veronis G. The Analogy Between Rotating and Stratified Fluids // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1970. — Jan. — Vol. 2, no. 1. — P. 37–66. — Access mode: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.02.010170.000345>.

24. Lam Frans-Peter A, Maas Leo R M. Internal wave focusing revisited; a reanalysis and new theoretical links // Fluid Dynamics Research. — 2008. — Feb. — Vol. 40, no. 2. — P. 95–122.

25. Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations / C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, H. Scolan et al. // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Mar. — Vol. 793. — P. 109–131. — Access mode: <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.119>.

26. Energy cascade in internal-wave attractors / C. Brouzet, E. V. Ermanyuk, S. Joubaud et al. // EPL (Europhysics Letters). — 2016. — feb. — Vol. 113, no. 4. — P. 44001. — Access mode: <https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F113%2F44001>.

27. Direct numerical simulation of internal gravity wave attractor in trapezoidal domain with oscillating vertical wall / C. Brouzet, T. Dauxois, E. Ermanyuk et al. // Proceedings of the Institute for System Programming of RAS. — 2014. — Vol. 26, no. 5. — P. 117–142. — Access mode: [https://doi.org/10.15514/ispras-2014-26\(5\)-6](https://doi.org/10.15514/ispras-2014-26(5)-6).
28. Elizarova Tatiana G. Quasi-Gas Dynamic equations. — Springer, 2009. — ISBN: 978364200295.
29. OpenFOAM High Performance Computing Solver for Simulation of Internal Wave Attractors in Stratified Flows Using Regularized Hydrodynamic Equations / Matvey Krashenin, Daniil Ryazanov, Tatiana Elizarova et al. // 2018 Ivannikov Ispras Open Conference (ISPRAS). — IEEE, 2018. — Nov. — Access mode: <https://doi.org/10.1109/ispras.2018.00027>.
30. Elizarova T.G. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. — 2018. — 02. — ISBN: 978-589-176-42-00.
31. Rarefied Gas Flow Simulation Based on Quasi Gas Dynamic Equations / T.G. Elizarova, I.A. Graur, J.C. Lengrand, A. Chpoun // AIAA Journal. — 1995. — Vol. 33, no. 12. — P. 2316–2324.
32. Elizarova T.G. Time Averaging as an Approximate Technique for Constructing Quasi-Gasdynamic and Quasi-Hydrodynamic Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 51, no. 11. — P. 1973–1982.
33. Elizarova Tatiana G., Sheretov Yurii V. Theoretical and numerical analysis of quasi-gasdynamic and quasi-hydrodynamic equations // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2001. — Vol. 41, no. 2. — P. 219–234.
34. Brouzet christophe. Internal wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing : Theses : 2016LYSEN012 / christophe Brouzet ; Université de Lyon. — 2016. — Jul. — Access mode: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01361201>.
35. Patera Anthony T. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion // Journal of Computational Physics. — 1984. — Jun. — Vol. 54, no. 3. — P. 468–488. — Access mode:

[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90128-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90128-1).

36. NEK5000 Oficial website. — <https://nek5000.mcs.anl.gov/>.
37. Issa R.I, Gosman A.D, Watkins A.P. The computation of compressible and incompressible recirculating flows by a non-iterative implicit scheme // Journal of Computational Physics. — 1986. — Jan. — Vol. 62, no. 1. — P. 66–82. — Access mode: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90100-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90100-2).
38. OpenFOAM Oficial website. — <https://www.openfoam.com/>.
39. Development of OpenFOAM Solver for Compressible Viscous Flows Simulation Using Quasi-Gas Dynamic Equations / Matvey V. Kravoshin, Daniil A. Ryazanov, Elena V. Smirnova et al. // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS). — IEEE Xplore, 2017. — Nov. — Access mode: <https://doi.org/10.1109/ispras.2017.00026>.
40. Istomina Maria Alexandrovna, Shilnikov Evgeny Vladimirovich. About approximation of stream sizes on spatial grids of irregular structure // Keldysh Institute Preprints. — 2019. — no. 86. — P. 1–22. — Access mode: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-86>.
41. Hines Jonathan. A Comparative Study of the SIMPLE and Fractional Step Time Integration Methods for Transient Incompressible Flows. — 2008. — 01.
42. Erturk E., Dursun B. Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow in a driven skewed cavity // ZAMM. — 2007. — May. — Vol. 87, no. 5. — P. 377–392. — Access mode: <https://doi.org/10.1002/zamm.200610322>.
43. Sparrow E. M., Chuck W. PC SOLUTIONS FOR HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW DOWNSTREAM OF AN ABRUPT, ASYMMETRIC ENLARGEMENT IN A CHANNEL // Numerical Heat Transfer. — 1987. — Jul. — Vol. 12, no. 1. — P. 19–40. — Access mode: <https://doi.org/10.1080/10407788708913572>.
44. Kim J, Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations // Journal of Computational Physics. — 1985. — Jun. — Vol. 59, no. 2. — P. 308–323. — Access mode:

[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(85\)90148-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(85)90148-2).

45. Hackman L. P., Raithby G. D., Strong A. B. Numerical predictions of flows over backward-facing steps // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 1984. — Aug. — Vol. 4, no. 8. — P. 711–724. — Access mode: <https://doi.org/10.1002/fld.1650040802>.
46. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow / B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira, B. Schönung // Journal of Fluid Mechanics. — 1983. — feb. — Vol. 127, no. -1. — P. 473. — Access mode: <https://doi.org/10.1017/s0022112083002839>.
47. Numerical modelling convective flows in Function of stream, velocity vorticity, temperature / P.N. Vabishevich, M. M. Makarov, V. V. Chudanov, A. G. Churbanov // 2018 Ivannikov Ispras Open Conference (ISPRAS). — IEEE, 1993. — NASA Technical Memorandum 84521.
48. Internal wave attractors: different scenarios of instability / C. Brouzet, E. Ermanyuk, S. Joubaud et al. // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Dec. — Vol. 811. — P. 544–568. — Access mode: <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.759>.
49. Instabilities of Internal Gravity Wave Beams / Thierry Dauxois, Sylvain Joubaud, Philippe Odier, Antoine Venaille // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2018. — Vol. 50, no. 1. — P. 131–156. — <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122316-044539>.