# Аппроксимация уравнений в OpenFOAM

Разберем алгоритм аппроксимации слагаемых в OpenFOAM на примере квазигазодинамического уравнения сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_m = 0, \tag{1}$$

где $\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w})$, $\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\left[\nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p\right]$.

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) - \nabla \cdot (\tau \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u})) - \nabla \cdot (\tau \nabla p) = 0. \tag{2}$$

Распишем конечнообъемную аппроксимацию слагаемых уравнения (2) в центрах конечных объемов. При этом пользуемся тем, что значение каждой величины в центре ячейки есть среднее этой величины по ячейке, вычисляемое следующим образом:

$$< a >= \frac{1}{V} \int\limits_V a \, dV,$$

где $V$ — объем ячейки.

- Рассмотрим слагаемое $\nabla \cdot (\rho \vec{u})$:

$$< \nabla \cdot (\rho \vec{u}) >= \frac{1}{V} \int\limits_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \; dV = \frac{1}{V} \int\limits_{\partial V} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \approx \frac{1}{V} \sum_f \rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{S}_f.$$

Здесь индекс $f$ указывает на значение величины на грани конечного объема, $\vec{S}_f = S_f \vec{n}$ — нормаль к грани, умноженная на ее площадь. Величины, стоящие под суммой, легко вычисляются с помощью интерполирования полей соответствующих величин, заданных в центрах конечных объемов, на грани (пр. `rhof = fvc::interpolate(rho)`). Значение $\vec{S}_f$ хранится в переменной `mesh.Sf()`.

- Распишем среднее значение по ячейке для слагаемого $\nabla \cdot (\tau \nabla p)$:

$$< \nabla \cdot (\tau \nabla p) >= \frac{1}{V} \int\limits_V \nabla \cdot (\tau \nabla p) \; dV = \frac{1}{V} \int\limits_{\partial V} \tau \nabla p \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{V} \int\limits_{\partial V} \tau \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \, dS \approx \frac{1}{V} \sum_f \tau_f \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right)_f S_f.$$

Вычисление производной по нормали к грани конечного объема от поля, заданного в центрах конечных объемов (в нашем случае от поля давления), производится командой `fvc::snGrad(p)`. Значение площади грани хранится в переменной `mesh.magSf()`.

- Перейдем к последнему слагаемому, $\nabla \cdot (\tau \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}))$.

$$< \nabla \cdot (\tau \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u})) >= \frac{1}{V} \int\limits_{\partial V} \tau \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{n} \, dS \approx \frac{1}{V} \sum_f \tau_f \left( \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \right)_f \cdot \vec{S}_f.$$

В данном случае для определения средней величины данного слагаемого по конечному объему необходимо вычислить $(\nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}))_f$. Однако в OpenFOAM дивергенцию некоторой величины можно вычислить, если поле данной величины задано на гранях контрольных объемов. В этом случае после применения оператора дивергенции (как и при разборе работы с предыдущим слагаемым) результат будет известен в центрах контрольных объемов. Для того, чтобы вычислить значение данного слагаемого на грани стандартными средствами OpenFOAM, необходимо вычислить значение слагаемого в центрах конечных объемов, а затем синтерполировать полученные значения на грани конечного объема. Однако в этом случае для вычисления значения слагаемого на грани потребуются значения величин с четырех ячеек (в случае прямоугольной сетки), что не соотносится с оригинальным шаблоном.

Стоит заметить, что для одномерного случая можно обойти эту проблему и реализовать оригинальный шаблон численной схемы.

# Реализация численной схемы для одномерной задачи в OpenFOAM

### Уравнения для одномерной задачи

•
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

где $j_m = \rho u - \rho w$, $\rho w = \tau \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + p\right)$.

•
$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (j_m u)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \tag{4}$$

где $\Pi_{xx} = uw^* + R^*$, $w^* = \tau\left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right)$, $R^* = \tau\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

•
$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (j_m H)}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial (\Pi_{xx} u)}{\partial x}. \tag{5}$$

Здесь $E = \rho\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho(\gamma-1)}\right)$, $H = \frac{E+p}{\rho} = \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{p}{\rho}$, $q = -uR^q$,
$R^q = \tau\rho\left[\frac{u}{\gamma-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) + pu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$.

### Исходная разностная схема

Выпишем разностную схему для уравнений (3), (4), (5). Для этого будем пользоваться явной схемой по времени и центральными разностями для вычисления производных.

• разностная схема для уравнения (3).

$$\widehat{\rho}_i = \rho_i - \frac{\Delta t}{h}(j_{m,i+1/2} - j_{m,i-1/2}),$$

$$j_{m,i+1/2} = (\rho u)_{i+1/2} - (\rho w)_{i+1/2} = \rho_{i+1/2} u_{i+1/2} - (\rho w)_{i+1/2},$$

$$j_{m,i-1/2} = (\rho u)_{i-1/2} - (\rho w)_{i-1/2} = \rho_{i-1/2} u_{i-1/2} - (\rho w)_{i-1/2},$$

$$(\rho w)_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} \frac{1}{h} \left( \rho_{i+1} u_{i+1}^2 + p_{i+1} - \rho_i u_i^2 - p_i \right),$$

$$(\rho w)_{i-1/2} = \tau_{i-1/2} \frac{1}{h} \left( \rho_i u_i^2 + p_i - \rho_{i-1} u_{i-1}^2 - p_{i-1} \right).$$

- разностная схема для уравнения (4).

$$\widehat{\rho u}_i = (\rho u)_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{m,i+1/2} u_{i+1/2} - j_{m,i-1/2} u_{i-1/2}) - \frac{\Delta t}{h} (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) + \frac{\Delta t}{h} (\Pi_{xx,i+1/2} - \Pi_{xx,i-1/2}),$$

$$\Pi_{xx,i+1/2} = u_{i+1/2} w^*_{i+1/2} + R^*_{i+1/2},$$

$$\Pi_{xx,i-1/2} = u_{i-1/2} w^*_{i-1/2} + R^*_{i-1/2},$$

$$w^*_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} \left( \rho_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right),$$

$$w^*_{i-1/2} = \tau_{i-1/2} \left( \rho_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right),$$

$$R^*_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} \left( u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} + \gamma_{i+1/2} p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right),$$

$$R^*_{i-1/2} = \tau_{i-1/2} \left( u_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h} + \gamma_{i-1/2} p_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right).$$

- разностная схема для уравнения (5).

$$\widehat{E}_i = E_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{m,i+1/2} H_{i+1/2} - j_{m,i-1/2} H_{i-1/2}) - \frac{\Delta t}{h} (q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) + \frac{\Delta t}{h} (\Pi_{xx,i+1/2} u_{i+1/2} - \Pi_{xx,i-1/2} u_{i-1/2}),$$

$$E_i = \frac{\rho_i u_i^2}{2} + \frac{p_i}{\gamma_i - 1},$$

$$H_{i+1/2} = \frac{E_{i+1/2} + p_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}},$$

$$H_{i-1/2} = \frac{E_{i-1/2} + p_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2}},$$

$$q_{i+1/2} = -u_{i+1/2} R^q_{i+1/2},$$

$$R^q_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} \rho_{i+1/2} \left[ \frac{u_{i+1/2}}{\gamma_{i+1/2} - 1} \frac{p_{i+1}/\rho_{i+1} - p_i/\rho_i}{h} + p_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{1/\rho_{i+1} - 1/\rho_i}{h} \right],$$

$$q_{i-1/2} = -u_{i-1/2} R^q_{i-1/2},$$

$$R^q_{i-1/2} = \tau_{i-1/2} \rho_{i-1/2} \left[ \frac{u_{i-1/2}}{\gamma_{i-1/2} - 1} \frac{p_i/\rho_i - p_{i-1}/\rho_{i-1}}{h} + p_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{1/\rho_i - 1/\rho_{i-1}}{h} \right].$$

## Различия между реализациями разностной схемы

| Слагаемое | Схема для расчета `fortran` | Схема для расчета OpenFOAM |
|---|---|---|
| $j_{m,i+1/2}$ | $(\rho u)_{i+1/2}-\frac{\tau_{i+1/2}}{h}(\rho_{i+1}u_{i+1}-\rho_i u_i+p_{i+1}-p_i)$ | $\rho_{i+1/2}u_{i+1/2}-\frac{\tau_{i+1/2}}{h}(\rho_{i+1}u_{i+1}-\rho_i u_i+p_{i+1}-p_i)$ |
| $\Pi_{xx,i+1/2}$ | $\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\left(\gamma\tau_{i+1/2}p_{i+1/2}+\tau_{i+1/2}(\rho u^2)_{i+1/2}\right)+2\tau_{i+1/2}u_{i+1/2}\frac{p_{i+1}-p_i}{h}$ | $\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\left(\gamma\tau_{i+1/2}p_{i+1/2}+\tau_{i+1/2}\rho_{i+1/2}u^2_{i+1/2}\right)+2\tau_{i+1/2}u_{i+1/2}\frac{p_{i+1}-p_i}{h}$ |
| $q_{i+1/2}$ | $-\frac{\tau_{i+1/2}}{h}(\rho u^2)_{i+1/2}\left[(e^{int}_{i+1}-e^{int}_i)+p_{i+1/2}\left(\frac{1}{\rho_{i+1}}-\frac{1}{\rho_i}\right)\right]$ | $-\frac{\tau_{i+1/2}}{h}\rho_{i+1/2}u^2_{i+1/2}\left[\left(\frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}(\gamma-1)}-\frac{p_i}{\rho_i(\gamma-1)}\right)+p_{i+1/2}\left(\frac{1}{\rho_{i+1}}-\frac{1}{\rho_i}\right)\right]$ |

Здесь обозначение $(a)_{i+1/2}$ указывает на линейное интерполирование величины в точку $i+1/2$ и вычисляется как $(a)_{i+1/2} = 0.5(a_{i+1}+a_i)$. Величина из программы `fortran` $e^{int}_i = \dfrac{p_i}{\rho_i(\gamma-1)}$. Соответствующие величины в точках $i-1/2$ вычисляются аналогичным образом.

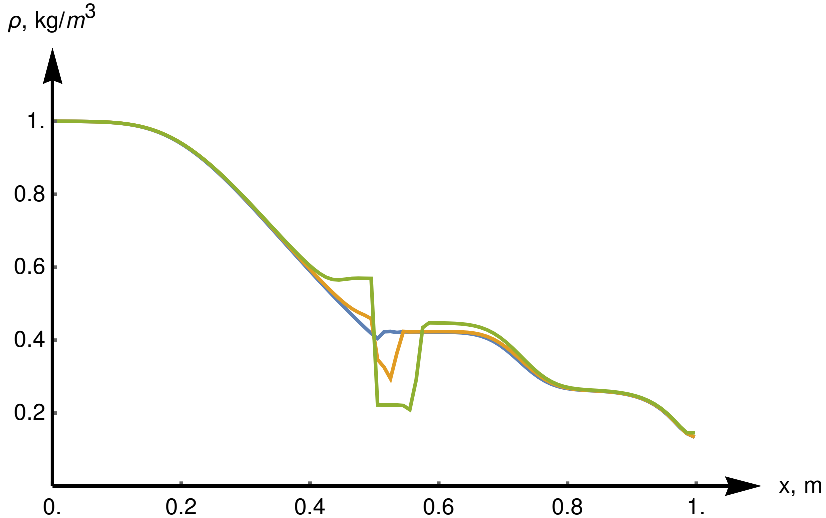


Рис. 1. Иллюстрация к различиям разностной схемы. Синяя линия — реализация OpenFOAM, оранжевая линия — $j_m$ вычисляется как на `fortran`, зеленая линия — схема `fortran`.

Были выявлены три способа интерполирования величин $\rho u$ и $\rho u^2$, приводящие к лучшему из наблюдаемых результатов.

**Первый способ (как в OpenFOAM):**

- $\rho_{i+1/2} = 0.5(\rho_{i+1} + \rho_i)$;
- $u_{i+1/2} = 0.5(u_{i+1} + u_i)$;
- $(\rho u)|_{i+1/2} = \rho_{i+1/2} u_{i+1/2}$;
- $(\rho u^2)|_{i+1/2} = \rho_{i+1/2}(u_{i+1/2})^2$.

**Второй способ:**

- $\rho_{i+1/2} = 0.5(\rho_{i+1} + \rho_i)$;
- $(\rho u)|_{i+1/2} = 0.5(\rho_{i+1} u_{i+1} + \rho_i u_i)$;
- $u_{i+1/2} = (\rho u)|_{i+1/2} / \rho_{i+1/2}$;
- $(\rho u^2)|_{i+1/2} = \rho_{i+1/2}(u_{i+1/2})^2$.

**Третий способ:**

- $\rho_{i+1/2} = 0.5(\rho_{i+1} + \rho_i)$;
- $u_{i+1/2} = 0.5(u_{i+1} + u_i)$;
- $(\rho u)|_{i+1/2} = \rho_{i+1/2} u_{i+1/2}$;
- $(\rho u^2)|_{i+1/2} = 0.5\left(\rho_{i+1} u_{i+1}^2 + \rho_i u_i^2\right)$.

## Сравнение трех способов интерполирования слагаемых

Сравним результаты, полученные с помощью данных способов интерполирования слагаемых, на примере следующей задачи.

Пусть область [0, 1] разделена на две равные части. При этом в левой части области $\rho_L = 1.0$, $u_L = -2.0$, $p_L = 0.4$, $T_L = 1.0$; в правой части $\rho_R = 1.0$, $u_R = 2.0$, $p_R = 0.4$, $T_R = 1.0$. Величина $\gamma = 1.4$, приведенная универсальная газовая постоянная $R = 0.4$. Расчет проводится до $T_{end} = 0.15$, $dt = 0.15 \cdot 10^{-3}$, шаг пространственной дискретизации $h = 0.01$. Полагаем $\mu = 0$.

Результаты, полученные в конечный момент времени с помощью трех способов интерполирования слагаемых, представлены на графиках 2–5. Номера графиков относятся к способам интерполирования слагаемых соответственно. Также приведен график аналитического решения задачи для полей скорости и температуры.

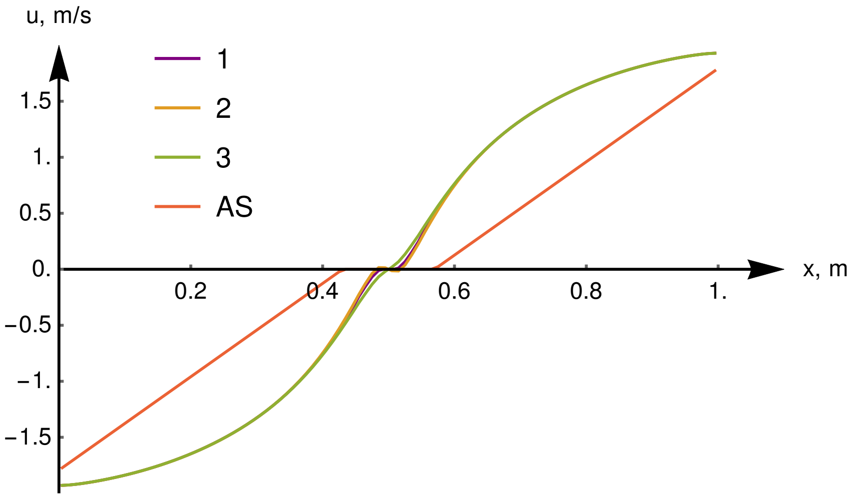


Рис. 2. Иллюстрация к способам интерполирования слагаемых (поле скорости). Фиолетовая линия — первый способ, оранжевая линия — второй, зеленая линия — третий, красная линия — аналитическое решение.

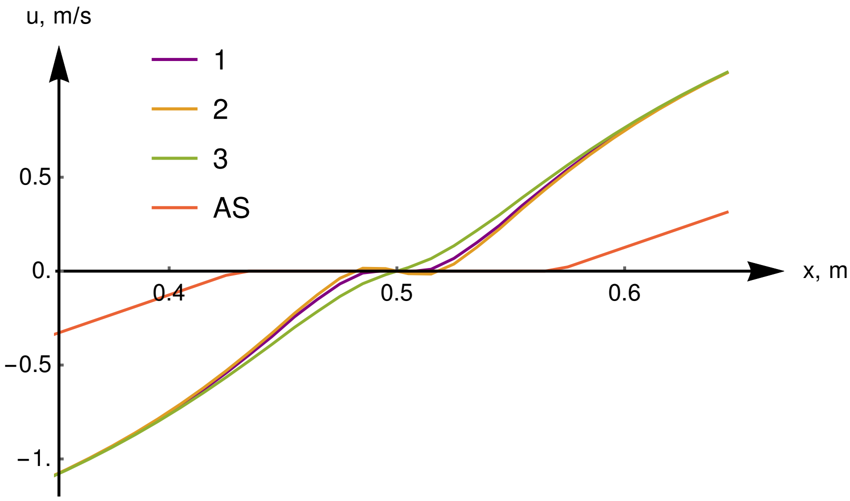


Рис. 3. Иллюстрация к способам интерполирования слагаемых (поле скорости в области [0.35, 0.65]). Фиолетовая линия — первый способ, оранжевая линия — второй, зеленая линия — третий, красная линия — аналитическое решение.

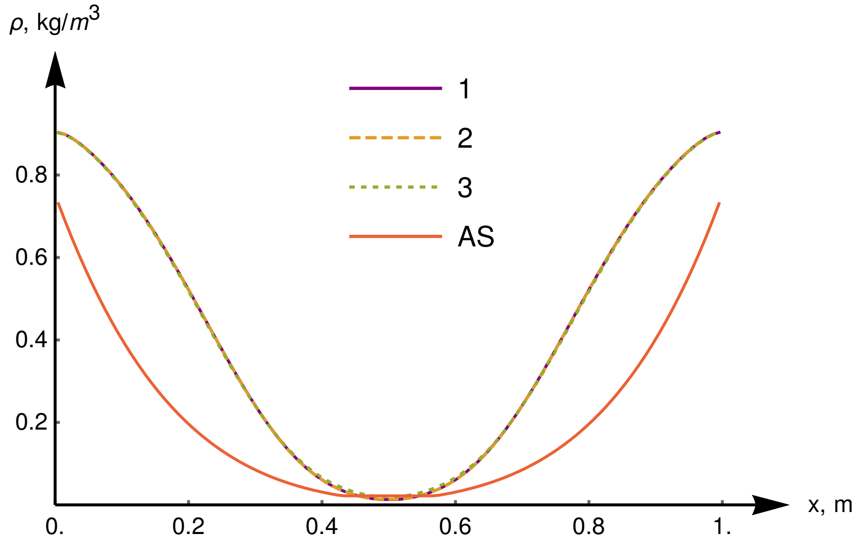


Рис. 4. Иллюстрация к способам интерполирования слагаемых (поле плотности). Фиолетовая линия — первый способ, оранжевая линия — второй, зеленая линия — третий, красная линия — аналитическое решение.

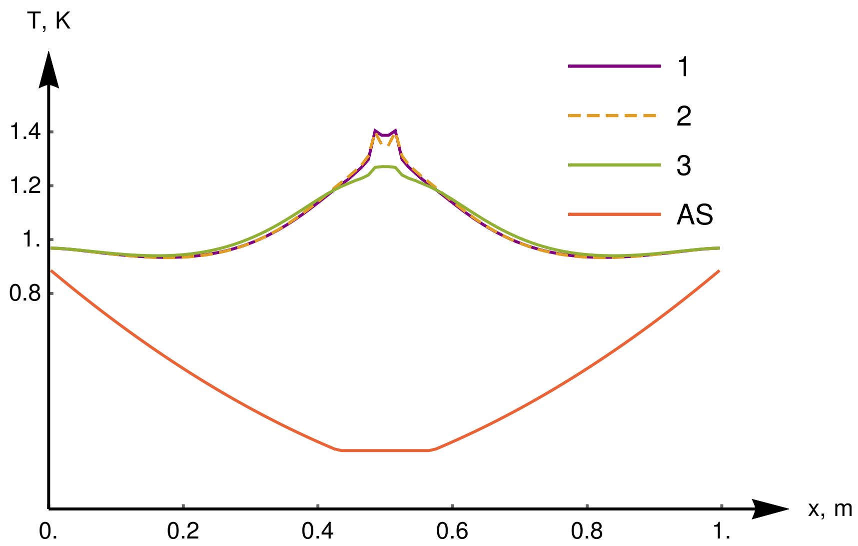


Рис. 5. Иллюстрация к способам интерполирования слагаемых (поле температуры). Фиолетовая линия — первый способ, оранжевая линия — второй, зеленая линия — третий, красная линия — аналитическое решение.

# Переход к двумерной задаче

## Расчет градиента на гранях ячеек. Случай равномерной прямоугольной сетки

Пусть требуется найти градиент поля $f(\vec{x})$, заданного в центрах ячеек равномерной прямоугольной сетки, в точке $p$, являющейся центром грани между ячейками 3 и 4 (см. рис. 6). Шаг пространственной дискретизации полагаем одинаковым в обоих направлениях и равным $h$. Рассмотрим два способа вычисления частных производных на грани.

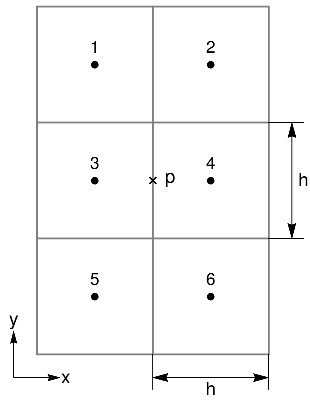


Рис. 6. Сетка для расчета градиента на грани между ячейками 3 и 4.

**Стандартный способ**. Пусть $f_i = f(\vec{x}_i)$ — значение поля $f(\vec{x})$ в центре ячейки с номером $i$, $i=\overline{1,6}$. Тогда, воспользовавшись стандартными формулами вычисления разностных производных (используем симметричные схемы), получаем:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p = \frac{1}{h}\left(f_4 - f_3\right),$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p = \frac{1}{2h}\left(\frac{f_1+f_2}{2} - \frac{f_5+f_6}{2}\right).$$

**Метод наименьших квадратов**. Пусть необходимо вычислить градиент функции $f(\vec{x})$ в точке с координатами $\vec{x}_p$, зная координаты точек $\vec{x}_i$, $i=\overline{1,N}$, а также значения функции $f_p$, $f_i$, $i=\overline{1,N}$. Градиент функции методом наименьших квадратов вычисляется следующим образом:

$$\left.(\nabla f)\right|_p = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \mathbf{G}^{-1}\vec{d}_i(f_i - f_p),$$

здесь индекс $i$ относится к номерам точек, по которым осуществляется расчет; $N$ — количество точек; $\vec{d}_i = \vec{x}_i - \vec{x}_p$; $w_i = \dfrac{1}{|\vec{d}_i|}$; $\mathbf{G} = \sum\limits_{i=1}^{N} w_i^2 \vec{d}_i \otimes \vec{d}_i$.

Выпишем формулу для вычисления частных производных в точке $p$ для примера с рис. 6.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p = \frac{1}{7h}\left(f_2 - f_1 + 5(f_4 - f_3) + f_6 - f_5\right),$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p = \frac{1}{2h}\left(\frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{f_5 + f_6}{2}\right).$$

Видно, что для данного примера схемы вычисления производных по $y$, получаемые двумя способами, совпадают.

Если вычислить разницу в производных по координате $x$, предложенную двумя способами, и с помощью формулы Тейлора перевести все слагаемые в ней в точку $p$, получим

$$\Delta = \frac{h^2}{7}\, f_{xyy}\big|_p + O(h^3).$$

Полагая разницу между двумя схемами допустимо малой (и учитывая, что обе схемы имеют второй порядок точности), в дальнейшем при реализации уравнений QGD в OpenFOAM будем использовать метод наименьших квадратов для вычисления градиента скалярного поля. Также необходимо отметить, что в одномерном случае вычисление производной с помощью двух методов производится по одной и той же схеме.

### Разностная схема, заложенная в QGDFoam

Для вычисления пространственных производных в QGDFoam использовался трехточечный шаблон. В нем были приняты следующие обозначения. Если рассматривается величина в центре конкретной ячейки, она помечается индексом $o$ («own», значение в «своей» ячейке). Величины в соседних к «своей» ячейках помечаются индексом $n$ («neighbour», «соседние»). Полагается, что положительное направление нормали граней «своей» ячейки совпадает с внешними нормалями к грани (см. рис. 7).

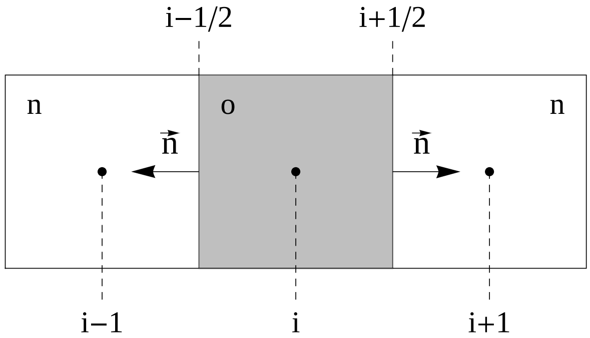


Рис. 7. Иллюстрация к шаблону разностной схемы.

Для реализации разностной схемы (??)–(??) в OpenFOAM использовались следующие операторы:

- `af = fvc::interpolate(a)`. Здесь $a$ — поле некоторой величины, заданное в центрах контрольных объемов, $a_f$ — поле, заданное в центрах граней конечных объемов, полученное линейной интерполяцией значений поля $a$ (напр. $a_{i+1/2} = 0.5(a_i + a_{i+1})$).
- `fvm::ddt(a)` — производная по времени величины $a$, $\dfrac{\widehat{a} - a}{\Delta t}$. Здесь $a$ — поле, заданное в центрах контрольных объемов.
- `fvc::div(phi)` — дивергенция величины, потоком которой через грани ячейки является поле φ. Рассмотрим поле $\vec{a}$ и интерполяцию этого поля на грани конечных объемов $\vec{a}_f$. Пусть требуется найти величину дивергенции поля $\vec{a}$. Согласно соглашениям метода контрольного объема, значение некоторого поля в центре конечного объема примерно равно среднему значению этого поля по ячейке. В таком случае, дивергенция поля $\vec{a}$ в центре конечного объема приближенно равна

$$(\nabla\cdot\vec{a})_o \approx <\nabla\cdot\vec{a}> = \frac{1}{V}\int_V \nabla\cdot\vec{a}\, dV = \frac{1}{V}\int_{\partial V} \vec{a}\cdot\vec{n}\, dS \approx \frac{1}{V}\sum_f \vec{a}_f\cdot\vec{n}_f S_f = \frac{1}{V}\sum_f \vec{a}_f\cdot\vec{S}_f = \frac{1}{V}\sum_f \varphi.$$

Здесь величина φ — поток поля $\vec{a}$ через грани ячейки, и именно эта величина является аргументом функции `fvc::div`.

- `fvc::snGrad(a)` — поле, заданное в центрах граней конечных объемов, значения которого равны производной величины $a$ по внешней нормали к контрольному объему. $\dfrac{\partial a}{\partial \vec{n}} \approx \dfrac{a_n - a_o}{h}$. Здесь индексом $o$ обозначено значение поля $a$ в «своей» ячейке («own»), индексом $n$ — значение в соседней («neighbour») ячейке.

При реализации численной схемы в OpenFOAM использовалась векторная запись уравнений. Все векторные величины помечены символом вектора, в случае отсутствия символа имеется в виду скалярная величина, равная первой компоненте одноименного вектора.

**Реализация разностной схемы для уравнения** (3)**.** Выпишем уравнение с учетом названий слагаемых, принятых при реализации, а также операторов OpenFOAM.

```
fvm::ddt(rho) + fvc::div(phiJm) = 0.
```

Данная запись соответствует следующей

$$\hat{\rho}_i = \rho_i - \frac{\Delta t}{V}\left(\varphi_{j_m,i+1/2} + \varphi_{j_m,i-1/2}\right),$$

где

$$\varphi_{j_m,i+1/2} = S\left(\rho_{i+1/2}u_{i+1/2} - \frac{\tau_{i+1/2}}{h}(u_{i+1}^2\rho_{i+1} - u_i^2\rho_i) - \frac{\tau_{i+1/2}}{h}(p_{i+1} - p_i)\right),$$

$$\varphi_{j_m,i-1/2} = -S\left(\rho_{i-1/2}u_{i-1/2} - \frac{\tau_{i-1/2}}{h}(u_i^2\rho_i - u_{i-1}^2\rho_{i-1}) - \frac{\tau_{i-1/2}}{h}(p_i - p_{i-1})\right).$$

**Реализация разностной схемы для уравнения** (4)**.** Запись уравнения (4) в OpenFOAM:

```
fvm::ddt(rhoU) + fvc::div(phiJmU) + fvc::div(phiP) - fvc::div(phiPixx) =
0.
```

$$\widehat{\rho u}_i = \rho_i u_i - \frac{\Delta t}{V}(\varphi_{j_m u,i+1/2} + \varphi_{j_m u,i-1/2}) - \frac{\Delta t}{V}(\varphi_{p,i+1/2} + \varphi_{p,i-1/2}) + \frac{\Delta t}{V}(\varphi_{\Pi_{xx},i+1/2} + \varphi_{\Pi_{xx},i-1/2}).$$

$$\varphi_{j_m u,i+1/2} = S\left[u_{i+1/2}^2\rho_{i+1/2} - u_{i+1/2}\tau_{i+1/2}\left(\frac{u_{i+1}^2\rho_{i+1} - u_i^2\rho_i}{h} + \frac{p_{i+1} - p_i}{h}\right)\right],$$

$$\varphi_{j_m u,i-1/2} = -S\left[u_{i-1/2}^2\rho_{i-1/2} - u_{i-1/2}\tau_{i-1/2}\left(\frac{u_i^2\rho_i - u_{i-1}^2\rho_{i-1}}{h} + \frac{p_i - p_{i-1}}{h}\right)\right],$$

$$\varphi_{p,i+1/2} = p_{i+1/2}S,$$

$$\varphi_{p,i-1/2} = -p_{i-1/2}S,$$

$$\varphi_{\Pi_{xx},i+1/2} = S\tau_{i+1/2}\left[u_{i+1/2}^2\rho_{i+1/2}\frac{u_{i+1} - u_i}{h} + 2u_{i+1/2}\frac{p_{i+1} - p_i}{h} + p_{i+1/2}\gamma_{i+1/2}\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right],$$

$$\varphi_{\Pi_{xx},i-1/2} = -S\tau_{i-1/2}\left[u_{i-1/2}^2\rho_{i-1/2}\frac{u_i - u_{i-1}}{h} + 2u_{i-1/2}\frac{p_i - p_{i-1}}{h} + p_{i-1/2}\gamma_{i-1/2}\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right].$$

**Реализация разностной схемы для уравнения** (5)**.** При реализации численной схемы в OpenFOAM уравнение (5) было записано в следующем виде:

```
fvm::ddt(rhoE) + fvc::div(phiJmH) + fvc::div(phiQ) - fvc::div(phiPixxU) =
0.
```

$$\widehat{\rho E}_i = (\rho E)_i - \frac{\Delta t}{V}(\varphi_{j_m H,i+1/2} - \varphi_{j_m H,i-1/2}) - \frac{\Delta t}{V}(\varphi_{q,i+1/2} - \varphi_{q,i-1/2}) + \frac{\Delta t}{V}(\varphi_{\Pi_{xx}u,i+1/2} - \varphi_{\Pi_{xx}u,i-1/2}),$$

$$\varphi_{j_m H,i+1/2} = S\left[u_{i+1/2}\rho_{i+1/2}H_{i+1/2} - \tau_{i+1/2}H_{i+1/2}\frac{u_{i+1}^2\rho_{i+1} - u_i^2\rho_i}{h} + \tau_{i+1/2}H_{i+1/2}\frac{p_{i+1} - p_i}{h}\right],$$

$$\varphi_{j_m H,i-1/2} = -S\left[u_{i-1/2}\rho_{i-1/2}H_{i-1/2} - \tau_{i-1/2}H_{i-1/2}\frac{u_i^2\rho_i - u_{i-1}^2\rho_{i-1}}{h} + \tau_{i-1/2}H_{i-1/2}\frac{p_i - p_{i-1}}{h}\right],$$

$$\varphi_{q,i+1/2} = -S\left[\frac{\tau_{i+1/2}\rho_{i+1/2}u_{i+1/2}^2}{\gamma_{i+1/2} - 1}\frac{p_{i+1}/\rho_{i+1} - p_i/\rho_i}{h} + p_{i+1/2}u_{i+1/2}^2\tau_{i+1/2}\rho_{i+1/2}\frac{1/\rho_{i+1} - 1/\rho_i}{h}\right],$$

$$\varphi_{q,i-1/2} = -(-S)\left[\frac{\tau_{i-1/2}\rho_{i-1/2}u_{i-1/2}^2}{\gamma_{i-1/2} - 1}\frac{p_i/\rho_i - p_{i-1}/\rho_{i-1}}{h} + p_{i-1/2}u_{i-1/2}^2\tau_{i-1/2}\rho_{i-1/2}\frac{1/\rho_i - 1/\rho_{i-1}}{h}\right],$$

$$\varphi_{\Pi_{xx}u,i+1/2} = \varphi_{\Pi_{xx},i+1/2}u_{i+1/2},$$

$$\varphi_{\Pi_{xx}u,i-1/2} = \varphi_{\Pi_{xx},i-1/2}u_{i-1/2}.$$