

Сформулируйте **определения** следующих понятий:

**1. Аксиома непрерывности (полноты) множества  $\mathbb{R}$**

Пусть  $X, Y \subset \mathbb{R}$ , причем  $X \neq \emptyset$  и  $Y \neq \emptyset$ . Тогда

$$(\forall x \in X \forall y \in Y x \leq y) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y \forall x \in X \forall y \in Y).$$

**2. Индуктивное множество**

Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется индуктивным, если

$$\forall x \in X (x + 1) \in X.$$

**3. Множество натуральных чисел**

Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1. Обозначается множество натуральных чисел как  $\mathbb{N}$ .

**4. Расширенное множество  $\mathbb{R}$**

Множество  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы  $-\infty, +\infty$  – минус и плюс бесконечностями, соответственно, причем для вновь введенных символов постулируются следующие возможные операции:

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, & x > 0 \\ \mp\infty, & x < 0 \end{cases},$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**5. Окрестность и проколота окрестность точки**

Окрестностью точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  называется произвольный интервал, содержащий  $x_0$ .

Эпсилон-окрестностью (или  $\varepsilon$ -окрестностью) точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  называется интервал

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Проколотой окрестностью точки  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  называется множество  $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ , то есть произвольная окрестность точки  $x_0$  без самой этой точки.

Аналогично, проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  называется множество  $U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ .

## 6. Окрестности элементов $+\infty$ и $-\infty$

Окрестностью элемента  $+\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется множество вида

$$(a, +\infty], \quad a \in \mathbb{R}.$$

$\varepsilon$ -окрестностью элемента  $+\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется множество

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right], \quad \varepsilon > 0.$$

Окрестностью элемента  $-\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется множество вида

$$[-\infty, a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

$\varepsilon$ -окрестностью элемента  $-\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется множество вида

$$\left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

## 7. Ограниченность множества сверху, верхняя граница

Множество  $X \subset \overline{\mathbb{R}}$  называется ограниченным сверху, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \leq M.$$

Найденное число  $M$  называется верхней границей для  $X$ .

## 8. Ограниченность множества снизу, нижняя граница

Множество  $X \subset \overline{\mathbb{R}}$  называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \geq m.$$

Найденное число  $m$  называется нижней границей для  $X$ .

## 9. Ограниченное множество

Множество  $X \subset \overline{\mathbb{R}}$  называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу, то есть

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad m \leq x \leq M.$$

## 10. Максимальный и минимальный элемент множества

Элемент  $M \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$  называется максимальным (наибольшим) элементом множества  $X$ , если

$$\forall x \in X \quad x \leq M.$$

Обозначают это так:  $M = \max X$ .

Элемент  $m \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$  называется минимальным (наименьшим) элементом множества  $X$ , если

$$\forall x \in X \quad x \geq m.$$

Обозначают это так:  $m = \min X$ .

### 11. Точная верхняя грань

Пусть  $X \subset \overline{\mathbb{R}}$  ограничено сверху и не пусто. Наименьший элемент множества верхних границ называется супремумом (или точной верхней гранью) множества  $X$  и обозначается  $\sup X$ .

$$s = \sup X \Leftrightarrow (s \in B) \wedge (\forall b \in B)(s \leq b), B = \{b | (\forall x \in X)(b \geq x)\}$$

$$s = \sup X \Leftrightarrow (\forall x \in X \ s \geq x) \wedge (\forall s' < s \ \exists x \in X : x > s')$$

### 12. Точная нижняя грань

Пусть  $X \subset \mathbb{R}$  ограничено снизу и не пусто. Наибольший элемент множества нижних границ называется инфимумом (или точной нижней гранью) множества  $X$  и обозначается  $\inf X$ .

$$i = \inf X \Leftrightarrow (i \in B) \wedge (\forall b \in B)(i \geq b), B = \{b | (\forall x \in X)(b \leq x)\}$$

$$i = \inf X \Leftrightarrow (\forall x \in X \ i \leq x) \wedge (\forall i' > i \ \exists x \in X : x < i')$$

### 13. Целая и дробная части числа

Для любого числа  $x \in \mathbb{R}$  существует единственное  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что  $k \leq x < k+1$ .

Указанное в следствии число  $k$  называется целой частью числа  $x$  и обозначается  $[x]$ . Величина  $\{x\} = x - [x]$  называется дробной частью числа  $x$ .

Целая часть числа  $x - [x]$  – это наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

### 14. Последовательность

Функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  называется последовательностью.

Развернуто, но не менее точно можно сказать, что последовательность – это функция, областью определения которой является множество натуральных чисел.

Обычно обозначается как  $x(n)$ ,  $x_n$ .

### 15. Предел последовательности на языке неравенств

Число  $A \in \mathbb{R}$  называется пределом последовательности  $x_n$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ |x_n - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A, \quad x_n \longrightarrow A.$$

### 16. Сходящаяся последовательность

Если последовательность  $x_n$  имеет предел  $A \in \mathbb{R}$  (число!), то говорят, что она сходится. Иначе говорят, что она расходится.

## 17. Бесконечные пределы последовательностей

Элемент  $+\infty$  называется пределом последовательности  $x_n$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Элемент  $-\infty$  называется пределом последовательности  $x_n$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pm\infty, \quad x_n \longrightarrow \pm\infty.$$

## 18. Возрастающая и строго возрастающая последовательности

Говорят, что последовательность  $x_n$  возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} \geq x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность  $x_n$  строго возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} > x_{n_2}.$$

## 19. Убывающая и строго убывающая последовательности

Говорят, что последовательность  $x_n$  убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} \leq x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность  $x_n$  строго убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} < x_{n_2}.$$

## 20. Подпоследовательность

Пусть дана последовательность  $x_n$  и возрастающая последовательность

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

натуральных чисел.

Последовательность  $y_k = x_{n_k}$  называется подпоследовательностью последовательности  $x_n$ .

## 21. Частичные пределы последовательности

Пределы (имеющих предел) подпоследовательностей последовательности  $x_n$  называются частичными пределами этой последовательности.

## 22.Верхний и нижний пределы последовательности

Пусть  $E$  — (непустое) множество частичных пределов последовательности  $x_n$ .

Верхним пределом последовательности  $x_n$  называется  $\sup E$  и обозначается  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  или  $\limsup_n x_n$ .

Нижним пределом последовательности  $x_n$  называется  $\inf E$  и обозначается  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  или  $\liminf_n x_n$ .

Верхний и нижний пределы последовательности  $x_n$  являются ее частичными пределами.

## 23.Фундаментальная последовательность

Последовательность  $x_n$  называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

## 24.Предельная точка множества

Точка  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  называется предельной для множества  $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ , если в любой окрестности  $x_0$  содержится бесконечное число элементов множества  $E$ , то есть

$$\forall U(x_0) \quad U(x_0) \cap E \text{ бесконечно.}$$

## 25.Предел функции по Коши на языке неравенств

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  — предельная точка для  $E$ . Число  $A \in \mathbb{R}$  называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A.$$

## 26.Бесконечные пределы функции в конечной точке (на языке неравенств)

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная для  $E$ .

Элемент  $-\infty$  называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Элемент  $+\infty$  называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0 = -\infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x < -\frac{1}{\delta} \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Обозначают это, соответственно, так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty,$$

## 27. Конечные пределы функции в бесконечных элементах (на языке неравенств)

Число  $A$  называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0 = +\infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x > \frac{1}{\delta} \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} A.$$

## 28. Определение предела по Гейне

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  — предельная точка для  $E$ . Элемент  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ , если для **любой** последовательности  $x_n$  такой, что:

1.  $x_n \in E$ .
2.  $x_n \neq x_0$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

## 29. Возрастающая и строго возрастающая функция

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Говорят, что функция  $f$  возрастает на  $E$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Говорят, что функция  $f$  строго возрастает на  $E$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

## 30. Убывающая и строго убывающая функция

Говорят, что функция  $f$  убывает на  $E$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Говорят, что функция  $f$  строго убывает на  $E$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$



### 31.Правосторонний и левосторонний пределы функции в конечной точке

**Определение 39** (Понятие правостороннего предела).

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  – предельная точка для множества  $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$ .

Говорят, что элемент  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  справа, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначается это так:  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$ .

**Определение 40** (Понятие левостороннего предела).

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  – предельная точка для множества  $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$ .

Говорят, что элемент  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  слева, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

Обозначается это так:  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ .

### 32.Бесконечно малая и бесконечно большая функции

**Определение 41** (Понятие бесконечно малой функции).

Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

**Определение 42** (Понятие бесконечно большой функции).

Функция  $\beta(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |\beta(x)| = +\infty.$$

### 33.О-большое от функции

Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная для  $E$ , и существует окрестность  $\overset{o}{U}(x_0)$  такая, что  $f(x) = \alpha(x)g(x)$  при  $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$ .

1. Если  $\alpha(x)$  ограничена на множестве  $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ , то говорят, что функция  $f(x)$  есть «О большое» от функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  (или что функция  $f(x)$  ограничена по сравнению с функцией  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ ) и пишут

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow x_0.$$

### 34.о-малое от функции

Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная для  $E$ , и существует окрестность  $\overset{o}{U}(x_0)$  такая, что  $f(x) = \alpha(x)g(x)$  при  $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$ .

2. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , то говорят, что функция  $f(x)$  есть «о малое» от функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  (или что функция  $f(x)$  бесконечно малая по сравнению с функцией  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ ) и пишут

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow x_0.$$

### 35.Эквивалентная функция

Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная для  $E$ , и существует окрестность  $\overset{o}{U}(x_0)$  такая, что  $f(x) = \alpha(x)g(x)$  при  $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$ .

3. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 1$ , то говорят, что функция  $f(x)$  эквивалентна функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  и пишут

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

Сформулируйте следующие утверждения:

### 36.Принцип математической индукции

**Теорема 1** (Принцип математической индукции).

Если множество  $X \subset \mathbb{N}$  таково, что  $1 \in X$  и  $\forall x \in X \quad (x + 1) \in X$ , то  $X = \mathbb{N}$ .

### 37.Принцип точной грани

**Теорема 4** (Принцип точной грани).

Пусть  $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ , не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда существует единственный  $\sup X$  ( $\inf X$ ).

### 38.Принцип Архимеда

**Теорема 6** (Принцип Архимеда).

Пусть  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ . Для любого  $y \in \mathbb{R}$  существует единственное целое  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что

$$(k - 1)x \leq y < kx.$$



### 39.Свойства последовательностей, имеющих конечный предел

**Лемма 21** (Свойства последовательностей, имеющих предел).

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ . Тогда:

1. При  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  предел единственен.
2. При  $A \in \mathbb{R}$  последовательность  $x_n$  ограничена.
3. В любой окрестности  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  содержатся все элементы последовательности  $x_n$ , за исключением не более чем конечного числа.

### 40.Арифметические свойства пределов последовательностей в расширенном $\mathbb{R}$

**Теорема 8** (Арифметические свойства пределов в  $\overline{\mathbb{R}}$ ).

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в  $\overline{\mathbb{R}}$ , то:

1. Предел суммы равен сумме пределов, то есть

$$x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A + B.$$

2. Предел произведения равен произведению пределов, то есть

$$x_n y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB.$$

3. Предел частного равен частному пределов, то есть

$$\frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{A}{B}, \quad y_n \neq 0.$$

### 41.Предельный переход в неравенствах для последовательностей

**Следствие 11** (Предельный переход в неравенствах).

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ .

1. Если  $x_n > y_n$ , начиная с какого-либо номера  $n_0$ , то  $A \geq B$ .
2. Если  $x_n \geq y_n$ , начиная с какого-либо номера  $n_0$ , то  $A \geq B$ .

### 42.О сжатой переменной для последовательностей

**Теорема 10** (О сжатой переменной).

Пусть, начиная с какого-то номера  $n_0$ , выполняется  $x_n \leq z_n \leq y_n$ . Пусть, кроме того,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ ,  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A.$$

### 43. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности

**Теорема 11** (Вейерштрасса).

Возрастающая последовательность  $x_n$  сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность  $x_n$  сходится тогда и только тогда, когда она ограничена снизу, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n x_n.$$

**Теорема 12** (Обобщенная теорема Вейерштрасса).

Возрастающая последовательность  $x_n$  имеет предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность  $x_n$  имеет предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n x_n.$$

### 44. О связи пределов последовательности и её подпоследовательностей

**Лемма 27.**

Пусть последовательность  $x_n$  имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательность имеет тот же самый предел.

### 45. Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Теорема 15** (Теорема Больцано–Вейерштрасса).

У любой ограниченной последовательности  $x_n$  существует сходящаяся подпоследовательность.

**Лемма 28** (Дополнение теоремы Больцано–Вейерштрасса).

Если последовательность  $x_n$  не ограничена сверху (снизу), то из нее можно выделить сходящуюся к  $+\infty$  ( $-\infty$ ) подпоследовательность.

### 46. Критерий Коши для последовательностей

**Теорема 16** (Критерий Коши).

Последовательность  $x_n$  сходится (в  $\mathbb{R}$ ) тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$$

## 47. Локальные свойства функций, имеющих предел

**Теорема 18** (Локальные свойства функций, имеющих предел).

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . Тогда:

1. При  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  предел единственен.
2. При  $A \in \mathbb{R}$  существует окрестность  $\overset{\circ}{U}(x_0)$  такая, что в  $\overset{\circ}{U}(x_0) \cap E$  функция  $f(x)$  ограничена.
3. Если  $A \neq 0$ ,  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ , то существует окрестность  $\overset{\circ}{U}(x_0)$  такая, что в  $\overset{\circ}{U}(x_0) \cap E$  знаки  $f(x)$  и  $A$  совпадают.

## 48. Арифметические свойства пределов функций в расширенном $\mathbb{R}$

**Теорема 19** (Арифметические свойства пределов в  $\overline{\mathbb{R}}$ ).

Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в  $\overline{\mathbb{R}}$ , то:

1. Предел суммы равен сумме пределов, то есть

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A + B.$$

2. Предел произведения равен произведению пределов, то есть

$$f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} AB.$$

3. Если  $g(x) \neq 0$  в некоторой  $\overset{\circ}{U}(x_0)$ , то предел частного равен частному пределов, то есть

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{A}{B}.$$

## 49. Предельный переход в неравенствах для функций

**Следствие 13** (Предельный переход в неравенствах).

Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ .

1. Если  $f(x) > g(x)$  на  $E$ , то  $A \geq B$ .
2. Если  $f(x) \geq g(x)$  на  $E$ , то  $A \geq B$ .

## 50. О сжатой переменной для функций

**Теорема 21** (О сжатой переменной).

Пусть  $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  на  $E$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ ,  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ .

## 51. Теорема Вейерштрасса о пределах возрастающей и убывающей функций

**Теорема 22** (О пределе монотонной функции).

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – возрастающая (на  $E$ ) функция,  $s = \sup E$  – предельная для  $E$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow s} f(x) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Конечность последнего предела равносильна ограниченности  $f$  (на  $E$ ) сверху.

## 52. Критерий Коши для функции

**Теорема 23** (Критерий Коши).

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  – предельная точка для  $E$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

## 53. Критерий существования предела через односторонние

**Теорема 24** (Критерий существования предела через односторонние).

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0 \in \mathbb{R}$  – предельная точка для множеств

$$U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}, \quad U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

## 54. О связи бесконечно большой и бесконечно малой функций

**Лемма 31** (О связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).

Пусть  $\beta(x)$  – бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда

$$\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$$

– бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

Пусть  $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$  и

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad \alpha(x) \neq 0.$$

Тогда

$$\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

– бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$ .

## 55. О свойствах бесконечно малых функций

### Лемма 32.

Пусть  $\alpha, \beta : E \rightarrow \mathbb{R}$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда:

1. Функция  $\alpha(x) + \beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .
2. Функция  $\alpha(x)\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .
3. Если функция  $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена в некоторой проколотой окрестности  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap E$ , то функция  $\alpha(x)\theta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

## 56. Критерий существования конечного предела в терминах бесконечно малых функций

**Теорема 25** (Критерий существования конечного предела в терминах б.м.).

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная для  $E$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .