# **Коллоквиум 2**: Непрерывность и дифференцирование

Математический анализ – 1 семестр

## Оглавление

## 1. Непрерывности функции и классификация разрывов

Материалы: Бойцев (3.11, 3.12), Правдин: лекция 9.1, лекция 9.2

**Определение непрерывной функции в точке (окрестности [1])**

> Определение 43 (Понятие непрерывности функции).
> Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если
>
> $$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$
>
> или, что то же самое,
>
> $$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

**Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства [2], ε-δ-окрестности [3])**

> Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0$ записывается так:
>
> $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
>
> Или так:
> $$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$
> Или, наконец, так:
>
> $$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

**Доказательство** эквивалентности определений

*Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела.*

Определение *через ε-δ и неравенства [2]* получается из *ε-δ-окрестности [3]* по определению ε-δ-окрестности $[\mathbf{2}] = [\mathbf{3}]$.

[1] $\forall V\big(f(x_0)\big)\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V(f(x_0))$

[3] $\forall V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$

Сначала докажем, что если $f$ непрерывна в точке $x_0$ в смысле определения [3], то $f$ непрерывна в точке $x_0$ и в смысле определения [1].

Пусть $U(x_0) = (\alpha, \beta)$ – произвольная окрестность точки $x_0$, $V(x_0) = (f(\alpha), f(\beta))$.

Положим $\delta = min(x_0 - \alpha, \beta - x_0)$, $\varepsilon = min(f(x_0) - f(\alpha), f(\beta) - f(x_0))$, тогда

$$U_\delta(x_0) \subset U(x_0) \text{ и } V_\varepsilon(f(x_0)) \subset V(f(x_0)).$$

Согласно определению [3], по выбранному $\delta$

$$\exists U_\delta(x_0) \subset \mathrm{U}(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0)) \subset V(f(x_0))$$

то есть $f$ непрерывна в точке $x_0$ и в смысле определения [1].

Тот факт, что из определения [1] следует определение [3], моментально следует из того, что ε-δ-окрестности являются частным случаем окрестности $[\mathbf{1}] = [\mathbf{3}]$.

**Определение непрерывной функции на множестве**

> Определение 44 (Понятие функции, непрерывной на множестве).
> Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества $D$.
>
> Обозначается это так: $f \in C(D)$.

**Лемма о связи непрерывности и предела.**

**Лемма 33** (Связь непрерывности и предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

1. Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке $x_0$, предельной для $E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
2. Если точка $x_0$ не является предельной для $E$, то $f$ непрерывна в $x_0$.

*Доказательство.* 1. Сначала рассмотрим первое утверждение. Докажем необходимость. Пусть функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, предельной для $E$, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

В частности,
$$\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$
Тем самым, мы пришли к тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Докажем достаточность. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

Так $f(x_0) \in V(f(x_0))$, то на самом деле выполняется и то, что

$$\forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)),$$

и мы приходим к факту непрерывности $f(x)$ в точке $x_0$.

2. Теперь докажем второе утверждение. Если $x_0$ не является предельной точкой для множества $E$, то существует окрестность $U(x_0)$, не содержащая других, кроме $x_0$, точек из $E$. А тогда если $\varepsilon > 0$, то

$$x \in U(x_0) \cap E \ \Rightarrow (x = x_0) \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

**Лемма о характеристике непрерывности в терминах односторонних пределов.**

**Лемма 34** (Характеристика непрерывности в терминах односторонних пределов).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0$ — предельная для $E$. Если существуют (в смысле определения) односторонние пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$, то непрерывность функции $f$ в точке равносильна равенству

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Если существует (в смысле определения) лишь один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, то непрерывность функции $f$ в точке равносильна равенству

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$$

### Доказательство

Эта лемма – комбинация леммы «Связь непрерывности и предела» и теоремы «Критерий существования предела через односторонние».

**Лемма 33** (Связь непрерывности и предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

1. Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке $x_0$, предельной для $E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
2. Если точка $x_0$ не является предельной для $E$, то $f$ непрерывна в $x_0$.

**Теорема 24** (Критерий существования предела через одностороннние).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ — предельная точка для множеств
$$U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}, \quad U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}.$$
Тогда
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Если $x_0$ предельная для множеств $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$ и $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \iff f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$, что равно $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$

Если $x_0$ – предельная для $E$, то она предельная и хотя бы для одного из множеств: $U_\pm(x_0)$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 \pm 0)$, что равно $f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$

### Определение точек разрыва и их классификация.

**Определение 45** (Понятие точки разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для $E$ и $f$ не непрерывна в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва для функции $f$.

**Определение 46** (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке $x_0$ либо не определено, либо отличается от $A$, то $x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f$.

**Определение 47** (Понятие разрыва 1-ого рода (скачка)).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но
$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$
то точка $x_0$ называется точкой разрыва первого рода или скачком.

**Определение 48** (Понятие разрыва 2-ого рода).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0$ – предельная для $E$. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода.

Итак, разрыв второго рода – это либо уход функции на бесконечность, либо несуществование хотя бы одного из односторонних пределов даже в $\overline{\mathbb{R}}$. Конечно же, разрыв второго рода просто так не исправить.

Если при этом разрыв 2 рода произошёл по причине бесконечности одного или двух односторонних пределов, то уточняют, что x0 -- точка **бесконечного разрыва**.

Если при этом разрыв 2 рода произошёл по причине несуществования предела (с одной или двух сторон) в расширенном R, то уточняют, что x0 -- точка **существенного разрыва**.

## 2. Локальные свойства непрерывных функций

Материалы: Бойцев (3.11, 3.12, 3.13), Правдин: (лекция 9.1, лекция 9.2), лекция 9.3

**[Б1]** **Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности)**

Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

- $\forall V\big(f(x_0)\big)\, \exists U(x_0)\colon\ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V\big(f(x_0)\big)$
- $\forall V\big(f(x_0)\big)\, \exists U(x_0)\colon f\big(U(x_0) \cap E\big) \subset V\big(f(x_0)\big)$
- $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x \in E\colon |x - x_0| < \delta\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- $\forall V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)\, \exists U_\delta(x_0)\colon\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$
- $\forall V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)\, \exists U_\delta(x_0)\colon f\big(U_\delta(x_0) \cap E\big) \subset V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$

**[Б1]** **Определение точек разрыва и их классификация.**

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in R$ предельная точка для $E$ и $f$ не непрерывна в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется *точкой разрыва* для функции $f$.

- Устранимый разрыв, если $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A \in \mathbb{R}$, но $f(x_0) \neq A$ или $f(x_0)$ — не опр.
- Разрыв 1 рода (скачка), если $\exists f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$
- Разрыв 2 рода (скачка), если $\nexists f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$ хотя бы один

**Теорема о пяти локальных свойствах непрерывной функции (локальные свойства, непрерывность суммы, произведения и отношения функций).**

> **Теорема 26** (Локальные свойства непрерывных функций).
> Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0$. Тогда:
>
> 1. Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $x_0$.
> 2. Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и $f(x_0)$ совпадают.
>
> Пусть, кроме того, $g : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0$. Тогда:
>
> (в) Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в $x_0$.
>
> (г) Функция $f(x)g(x)$ непрерывна в $x_0$.
>
> (д) Функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в $x_0$, если $g(x_0) \neq 0$.

**Доказательство**

Первые два пункта доказывается также как соответствующие пункты в локальных свойствах функций, имеющих предел.

**Докажем (1) пункт**. Пусть $\varepsilon = 1$. Согласно определению непрерывности функции в точке,

$$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ |f(x) - f(x_0)| < 1$$

Отсюда,

$$(f(x_0) - 1) < f(x) < (f(x_0) + 1)$$

Что и означает ограниченность $m < f(x) < M$, где $m = f(x_0) - 1, M = f(x_0) + 1$

**Докажем (2) пункт**. Пусть $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$, тогда согласно определению непрерывности функции в $x_0$,

$$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ |f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2}$$

Отсюда,

$$f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}$$

Откуда и следует требуемое ($sign\ x =$ знак $x$):

$$\text{Если } f(x_0)\ >\ 0, \text{то } 0 < f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}$$

$$\text{Если } f(x_0) < 0, \text{то } f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2} < 0$$

**Докажем (в, г, д) пункты**

Если $x_0$ – не предельная точка для $E$, то функции $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0) \neq 0$), чьи области определения – это множество $E$, автоматически непрерывны в точке $x_0$.
Если же точка $x_0$ – предельная точка для $E$, то, используя определение непрерывности через предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, а также арифметические свойства пределов, имеем

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0) + g(x_0)$$

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)g(x_0)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \text{при } g(x_0) \neq 0$$

Что и доказывает непрерывность функций.

**Теорема о непрерывности композиции функций.**

**Теорема 27** (О непрерывности композиции).
Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E_1$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in E_2$. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

*Доказательство.* Так как $g(y)$ непрерывна в точке $y_0$, то

$$\forall V(g(y_0))\ \exists U(y_0) : \forall y \in U(y_0) \cap E_2 \quad g(y) \in V(g(y_0)).$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а $f(x_0) = y_0$, то по $U(y_0)$

$$\exists W(x_0) : \forall x \in W(x_0) \cap E_1 \quad f(x) \in U(y_0),$$

и, так как $f : E_1 \to E_2$, то $f(x) \in U(y_0) \cap E_2$, откуда

$$\forall x \in W(x_0) \cap E_1 \quad g(f(x)) \in V(g(f(x_0))),$$

что и доказывает непрерывность $g(f(x))$ в точке $x_0$. □

## 3. Теорема Вейерштрасса

Материалы: Бойцев (3.11, 3.12, 3.14), Правдин: (лекция 9.1, лекция 9.2), лекция 10.1

**[Б1] Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности)**

Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

- $\forall V\big(f(x_0)\big)\, \exists U(x_0)\colon\ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V\big(f(x_0)\big)$
- $\forall V\big(f(x_0)\big)\, \exists U(x_0)\colon f\big(U(x_0) \cap E\big) \subset V\big(f(x_0)\big)$
- $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x \in E\colon |x - x_0| < \delta\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- $\forall V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)\, \exists U_\delta(x_0)\colon\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$
- $\forall V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)\, \exists U_\delta(x_0)\colon f\big(U_\delta(x_0) \cap E\big) \subset V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$

**[Б1] Определение точек разрыва и их классификация.**

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in R$ предельная точка для $E$ и $f$ не непрерывна в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется *точкой разрыва* для функции $f$.

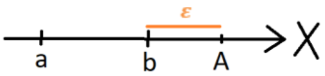
- Устранимый разрыв, если $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A \in \mathbb{R}$, но $f(x_0) \neq A$ или $f(x_0)$ – не опр.
- Разрыв 1 рода (скачка), если $\exists f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$
- Разрыв 2 рода (скачка), если $\nexists f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$ хотя бы один

**Лемма о замкнутости отрезка.**

**Лемма 35** (О замкнутости отрезка).
Пусть $x_n \in [a, b]$ – сходящаяся последовательность. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b].$$

*Доказательство.* Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Допустим противное, пусть $A \notin [a, b]$. Тогда при $\varepsilon = \min(|a - A|, |b - A|)$ в $\varepsilon$-окрестности точки $A$ нет точек из отрезка $[a, b]$, а значит и членов последовательности $x_n$, что невозможно согласно, например, пункту 3 леммы 21. Это противоречие завершает доказательство. □




**Теоремы из доказательства:**

**Лемма 21** (Свойства последовательностей, имеющих предел).
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Тогда:

3. В любой окрестности $A \in \overline{\mathbb{R}}$ содержатся все элементы последовательности $x_n$, за исключением не более чем конечного числа.

3. Пусть $U(A)$ – произвольная окрестность точки $A$. Согласно определению предела,

$$\exists n_0 :\ \forall n > n_0\ \ x_n \in U(A),$$

а значит, вне окрестности $U(A)$ содержится не более $n_0$ членов.

Замкнутое множество содержит все свои предельные точки.

**Теорема Вейерштрасса.**

**Теорема 28** (Вейерштрасса).
Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда:

1. $f$ ограничена на $[a, b]$.
2. $f$ достигает на $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений.

*Доказательство.* Докажем первый пункт. От противного, пусть $f$, например, не ограничена сверху. Тогда существует (сродни доказательству леммы 28) последовательность $x_n \in [a,b]$, что

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Так как $x_n$ ограничена, то, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса (15),

$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0.$$

Согласно лемме 35, $x_0 \in [a,b]$. Теперь мы приходим к противоречию с непрерывностью $f$ в точке $x_0 \in [a,b]$: с одной стороны, из непрерывности следует, что

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) \in \mathbb{R},$$

а с другой стороны, из леммы 27,

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Случай, когда $f$ не ограничена снизу, рассматривается аналогично и остается в качестве упражнения.

Докажем второй пункт. Снова будем доказывать от противного. Пусть, например, супремум не достигается:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x) \neq M \quad \text{при} \quad x \in [a,b].$$

Тогда функция

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

положительна на $[a,b]$ и, кроме того, по теореме 26, непрерывна на $[a,b]$. Значит, по доказанному в первом пункте, функция $g(x)$ ограничена. Тогда существует число $M_1 > 0$, что $g(x) < M_1$ на $[a,b]$. В то же время, при $x \in [a,b]$

$$\frac{1}{M - f(x)} < M_1 \;\Leftrightarrow\; M - f(x) > \frac{1}{M_1} \;\Leftrightarrow\; f(x) < M - \frac{1}{M_1},$$

что противоречит тому, что $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. □

**Теоремы из доказательства:**

*Часть доказательства сродная лемме 28*

Пусть $f$ не ограничена сверху (снизу аналогично). Тогда найдется $x > 1$. Далее будем действовать по индукции. Если уже выбран $x_n > n$, то выбирается $x_n + 1 > n + 1$. Такое построение возможно, так как иначе $f$ была бы ограничена сверху числом $max(x_1, \ldots, x_n, n + 1)$. Тем самым, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

**Лемма 35** (О замкнутости отрезка).
Пусть $x_n \in [a,b]$ – сходящаяся последовательность. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a,b].$$

**Теорема 15** (Теорема Больцано–Вейерштрасса).
У любой ограниченной последовательности $x_n$ существует сходящаяся подпоследовательность.

**Лемма 27.**
Пусть последовательность $x_n$ имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательности имеет тот же самый предел.

**Теорема 26** (Локальные свойства непрерывных функций).

## 4. Теоремы Больцано-Коши

Материалы: Бойцев (3.11, 3.12, 3.14), Правдин: (лекция 9.1, лекция 9.2), лекция 10.1

**[Б1]** Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности)

Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

- $\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0)\colon\ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V(f(x_0))$
- $\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0)\colon f(U(x_0) \cap E) \subset V(f(x_0))$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x \in E\colon |x - x_0| < \delta\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- $\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0)\colon\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$
- $\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0)\colon f(U_\delta(x_0) \cap E) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$

**[Б1]** Определение точек разрыва и их классификация.

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in R$ предельная точка для $E$ и $f$ не непрерывна в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется *точкой разрыва* для функции $f$.

- Устранимый разрыв, если $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A \in \mathbb{R}$, но $f(x_0) \neq A$ или $f(x_0)$ — не опр.
- Разрыв 1 рода (скачка), если $\exists f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$
- Разрыв 2 рода (скачка), если $\nexists f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$ хотя бы один

**Первая теорема Больцано-Коши.**

Непрерывная на отрезке функция, принимающая на концах отрезка значения разных знаков, должна в какой-то точке отрезка обратиться в ноль.

> **Теорема 29** (Первая теорема Больцано–Коши).
> Пусть $f \in C[a,b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда
> $$\exists c \in (a,b) : f(c) = 0.$$

Предложенный метод поиска корня уравнения f(x) = 0 называется ***дихотомией*** или ***методом половинного деления***.

*Доказательство.* Пусть, для определенности, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Обозначим $a_1 = a$, $b_1 = b$. Разделим отрезок $I_1 = [a_1, b_1]$ пополам точкой

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Если $f(c_1) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_1) \neq 0$, то либо $f(c_1) > 0$, либо $f(c_1) < 0$. Из получившихся двух отрезков выберем тот, на концах которого значения функции все также имеют разный знак. Это значит, что в первом случае в качестве отрезка $I_2$ выберем отрезок $[c_1, b]$, а во втором случае в качестве отрезка $I_2$ выберем отрезок $[a, c_1]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим $a_2$ и $b_2$.

Продолжаем по индукции. Если построен отрезок $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$, то на шаге $n \geq 2$ разделим отрезок $I_{n-1}$ пополам точкой

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Если $f(c_{n-1}) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_{n-1}) \neq 0$, то либо $f(c_{n-1}) > 0$, либо $f(c_{n-1}) < 0$. В первом случае в качестве отрезка $I_n$ выберем отрезок $[c_{n-1}, b_{n-1}]$, а во втором случае в качестве отрезка $I_2$ выберем отрезок $[a_{n-1}, c_{n-1}]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим $a_n$ и $b_n$.

Так как $a_n, b_n \in [a, b]$, то по теореме Больцано–Вейерштрасса (15)

$$\exists a_{n_k} : a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_0, \quad \exists b_{n_k} : b_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} b_0,$$

причем $a_0, b_0 \in [a, b]$, что следует из леммы 35. Так как длина отрезка $I_1$ на каждой итерации уменьшается в два раза, то

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

откуда $a_0 = b_0 = x_0 \in [a, b]$. Пользуясь непрерывностью $f$ на $[a, b]$, имеем:

$$f(a_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0), \quad f(b_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0).$$

Так как, по построению, $f(a_{n_k}) > 0$, $f(b_{n_k}) < 0$, то, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$(f(x_0) \geq 0) \ \wedge \ (f(x_0) \leq 0) \ \Rightarrow \ f(x_0) = 0,$$

и теорема доказана. $\square$

**Теоремы из доказательства:**

**Теорема 15** (Теорема Больцано–Вейерштрасса).
У любой ограниченной последовательности $x_n$ существует сходящаяся подпоследовательность.

**Лемма 35** (О замкнутости отрезка).
Пусть $x_n \in [a, b]$ – сходящаяся последовательность. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b].$$

**Следствие 13** (Предельный переход в неравенствах).
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Если $f(x) > g(x)$ на $E$, то $A \geq B$.
2. Если $f(x) \geq g(x)$ на $E$, то $A \geq B$.

**Вторая теорема Больцано-Коши.**

Непрерывная функция, принимая на отрезке какие-то два значения, принимает на этом же отрезке и все промежуточные значения.

**Теорема 30** (Вторая теорема Больцано–Коши).
Пусть $f \in C[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Тогда

$$\forall C \in (A, B) \ \exists c \in (a, b) : f(c) = C.$$

*Доказательство.* Пусть $C \in (A, B)$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - C.$$

Во-первых, эта функция непрерывна на $[a, b]$ как разность непрерывных функций. Во-вторых,

$$g(a) = A - C < 0, \quad g(b) = B - C > 0.$$

Значит, согласно первой теореме Больцано–Коши (29),

$$\exists c \in (a, b) : g(c) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(c) - C = 0 \;\Leftrightarrow\; f(c) = C,$$

что и доказывает теорему. □

## 5. Непрерывность и монотонность функции

Материалы: Бойцев (3.7, 3.11, 3.14), Правдин: (лекция 9.1), лекция 10.2

**[Б1] Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности)**

Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

- $\forall V(f(x_0))\, \exists U(x_0){:}\ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V(f(x_0))$
- $\forall V(f(x_0))\, \exists U(x_0){:}\ f(U(x_0) \cap E) \subset V(f(x_0))$
- $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0{:} \forall x \in E{:} |x - x_0| < \delta\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- $\forall V_\varepsilon(f(x_0))\, \exists U_\delta(x_0){:}\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$
- $\forall V_\varepsilon(f(x_0))\, \exists U_\delta(x_0){:}\ f(U_\delta(x_0) \cap E) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$

**Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции.**

**Определение 37** (Понятия возрастания и убывания функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f$ возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \le f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция $f$ убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

**Определение 38.**
Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.

**Критерий непрерывности монотонной функции.**

**Теорема 32** (Критерий непрерывности монотонной функции).
Пусть $f$ – монотонная на $\langle a, b\rangle$ функция. Тогда:

1. $f$ не может иметь разрывов второго рода.
2. Непрерывность $f$ равносильна тому, что множество ее значений – промежуток.

*Доказательство.* Пусть, например, $f$ возрастает.

1. Докажем первый пункт. Пусть $x_0 \in (a, b\rangle$, $x_1 \in \langle a, x_0)$. В силу возрастания $f$, имеем

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_0), \quad x \in (x_1, x_0).$$

По теореме об огр. мон. функции (22), $f$ имеет предел при $x \to x_0 - 0$. Согласно теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f(x_1) \le f(x_0 - 0) \le f(x_0).$$

Аналогично доказывается, что для $x_0 \in \langle a, b)$, $x_1 \in (x_0, b\rangle$

$$f(x_0) \le f(x_0 + 0) \le f(x_1).$$

Тем самым, установлено существование (в $\mathbb{R}$) односторонних пределов, что и доказывает утверждение.

**Теоремы из доказательства 1 пункта:**

**Теорема 22** (О пределе монотонной функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ – возрастающая (на $E$) функция, $s = \sup E$ – предельная для $E$. Тогда

$$\lim_{x \to s} f(x) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Конечность последнего предела равносильна ограниченности $f$ (на $E$) сверху.

**Следствие 13** (Предельный переход в неравенствах).
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Если $f(x) > g(x)$ на $E$, то $A \ge B$.
2. Если $f(x) \ge g(x)$ на $E$, то $A \ge B$.

2. Непрерывность $f$ равносильна тому, что множество ее значений – промежуток.

2. Докажем второй пункт. В силу теоремы о сохранении промежутка (31), в доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть $f(\langle a, b\rangle)$ – промежуток. Докажем непрерывность $f$ в любой точке $x_0 \in (a, b\rangle$ слева. Если это не так, то

$$f(x_0 - 0) < f(x_0).$$

Пусть $y \in (f(x_0 - 0), f(x_0))$. Тогда, если $x_1 \in (a, x_0)$, то

$$y \in [f(x_1), f(x_0)] \subset f(\langle a, b\rangle),$$

а значит $y$ – значение функции. Но, как показано в доказательстве первого пункта,

$$f(x) \le f(x_0 - 0) < y, \quad x \in (a, x_0),$$

$$f(x) \ge f(x_0) > y, \quad x \in [x_0, b\rangle,$$

а значит $f$ не принимает значение $y$, что приводит к противоречию. Аналогичным образом доказывается непрерывность $f$ в каждой точке множества $\langle a, b)$ справа. $\square$

**Теоремы для доказательства 2 пункта:**

**Теорема 31** (О сохранении промежутка).
Пусть $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Тогда

$$f(\langle a,b\rangle) = \langle m, M\rangle, \quad m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

**Лемма 36** (Характеристика промежутка).
Следующие утверждения эквивалентны:

1. $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ – промежуток.
2. Если $a, b \in E$, $a < b$, то $[a,b] \subset E$.

*Доказательство.* Пусть $E = f(\langle a,b\rangle)$. Согласно второй теореме Больцано–Коши (30), если $y_1, y_2 \in E$, $y_1 \leq y_2$, то $[y_1, y_2] \subset E$. Тем самым, по только что доказанной лемме, $E$ – промежуток, что завершает доказательство. □

**Теорема об обратной функции.**

**Теорема 33** (Об обратной функции).
Пусть $f \in C(\langle a,b\rangle)$ и строго монотонна,

$$m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. $f : \langle a,b\rangle \to \langle m,M\rangle$ – биекция.
2. $f^{-1}$ строго монотонна и имеет тот же характер монотонности, что и $f$.
3. $f^{-1} \in C(\langle m,M\rangle)$.

*Доказательство.* Будем считать, что $f$ строго возрастает.

1. Докажем первый пункт. В силу строгого возрастания $f$,

$$(x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle) \wedge (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2)),$$

откуда $f$ – инъекция. То, что $f(\langle a,b\rangle) = \langle m,M\rangle$ следует из теоремы о сохранении промежутка (31). Итого, $f$ – биекция между указанными множествами.

2. Докажем второй пункт. Пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, $y_1 < y_2$. Тогда, так как $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, то $x_1 < x_2$ в силу строгого возрастания $f$.

3. Докажем третий пункт. Его утверждение следует из теоремы 32. □

## 6. Равномерная непрерывность

Материалы: Бойцев (3.11, 3.20), Правдин: (лекция 9.1), лекция 10.3

**Определение непрерывной функции на множестве (ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности).**

**Определение 44** (Понятие функции, непрерывной на множестве).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества $D$.

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

Функция $f: E \to \mathbb{R}$ непрерывна на $D \subset E$, если $\forall x_0 \in D$

- $\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0)\colon\ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V(f(x_0))$
- $\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0)\colon f(U(x_0) \cap E) \subset V(f(x_0))$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x \in E\colon |x - x_0| < \delta\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- $\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0)\colon\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E\ \ f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$
- $\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0)\colon f(U_\delta(x_0) \cap E) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$

**Определение равномерно непрерывной функции на множестве (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности).**

**Определение 62** (Понятие равномерной непрерывности).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Функция $f$ называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x, x' \in D :\ |x - x'| < \delta\ \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Функция $f: E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $D \subset E$, если

- $\forall x \in D: \forall x' \in D \cap U(x):\ f(x') \in V\big(f(x)\big)$
- $\forall x \in D: f(D \cap U(x)) \subset V\big(f(x)\big)$
- $\forall x \in D: \forall x' \in D \cap U_\delta(x):\ f(x') \in V_\varepsilon\big(f(x)\big)$
- $\forall x \in D: f(D \cap U_\delta(x)) \subset V_\varepsilon\big(f(x)\big)$

**Отличие непрерывности и равномерной непрерывности**

Отличие, причем очень существенное, возникает в том, как выбирается $\delta$. При рассмотрении понятия непрерывности $\delta$, на самом деле, зависит не только от $\varepsilon$, но и от рассматриваемой точки $x'$. В случае же равномерной непрерывности $\delta$ оказывается единой сразу «для всех» точек из $D$.

Это же наблюдение говорит и об отличии в геометрическом смысле. Если непрерывность функции на промежутке означает, что график этой функции на этом промежутке может быть нарисован, не отрывая ручки от бумаги, то равномерная непрерывность говорит еще и о том, что функция не может меняться «быстро».

**Лемма о связи равномерной непрерывности и непрерывности функции.**

**Лемма 59.**
Если $f$ равномерно непрерывна на $D$, то $f$ непрерывна на $D$.

Доказательство по определению равномерной непрерывности (возьмём конкретный $x' = x_0$).

**Теорема Кантора.**

**Теорема 47** (Кантора).
Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

*Доказательство.* Будем доказывать от противного. Пусть $f$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на $[a, b]$. Значит,

$$\exists \varepsilon_0 :\ \forall \delta\ \exists x, x' \in [a, b] :\ |x - x'| < \delta, \quad \text{но, в то же время,} \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, тогда

$$\exists x_n, x'_n \in [a, b] :\ |x_n - x'_n| < \delta_n, \quad \text{но, в то же время,} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Так как $x_n \in [a, b]$, то, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса (15), из последовательности $x_n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0,$$

где $x_0 \in [a, b]$ согласно лемме 35. Но тогда

$$(|x_n - x_n'| < \delta_n) \wedge (x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0) \Longrightarrow (x_{n_k}' \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0)$$

Так как, $f$ непрерывна на $[a, b]$

$$f(x_{n_k}), f(x_{n_k}') \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$$

Но это противоречит тому, что

$$|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon_0 \Longrightarrow |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| \geq \varepsilon_0$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

**Теоремы из доказательства:**

**Теорема 15** (Теорема Больцано–Вейерштрасса).
У любой ограниченной последовательности $x_n$ существует сходящаяся подпоследовательность.

**Лемма 35** (О замкнутости отрезка).
Пусть $x_n \in [a, b]$ – сходящаяся последовательность. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b].$$

## 7. Производная и дифференциал

Материалы: Бойцев (4.1, 4.2), Правдин: лекция 11, desmos

**Определение производной функции, дифференцируемости функции, дифференциала.**

**Определение 63** (Понятие производной функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.

Величины

$$\Delta f(x, h) = f(x + h) - f(x), \quad \Delta x(h) = (x + h) - x = h,$$

часто называют приращением функции и приращением аргумента, соответственно. Их иногда (правда, не вполне законно), обозначают как $\Delta f(x)$ и $\Delta x$.

**Определение 64** (Понятие дифференцируемости функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0$, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Функция $f$ называется дифференцируемой в точке $x_0$, если существует такое число $A$, что

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad h \to 0.$$

**Определение 65** (Понятие дифференциала).
Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

**Определение 66** (Понятие дифференцируемости на множестве).
Говорят, что функция $f$ дифференцируема на множестве $E$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Если $f$ дифференцируема на $E$, то $df(x)(h) = A(x)h = A(x)dx(h)$, или $\boldsymbol{df(x) = A(x)dx}$

**Теорема о связи производной и дифференцируемости.**

**Теорема 48** (О связи производной и дифференцируемости).
Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную. В этом случае $A(x_0) = f'(x_0)$.

*Доказательство.* Необходимость. Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$, значит

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle, \quad h \to 0.$$

Поделив на $h$, получим

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + o(1).$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, получаем, что предел правой части равен $A$, значит

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A,$$

то есть, согласно определению и введенным обозначениям,

$$f'(x_0) = A = A(x_0).$$

Достаточность. Согласно теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой (25), имеем

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h), \quad \alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0, \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle,$$

откуда

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h),$$

то есть функция дифференцируема в точке $x_0$ и

$$A = A(x_0) = f'(x_0).$$

Теорема из доказательства:

**Теорема 25** (Критерий существования конечного предела в терминах б.м.).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0$ — предельная для $E$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

**Лемма о непрерывности дифференцируемой функции.**

**Лемма 60** (О непрерывности дифференцируемой функции).
Если функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, то она непрерывна в точке $x_0$.

*Доказательство.* В представлении

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h), \quad x_0+h\in\langle a,b\rangle, \quad h\to 0,$$

достаточно перейти к пределу при $h\to 0$. Тогда

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)=0,$$

откуда

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0),$$

что и означает непрерывность функции в точке $x_0$ (лемма 33).

Пусть $x=x_0+h$, тогда $x\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, а $x_0$ в таком случае – предельная ■.

Лемма из доказательства:

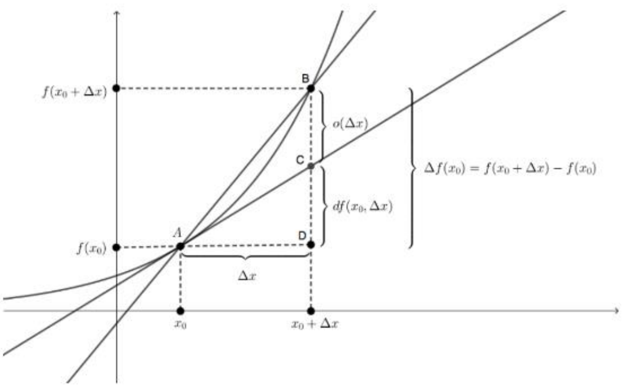
**Лемма 33** (Связь непрерывности и предела).
Пусть $f: E\to\mathbb{R}$, $x_0\in E$.

1. Для того чтобы функция $f: E\to\mathbb{R}$ была непрерывной в точке $x_0$, предельной для $E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

2. Если точка $x_0$ не является предельной для $E$, то $f$ непрерывна в $x_0$.

**Определение касательной к графику функции.**




Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$. Проведем секущую $AB$ через точки

$$A=\big(x_0,f(x_0)\big), B=\big(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)\big)$$

Устремляя $\Delta x$ к нулю, точка $B$ будет двигаться (по графику функции) к точке $A$, а секущая $AB$ будет стремиться занять предельное положение $AC$.

**Определение 68.**
Пусть $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, $f$ дифференцируема в точке $x_0\in\langle a,b\rangle$. Предельное положение $AC$ секущей $AB$ графика функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ называется касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x_0$.

**Лемма об уравнении касательной.**

**Лемма 61** (Об уравнении касательной).
Пусть $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, $f$ дифференцируема в точке $x_0\in\langle a,b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

***Доказательство.***
Угловой коэффициент секущей AB равен

$$k_{AB} = \text{tg}(BAD) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

В силу дифференцируемости функции $f$ в точке $x_0$,

$$k_{AC} = tg(BAC) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{AB} = f'(x_0)$$

Используем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y - y_0 = k(x - x_0)$, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$, получим

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \blacksquare$$

**Геометрический смысл производной и дифференциала.**

Дифференциал – приращение касательной к графику функции, отвечающее приращению аргумента $\Delta x$.
Производная – тангенс угла наклона касательной к графику функции.

**Определение вертикальной касательной.**

> **Определение 69.**
> Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f$ непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ и $f'(x_0) = \pm\infty$. Прямая $x = x_0$ называется (вертикальной) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$.

## 8. Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения и частного)

Материалы: Бойцев (4.1, 4.3), Правдин: лекция 11, лекция 11.2

**[Б7] Определения производной и дифференциала функции.**

Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0, x_0 + h \in \langle a, b\rangle$.

- Предел $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, если он $\exists$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется ***производной*** функции $f$ в точке $x_0$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x_0$, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \qquad h \to 0$$
- Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге, $df(x_0)(h) = Ah$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируема на множестве*** $E$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. $df(x) = A(x)dx$.

**Теорема о производной и дифференциале суммы, произведения, частного функций.**

> **Теорема 49** (О производной суммы, произведения и частного).
> Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке $x_0$. Тогда:
> 1. Их сумма дифференцируема в точке $x_0$ и
> $$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
> 2. Их произведение дифференцируемо в точке $x_0$ и
> $$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
> 3. Их частное дифференцируемо в точке $x_0$ при условии, что $g(x_0) \neq 0$, и
> $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

*Доказательство.* Согласно определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x},$$

причем оба предела конечны.
1. Докажем первый пункт. Так как

$$\Delta(f+g)(x_0) = f(x_0+\Delta x) + g(x_0+\Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x) - f(x_0) + g(x_0+\Delta x) - g(x_0),$$

то

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f+g)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Докажем второй пункт. Так как

$$\Delta(fg)(x_0) = f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0),$$

то

$$(fg)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(fg)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим первый из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} g(x_0+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = g(x_0)f'(x_0),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x_0+\Delta x) = g(x_0)$ в силу непрерывности функции $g(x)$ в точке $x_0$ (лемма 60). Теперь рассмотрим второй из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= f(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)g'(x_0).$$

Тем самым,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. Докажем третий пункт.
Функция $g$ дифференцируема в точке $x_0$, значит, по лемме о непрерывности дифференцируемой функции, $g$ непрерывна в точке $x_0$. Следовательно, $\exists U(x_0): x_0 + \Delta x \in U(x_0): g(x_0 + \Delta x) \neq 0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x_0+\Delta_x)g(x_0)} =$$

Прибавим $0 = f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0)f(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x_0+\Delta_x)g(x_0)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0)\big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\big) + f(x_0)(g(x_0) - g(x_0+\Delta x))}{\Delta x \cdot g(x_0+\Delta_x)g(x_0)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{g(x_0)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0)-g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \frac{g(x_0)}{g(x_0)^2} \cdot f'(x_0) + \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2} \cdot (-g'(x_0)) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \blacksquare$$

Лемма из доказательства:

**Лемма 60** (О непрерывности дифференцируемой функции).
Если функция $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$, то она непрерывна в точке $x_0$.

Из связи производной и дифференциала сразу вытекает следующее следствие.

**Следствие 16** (О дифференциале суммы, произведения и частного).
В условиях предыдущей теоремы справедливы следующие соотношения:

1. $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$.
2. $d(fg)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$.
3. $d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$, при $g(x_0) \neq 0$.

## 9. Основные правила дифференцирования (производная композиции функций и обратной функции)

Материалы: Бойцев (4.1, 4.3), Правдин: лекция 11, лекция 11.2

**[Б7] Определения производной и дифференциала функции.**

Пусть $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}, x_0, x_0 + h \in \langle a, b \rangle$.

- Предел $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, если он $\exists$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется ***производной*** функции $f$ в точке $x_0$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x_0$, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что
$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(h), \qquad h \to 0$$
- Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге, $df(x_0)(h) = Ah$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируема на множестве*** $E$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. $df(x) = A(x)dx$.

**Теорема о производной и дифференциале композиции функций.**

**Теорема 50** (О производной композиции).
Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \langle c, d \rangle$, $g : \langle c, d \rangle \to \mathbb{R}$, $f$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$, $g$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $g(f)$ дифференцируема в точке $x_0$ и
$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

**Следствие 17** (О дифференциале композиции).
В условиях предыдущей теоремы,
$$d(g(f))(x_0) = dg(y_0)(df(x_0)).$$

> Действительно, композиция $\psi(\varphi)$ двух линейных функций $\varphi(h) = Ah$ и $\psi(k) = Bk$ – это линейная функция
> $$\chi(h) = BAh.$$
> В данном случае $A = f'(x_0)$, $B = g'(f(x_0)) = g'(y_0)$.

*Доказательство.* Так как $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Так как $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0$, то

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + o(\Delta y), \quad \Delta y \to 0,$$

где в представлении $o(\Delta y) = \alpha(\Delta y)\Delta y$, $\alpha(\Delta y) \xrightarrow[y \to y_0]{} 0$, можно считать, что $\alpha(0) = 0$.

Положив
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - y_0,$$
можно заметить, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности $f$ (лемма 60). Тогда

$$g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + o(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) =$$

$$= g'(y_0)(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) =$$
$$= g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + g'(y_0)o(\Delta x) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)).$$

Так как

$$o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)),$$

то, используя непрерывность $\alpha$ в нуле и утверждение из замечания 90 легко убедиться (сделайте это), что

$$g'(y_0)o(\Delta x) + \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

а значит композиция $g(f)$ дифференцируема в точке $x_0$ и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

$\square$

**Теорема о производной и дифференциале обратной функции.**

> **Теорема 51** (О производной обратной функции).
> Пусть функции $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ и $f^{-1} : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – взаимно обратные, причем $f$ непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, а $f^{-1}$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Если $f$ дифференцируема в точке $x_0$ и $f'(x_0) \neq 0$, то $f^{-1}$ дифференцируема в точке $y_0$, причем
> $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

*Доказательство.* Необходимо вычислить

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Положим

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0).$$

В силу непрерывности функции $f$ в точке $x_0$ и непрерывности обратной функции $f^{-1}$ в точке $y_0$, выполнено

$$(\Delta x \to 0) \Leftrightarrow (\Delta y \to 0).$$

Кроме того, так как функции взаимно обратны, то

$$(\Delta x \neq 0) \Leftrightarrow (\Delta y \neq 0).$$

Тогда

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

**Следствие 18** (О дифференциале обратного отображения).
В условиях предыдущей теоремы,

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

Обратной к линейной функции $\varphi(h) = Ah$, $A \neq 0$, является линейная функция $\varphi^{-1}(h) = A^{-1}h$. В данном случае $A = f'(x_0)$.

## 10. Французские теоремы (Ферма, Ролля)

Материалы: Бойцев (3.7, 4.6), Правдин: лекция 12

**Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции.**

**Определение 37** (Понятия возрастания и убывания функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f$ возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго возрастает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция $f$ убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Говорят, что функция $f$ строго убывает на $E$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

**Определение 38.**
Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.

**Определение точек локального максимума, минимума и экстремума.**

**Определение 70** (Понятия локального максимума и минимума).
Пусть $f: E \to \mathbb{R}$.

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции $f$, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0): \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции $f$, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0): \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \ge f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

**Определение 71** (Понятие точек экстремума).
Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локального минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).

**Теорема Ферма, геометрический смысл.**

**Теорема 54** (Ферма).
Пусть $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если $x_0$ – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

*Доказательство.* Для определенности будем полагать, что $x_0$ – точка локального максимума. При достаточно малом $\Delta x < 0$, из определения точки локального максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0.$$

При достаточно малом $\Delta x > 0$, из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0.$$

Сравнивая два неравенства, приходим к тому, что $f'(x_0) = 0$. □

Геометрически теорема Ферма означает, что касательная в точке «внутреннего» экстремума дифференцируемой функции параллельна оси $Ox$.

Обратите внимание, что для «граничных» точек теорема, вообще говоря, неверна (рисунок 5 и точка $x = -3$). Озвученное наблюдение находит отражение как в формулировке теоремы, так и в ее доказательстве. Внимательно разберите, почему все может «сломаться» в граничных точках.

**Теорема Ролля, геометрический смысл.**

**Теорема 55** (Ролля).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$, причем $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0.$$

*Доказательство.* Если $f$ постоянна на отрезке $[a,b]$, то утверждение, очевидно, верно.

Если $f$ не постоянна, то, по теореме Вейерштрасса (28), на отрезке $[a,b]$ существуют точки, в которых функция принимает свои наибольшее $M$ и наименьшее $m$ значения, причем $M \neq m$. Значит, хотя бы одно из этих значений принимается внутри интервала $(a,b)$ в некоторой точке $\xi$. Значит, по теореме Ферма (54), $f'(\xi) = 0$. □

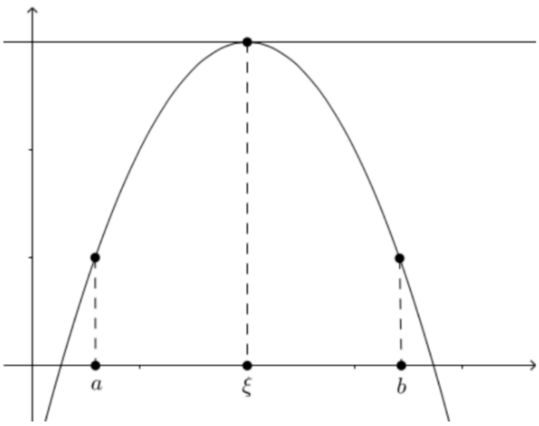



*Рис. 6. Теорема Ролля*

Геометрический смысл теоремы Ролля: если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает равные значения, то на этом отрезке существует хотя бы один экстремум.

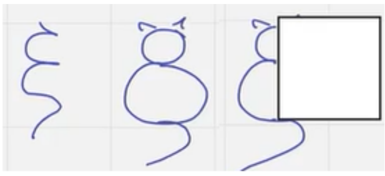
Теоремы из доказательств:

**Следствие 13** (Предельный переход в неравенствах).
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Если $f(x) > g(x)$ на $E$, то $A \geq B$.
2. Если $f(x) \geq g(x)$ на $E$, то $A \geq B$.

**Теорема 28** (Вейерштрасса).
Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда:

1. $f$ ограничена на $[a,b]$.
2. $f$ достигает на $[a,b]$ наибольшего и наименьшего значений.



Греческая буква "***кси***" – $\xi$
Эта буква пишется как половина котика. Мяу =)

## 11. Французские теоремы (Лагранжа)

Материалы: Бойцев (3.7, 4.1, 4.6), Правдин: лекция 12, desmos, Научно-технический рэп

**[Б7] Определения производной и дифференциала функции.**

Пусть $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}, x_0, x_0 + h \in \langle a,b \rangle$.

- Предел $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, если он $\exists$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется ***производной*** функции $f$ в точке $x_0$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x_0$, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \qquad h \to 0$$
- Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге, $df(x_0)(h) = Ah$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируема на множестве*** $E$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. $df(x) = A(x)dx$.

**Теорема Лагранжа, геометрический смысл.**

**Теорема 56** (Лагранжа).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Тогда

$$\exists \xi \in (a,b): \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

*Доказательство.* Пусть

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Прямым вычислением проверяется, что $g(a) = g(b)$, причем $g \in C[a,b]$ как разность непрерывных функций, и дифференцируема на $(a,b)$ как разность дифференцируемых функций. Значит, согласно теореме Ролля (55),

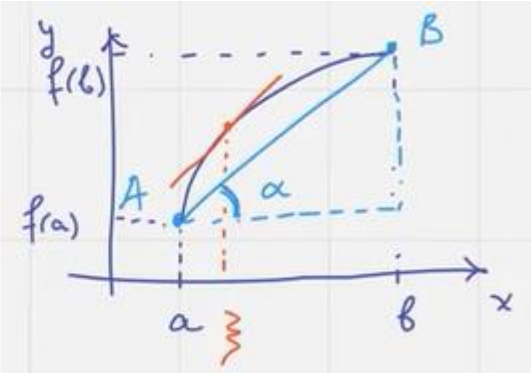
$$\exists \xi \in (a,b): \ g'(\xi) = 0,$$

откуда

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \ \Leftrightarrow \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

□

**Геометрический смысл**
Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале $(a,b)$ существует касательная к графику функции $y = f(x)$, параллельная секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.




Теорема позволяет нам выяснять характер монотонности функции в зависимости от знака производной.

Это стоит послушать: Научно-технический рэп про теорему Лагранжа.

**[Б10] Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции.**

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$.

- $f$ ***возрастает*** на $E$, если $\forall x_1, x_2 \in E$: $\ x_1 < x_2 \quad f(x_1) \le f(x_2)$
- $f$ ***строго возрастает*** на $E$, если $\forall x_1, x_2 \in E$: $\ x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$
- $f$ ***убывает*** на $E$, если $\forall x_1, x_2 \in E$: $\ x_1 < x_2 \quad f(x_1) \ge f(x_2)$
- $f$ ***строго убывает*** на $E$, если $\forall x_1, x_2 \in E$: $\ x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2)$

Возрастающая / строго возрастающая / убывающая / строго убывающая функция ***монотонна***.

**Критерий монотонности функции.**

**Теорема 57** (Критерий монотонности функции).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Тогда:

1. Для того чтобы функция $f$ возрастала (убывала) на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \ge 0$ ($f'(x) \le 0$) на $(a,b)$.
2. Для строгого возрастания (строгого убывания) функции на $[a,b]$ достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на $(a,b)$.

*Доказательство.* Пусть функция $f(x)$ возрастает.
Докажем необходимость. Пусть $x_0 \in (a, b)$, тогда при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенстве (13),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа (56) найдется $\xi \in (a, b)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(x) \geq 0$ на $(a, b)$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$. Так как $x_1, x_2$ – произвольные, получаем определение возрастающей функции.

Если же $f'(x) > 0$ на $(a, b)$, то $f(x_2) > f(x_1)$ и мы приходим к определению строго возрастающей функции. □

**Критерий постоянства функции.**

**Теорема 58** (Критерий постоянства функции).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$. Для того чтобы $f$ была постоянной на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на $(a, b)$.

*Доказательство.* Необходимость очевидна.

Достаточность. Если $f'(x) = 0$ на $(a, b)$, то для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$, по теореме Лагранжа (56)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

то есть $f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности точек $x_1, x_2$ функция постоянна. □

## 12. Французские теоремы (Коши)

Материалы: Бойцев (4.1, 4.6), Правдин: лекция 12

**[Б7] Определения производной и дифференциала функции.**

Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0, x_0 + h \in \langle a, b\rangle$.

- Предел $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, если он $\exists$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется ***производной*** функции $f$ в точке $x_0$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x_0$, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \qquad h \to 0$$
- Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге, $df(x_0)(h) = Ah$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируема на множестве*** $E$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. $df(x) = A(x)dx$.

**Теорема о пределе производной.**

**Теорема 59** (О пределе производной).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$. Если

$$A = \lim_{x \to a+0} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}},$$

то $f'_+(a) = A$.

*Доказательство.* Рассмотрим $[a, a + \Delta x]$, если $\Delta x > 0$, то по теореме Лагранжа

$$\exists \xi \epsilon (a, a + \Delta x): \qquad f(a + \Delta x) - f(a) = f'(\xi)\Delta x$$

Отметим, что $\xi$ разная, для разных $\Delta x$. Поделим обе части выражения на $\Delta x$

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(\xi)$$

Поместим под предел: $a < \xi < a + \Delta x < b$, следовательно $\xi \to a + 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\xi \to a+0} f'(\xi)$$

Отсюда получаем требуемое

$$f'_+(a) = \lim_{\xi \to a+0} f'(\xi) \blacksquare$$

Понятно, что аналогичная теорема справедлива, если при тех же предположениях устремить $x \to b - 0$.

**Теорема Коши, геометрический смысл.**

**Теорема 60** (Коши).
Пусть $f, g \in C[a, b]$ и дифференцируемы на $(a, b)$. Тогда $\exists \xi \in (a, b)$, что выполняется

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на $(a, b)$, то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Прямые вычисления показывают, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Кроме того, из условий теоремы следует, что $\varphi \in C[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$. Значит, по теореме Ролля (55) найдется $\xi \in (a, b)$, что $\varphi'(\xi) = 0$, то есть

$$g'(\xi)\,(f(b) - f(a)) = f'(\xi)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Если $g'(x) \neq 0$ на $(a, b)$, то $g(b) \neq g(a)$ (иначе по теореме Ролля нашлась бы точка из интервала $(a, b)$, в которой производная бы обращалась в ноль), а значит

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*В геометрическом смысле Т. Коши – это Т. Лагранжа для параметрически заданной функции.*

> Геометрическая интерпретация к теореме Коши та же, что и к теореме Лагранжа. Пусть $g'(t) \neq 0$ на $(a, b)$. Тогда, и это можно доказать, либо $g'(t) > 0$ на $(a, b)$, либо $g'(t) < 0$ на $(a, b)$, а значит система
>
> $$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$
>
> задает функцию $y = f(g^{-1}(x))$ параметрически. Тогда в выражении
>
> $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
>
> слева стоит коэффициент наклона хорды, соединяющей концы графика функции $y = f(g^{-1}(x))$, а справа – коэффициент наклона касательной к графику этой функции в некоторой промежуточной точке $\xi$ (см. теорему 53).

## 13. Французские теоремы (Лопиталя)

Материалы: Бойцев (4.1, 4.6), Правило Лопиталя

**[Б7] Определения производной и дифференциала функции.**

Пусть $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0, x_0 + h \in \langle a, b\rangle$.

- Предел $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, если он ∃ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется ***производной*** функции $f$ в точке $x_0$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x_0$, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \qquad h \to 0$$
- Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге, $df(x_0)(h) = Ah$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируема на множестве*** $E$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. $df(x) = A(x)dx$.

**Теорема Лопиталя.**

> **Теорема 61** (Правило Лопиталя).
> Пусть $f, g$ дифференцируемы на $(a, b)$, $g'(x) \neq 0$ на $(a, b)$ и
>
> $$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$
>
> Тогда в любом из двух случаев:
>
> 1. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0.$
> 2. $\lim\limits_{x\to a+0} |g(x)| = +\infty.$
>
> выполняется
>
> $$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

*Доказательство.* Докажем первый пункт. Так как

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0,$$

то функции $f$ и $g$ можно доопределить по непрерывности, положив $f(a) = g(a) = 0$. Пусть $c \in (a, b)$. Тогда $f, g \in C[a, c]$ и дифференцируемы на $(a, c)$. Так как $g'(x) \neq 0$, то, согласно теореме Коши (60),

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x < c.$$

При $x \to a + 0$ выполняется $\xi \to a + 0$, а значит

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A \Rightarrow \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Докажем второй пункт. Пусть $A \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta_0 < (b - a)$ , что при $x \in (a, a + \delta_0)$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

В частности, при $x \in (a, a + \delta_0)$ функция $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ограничена, то есть

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \leq M.$$

Пусть $x \in (a, a + \delta_0)$, рассмотрим преобразования

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} =$$

$$= \frac{g(x) - g(a + \delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x) - g(a + \delta_0)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} =$$

$$= \left(1 - \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)}\right) \cdot \frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x) - g(a + \delta_0)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)}.$$

На отрезке $[x, a + \delta_0]$ функции $f$ и $g$ непрерывны, а на интервале $(x, a + \delta_0)$ дифференцируемы, значит, по теореме Коши (60),

$$\frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x) - g(a + \delta_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < x < \xi < a + \delta_0.$$

Так как $|g(x)| \to +\infty$, то по ранее заданному $\varepsilon$, можно найти $\delta_1 < \delta_0$, что при $x \in (a, a + \delta_1)$ справедливы оценки

$$\left| \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} \right| < \varepsilon.$$

Тогда, при $x \in (a, a + \delta_1)$,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A - \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| + \left| \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| + \left| \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot M + \varepsilon = \varepsilon(2 + M).$$

В силу произвольности $\varepsilon$ отсюда следует требуемое.

Пусть теперь $A = +\infty$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta_0 < (b - a)$ , что при $x \in (a, a + \delta_0)$ справедливо неравенство

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a+0}|g(x)| = +\infty$, можно найти $\delta_1 < \delta_0$ так, чтобы при $x \in (a, a+\delta_1)$ выполнялось

$$\left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}.$$

Используя аналогичные выкладки, что и ранее, при $x \in (a, a+\delta_1)$ имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} > \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ отсюда следует требуемое.

Случай $A = -\infty$ доказывается аналогично предыдущему пункту и остается в качестве упражнения. □

***Замечания***

- Теорема справедлива при $a = -\infty$, достаточно при доказательстве положить $t = \frac{1}{x}$.
- Теорема справедлива при $x \to b - 0$.
- Условие существования предела производных важно!
- При невыполнении условий теоремы, может получиться ошибочный ответ по правилу Лопиталя.
- Геометрический смысл: предел отношения функций в случае «неопределенности» равен пределу отношения коэффициентов наклона касательных, если последний существует.

Докажем второй пункт для частного случая $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to a+0}\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} = \lim_{x\to a+0}\frac{-\frac{1}{g^2(x)}\cdot g'(x)}{-\frac{1}{f^2(x)}\cdot f'(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to a+0}\frac{f^2(x)}{g^2(x)}$$

Так как $f(x)$ и $g(x)$ – ББФ, $\frac{1}{g(x)}$ и $\frac{1}{f(x)}$ – ББМ, то есть $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0}\frac{1}{f(x)} = 0$, применяем 1 пункт

Возьмём крайние части равенства и поделим на $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}$, в силу непрерывности

$$\frac{1}{\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}} = \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## 14. Формула Тейлора

Материалы: Бойцев (4.1, 4.7, 4.8), Правдин: лекция 13

**[Б7] Определения производной и дифференциала функции.**

Пусть $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0, x_0 + h \in \langle a, b\rangle$.

- Предел $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, если он $\exists$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется ***производной*** функции $f$ в точке $x_0$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x_0$, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(h), \qquad h \to 0$$

- Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге, $df(x_0)(h) = Ah$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируема на множестве*** $E$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. $df(x) = A(x)dx$.

**Определения производной и дифференциала высшего порядка.**

**Определение 72** (Производная высшего порядка).
Пусть $(n-1) \in \mathbb{N}$ и определена функция $f^{(n-1)} : E_{n-1} \to \mathbb{R}$ – производная $(n-1)$-ого порядка функции $f$. Обозначим через $E_n$ множество точек $x \in E_{n-1}$, для которых

$$E_{n-1} \cap (x-\delta, x+\delta)$$

– невырожденный промежуток при некотором $\delta > 0$, и в которых функция $f^{(n-1)}$ дифференцируема. Положим

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad x \in E_n.$$

Введенная функция называется производной порядка $n$, или, короче, $n$-ой производной функции $f$. При этом функция $f$ называется $n$ раз дифференцируемой на множестве $E_n$.

**Определение 74** (Дифференциал высшего порядка).
Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f : E \to \mathbb{R}$ – $n$ раз дифференцируемая в точке $x_0 \in E$ функция, $h \in \mathbb{R}$. Величина

$$d^n f(x_0)(h) = d\left(d^{n-1} f(x)(h)\right)(h),$$

называется $n$-ым дифференциалом функции $f$ в точке $x_0$, соответсnвующим приращению $h$.

**Теорема 62** (Формула Лейбница).
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ имеют $n \in \mathbb{N}$ производных в точке $x_0 \in E$. Тогда

1. Производная линейна, а именно:

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Справедлива формула Лейбница:

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

**Определение 73** (Классы гладкости).
Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $f^{(n)} : E \to \mathbb{R}$. Если $f^{(n)} \in C(E)$, то $f$ называется $n$ раз непрерывно дифференцируемой на $E$ и обозначается

$$f \in C^n(E).$$

Через $C^\infty(E)$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых на $E$ функций – функций, заданных на $E$, и имеющих на $E$ производные всех порядков.

**Определение многочлена Тейлора.**

**Определение 75** (Понятие многочлена Тейлора).
Пусть функция $f$ имеет в точке $x_0$ все производные до порядка $n$ включительно. Многочлен

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка $n$ функции $f$ в точке $x_0$. В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.

**Определение 76** (Понятие отклонения).
Отклонением многочлена Тейлора $P_n(x, x_0)$ от породившей его функции $f$ назовем величину

$$r_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$$

**Теорема о формуле Тейлора с остатком в форме Пеано.**

**Теорема 63** (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).
Пусть функция $f$ в точке $x_0$ имеет производные до порядка $n$ включительно. Тогда справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

*Доказательство.* Положим $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, x_0)$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что

$$\varphi(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

а для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Так как функция $\varphi$ имеет $n$ производных в точке $x_0$, то все производные до $(n-1)$ порядка включительно определены как минимум на некотором промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$, причем $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Используем теорему Коши (60) несколько раз, учитывая, что $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$, и что, согласно лемме 62,

$$\varphi^{(k)}(x_0) = 0, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{n((\xi_1 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - x_0)^{n-2}} = \dots =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \varphi^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

где $\xi_1$ лежит между $x$ и $x_0$, $\xi_2$ между $\xi_1$ и $x_0$, и так далее, $\xi_{n-1}$ между $\xi_{n-2}$ и $x_0$. Предпоследнее равенство верно в силу существования $\varphi^{(n)}(x_0)$ и того, что

$$(x \to x_0) \;\Rightarrow\; (\xi_{n-1} \to x_0).$$

□

**Лемма 62.**
Пусть $P_n(x, x_0)$ — многочлен Тейлора порядка $n$ функции $f$ в точке $x_0$. Тогда

$$\left(P_n(x, x_0)\right)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

*Доказательство.* Проверка осуществляется прямым дифференцированием и остается в качестве упражнения. □

**Теорема о единственности многочлена Тейлора.**

**Теорема 64** (О единственности многочлена Тейлора).
Если существует многочлен

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

то он единственен.

*Доказательство.* Сначала определим коэффициент $a_0$ из равенства

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n)) = a_0.$$

Далее, найдем коэффициент $a_1$ следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})\right) = a_1.$$

Продолжая, найдем коэффициент $a_n$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1})}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} (a_n + o(1)) = a_n.$$

□

**Теорема о характеристике остаточного члена в формуле Тейлора (без доказательства).**

**Теорема 65** (О характеристике остаточного члена).
Пусть $f$ непрерывна вместе со своими первыми $n$ производными на отрезке с концами $x_0$ и $x$, а во внутренних точках этого отрезка имеет производную порядка $(n + 1)$. Тогда для любой функции $\varphi$, непрерывной на данном отрезке и имеющей отличную от нуля производную во внутренних точках данного отрезка, найдется точка $\xi$, лежащая между $x_0$ и $x$, такая, что

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

**Следствия об остаточных членах в формах Лагранжа и Коши.**

**Следствие 20** (Остаточный член в форме Лагранжа).
Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Лагранжа:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $\xi$ лежит между $x$ и $x_0$.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно в предыдущей теореме положить $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$. □

**Следствие 21** (Остаточный член в форме Коши).
Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Коши:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0),$$

где $\xi$ лежит между $x$ и $x_0$.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно в предыдущей теореме положить $\varphi(t) = (x - t)$. □

## 15. Исследование функции с помощью производных (монотонность и экстремумы)

Материалы: Бойцев (3.7, 4.6, 4.10.1), Правдин: лекция 14

**[Б10] Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции.**

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$.

- $f$ ***возрастает*** на $E$, если $\forall x_1, x_2 \in E\colon\ \ x_1 < x_2\ \ \ f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f$ ***строго возрастает*** на $E$, если $\forall x_1, x_2 \in E\colon\ \ x_1 < x_2\ \ \ f(x_1) < f(x_2)$
- $f$ ***убывает*** на $E$, если $\forall x_1, x_2 \in E\colon\ \ x_1 < x_2\ \ \ f(x_1) \geq f(x_2)$
- $f$ ***строго убывает*** на $E$, если $\forall x_1, x_2 \in E\colon\ \ x_1 < x_2\ \ \ f(x_1) > f(x_2)$

Возрастающая / строго возрастающая / убывающая / строго убывающая функция ***монотонна***.

**[Б10] Определение точек локального максимума, минимума и экстремума.**

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$.

- Точка $x_0 \in E$ - точка ***локального максимума*** (***строгого локального максимума***), если

$$\exists \dot{U}(x_0)\colon \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)\ \ (f(x) < f(x_0))$$

- Точка $x_0 \in E$ - точка ***локального минимума*** (***строгого локального минимума***), если

$$\exists \dot{U}(x_0)\colon \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)\ \ (f(x) > f(x_0))$$

Точка (***строгого***) ***экстремума*** – точка (строгого) локального максимума/минимума.

**Теорема о необходимом условии экстремума.**

**Теорема 69** (Необходимое условие экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f$ не дифференцируема в $x_0$.

*Доказательство.* Если $f$ дифференцируема в точке $x_0$, то доказательство напрямую следует из теоремы Ферма (54). Иначе утверждение тривиально. □

Теорема Ферма

> **Теорема 54** (Ферма).
> Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если $x_0$ – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

**Теорема о первом достаточном условии экстремума.**

> **Теорема 70** (Первое достаточное условие экстремума).
> Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, непрерывна в точке $x_0$ и дифференцируема на множествах $U_-(x_0) = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ и $U_+(x_0) = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$. Тогда:
>
> 1. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то $x_0$ является точкой строгого локального максимума функции $f$.
> 2. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то $x_0$ является точкой строгого локального минимума функции $f$.
> 3. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то $x_0$ не является точкой экстремума функции $f$.
> 4. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то $x_0$ не является точкой экстремума функции $f$.

*Доказательство.* Докажем первое утверждение. Так как $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $f$ непрерывна в точке $x_0$, то, согласно сформулированной выше теореме 68, $f$ строго возрастает на $(x_0 - \varepsilon, x_0]$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U_-(x_0)$. Аналогично, так как $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и $f$ непрерывна в точке $x_0$, то $f$ строго убывает на $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U_+(x_0)$. Тем самым проверено, что точка $x_0$ – точка строгого локального максимума.

Доказательство остальных пунктов проводится аналогичным образом и остается в качестве упражнения. □

> **Теорема 68** (О связи монотонности и производной).
> Пусть функция $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$. Тогда справедливы соотношения:
>
> $$f'(x) > 0 \text{ на } (a,b) \ \Rightarrow\ f(x) \text{ строго возрастает на } [a,b] \ \Rightarrow\ f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b).$$
> $$f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b) \ \Rightarrow\ f(x) \text{ возрастает на } [a,b] \ \Rightarrow\ f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b).$$
> $$f'(x) < 0 \text{ на } (a,b) \ \Rightarrow\ f(x) \text{ строго убывает на } [a,b] \ \Rightarrow\ f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b).$$
> $$f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b) \ \Rightarrow\ f(x) \text{ убывает на } [a,b] \ \Rightarrow\ f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b).$$

Доказательство. Это переформулированная теорема «Критерий монотонности функции».

**Классификация точек экстремума.**

> **Определение 77** (Классификация точек экстремума).
> Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума $f$.
>
> 1. Если $f$ дифференцируема в $x_0$, то экстремум называется гладким.
> 2. Если $f'(x_0-0) = +\infty$, $f'(x_0+0) = -\infty$, или $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$, то экстремум называется острым.
> 3. Если существуют (в $\overline{\mathbb{R}}$) $f'(x_0 \pm 0)$ и хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.

**Теорема о втором достаточном условии экстремума.**

**Теорема 71** (Второе достаточное условие экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ и $f$ имеет в точке $x_0$ производные до порядка $n \in \mathbb{N}$ включительно, причем $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1. Если $n$ нечетно, то точка $x_0$ – не точка экстремума.
2. Если $n$ четно, то точка $x_0$ – точка строгого локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и точка строгого локального максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

*Доказательство.* Воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Пеано

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n(1 + \alpha(x)), \quad \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Из последнего следует, что найдется $\delta$, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \langle a, b\rangle$, знаки выражений

$$f(x) - f(x_0) \quad \text{и} \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

совпадают.

Докажем первый пункт. При нечетном $n$ выражение $(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе через точку $x_0$, значит, по соображениям выше, меняет знак и выражение $f(x) - f(x_0)$, что означает, что $x_0$ – не точка экстремума.

Докажем второй пункт. Пусть, например, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда, так как $(x - x_0)^n > 0$ при $x \neq x_0$, то при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$,

$$f(x) - f(x_0) > 0,$$

а значит $x_0$ – точка строгого локального минимума. Аналогичным образом разбирается случай, когда $f^{(n)}(x_0) < 0$. $\square$

**Теорема 63** (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).
Пусть функция $f$ в точке $x_0$ имеет производные до порядка $n$ включительно. Тогда справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

## 16. Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба 1)

Материалы: Бойцев (4.1, 4.10.2), Правдин: лекция 15

**Определение выпуклой функции.**

**Определение 78** (Понятие выпуклой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

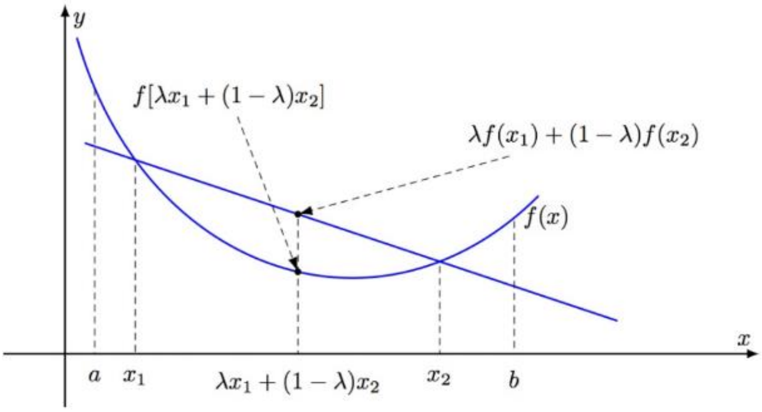
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \underset{\geq}{\leq} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

то $f$ называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$.

Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \underset{>}{<} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

то $f$ называется строго выпуклой вниз (верх).




**Критерий выпуклости в терминах наклона хорд.**

**Теорема 72** (Критерий выпуклости в терминах наклона хорд).
Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда для любых $x, x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, что $x_1 < x < x_2$, выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{\geq}{\leq} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

При этом $f$ строго выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{>}{<} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Доказательство.
Пусть $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, заметим, что если $\lambda \in (0,1)$, то $x$ между $x_1$ и $x_2$, НУО $x_1 < x_2$. Выразим $\lambda$:

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - 1}, \qquad 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Подставим значения в условие выпуклости

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

получим

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2).$$

Значит, так как

$$(x_2 - x_1)f(x) = (x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x),$$

то

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

откуда, делением на $(x_2 - x)(x - x_1)$, приходим к требуемому.

Доказательство достаточности опирается на те же рассуждения, но проводимые «в обратную сторону». Строгая выпуклость, при этом, дает строгие неравенства, и наоборот. $\square$

## [Б7] Определения производной и дифференциала функции.

Пусть $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0, x_0 + h \in \langle a, b\rangle$.

• Предел $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, если он $\exists$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется ***производной*** функции $f$ в точке $x_0$.

- Функция $f$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x_0$, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что
$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(h), \qquad h \to 0$$
- Линейная по $h$ функция $Ah$ в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $df(x_0)$. В итоге, $df(x_0)(h) = Ah$.
- Функция $f$ называется ***дифференцируема на множестве*** $E$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. $df(x) = A(x)dx$.

**Критерий выпуклости дифференцируемой функции.**

**Теорема 73** (Критерий выпуклости дифференцируемой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и дифференцируема на $(a, b)$. Тогда:

1. $f$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f'$ возрастает (убывает) на $(a, b)$.
2. $f$ строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f'$ строго возрастает (убывает) на $(a, b)$.

*Доказательство.* Будем рассматривать случай, когда функция выпукла вниз. Случай выпуклой вверх функции рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения.

Докажем необходимость. Для этого в неравенстве
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad x, x_1, x_2 \in (a, b), \quad x_1 < x < x_2,$$
перейдем к пределу при $x \to x_1$, получив
$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$
В итоге,
$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2),$$
откуда и следует возрастание производной. Используя доказанное, для строго выпуклой вниз функции, используя теорему Лагранжа (56), получим
$$f'(x_1) \le f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2) \le f'(x_2)$$
при $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$. Следовательно, строгая выпуклость вниз влечет строгое возрастание производной.

Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2$. Тогда, по теореме Лагранжа (56),
$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \quad \xi_1 \in (x_1, x)$$
и
$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad \xi_2 \in (x, x_2).$$
Так как $f'$ возрастает на $(a, b)$, то $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, откуда
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$
и функция $f$ выпукла вниз (теорема 72). Если же $f'$ строго возрастает, то $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, откуда
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$
и функция $f$ строго выпукла вниз (теорема 72) $\square$

**Определение точки перегиба.**

**Определение 79** (Понятие точки перегиба).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, причем

1. Существует $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0 - \delta, x_0]$, $[x_0, x_0 + \delta)$ функция $f$ имеет разный характер выпуклости.
2. $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $x_0$ называется точкой перегиба $f$.

## 17. Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба 2)

Материалы: Бойцев (4.10.2), Правдин: лекция 15

[Б16] Определение выпуклой функции.

[Б16] Определение точки перегиба.

**Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции.**

**Теорема 74** (Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и дважды дифференцируема на $(a, b)$. Тогда:

1. $f$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ на $(a, b)$ ($f''(x) \leq 0$ на $(a, b)$).
2. Если $f''(x) > 0$ на $(a, b)$ ($f''(x) < 0$ на $(a, b)$), то $f$ строго выпукла вниз (вверх).

Доказательство. Комбинация теорем «О связи монотонности и производной» и «Критерий выпуклости дифференцируемой функции».

**Теорема о характеристике выпуклости в терминах касательных.**

**Теорема 75** (Характеристика выпуклости в терминах касательных).
Пусть $f$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $f$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции $f$ лежат не ниже (не выше) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть
$$f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \langle a, b\rangle.$$
2. $f$ строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции $f$, за исключением точки касания, лежат выше (ниже) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть
$$f(x) \underset{<}{>} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x, x_0 \in \langle a, b\rangle, \quad x \neq x_0.$$

*Доказательство.* Будем рассматривать случай, когда функция выпукла вниз. Случай выпуклой вверх функции рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения.

Докажем необходимость. Пусть $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Уравнение касательной к графику функции в точке $x_0$ имеет вид

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Применяя теорему Лагранжа (56), получим

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0),$$

где $\xi$ лежит между $x$ и $x_0$. Так как $f$ выпукла вниз, то $f'$ возрастает на $(a, b)$ (теорема 73) и знак выражения $f'(\xi) - f'(x_0)$ совпадает со знаком $x - x_0$. Значит,

$$f(x) - g(x) \geq 0, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Если $f$ строго выпукла вниз, то $f'$ строго возрастает на $(a, b)$ (теорема 73), откуда

$$f(x) - g(x) > 0, \quad x \in \langle a, b \rangle, \quad x \neq x_0.$$

Докажем достаточность. Пусть $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$ и

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$

Тогда при $x < x_0$ выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0),$$

а при $x > x_0$ выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0).$$

Тем самым, для любого набора точек $x, x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x < x_2$, выполняется

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

и, согласно теореме 72, $f$ выпукла вниз. Легко понять, что строгое неравенство влечет строгую выпуклость, а значит утверждение доказано. □

## 18. Исследование функции с помощью производных (асимптоты)

Материалы: Бойцев (4.10.3), Правдин: лекция 15

**Определение асимптоты, виды асимптот.**

> **Определение 80** (Понятие асимптоты).
> Прямая $l$ называется асимптотой графика функции $f$, если расстояние от точки $(x, f(x))$, лежащей на графике, до прямой $l$ стремится к нулю при удалении точки $(x, f(x))$ на бесконечность от начала координат.

Итак, удаление точки $(x, f(x))$ на бесконечность может происходить тремя способоами:

1. Величина $x$ ограничена, а $f(x) \to \pm\infty$.
2. Величина $f(x)$ ограничена, а $x \to \pm\infty$.
3. Одновременно $x \to \pm\infty$ и $f(x) \to \pm\infty$.

В первом случае мы будем говорить о вертикальной асимптоте, во втором – о горизонтальной, а в третьем – о наклонной (если существует).

**Определение 81** (Понятие вертикальной асимптоты).
Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f$, если выполнено хотя бы одно из (четырех) условий:

$$\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to x_0\pm 0} f(x) = -\infty$$

**Определение 82** (Понятие наклонной асимптоты).
Прямая $g(x) = kx+b$ называется наклонной асимптотой графика функции $f$ при $x \to \pm\infty$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx+b)) = 0.$$

В случае, если $k = 0$, прямая $g(x) = b$ часто называется горизонтальной асимптотой.

**Теорема о формулах для коэффициентов наклонной асимптоты.**

**Теорема 76** (Формулы для коэффициентов наклонной асимптоты).
Для того чтобы прямая $g(x) = k_{\pm\infty}x + b_{\pm\infty}$ была асимптотой графика функции $f$ при $x \to \pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k_{\pm\infty},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b_{\pm\infty}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай $x \to +\infty$. Случай $x \to -\infty$ разбирается аналогичным образом.

Докажем необходимость. Пусть прямая $g(x) = kx + b$ является асимптотой графика функции $f$ при $x \to +\infty$. Тогда выполняется условие

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx+b)) = 0$$

или соотношение

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Обе части последнего равенства разделим на $x$, тогда

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{kx+b+\alpha(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k.$$

Далее, соотношение $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ переписывается в виде $f(x) - kx = b + \alpha(x)$. Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Докажем достаточность. Пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Тогда второе соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) - b = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0,$$

что по определению означает, что $y = kx + b$ – наклонная асимптота. □

**Следствие 22.**
Для того, чтобы прямая $y = b$ была горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b_{\pm\infty}.$$

**Лемма о связи выпуклости и асимптоты.**

**Лемма 65** (Выпуклость и асимптота).
Пусть $f : (x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет асимптоту $g(x) = kx + b$ при $x \to +\infty$ и выпукла вниз (строго выпукла вниз) на $(x_0, +\infty)$. Тогда $f(x) \geq g(x)$ при $x > x_0$ ($f(x) > g(x)$ при $x > x_0$).

*Доказательство.* Докажем, для разнообразия, утверждение для строго выпуклой вниз функции. Если мы покажем, что функция $f(x) - kx$ строго убывает при $x > x_0$, то по теореме Вейерштрасса (22) при $x > x_0$

$$f(x) - kx > \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \Rightarrow f(x) > kx + b.$$

Пусть $x_0 < x < y$, рассмотрим

$$F(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Заметим, что

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{y} = k.$$

Покажем, что $F(y)$ строго возрастает. Пусть $y_1 > y$, положим $\lambda = \dfrac{y_1 - y}{y_1 - x}$, тогда $y = \lambda x + (1 - \lambda)y_1$ и, пользуясь строгой выпуклостью вниз $f$, имеем

$$f(y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y_1) \Rightarrow f(y) - f(x) < (1 - \lambda)(f(y_1) - f(x)) \iff$$

$$\iff f(y) - f(x) < \frac{y - x}{y_1 - x}(f(y_1) - f(x)) \iff \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(y_1) - f(x)}{y_1 - x},$$

что и означает требуемое. Значит, снова пользуясь строгим возрастанием и теоремой Вейерштрасса (22), имеем

$$F(y) < k \;\Leftrightarrow\; f(y) - f(x) < k(y - x) \;\Leftrightarrow\; f(y) - ky < f(x) - kx,$$

что завершает доказательство. $\square$

*Билеты сделал **Сакулин Иван Михайлович К3121**. Отказ от ответственности: автор предоставляет собственные доказательства «как есть», не даёт гарантий их правильности и не несёт ответственности за допущенные ошибки. Мяу =).*