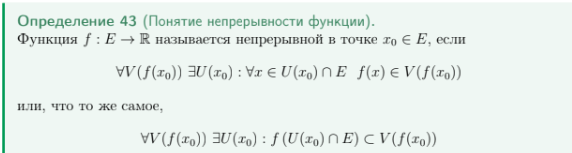
**Коллоквиум 2**: Непрерывность и дифференцирование

Математический анализ – 1 семестр

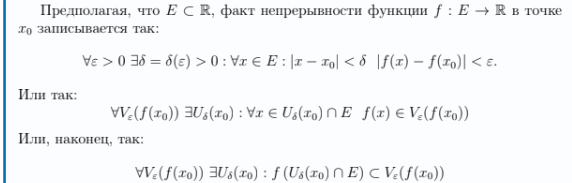
# Непрерывности функции и классификация разрывов

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (3.11, 3.12), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 9.1](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239152), [лекция 9.2](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239153)

## Определение непрерывной функции в точке (окрестности [1])



## Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства [2], ε-δ-окрестности [3])



**Доказательство** эквивалентности определений

*Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела.*

Определение *через ε-δ и неравенства [2]* получается из *ε-δ-окрестности [3]* по определению ε-δ-окрестности .

[1]

[3]

Сначала докажем, что если непрерывна в точке в смысле определения [3], то непрерывна в точке и в смысле определения [1].

Пусть – произвольная окрестность точки , .

Положим , тогда

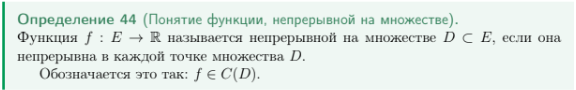
Согласно определению [3], по выбранному

то есть непрерывна в точке и в смысле определения [1].

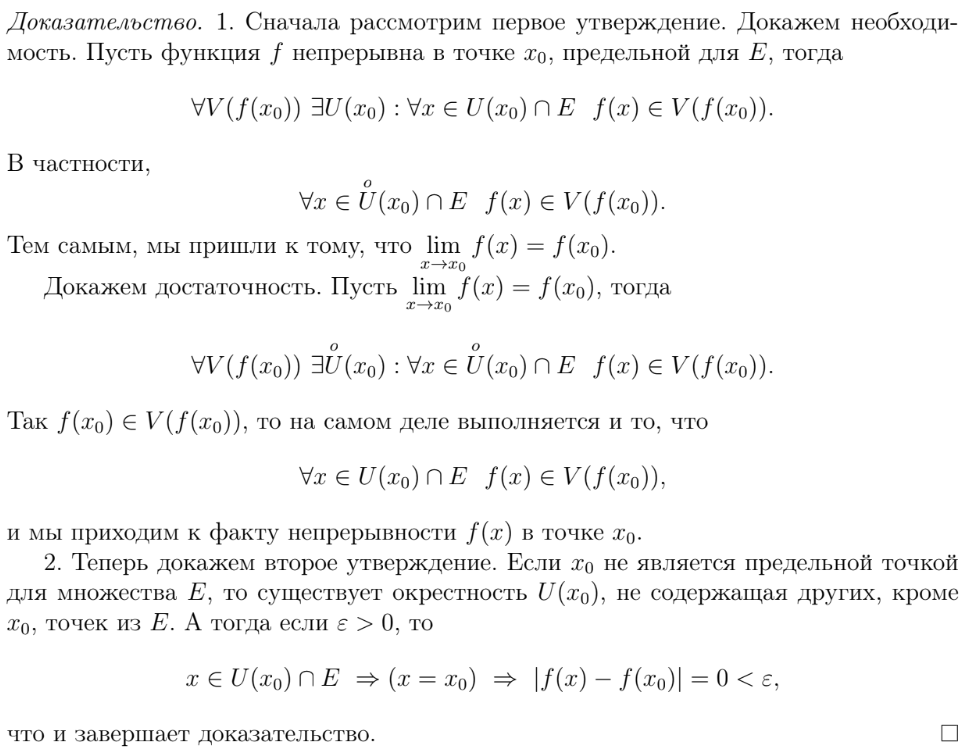
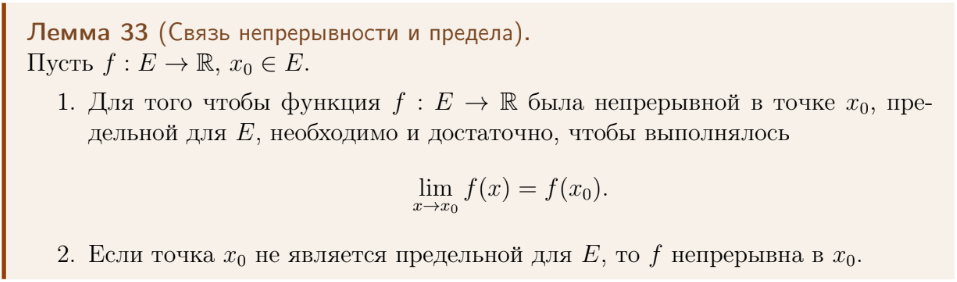
Тот факт, что из определения [1] следует определение [3], моментально следует из

того, что ε-δ-окрестности являются частным случаем окрестности .

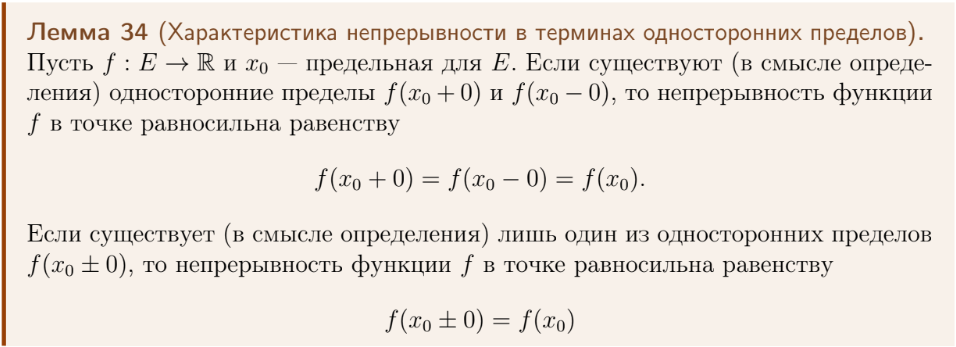
## Определение непрерывной функции на множестве



## Лемма о связи непрерывности и предела.

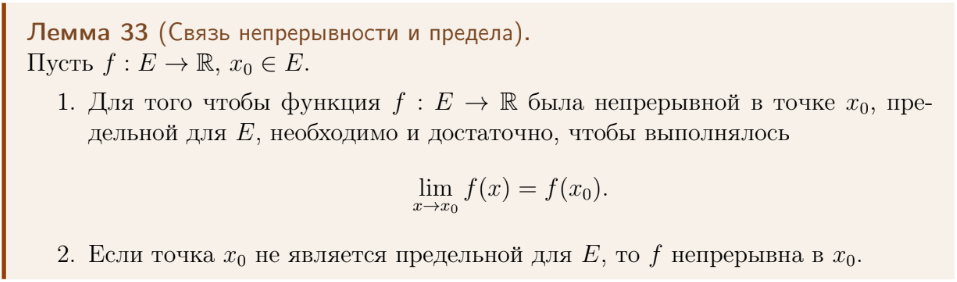
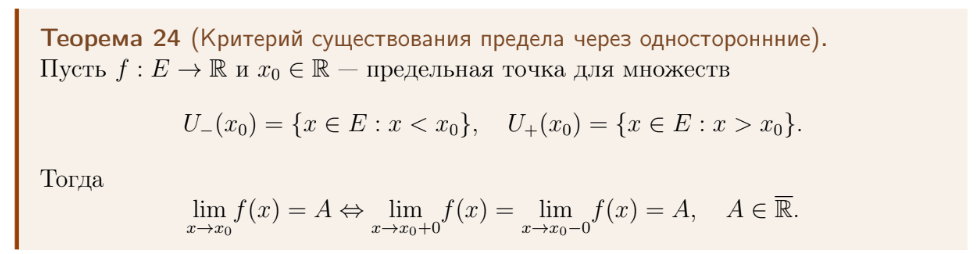


## Лемма о характеристике непрерывности в терминах односторонних пределов.



**Доказательство**

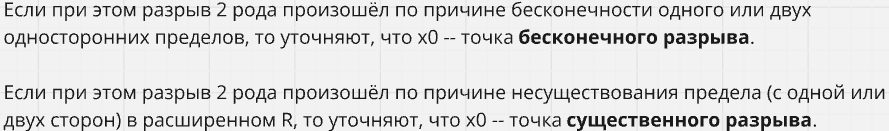
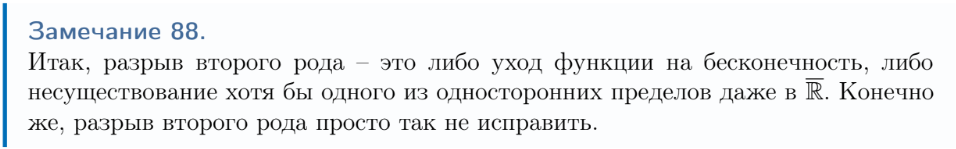
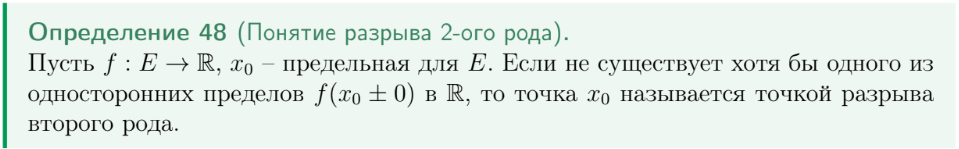
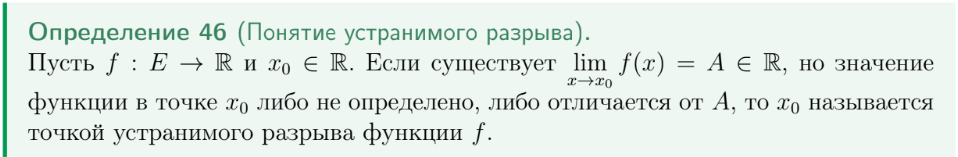
Эта лемма – комбинация леммы «Связь непрерывности и предела» и теоремы «Критерий существования предела через односторонние».

****

Если предельная для множеств и , то

Если – предельная для , то она предельная и хотя бы для одного из множеств:

## Определение точек разрыва и их классификация.



# Локальные свойства непрерывных функций

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (3.11, 3.12, 3.13), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): ([лекция 9.1](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239152), [лекция 9.2](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239153)), [лекция 9.3](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239154)

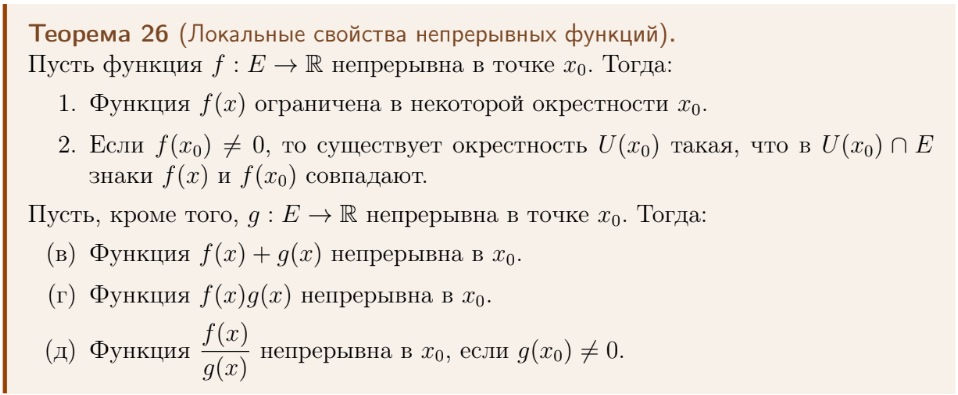
## [Б1] [Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности)](#_Определение_непрерывной_функции)

Функция называется непрерывной в точке

## [Б1] [Определение точек разрыва и их классификация.](#_Определение_точек_разрыва)

Пусть . Еслипредельная точка для и не непрерывна в точке , то точка называется *точкой разрыва* для функции .

## Теорема о пяти локальных свойствах непрерывной функции (локальные свойства, непрерывность суммы, произведения и отношения функций).



**Доказательство**

Первые два пункта доказывается также как соответствующие пункты в локальных свойствах функций, имеющих предел.

**Докажем (1) пункт**. Пусть . Согласно определению непрерывности функции в точке,

Отсюда,

Что и означает ограниченность, где

**Докажем (2) пункт**. Пусть , тогда согласно определению непрерывности функции в ,

Отсюда,

Откуда и следует требуемое ():

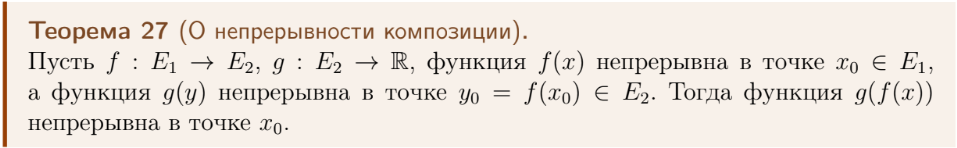
**Докажем (в, г, д) пункты**

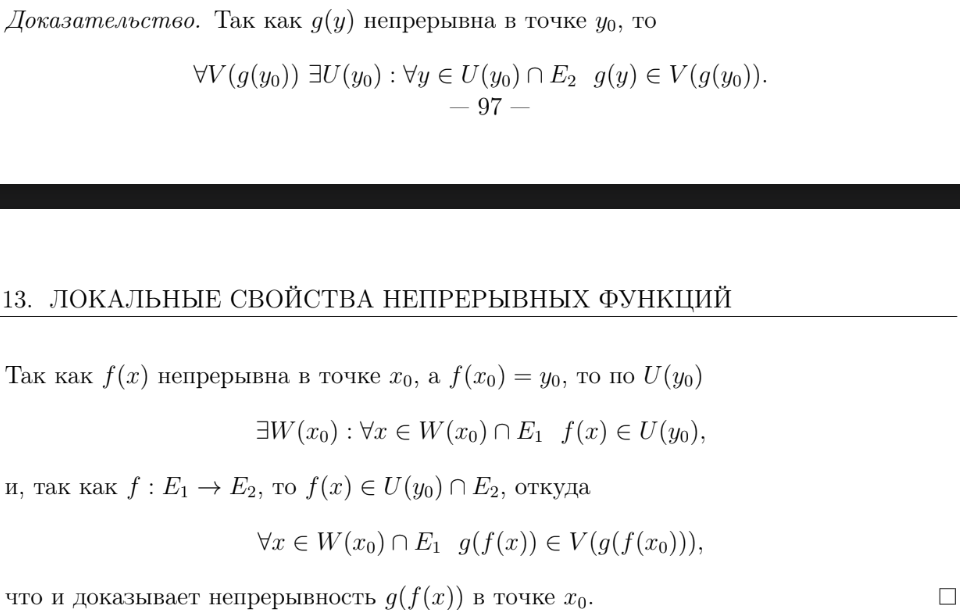
Если – не предельная точка для , то функции , и (при ), чьи области определения – это множество , автоматически непрерывны в точке .

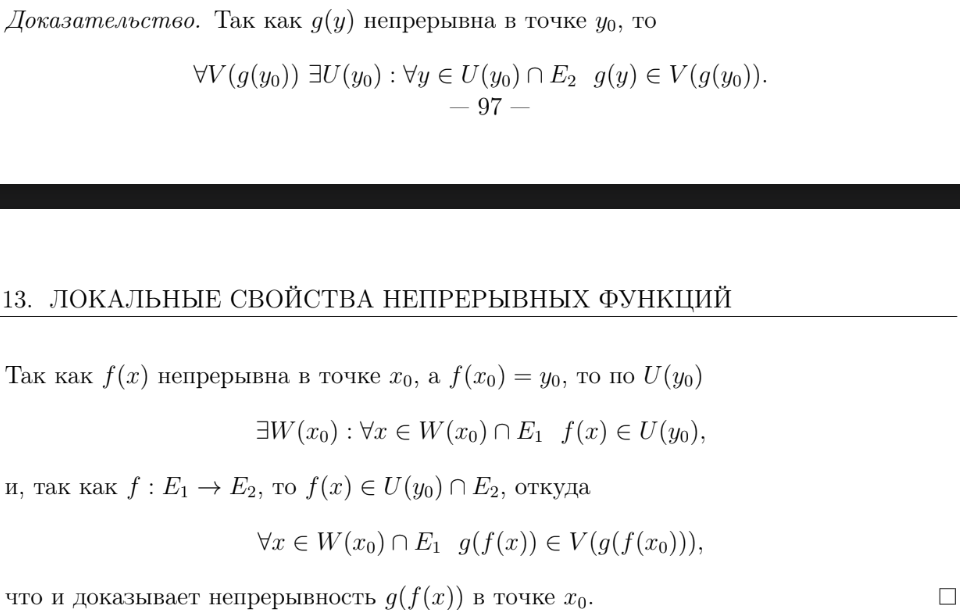
Если же точка – предельная точка для , то, используя определение непрерывности через предел, а также арифметические свойства пределов, имеем

Что и доказывает непрерывность функций.

## Теорема о непрерывности композиции функций.







# Теорема Вейерштрасса

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (3.11, 3.12, 3.14), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): ([лекция 9.1](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239152), [лекция 9.2](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239153)), [лекция 10.1](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239158)

## [Б1] [Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности)](#_Определение_непрерывной_функции)

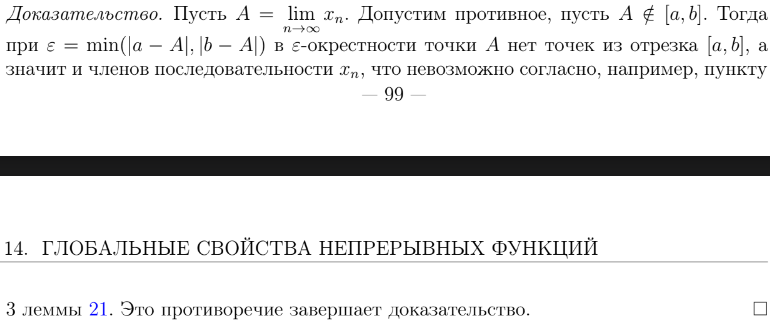
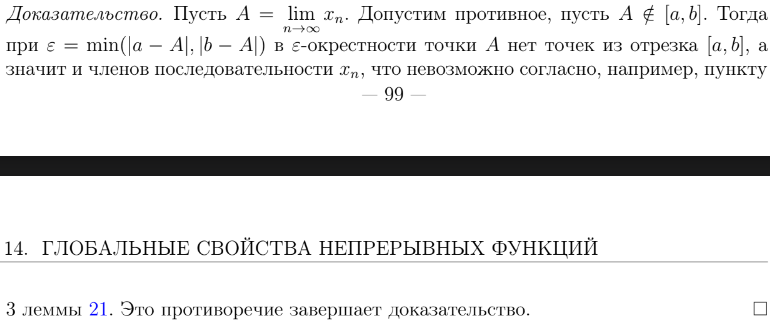
Функция называется непрерывной в точке

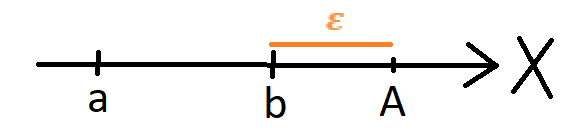
## [Б1] [Определение точек разрыва и их классификация.](#_Определение_точек_разрыва)

Пусть . Еслипредельная точка для и не непрерывна в точке , то точка называется *точкой разрыва* для функции .

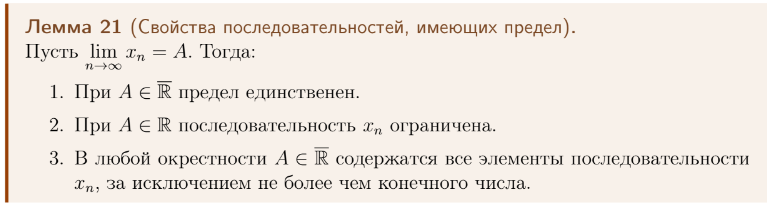
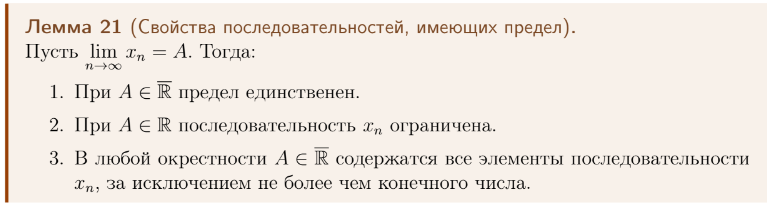
## Лемма о замкнутости отрезка.





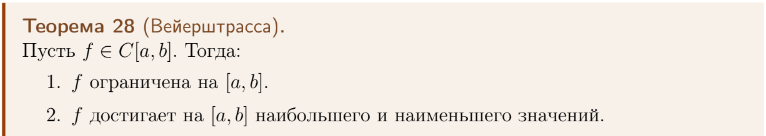


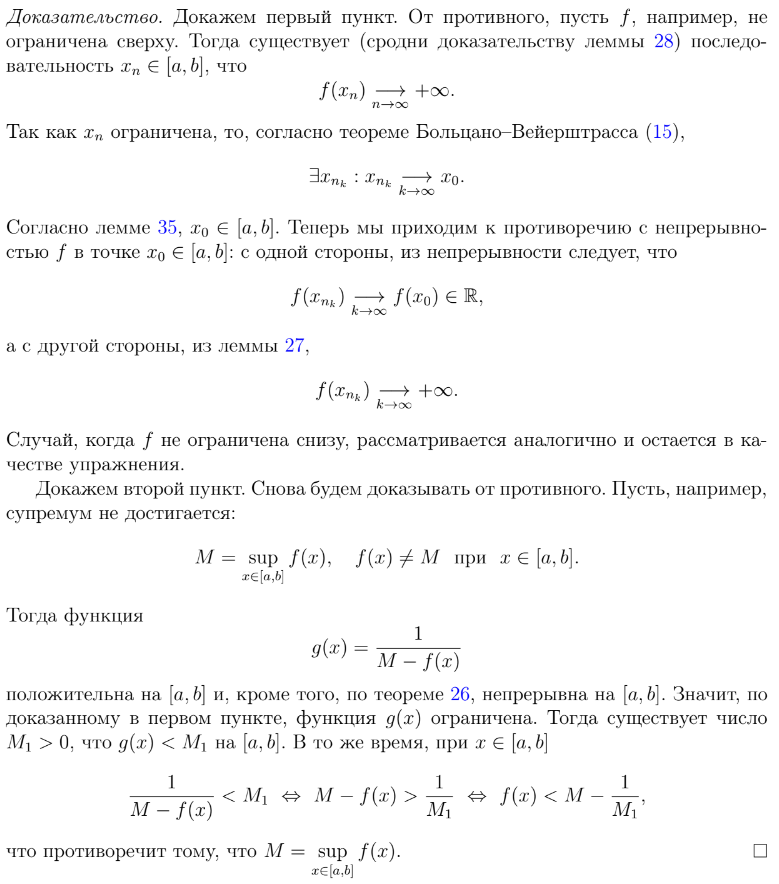
**Теоремы из доказательства:**



Замкнутое множество содержит все свои предельные точки.

## Теорема Вейерштрасса.

****

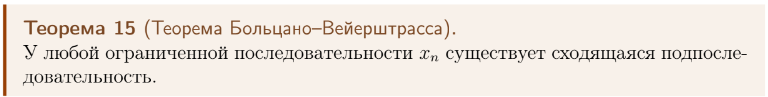


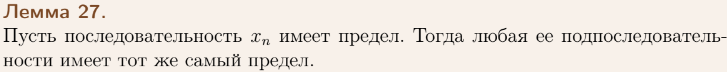
**Теоремы из доказательства:**

*Часть доказательства сродная лемме 28*

Пусть не ограничена сверху (снизу аналогично). Тогда найдется . Далее будем действовать по индукции. Если уже выбран , то выбирается . Такое построение возможно, так как иначе была бы ограничена сверху числом . Тем самым, .







# Теоремы Больцано-Коши

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (3.11, 3.12, 3.14), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): ([лекция 9.1](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239152), [лекция 9.2](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239153)), [лекция 10.1](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239158)

## [Б1] [Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности)](#_Определение_непрерывной_функции)

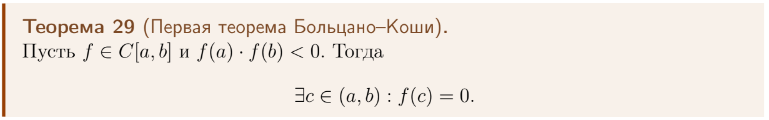
Функция называется непрерывной в точке

## [Б1] [Определение точек разрыва и их классификация.](#_Определение_точек_разрыва)

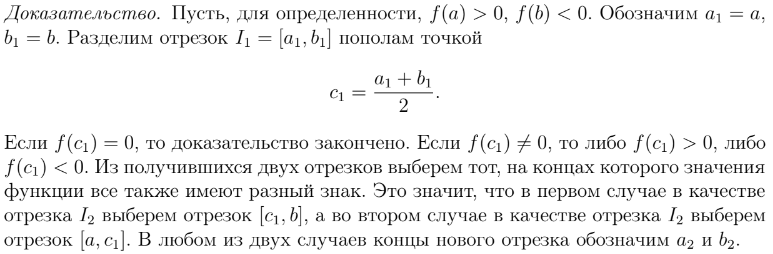
Пусть . Еслипредельная точка для и не непрерывна в точке , то точка называется *точкой разрыва* для функции .

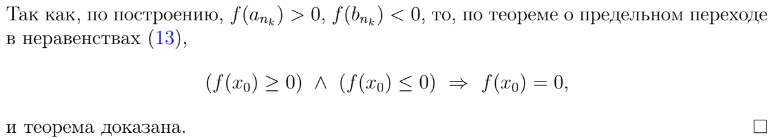
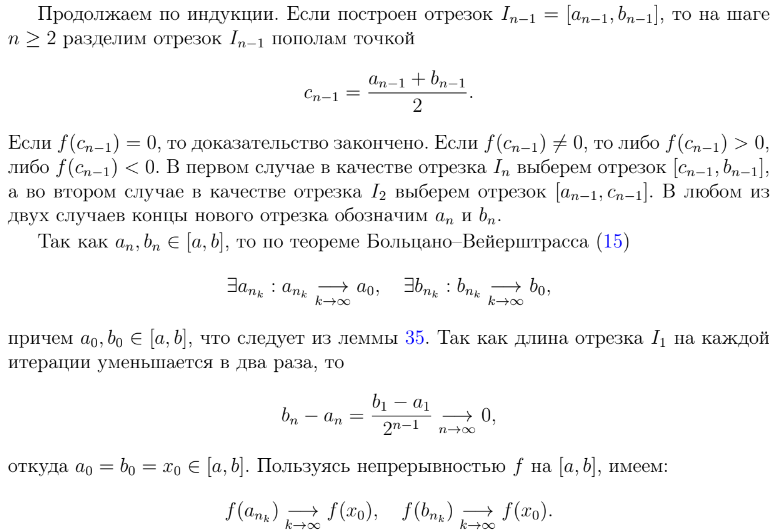
## Первая теорема Больцано-Коши.

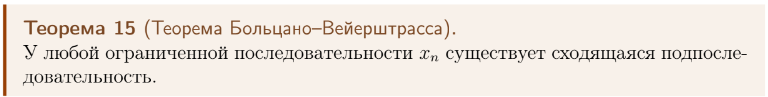
Непрерывная на отрезке функция, принимающая на концах отрезка значения разных знаков, должна в какой-то точке отрезка обратиться в ноль.

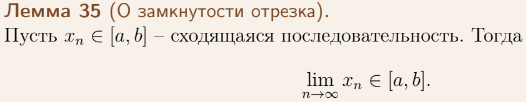
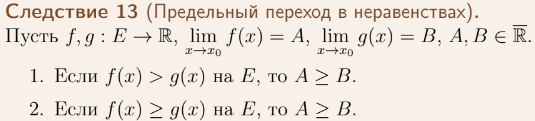


Предложенный метод поиска корня уравнения f(x) = 0 называется ***дихотомией*** или ***методом половинного деления****.*

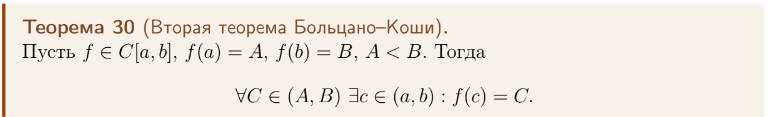


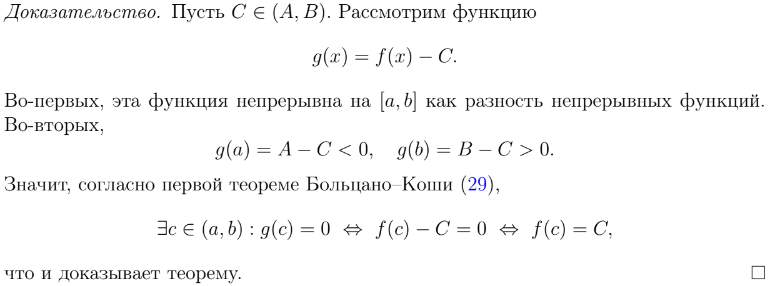


**Теоремы из доказательства:** 

## Вторая теорема Больцано-Коши.

Непрерывная функция, принимая на отрезке какие-то два значения, принимает на этом же отрезке и все промежуточные значения.



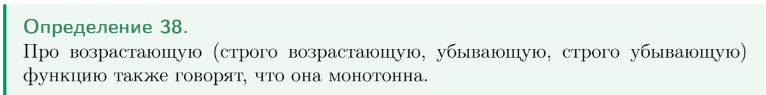
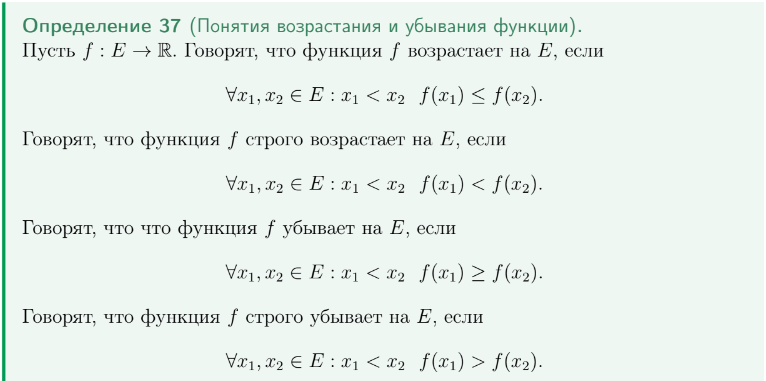
# Непрерывность и монотонность функции

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (3.7, 3.11, 3.14), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): ([лекция 9.1](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239152)), [лекция 10.2](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239159)

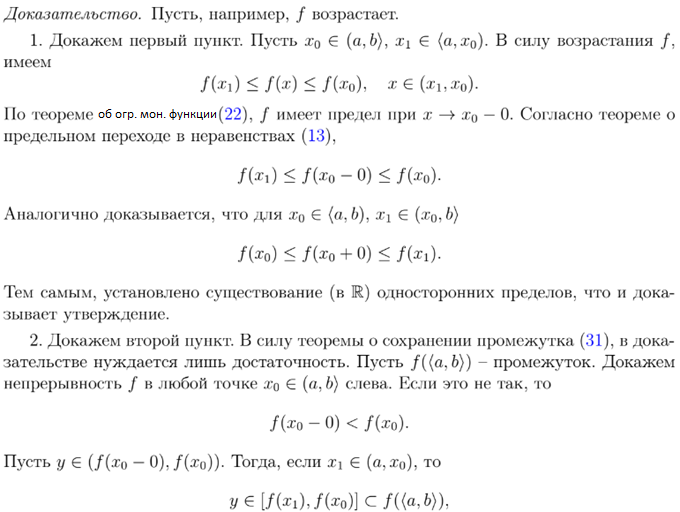
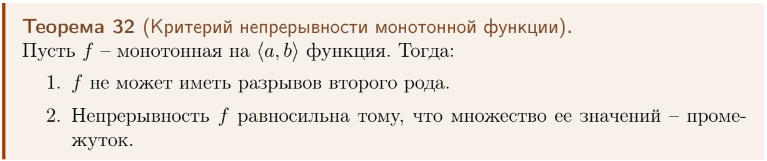
## [Б1] [Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности)](#_Определение_непрерывной_функции)

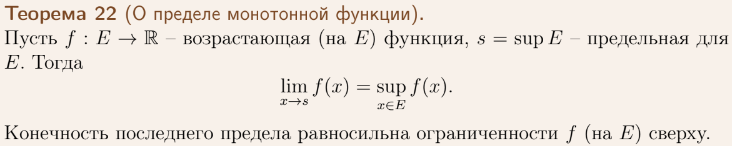
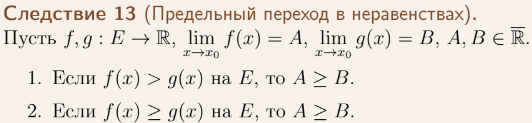
Функция называется непрерывной в точке

## Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции.

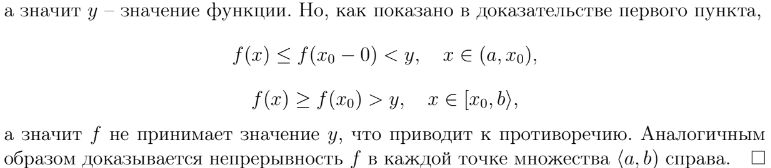
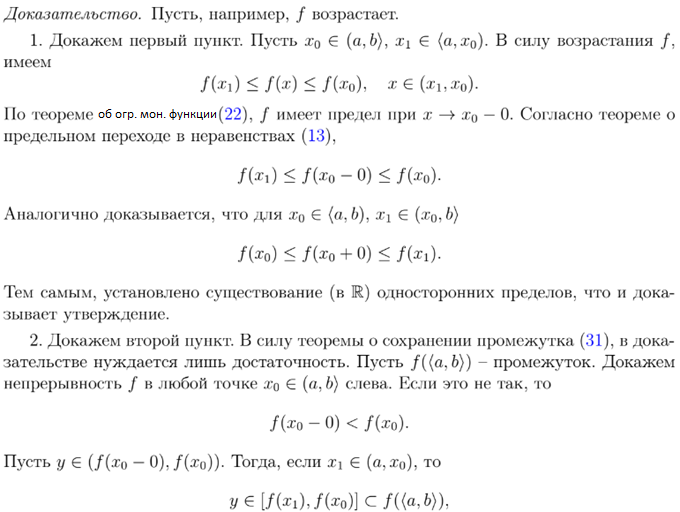


## Критерий непрерывности монотонной функции.

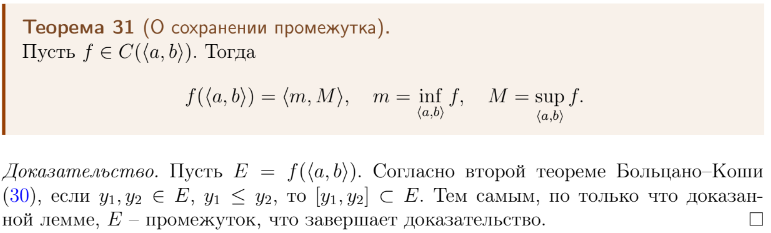
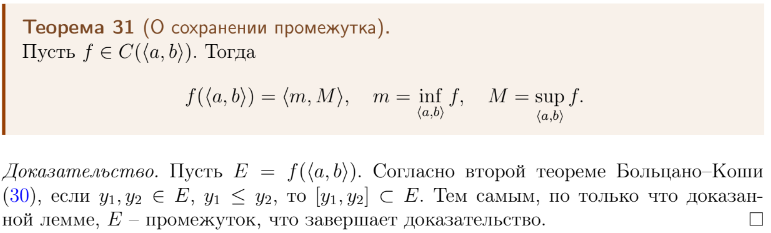
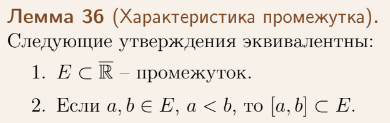
 **Теоремы из доказательства 1 пункта:**

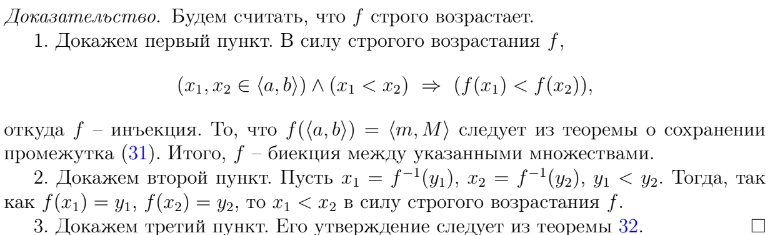
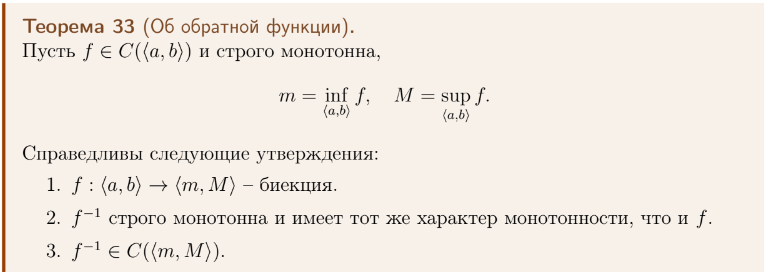




**Теоремы для доказательства 2 пункта:**

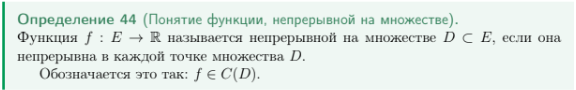
## Теорема об обратной функции.



# Равномерная непрерывность

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (3.11, 3.20), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): ([лекция 9.1](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239152)), [лекция 10.3](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239160)

## Определение непрерывной функции на множестве (ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности).



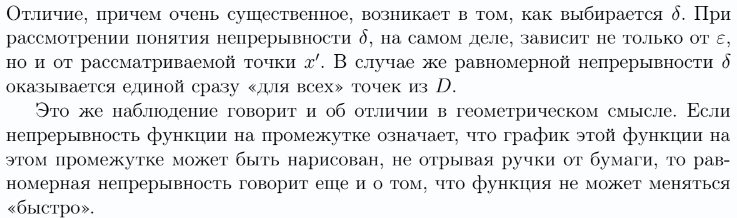
Функция непрерывна на , если

## Определение равномерно непрерывной функции на множестве (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности).

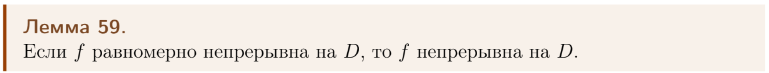


Функция равномерно непрерывна на , если

**Отличие непрерывности и равномерной непрерывности**

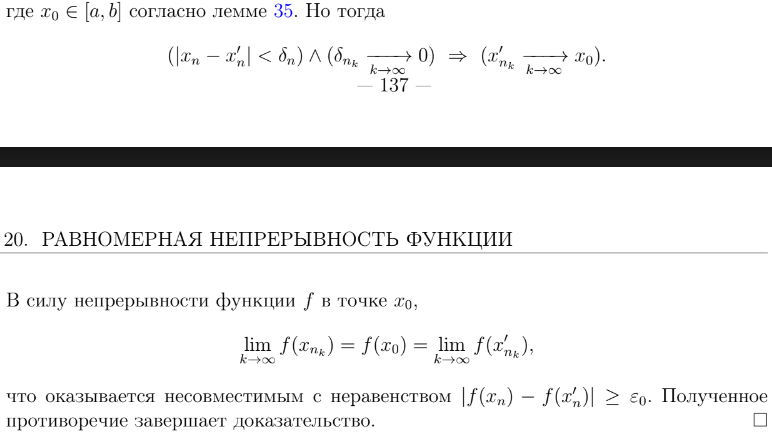
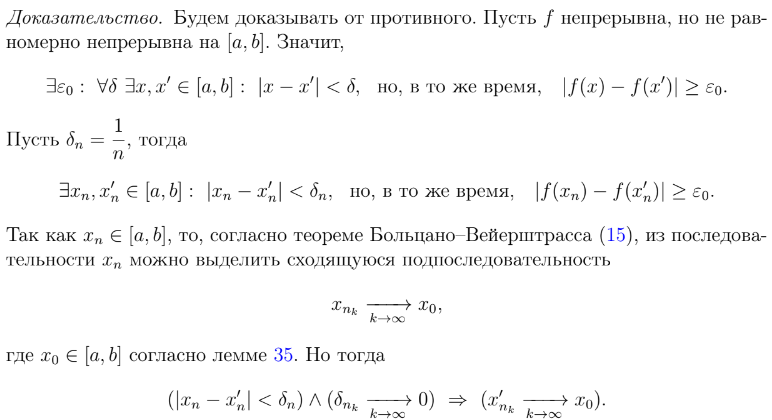
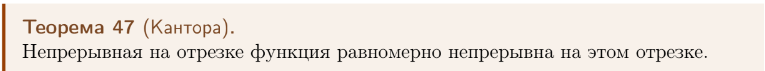


## Лемма о связи равномерной непрерывности и непрерывности функции.



Доказательство по определению равномерной непрерывности (возьмём конкретный ).

## Теорема Кантора.

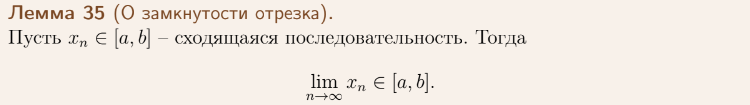
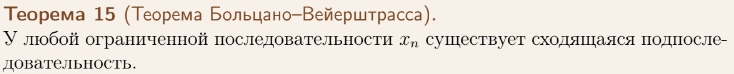


Так как, непрерывна на

Но это противоречит тому, что

Полученное противоречие завершает доказательство.

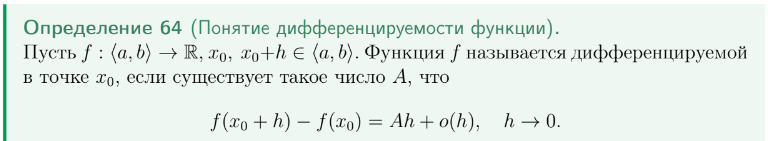
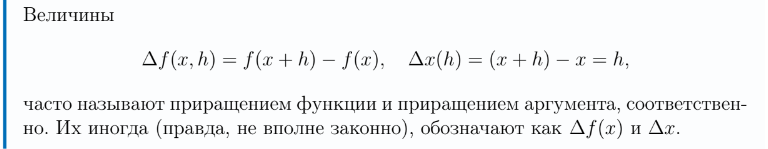
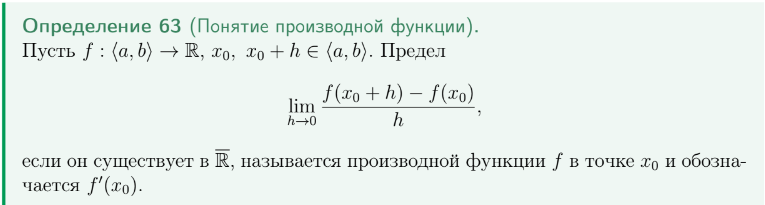
**Теоремы из доказательства:**

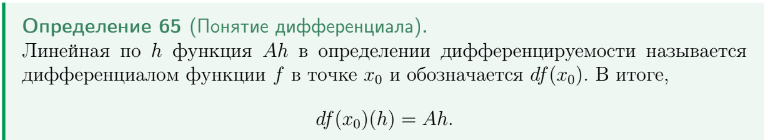
****

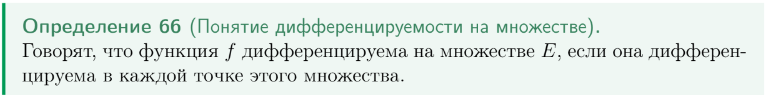
# Производная и дифференциал

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (4.1, 4.2), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 11](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239170), [desmos](https://www.desmos.com/calculator/bz3xzzzl5n?lang=ru)

## Определение производной функции, дифференцируемости функции, дифференциала.

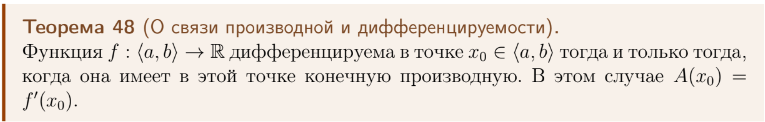


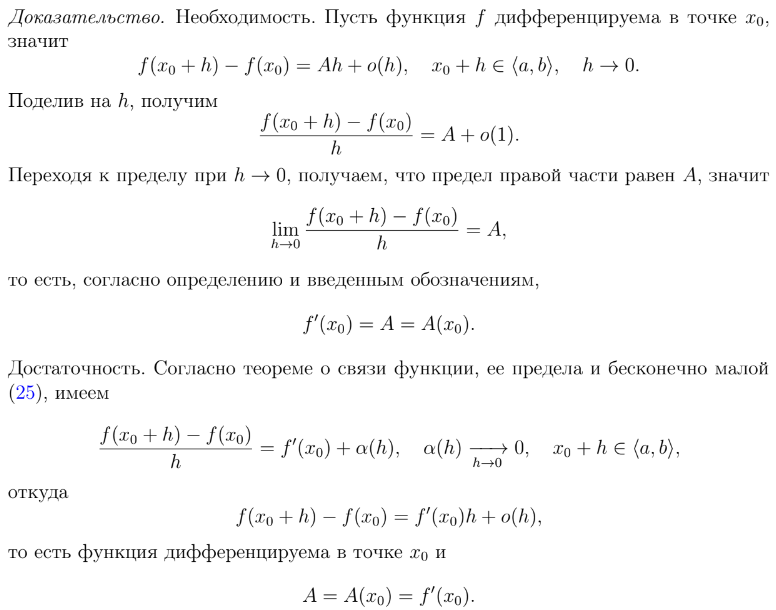




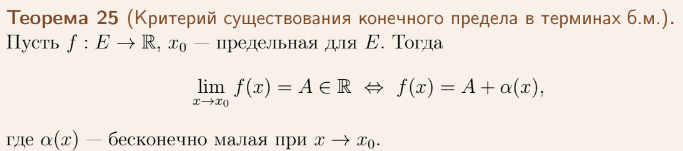
Если дифференцируема на , то , или

## Теорема о связи производной и дифференцируемости.

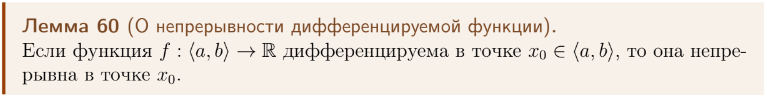


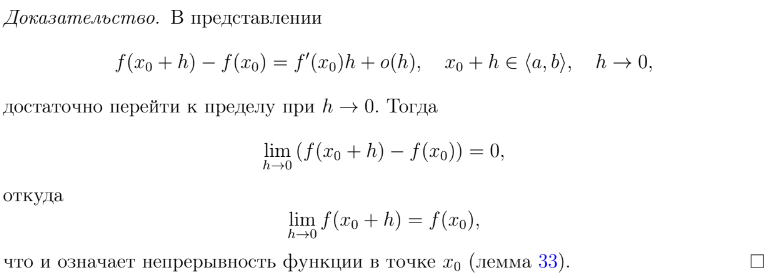


Теорема из доказательства:



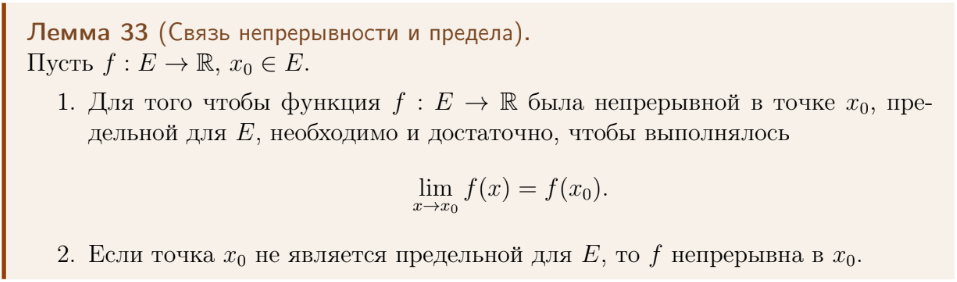
## Лемма о непрерывности дифференцируемой функции.





Пусть , тогда и , а в таком случае – предельная ∎.

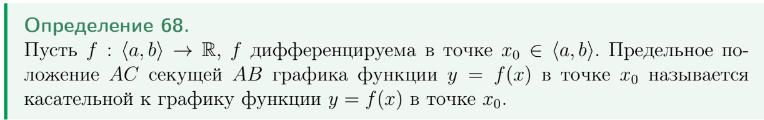
Лемма из доказательства:



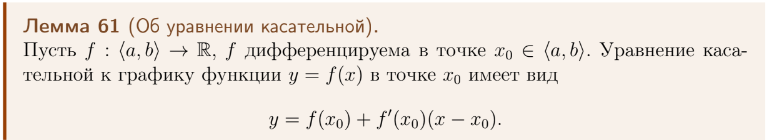
## Определение касательной к графику функции.

Пусть функция дифференцируема в точке . Проведем секущую через точки

Устремляя к нулю, точка будет двигаться (по графику функции) к точке , а секущая будет стремиться занять предельное положение .



## Лемма об уравнении касательной.



***Доказательство.***

Угловой коэффициент секущей AB равен

В силу дифференцируемости функции в точке ,

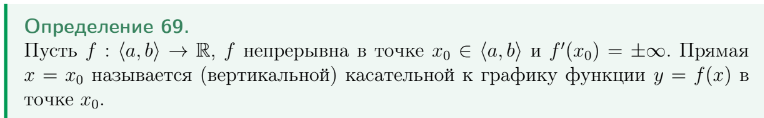
Используем уравнение прямой c угловым коэффициентом , проходящей через точку , получим

## Геометрический смысл производной и дифференциала.

Дифференциал – приращение касательной к графику функции, отвечающее приращению аргумента .

Производная – тангенс угла наклона касательной к графику функции.

## Определение вертикальной касательной.



# Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения и частного)

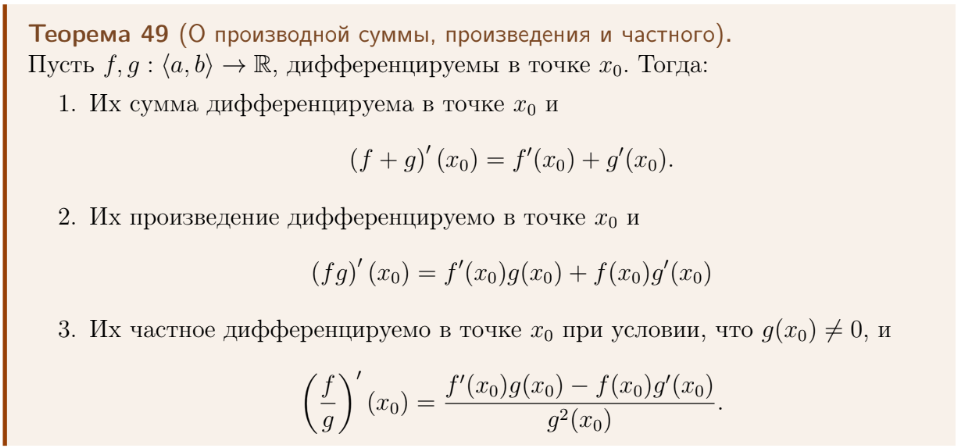
Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (4.1, 4.3), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 11](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239170), [лекция 11.2](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239171)

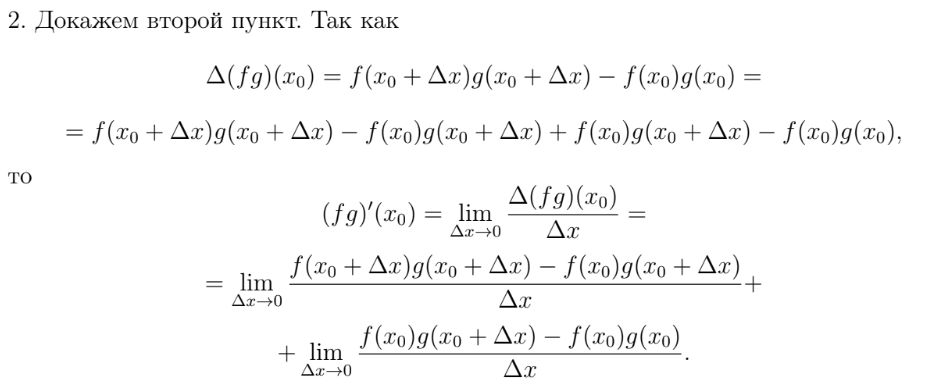
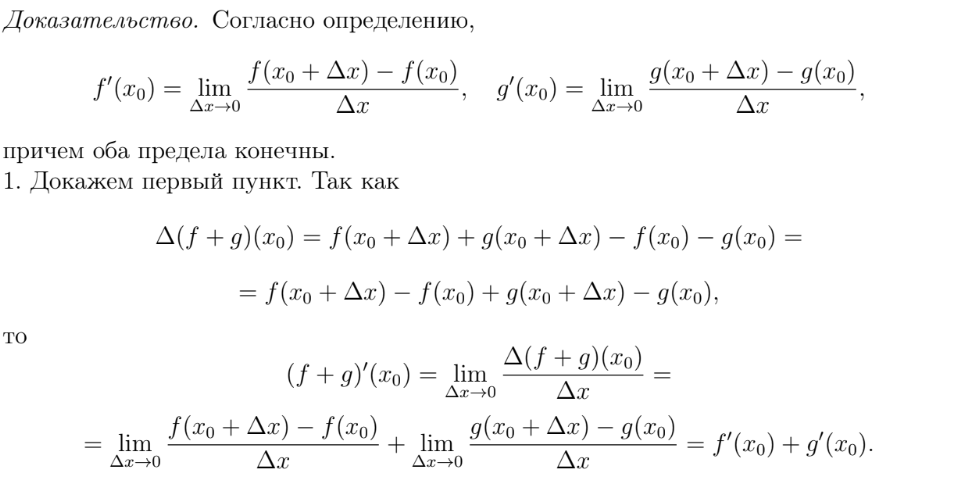
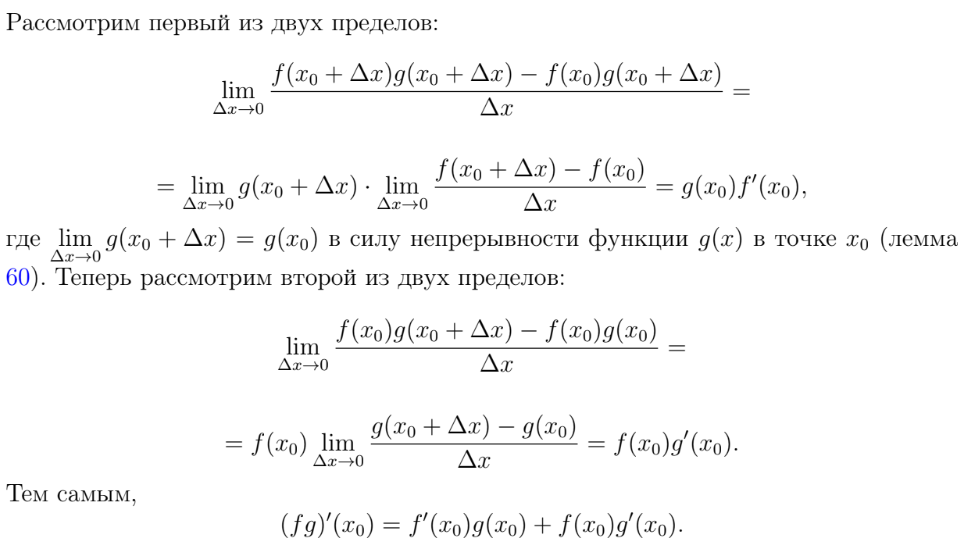
## [[Б7] Определения производной и дифференциала функции.](#_Определение_производной_функции,)

Пусть .

* + - * Предел , если он в называется ***производной*** функции в точке .
      * Функция называется ***дифференцируемой*** в точке , если существует такое число , что
      * Линейная по функция в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции в точке и обозначается . В итоге, .
      * Функция называется ***дифференцируема на множестве*** , если она дифференцируема в каждой точке этого множества. .

## Теорема о производной и дифференциале суммы, произведения, частного функций.



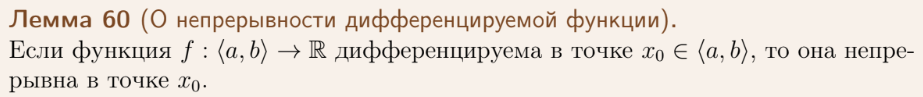
 

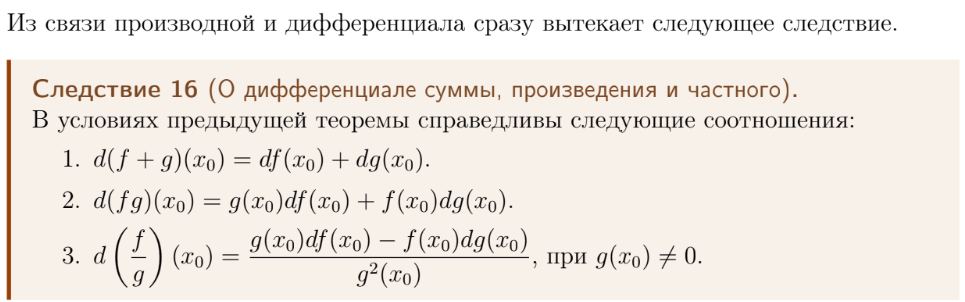
3. Докажем третий пункт.

Функция дифференцируема в точке , значит, по лемме о непрерывности дифференцируемой функции, непрерывна в точке . Следовательно, .

Прибавим

Лемма из доказательства:





# Основные правила дифференцирования (производная композиции функций и обратной функции)

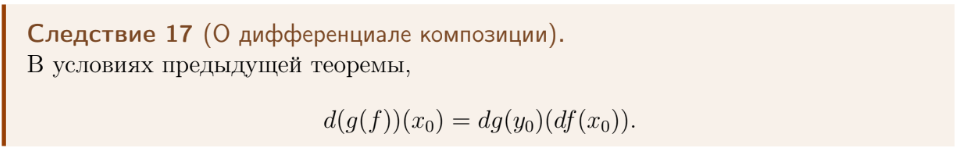
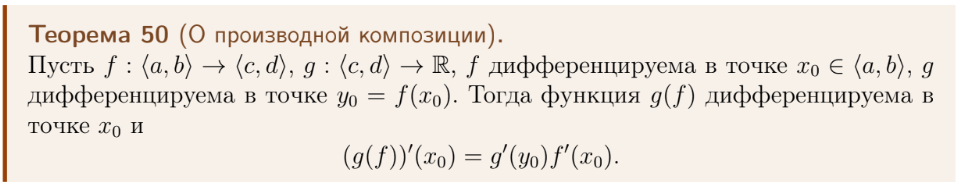
Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (4.1, 4.3), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 11](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239170), [лекция 11.2](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239171)

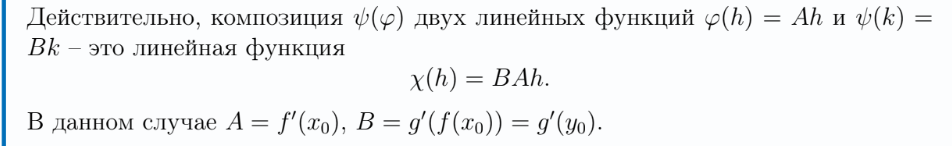
## [[Б7] Определения производной и дифференциала функции.](#_Определение_производной_функции,)

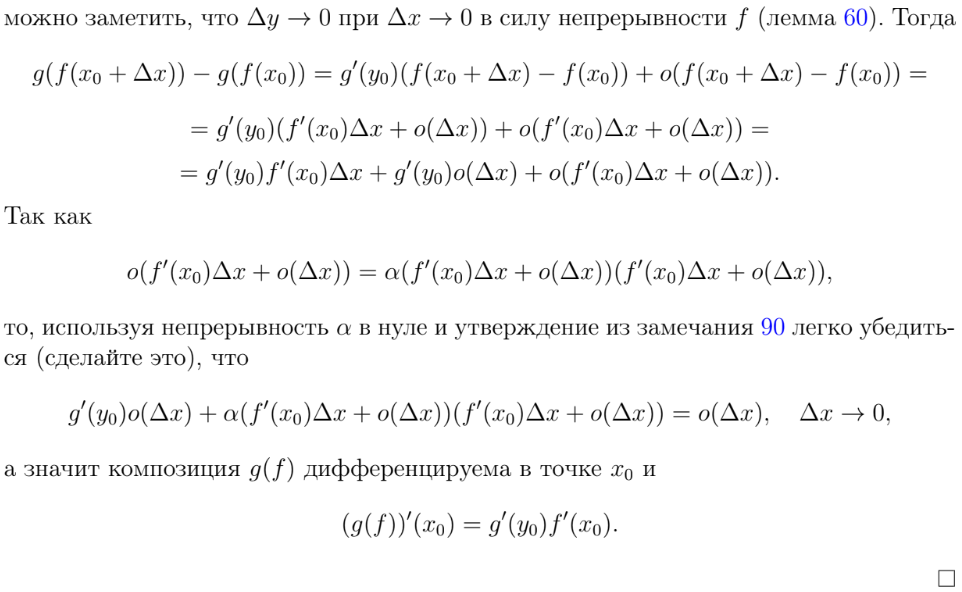
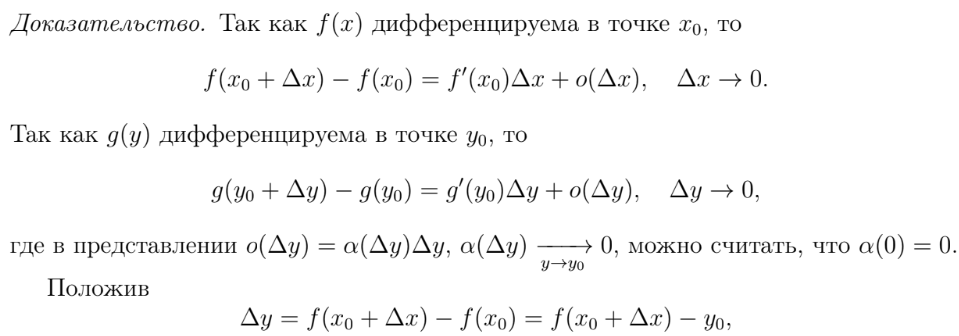
Пусть .

* + - * Предел , если он в называется ***производной*** функции в точке .
      * Функция называется ***дифференцируемой*** в точке , если существует такое число , что
      * Линейная по функция в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции в точке и обозначается . В итоге, .
      * Функция называется ***дифференцируема на множестве*** , если она дифференцируема в каждой точке этого множества. .

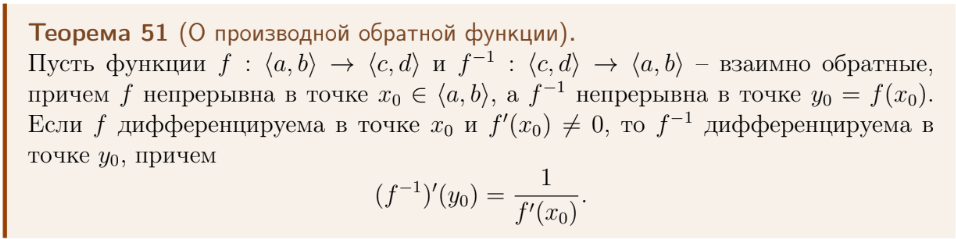
## Теорема о производной и дифференциале композиции функций.

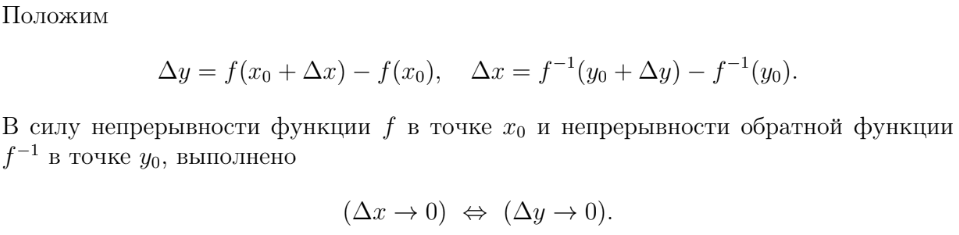
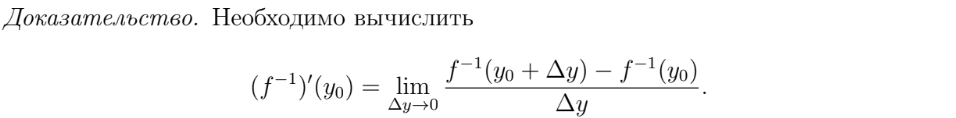


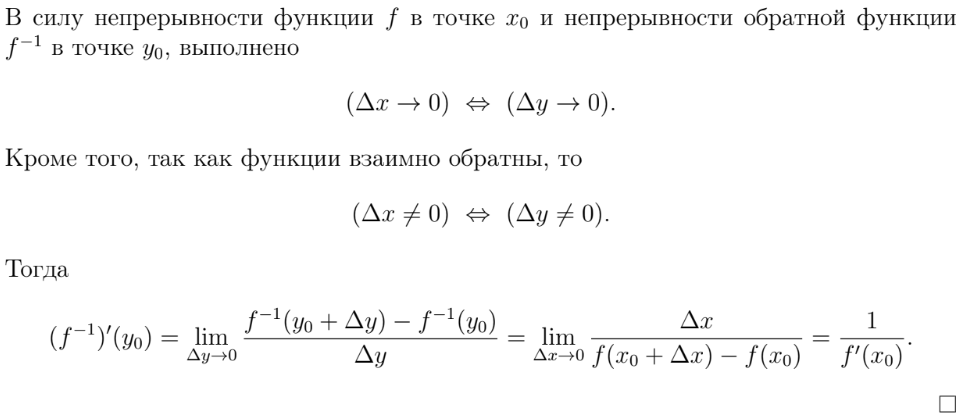


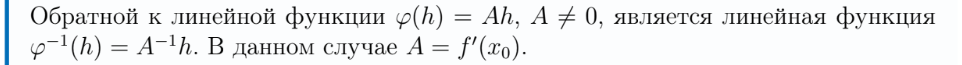
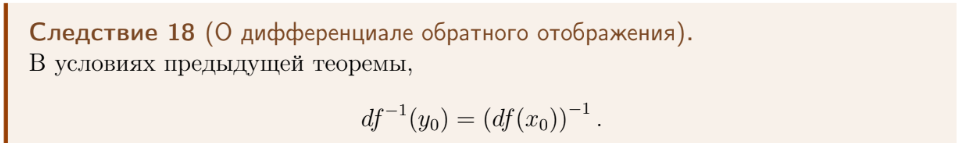


## Теорема о производной и дифференциале обратной функции.





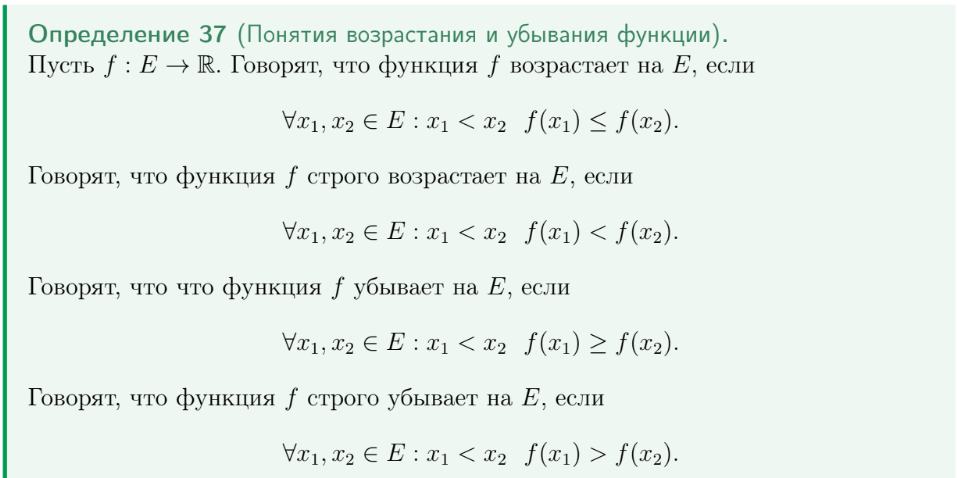


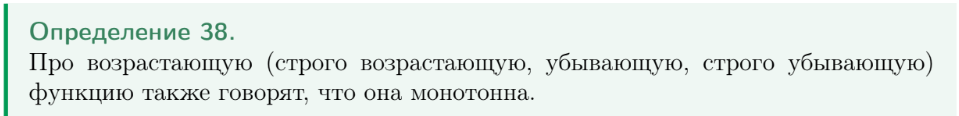


# Французские теоремы (Ферма, Ролля)

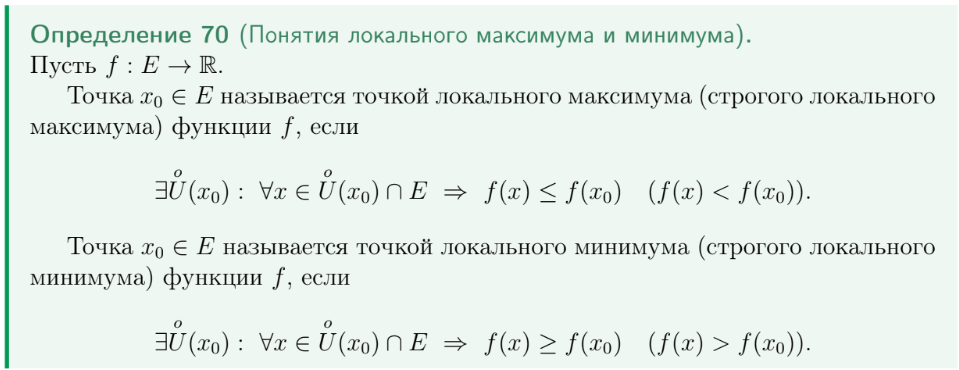
Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (3.7, 4.6), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 12](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239174)

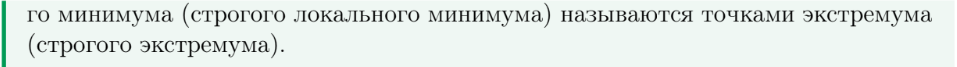
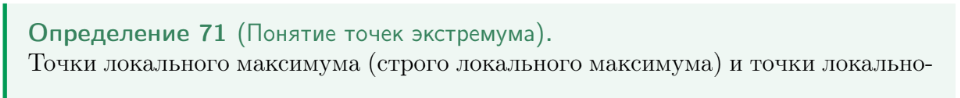
## Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции.



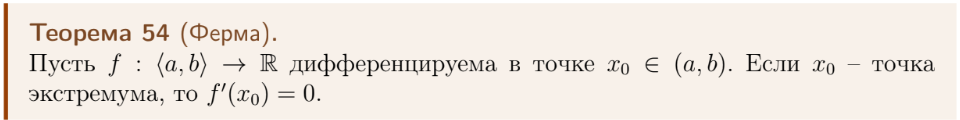


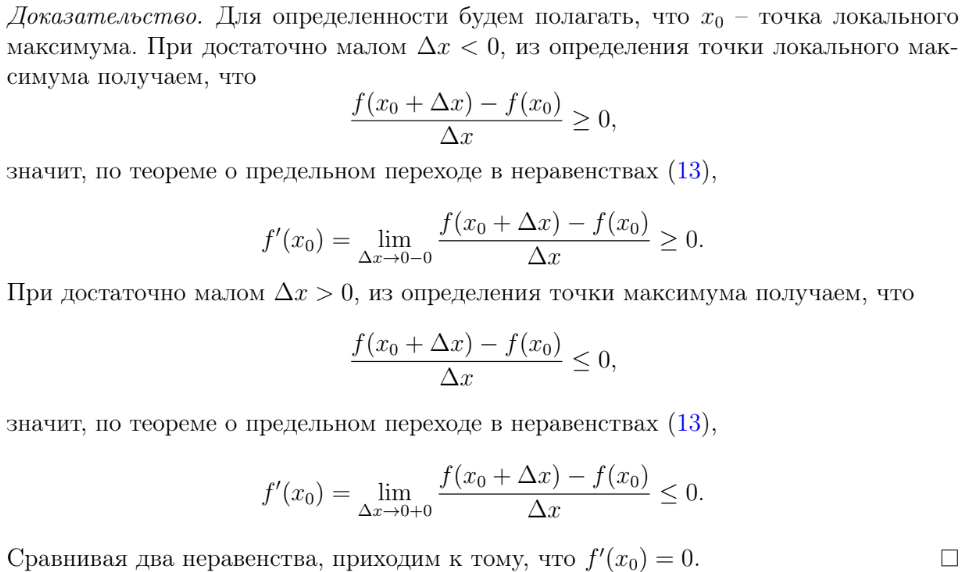
## Определение точек локального максимума, минимума и экстремума.

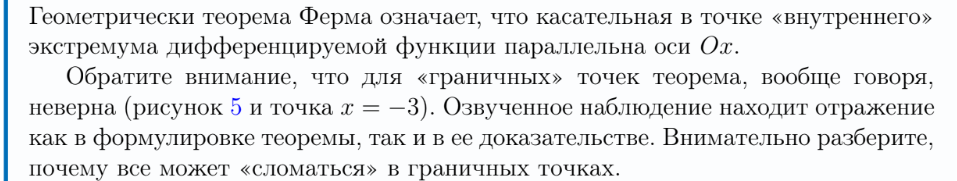




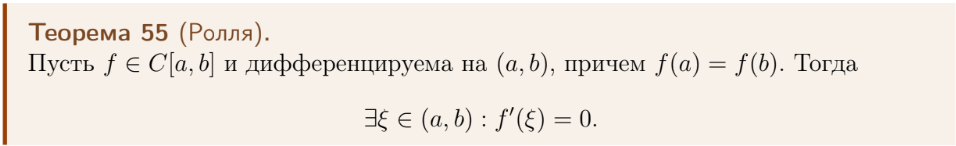
## Теорема Ферма, геометрический смысл.

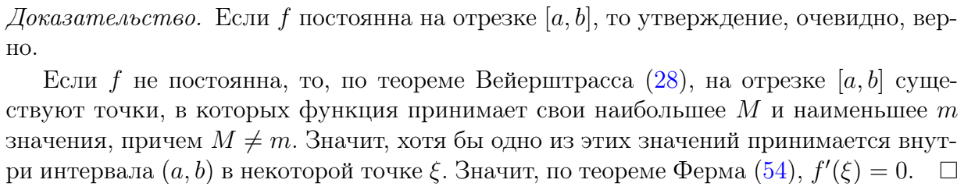


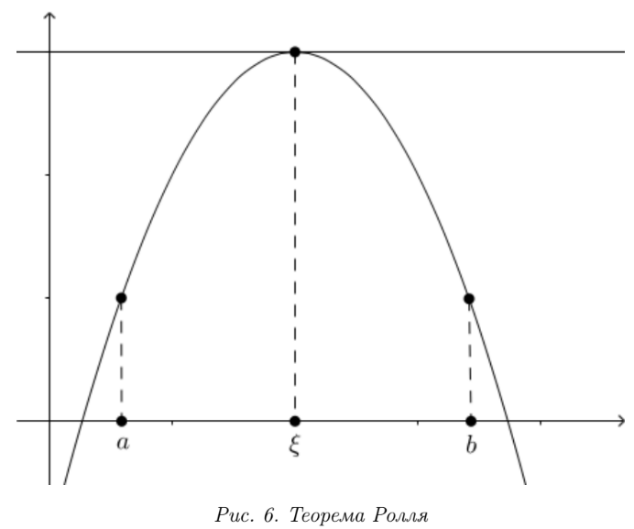




## Теорема Ролля, геометрический смысл.

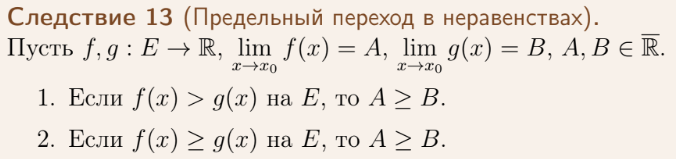
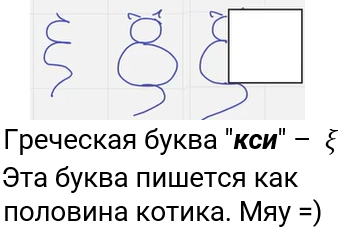
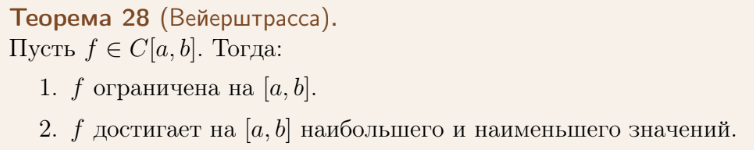






Геометрический смысл теоремы Ролля: если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает равные значения, то на этом отрезке существует хотя бы один экстремум.

Теоремы из доказательств:

# Французские теоремы (Лагранжа)

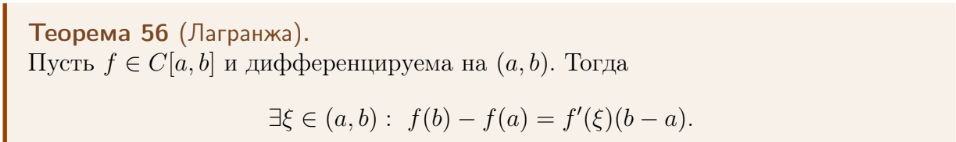
Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (3.7, 4.1, 4.6), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 12](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239174), [desmos](https://www.desmos.com/calculator/nrap3dy6mt?lang=ru)

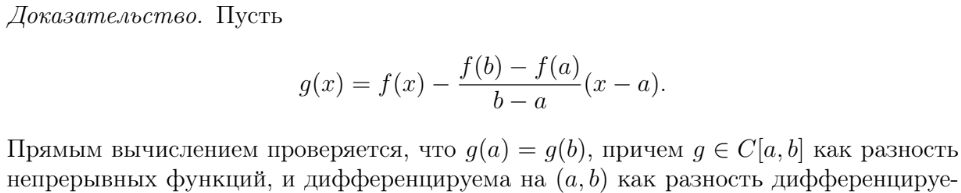
## [[Б7] Определения производной и дифференциала функции.](#_Определение_производной_функции,)

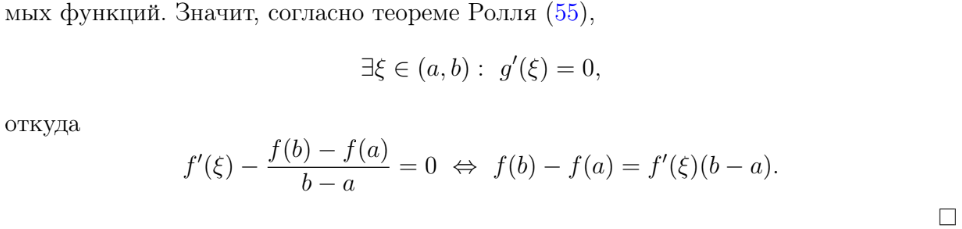
Пусть .

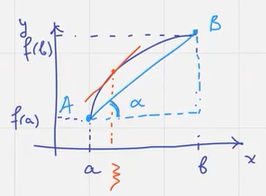
* + - * Предел , если он в называется ***производной*** функции в точке .
      * Функция называется ***дифференцируемой*** в точке , если существует такое число , что
      * Линейная по функция в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции в точке и обозначается . В итоге, .
      * Функция называется ***дифференцируема на множестве*** , если она дифференцируема в каждой точке этого множества. .

## Теорема Лагранжа, геометрический смысл.







**Геометрический смысл**

Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале существует касательная к графику функции , параллельная секущей, проходящей через точки и .

Теорема позволяет нам выяснять характер монотонности функции в зависимости от знака производной.

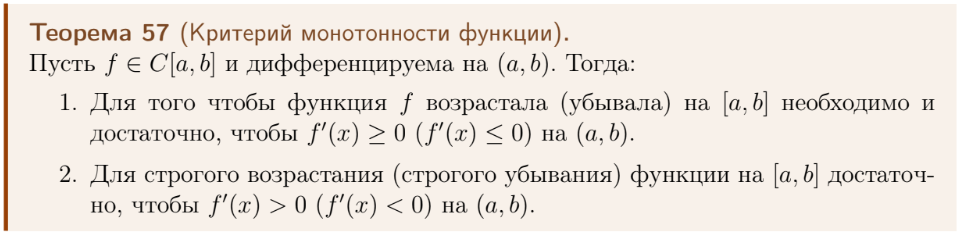
## [[Б10] Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции.](#_Определение_возрастания_и)

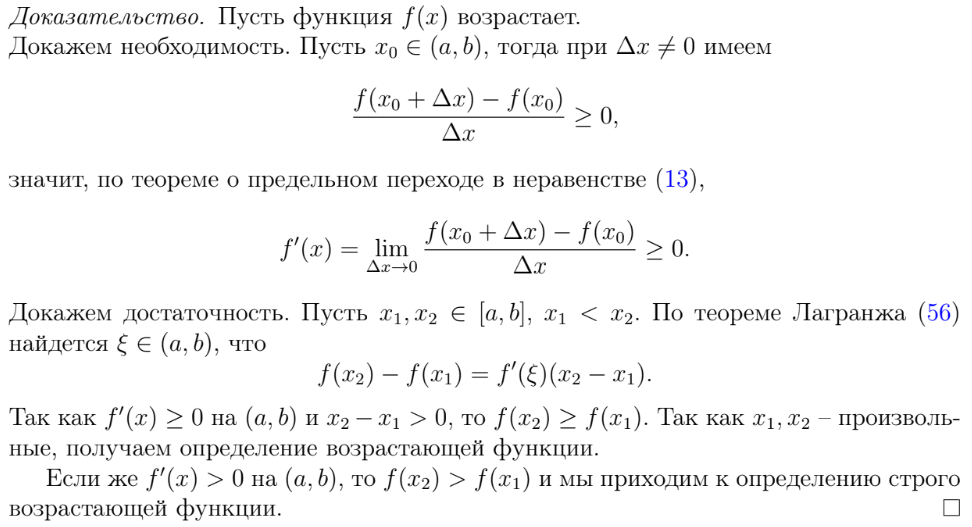
Пусть .

* ***возрастает*** на , если
* ***строго возрастает*** на , если
* ***убывает*** на , если
* ***строго убывает*** на , если

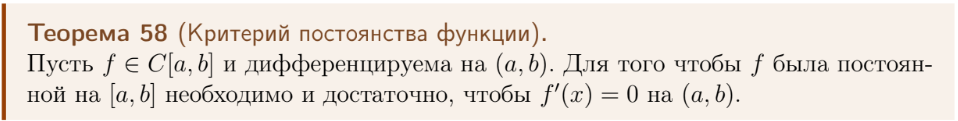
Возрастающая / строго возрастающая / убывающая / строго убывающая функция ***монотонна***.

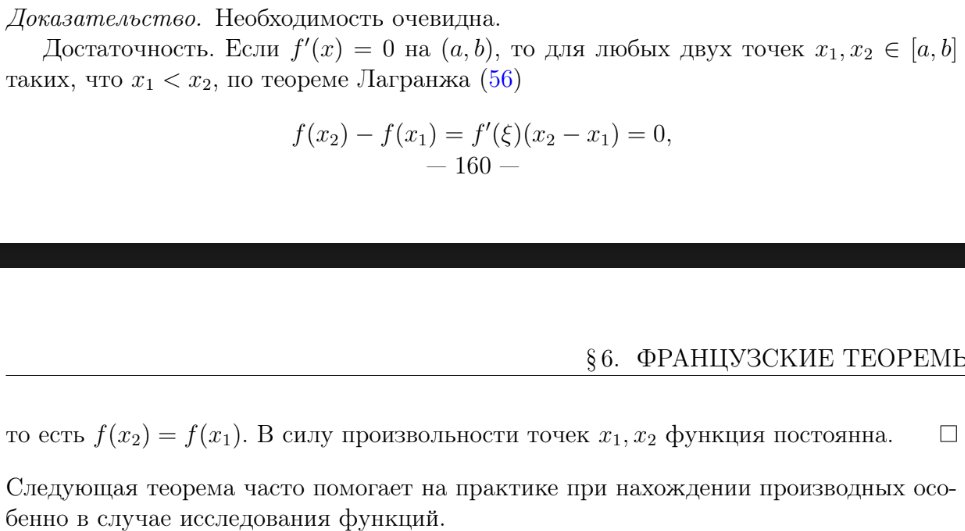
## Критерий монотонности функции.

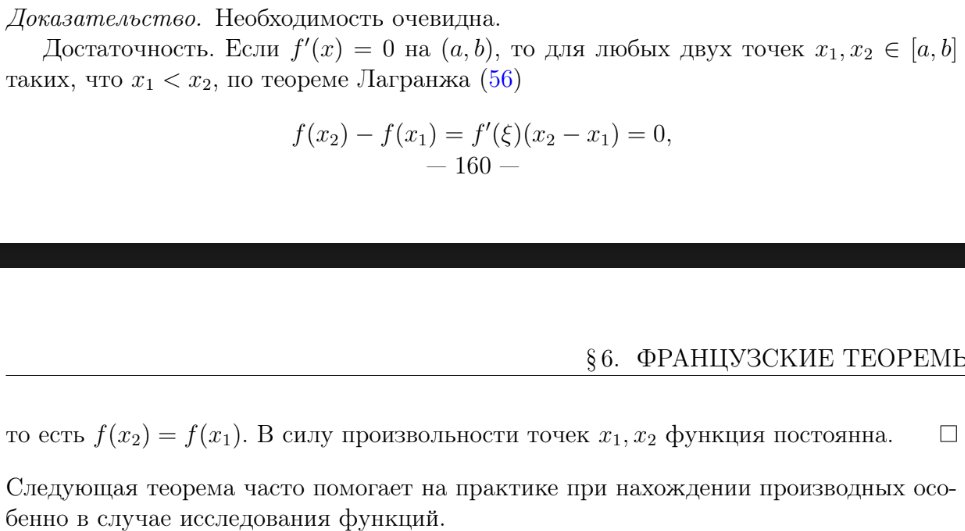




## Критерий постоянства функции.







# Французские теоремы (Коши)

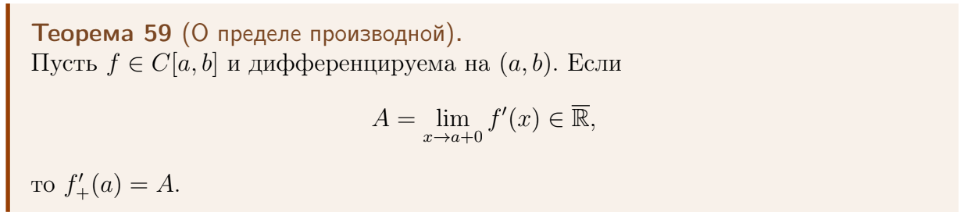
Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (4.1, 4.6), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 12](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239174)

## [[Б7] Определения производной и дифференциала функции.](#_Определение_производной_функции,)

Пусть .

* + - * Предел , если он в называется ***производной*** функции в точке .
      * Функция называется ***дифференцируемой*** в точке , если существует такое число , что
      * Линейная по функция в определении дифференцируемости называется ***дифференциалом*** функции в точке и обозначается . В итоге, .
      * Функция называется ***дифференцируема на множестве*** , если она дифференцируема в каждой точке этого множества. .

## Теорема о пределе производной.



*Доказательство.* Рассмотрим если , то по теореме Лагранжа

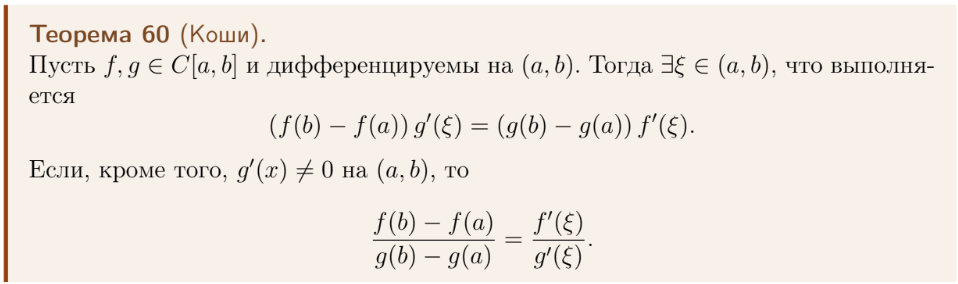
Отметим, что разная, для разных . Поделим обе части выражения на

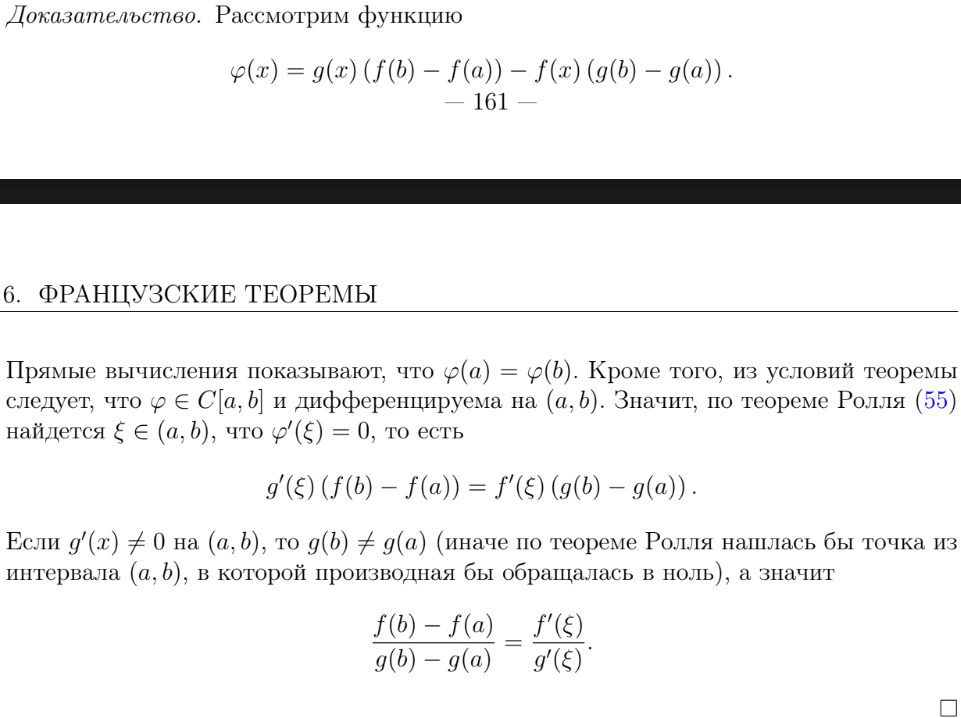
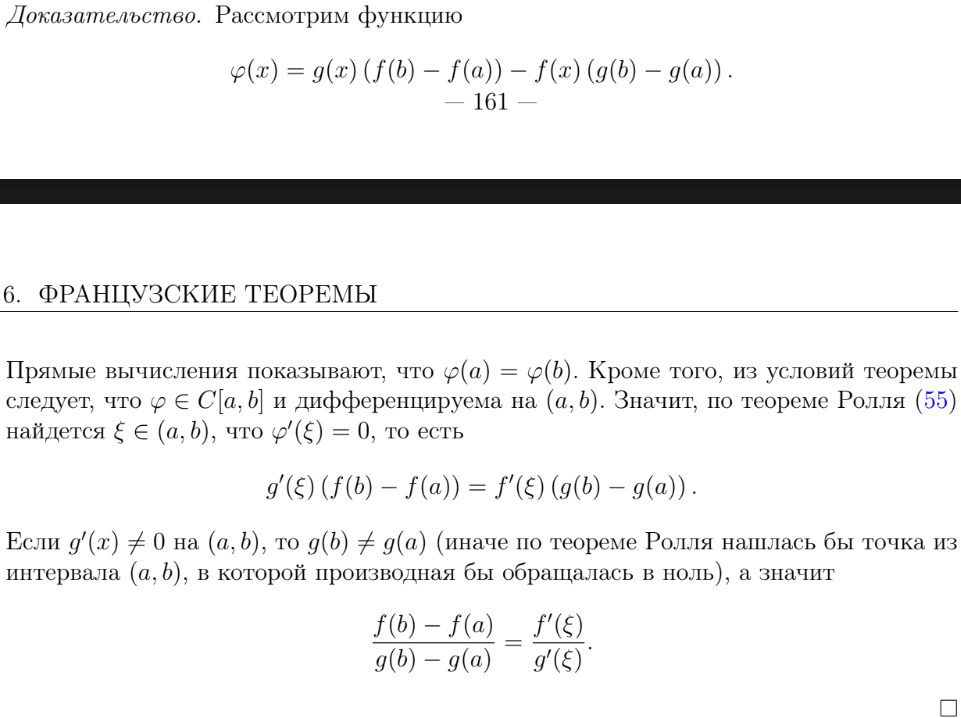
Поместим под предел: , следовательно

Отсюда получаем требуемое



## Теорема Коши, геометрический смысл.



# Французские теоремы (Лопиталя)

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (4.1, 4.6), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 12](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239174)

## Определения производной и дифференциала функции. Теорема Лопиталя.

# Формула Тейлора

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (4.1, 4.7, 4.8), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 13](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239181)

## Определения производной и дифференциала функции. Определения производной и дифференциала высшего порядка. Определение многочлена Тейлора. Теорема о формуле Тейлора с остатком в форме Пеано. Теорема о единственности многочлена Тейлора. Теорема о характеристике остаточного члена в формуле Тейлора (без доказательства). Следствия об остаточных членах в формах Лагранжа и Коши.

# Исследование функции с помощью производных (монотонность и экстремумы)

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (3.7, 4.6, 4.10.1), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 14](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239199)

## Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции, точек локального максимума, минимума и экстремума. Теорема о необходимом условии экстремума. Теорема о первом достаточном условии экстремума. Теорема о втором достаточном условии экстремума. Классификация точек экстремума.

# Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба 1)

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (4.1, 4.10.2), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 15](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239201)

## Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости в терминах наклона хорд. Определения производной и дифференциала функции. Критерий выпуклости дифференцируемой функции. Определение точки перегиба.

# Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба 2)

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (4.10.2), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 15](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239201)

## Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции. Теорема о характеристике выпуклости в терминах касательных. Определение точки перегиба.

# Исследование функции с помощью производных (асимптоты)

Материалы: [Бойцев](https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view) (4.10.3), [Правдин](https://miro.com/app/board/uXjVLLPk0pM=/?moveToWidget=3458764605451756818&cot=14): [лекция 15](https://vkvideo.ru/video-227233132_456239201)

## Определение асимптоты, виды асимптот. Теорема о формулах для коэффициентов наклонной асимптоты. Лемма о связи выпуклости и асимптоты.

*Билеты сделал* ***Сакулин Иван Михайлович K3121****. Отказ от ответственности: автор предоставляет собственные доказательства «как есть», не даёт гарантий их правильности и не несёт ответственности за допущенные ошибки. Мяу =).*