

Раздел 2. Непрерывность и дифференцирование

Сформулируйте **определения** следующих понятий:

1. Непрерывная функция в точке

Определение 43 (Понятие непрерывности функции).

Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0)) \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0)) \exists U(x_0) : f(U(x_0) \cap E) \subset V(f(x_0))$$

2. Точка разрыва функции

Определение 45 (Понятие точки разрыва).

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для E и f не непрерывна в точке x_0 , то точка x_0 называется точкой разрыва для функции f .

3. Точка устранимого разрыва

Определение 46 (Понятие устранимого разрыва).

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке x_0 либо не определено, либо отличается от A , то x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f .

4. Точка разрыва 1 рода

Определение 47 (Понятие разрыва 1-ого рода (скачка)).

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Если существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода или скачком.

5. Точка разрыва 2 рода

Определение 48 (Понятие разрыва 2-ого рода).

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E . Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в \mathbb{R} , то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

6. Равномерно непрерывная функция

Определение 62 (Понятие равномерной непрерывности).

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, x' \in D : |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

7. Производная функции в точке**Определение 63 (Понятие производной функции).**

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x_0 + h \in \langle a, b \rangle$. Предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

8. Дифференцируемая функция в точке, дифференциал**Определение 64 (Понятие дифференцируемости функции).**

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x_0 + h \in \langle a, b \rangle$. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0 , если существует такое число A , что

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Определение 65 (Понятие дифференциала).

Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

9. Правосторонняя производная**Определение 67.**

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Предел

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется правосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$.

10. Левосторонняя производная

Аналогично, предел

$$\lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется левосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_-(x_0)$.

11. Касательная к графику функции

Определение 68.

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Предельное положение AC секущей AB графика функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

12. Вертикальная касательная к графику функции

Определение 69.

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ и $f'(x_0) = \pm\infty$. Прямая $x = x_0$ называется (вертикальной) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

13. Параметрически заданная функция

Пусть T – множество, $\varphi, \psi : T \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} : T \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Определяет ли введенная система y как функцию f от x ? Если да, то говорят, что **система задает функцию f параметрически**. Переменную t при этом называют параметром.

14. Точки локального максимума и минимума

Определение 70 (Понятия локального максимума и минимума).

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции f , если

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции f , если

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

15. Производная высшего порядка (порядка n)

Определение 72 (Производная высшего порядка).

Пусть $(n - 1) \in \mathbb{N}$ и определена функция $f^{(n-1)} : E_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ – производная $(n - 1)$ -ого порядка функции f . Обозначим через E_n множество точек $x \in E_{n-1}$, для которых

$$E_{n-1} \cap (x - \delta, x + \delta)$$

– невырожденный промежуток при некотором $\delta > 0$, и в которых функция $f^{(n-1)}$ дифференцируема. Положим

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x), \quad x \in E_n.$$

Введенная функция называется производной порядка n , или, короче, n -ой производной функции f . При этом функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E_n .

16. Дифференциал высшего порядка (порядка n)**Определение 74 (Дифференциал высшего порядка).**

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – n раз дифференцируемая в точке $x_0 \in E$ функция, $h \in \mathbb{R}$. Величина

$$d^n f(x_0)(h) = d(d^{n-1} f(x)(h))(h),$$

называется n -ым дифференциалом функции f в точке x_0 , соответствующим приращению h .

17. Многочлен Тейлора**Определение 75 (Понятие многочлена Тейлора).**

Пусть функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Многочлен

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0 . В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.

18. Гладкий экстремум**Определение 77 (Классификация точек экстремума).**

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума f .

1. Если f дифференцируема в x_0 , то экстремум называется гладким.

19. Острый экстремум

2. Если $f'(x_0-0) = +\infty$, $f'(x_0+0) = -\infty$, или $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$, то экстремум называется острым.

20. Угловой экстремум

3. Если существуют (в $\overline{\mathbb{R}}$) $f'(x_0 \pm 0)$ и хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.

21. Выпуклая функция

Определение 78 (Понятие выпуклой функции).

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle, \lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_{\geq} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

то f называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a, b \rangle$.

Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle, x_1 \neq x_2, \lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) <_{>} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

то f называется строго выпуклой вниз (верх).

22. Точка перегиба

Определение 79 (Понятие точки перегиба).

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$, причем

1. Существует $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0 - \delta, x_0], [x_0, x_0 + \delta)$ функция f имеет разный характер выпуклости.
2. $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда x_0 называется точкой перегиба f .

23. Асимптота

Определение 80 (Понятие асимптоты).

Прямая l называется асимптотой графика функции f , если расстояние от точки $(x, f(x))$, лежащей на графике, до прямой l стремится к нулю при удалении точки $(x, f(x))$ на бесконечность от начала координат.

24. Вертикальная асимптота

Определение 81 (Понятие вертикальной асимптоты).

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции f , если выполнено хотя бы одно из (четырех) условий:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = -\infty$$

25. Наклонная асимптота

Определение 82 (Понятие наклонной асимптоты).

Прямая $g(x) = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \rightarrow \pm\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

В случае, если $k = 0$, прямая $g(x) = b$ часто называется горизонтальной асимптотой.

Сформулируйте следующие **утверждения**:

1. Связь непрерывности и предела**Лемма 33 (Связь непрерывности и предела).**

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

1. Для того чтобы функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ была непрерывной в точке x_0 , предельной для E , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Если точка x_0 не является предельной для E , то f непрерывна в x_0 .

2. Характеристика непрерывности в терминах односторонних пределов**Лемма 34 (Характеристика непрерывности в терминах односторонних пределов).**

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ и x_0 — предельная для E . Если существуют (в смысле определения) односторонние пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Если существует (в смысле определения) лишь один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$$

3. Локальные свойства непрерывных функций**Теорема 26 (Локальные свойства непрерывных функций).**

Пусть функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 . Тогда:

1. Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности x_0 .
2. Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и $f(x_0)$ совпадают.

Пусть, кроме того, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 . Тогда:

- (в) Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в x_0 .
- (г) Функция $f(x)g(x)$ непрерывна в x_0 .
- (д) Функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в x_0 , если $g(x_0) \neq 0$.

4. Непрерывность композиции функций**Теорема 27 (О непрерывности композиции).**

Пусть $f : E_1 \rightarrow E_2$, $g : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E_1$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in E_2$. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

5. Теорема Вейерштрасса для непрерывной функции

Теорема 28 (Вейерштрасса).

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда:

1. f ограничена на $[a, b]$.
2. f достигает на $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений.

6. Первая теорема Больцано-Коши

Теорема 29 (Первая теорема Больцано-Коши).

Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

7. Вторая теорема Больцано-Коши

Теорема 30 (Вторая теорема Больцано-Коши).

Пусть $f \in C[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Тогда

$$\forall C \in (A, B) \exists c \in (a, b) : f(c) = C.$$

8. Критерий непрерывности монотонной функции

Теорема 32 (Критерий непрерывности монотонной функции).

Пусть f – монотонная на $\langle a, b \rangle$ функция. Тогда:

1. f не может иметь разрывов второго рода.
2. Непрерывность f равносильна тому, что множество ее значений – промежуток.

9. Об обратной функции

Теорема 33 (Об обратной функции).

Пусть $f \in C(\langle a, b \rangle)$ и строго монотонна,

$$m = \inf_{\langle a, b \rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a, b \rangle} f.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle m, M \rangle$ – биекция.
2. f^{-1} строго монотонна и имеет тот же характер монотонности, что и f .
3. $f^{-1} \in C(\langle m, M \rangle)$.

10. Теорема Кантора

Теорема 47 (Кантора).

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

11. Связь производной и дифференцируемости

Теорема 48 (О связи производной и дифференцируемости).

Функция $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную. В этом случае $A(x_0) = f'(x_0)$.

12. Непрерывность дифференцируемой функции

Лемма 60 (О непрерывности дифференцируемой функции).

Если функция $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$, то она непрерывна в точке x_0 .

13. Уравнение касательной к графику функции в точке

Лемма 61 (Об уравнении касательной).

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

14. Производная и дифференциал суммы, произведения, частного функций

Теорема 49 (О производной суммы, произведения и частного).

Пусть $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке x_0 . Тогда:

1. Их сумма дифференцируема в точке x_0 и

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Их произведение дифференцируемо в точке x_0 и

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3. Их частное дифференцируемо в точке x_0 при условии, что $g(x_0) \neq 0$, и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Следствие 16 (О дифференциале суммы, произведения и частного).

В условиях предыдущей теоремы справедливы следующие соотношения:

1. $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$.

2. $d(fg)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$.

3. $d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$, при $g(x_0) \neq 0$.

15. Производная и дифференциал композиции функций

Теорема 50 (О производной композиции).

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$, $g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$, g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Следствие 17 (О дифференциале композиции).

В условиях предыдущей теоремы,

$$d(g(f))(x_0) = dg(y_0)(df(x_0)).$$

16. Производная и дифференциал обратной функции

Теорема 51 (О производной обратной функции).

Пусть функции $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$ и $f^{-1} : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ – взаимно обратные, причем f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$, а f^{-1} непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в точке y_0 , причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следствие 18 (О дифференциале обратного отображения).

В условиях предыдущей теоремы,

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

17. Производная функции, заданной параметрически**Теорема 53 (О производной функции, заданной параметрически).**

Пусть $T = \langle a, b \rangle$, $t \in T$, $\varphi \in C(T)$, φ строго монотонна, φ, ψ дифференцируемы в точке t , $\varphi'(t) \neq 0$, $f = \psi(\varphi^{-1})$ – параметрически заданная функция. Тогда f дифференцируема в $x = \varphi(t)$ и

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

18. Теорема Ферма**Теорема 54 (Ферма).**

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

19. Теорема Ролля**Теорема 55 (Ролля).**

Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , причем $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

20. Теорема Лагранжа**Теорема 56 (Лагранжа).**

Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

21. Теорема Коши**Теорема 60 (Коши).**

Пусть $f, g \in C[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b) . Тогда $\exists \xi \in (a, b)$, что выполняется

$$(f(b) - f(a)) g'(\xi) = (g(b) - g(a)) f'(\xi).$$

Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на (a, b) , то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

22. Правило Лопиталя

Теорема 61 (Правило Лопиталья).

Пусть f, g дифференцируемы на (a, b) , $g'(x) \neq 0$ на (a, b) и

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда в любом из двух случаев:

1. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow a+0} |g(x)| = +\infty$.

23. Критерий монотонности функции**Теорема 57 (Критерий монотонности функции).**

Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда:

1. Для того чтобы функция f возрастала (убывала) на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на (a, b) .
2. Для строгого возрастания (строгого убывания) функции на $[a, b]$ достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b) .

24. Критерий постоянства функции**Теорема 58 (Критерий постоянства функции).**

Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Для того чтобы f была постоянной на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на (a, b) .

25. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано**Теорема 63 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).**

Пусть функция f в точке x_0 имеет производные до порядка n включительно. Тогда справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

26. Единственность многочлена Тейлора**Теорема 64 (О единственности многочлена Тейлора).**

Если существует многочлен

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0,$$

то он единственен.

27. Связь монотонности и производной

Теорема 68 (О связи монотонности и производной).

Пусть функция $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда справедливы соотношения:

$$f'(x) > 0 \text{ на } (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ строго возрастает на } [a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \text{ на } (a, b).$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ на } (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ возрастает на } [a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \text{ на } (a, b).$$

$$f'(x) < 0 \text{ на } (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ строго убывает на } [a, b] \Rightarrow f'(x) \leq 0 \text{ на } (a, b).$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ на } (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ убывает на } [a, b] \Rightarrow f'(x) \leq 0 \text{ на } (a, b).$$

28. Необходимое условие экстремума**Теорема 69 (Необходимое условие экстремума).**

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Если $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума, то либо $f'(x_0) = 0$, либо f не дифференцируема в x_0 .

29. Первое достаточное условие экстремума**Теорема 70 (Первое достаточное условие экстремума).**

Пусть $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на множествах $U_-(x_0) = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ и $U_+(x_0) = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$. Тогда:

1. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального максимума функции f .
2. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального минимума функции f .
3. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f .
4. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f .

30. Второе достаточное условие экстремума**Теорема 71 (Второе достаточное условие экстремума).**

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ и f имеет в точке x_0 производные до порядка $n \in \mathbb{N}$ включительно, причем $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1. Если n нечетно, то точка x_0 – не точка экстремума.
2. Если n четно, то точка x_0 – точка строгого локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и точка строгого локального максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

31. Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции**Теорема 74 (Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции).**

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b \rangle)$ и дважды дифференцируема на (a, b) . Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ на (a, b) ($f''(x) \leq 0$ на (a, b)).
2. Если $f''(x) > 0$ на (a, b) ($f''(x) < 0$ на (a, b)), то f строго выпукла вниз (вверх).

32. Формулы для коэффициентов наклонной асимптоты

Теорема 76 (Формулы для коэффициентов наклонной асимптоты).

Для того чтобы прямая $g(x) = k_{\pm\infty}x + b_{\pm\infty}$ была асимптотой графика функции f при $x \rightarrow \pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k_{\pm\infty},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b_{\pm\infty}.$$