Вспомогательный документ для коллоквиума

НОЦ Математики

18 ноября 2024 г.

Различия с финальной версией

0 Исправлена опечатка в теореме замкнутости классов (T2 -> T0)

0 Материализованы определения видов логик

0 Материализованы доказательств лемм для теоремы поста, теоремы поста и замкнутости предполных классов T0, T1, M, S, L

1 Добавлены комментарии к некоторым теоремам (можно найти в списках)

1 Исправлены ошибки в лемме о нелинейной функции (в конце про классификацию были ошибки в отрицаниях одной переменной)

2 Исправлены опечатки в формулировках доказательств теорем

2 Проведен реформат текста

Правила коллоквиума

1. Коллоквиум не является контрольной точкой
2. Время на подготовку: 30 минут
3. Сдача коллоквиума происходит по предварительной записи
4. Легитимные причины дисквалификации с коллоквиума (ставится 0 баллов и сохраняется право пересдачи)
    (a) Уличение в списывании
    (b) Использование сторонних носителей информации
    (c) Самостоятельное перемещение по аудитории (без модератора)
    (d) Опоздание
5. За коллоквиум можно получить от 0 до 15 баллов. Минимального проходного порога нет
    (a) 0/1/2/3 балла за 2-/3/4/5 верных ответов соответственно в теоретическом минимуме ВНИМАНИЕ! Если за теоретический минимум вы получаете 0 баллов, то весь остальной ответ анулириуется и вы получаете 0 баллов с сохранением права пересдачи коллоквиума
    (b) от 0 до 3 баллов за первый теоретический вопрос с доказательством
    (c) от 0 до 3 баллов за второй теоретический вопрос с доказательством
    (d) от 0 до 3 баллов за задачу
    (e) от 0 до 3 баллов за дополнительные вопросы (могут быть вне тем билета, но не вне тем курса)
6. В случае неуспешной сдачи коллоквиума (0 баллов) вы сможете его сдать в период промежуточной аттестации (ориентировочно в январе)
7. Сам выданный билет состоит из следующих частей:

(a) Теоретический минимум, состоящий из трёх определений и двух вопросов с форматом ответа "да/нет"
(b) Первая теорема (от 1 до 6)
(c) Вторая теорема (от 7 до 15)
(d) Задача

Список определений

1. Объединение множеств
2. Пересечение множеств
3. Декартово произведение множеств
4. Разность множеств
5. Дополнение множества до универсума
6. Бинарное отношение
7. Транзитивность
8. Рефлексивность
9. Симметричность
10. Булеан
11. Объединение отношений
12. Пересечение отношений
13. Мощность множества
14. Конечные, счетные, несчетные множества
15. Отношение частичного порядка
16. Отношение линейного порядка
17. Композиция отношений
18. Булево пространство
19. Булева функция
20. Таблица истинности
21. Бинарная функция
22. Тернарная функция
23. n-арная функция
24. Эквивалентные формулы
25. КНФ
26. ДНФ
27. Дизъюнкт
28. Конъюнкт
29. СДНФ
30. СКНФ
31. Полином Жегалкина
32. Метод треугольника нахождения полинома Жегалкина
33. Суперпозиция
34. Замкнутые классы
35. Предикат
36. Разрешимость предиката
37. Аксиома
38. Гипотеза
39. Теорема
40. Теория
41. Аксиома исключенного третьего
42. Интуционисткая логика
43. Линейная логика

Список теорем

1. Закон де Моргана для множеств
   Возможны доказательства через круги Эйлера
2. Количество n-арных булевых функций
3. Закон де Моргана для булевых функций
   Достаточно доказать эквивалентность формул
4. Законы поглощения
   Достаточно доказать эквивалентность формул
5. Алгоритм нахождения СКНФ
   ВНИМАНИЕ! необходимо не только сформулировать алгоритм но и доказать его корректность (эквивалентность полученной СКНФ и исходной формулы)
6. Алгоритм нахождения СДНФ
   ВНИМАНИЕ! необходимо не только сформулировать алгоритм но и доказать его корректность (эквивалентность полученной СДНФ и исходной формулы)
7. Замкнутость класса T0
8. Замкнутость класса T1

9. Замкнутость класса M
10. Замкнутость класса S
11. Замкнутость класса L
12. Лемма о несамодвойственной функции
13. Лемма о немонотонной функции
14. Лемма о нелинейной функции
15. Теорема Поста

Список типов задач

1. Поиск нормальных форм формул булевых алгебр
2. Поиск классов Поста формул булевых алгебр
3. Подсчет алгебраических выражений конечных множеств
4. Нахождение свойств бинарных отношений

Некоторые определения

36. Предикат называется разрешимым, если существует некоторый дедуктивный вывод, позволяющий определить является ли предикат тождественно истинным или нет. Разрешимость предикатов некоторой логики — задача о нахождении универсального алгоритма поиска разрешимости каждого из предикатов некоторой логической системы
37. Аксиома — формула некоторой логической системы, считающаяся истинной без вывода
38. Гипотеза — формула некоторой логической системы для которой не получен вывод о ее разрешимости
39. Теорема — формула некоторой логической системы для которой получен вывод о ее разрешимости и она является тождественной истинной
40. Теория — совокупность аксиом, гипотез, теорем и правил вывода некоторой логической системы
41. Аксиома исключенного третьего — аксиома гильбертовой математической логики: $A \vee \neg A$
42. Интуционисткая логика — формальная логика, в которой присутствуют все аксиомы классической логики за исключением аксиомы исключенного третьего
43. Линейная(афинная) логика — формальная логика, в которой на аксоимы, гипотезы и теоремы могут быть введены точные(верхние) ограничения по количеству использований

Доказательства некоторых теорем

7. Замкнутость класса T_0
   Класс T_0 является замкнутым
   Рассмотрим две функции $f, g \in T_0$. Рассмотрим подстановку g в f.
   $f(0, \dots, g(0, \dots, 0), \dots, 0) = f(0, \dots, 0, \dots, 0)$, так как $g(0, \dots, 0) = 0$. В свою очередь $f(0, \dots, 0) = 0$. Таким образом $f(0, \dots, g(0, \dots, 0), \dots, 0) = 0$, а значит суперпозиция f и g лежит в T_0
8. Замкнутость класса T_1
   Класс T_1 является замкнутым
   Рассмотрим две функции $f, g \in T_1$. Рассмотрим подстановку g в f.
   $f(1, \dots, g(1, \dots, 1), \dots, 1) = f(1, \dots, 1, \dots, 1)$, так как $g(1, \dots, 1) = 1$. В свою очередь $f(1, \dots, 1) = 1$. Таким образом $f(1, \dots, g(1, \dots, 1), \dots, 1) = 1$, а значит суперпозиция f и g лежит в T_1

9. Замкнутость класса M
Класс M является замкнутым
Рассмотрим суперпозицию функций f и g и $x \le \tilde{x}$
Допустим что $g(x_1, \dots, x, \dots, x_n) = g_x$ и $g(x_1, \dots, \tilde{x}, \dots, x_n) = g_{\tilde{x}}$. Из свойств g имеем $g_x \le g_{\tilde{x}}$
Тогда в случае суперпозиции будет $f(y_1, \dots, g_x, \dots, y_m) \le f(y_1, \dots, g_{\tilde{x}}, \dots, y_m)$

11. Замкнутость класса L
Класс L является замкнутым

Пусть $f, g \in L$, тогда рассмотрим их суперпозицию.
$f(x_1, \dots, g(y_1, \dots, y_n), \dots, x_m) = g \oplus a_0 \bigoplus_i a_i x_i$, где $a_i \in \{0, 1\}$
Так как g тоже линейная, то получаем отсутствие конъюнкций в итоговом выражении

10. Замкнутость класса S
Класс S является замкнутым
Пусть $f, g \in S$. Рассмотрим отрицание их суперпозиции:
$\neg f(x_1, \dots, g(\vec{y}), \dots, x_n) = f(\neg x_1, \neg g(\vec{y}), \dots, \neg x_n) = f(\neg x_1, \dots, g(\neg \vec{y}), \dots, x_n)$
Таким образом суперпозиция также самодвойственна

12. Лемма о несамодвойственной функции
Функции-константы можно получить используя суперпозицию несамодвойственной функции и отрицаний
Рассмотрим $f \notin S$.
Тогда $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x} : f(\vec{x}) = f(\neg \vec{x})$
Расставим отрицания на векторе $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ так чтобы на всех 0 он был равен $\vec{x}$. Рассмотрим функцию $g : g(\vec{0}) = f(\vec{x}) = c$
Заметим, что $h(0) = g(\vec{0}) = c$ и $h(1) = g(\vec{1}) = c$
Таким образом получили константную функцию. Если $c = 1$ то отрицанием h получаем константный ноль. Иначе — константную единицу

13. Лемма о немонотонной функции
Отрицание можно получить используя суперпозицию немонотонной функции и функций-констант
Рассмотрим $f \notin M$.
Тогда $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x}, (y_1, y_2, \dots, y_n), \vec{x} < \vec{y} : f(\vec{x}) > f(\vec{y})$
Так как $f(\vec{x}) > f(\vec{y})$ то $f(\vec{x}) = 1, f(\vec{y}) = 0$
Так как $\vec{x} < \vec{y}$ то
$\exists I \subset (1 \dots n) : x_i = y_i$ и $\forall j \in J = (1 \dots n) \backslash I : x_j = 0, y_j = 1$
Рассмотрим $h(t, x_k) = x_k (\forall k \in I)$ и $h(t, x_k) = t (\forall k \in J)$
Тогда $g(t) = f(h(t, x_1), h(t, x_2), \dots, h(t, x_n)) = \neg t$
Так как $g(0) = f(\vec{x}) = 1$ и $g(1) = f(\vec{y}) = 0$

14. Лемма о нелинейной функции
При помощи нелинейной функции, отрицания и функций-констант можно построить конъюнкцию или дизъюнкции
Пусть $f \notin L$. Тогда существует конъюнкт $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$ в разложении f в форме полинома Жегалкина
Выберем минимальный по количеству переменных конъюнкт (если таких несколько, выбираем любой)
Далее все переменные кроме двух в этом конъюнкте устанавливаем равными единице при помощи функций констант
Все переменные невходящие в этот конъюнкт зануляем
Так как мы выбрали минимальный по размеру конъюнкт то все остальные конъюкты не могут схлопнуть наш конъюкт:
$\nexists \alpha, \beta : x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta} \wedge 1(x_{i_r}) \oplus x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta} \wedge 1(x_{i_s}) = 0, r \in R, s \in S, R \subset S$
Полученные выражения могут быть одним из следующих вариантов:

- $x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta}$ — искомая конъюнкция
- $x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta} \oplus 1$ — отрицание конъюнкции
- $x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta} \oplus 1 \oplus x_{i_\beta}$ — отрицание конъюнкции в которой отрицается первый элемент
- $x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta} \oplus 1 \oplus x_{i_\alpha}$ — отрицание конъюнкции в которой отрицается второй элемент

- $x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta} \oplus x_{i_\beta}$ — конъюнкция в которой отрицается первый элемент
- $x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta} \oplus x_{i_\alpha}$ — конъюнкция в которой отрицается второй элемент
- $x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta} \oplus x_{i_\alpha} \oplus x_{i_\beta}$ — дизъюнкция
- $x_{i_\alpha} \wedge x_{i_\beta} \oplus x_{i_\alpha} \oplus x_{i_\beta} \oplus 1$ — отрицание дизъюнкции

Из полученных функций это либо искомые, либо те которые при помощи отрицания могут быть сведены к искомым

15. Теорема Поста
Множество булевых функций образует полный набор тогда и только тогда, когда для каждого из классов Поста существует функция из исходного множества, не входящая в этот класс
Если у нас есть полный функциональный набор, то он не может быть замкнут относительно любого из классов Поста, так как не получится построить функции стрелки Пирса и штриха Шеффера, что делает такой набор неполным. Получили противоречие. Значит набор не содержится ни в одном из классов Поста. Что и требовалось доказать в одну из сторон!

    Пусть нам дан набор функций F. Для каждого из класса Поста, есть хотя бы одна $f \in F$ такая, что не лежит в одном из них. Докажем, что мы можем построить полный функциональный набор. Для доказательства необходимо построить один из известных полных функциональных наборов.

    $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_M \notin M, f_L \notin L, f_S \notin S$
    Если $f_0(\vec{1}) = 1$, то $f(x) = f_0(x, \ldots, x)$ является константной единицей
    Если $f_0(\vec{1}) = 0$, то $f(x) = f_0(x, \ldots, x)$ является $\neg x$
    Если $f_1(\vec{0}) = 0$, то $f(x) = f_1(x, \ldots, x)$ является константным нулем
    Если $f_1(\vec{0}) = 1$, то $f(x) = f_1(x, \ldots, x)$ является $\neg x$
    Если мы имеем отрицание и одну из констант, то мы имеем обе константы и отрицание
    Если мы имеем обе константы, то воспользуемся немонотонной функцией и константами, чтобы по лемме о немонотонной функции построить функцию отрицания
    Если мы имеем только отрицание, то воспользуемся несамодвойственной функцией и отрицанием, чтобы по лемме о несамодвойственной функции построить функции констант
    Далее выбирая нелинейную функцию, отрицание и константы по лемме о нелинейной функции строим конъюнкцию или дизъюнкцию
    Полный функциональный набор построен (конъюнкция и отрицание или дизъюнкция и отрицание)
    Что и требовалось доказать в другую из сторон!