课程作业

杨佳乐

2021 年 10 月 7 日

题目 1. 3.6

解答. 由贝叶斯法则可知，β 的后验概率 $P(\beta|D)$ 和似然度乘以先验概率 $P(D|\beta)P(\beta)$ 成正比，边缘概率 $P(D)$ 为定值。$P(D|\beta) \sim N(X^T\beta, \sigma^2 I)$，$P(\beta) \sim N(0, \tau I)$。

$$log(P(D|\beta)P(\beta)) \propto -\frac{(y - X\beta)^T(y - X\beta)}{2\sigma^2} - \frac{\beta^T\beta}{2\tau}$$

$$\propto -(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}[y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j]^2 + \frac{1}{2\tau}\sum_{j=1}^{p}\beta_j^2)$$

$$\beta_{ridge} = argmax_\beta - (\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}[y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j]^2 + \frac{1}{2\tau}\sum_{j=1}^{p}\beta_j^2)$$

两边同时乘以 $2\sigma^2$, 令 $\lambda = \frac{\sigma^2}{\tau}$，得到两个方差相加的形式。

因为两个正态分布概率密度函数相乘结果还是服从正态分布，β 取当右边为最大值时的值，这时候 β 为均值，也为众数。

题目 2. 3.7

解答. 题目 3.7 的解法跟 3.6 完全一样，只是 3.6 中 β 的方差为 τ,3.7 中 β 的方差为 τ^2。

题目 3. 3.8

解答. 假设 $Q = (q_0, q_1, ..., q_p)(N \times P), X = (e, x_1, x_2, ..., X_p) = QR$，让 $q_0 = \frac{e}{\sqrt{N}}, r_{00} = \sqrt{N}$。

当 $1 \leq j \leq p$ 时，可以得到 $\bar{q_j} = \frac{e^T q_j}{N} = \frac{q_0^T q_j}{\sqrt{N}} = 0$ $x_j = \sum_{k=0}^{j} r_{kj} q_k$，$\bar{x_j} = \frac{r_{0j}}{\sqrt{N}}$。可以推出 $x_j - \bar{x_j} e = \sum_{k=1} p r_{kj} q_k$。

R_2 是 R 右下方一个分块矩阵 $(p \times p)$, 则 $R = \begin{pmatrix} \sqrt{N} & \sqrt{N}(\bar{x_1}, ..., \bar{x_p}) \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$。

所以可以推出 $Q_2 R_2 = \tilde{X} = UDV^T$。$Q_2$ 是一组基，可以看出它张成的空间和 U 一样。