

Introducción a la Probabilidad Bayesiana. Parte 2, Operaciones Útiles

Martín Onetto

Operaciones cotidianas en cálculo de probabilidades

Aquí vamos a desarrollar 3 resultados que nos serán útiles a la hora de hacer inferencia en los siguientes módulos.

- I: Si $A \in a_i, i = 1, \dots, N \rightarrow \sum_i P(A = a_i) \equiv \sum_i P(A_i) = 1$
- II: Si $A|BC = A|C \rightarrow P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$
- III: Si $A \in a_i, i = 1, \dots, N \rightarrow P(B|C) = \sum_i P(A_i B|C)$

I : Normalización

Si tenemos que la proposición A puede ser igual a un valor dentro de un conjunto, es decir $A \in a_i, i = 1, \dots, N$ entonces tenemos:

$$P(\sum A = a_i | I) = 1 \quad (1)$$

recordando que la suma en este caso corresponde a la disyunción, lo que estamos calculando es la probabilidad de que A tome alguno de los valores a_i lo cual es siempre cierto, **siempre será igual a algún a_i** . Luego usando la regla de la suma tenemos:

$$\begin{aligned} P(\sum A = a_i | I) &= \sum_i P(A = a_i) - \sum_{i \neq j} P(A = a_i, A = a_j | I) + \\ &+ \sum_{i \neq j \neq k} P(A = a_i, A = a_j, A = a_k | I) - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Como A no puede tomar dos valores simultáneamente, sólo sobrevive la suma $\sum_i P(A = a_i)$. Obteniendo así:

$$P(\sum A = a_i | I) = \sum_i P(A = a_i) = 1 \quad (3)$$

II: Independencia lógica

Dada la equivalencia entre proposiciones $A|BC = A|C$ Escribamos la regla del producto para $A|BC$ como:

$$P(A|BC) = \frac{P(AB|C)}{P(B|C)} \quad (4)$$

Si reemplazamos $A|BC = A|C$ en la ecuación obtenemos:

$$P(A|C) = \frac{P(AB|C)}{P(B|C)} \rightarrow P(AB|C) = P(A|C)P(B|C) \quad (5)$$

La equivalencia en proposiciones nos dice que tenemos el mismo nivel de verdad sobre la proposición A sea que tengamos la información C o la información BC . Es decir, que el estado de verdad de B no cambia el estado de verdad de A , manteniendo C . En este caso vemos que hay una independencia *lógica* entre las proposiciones la cual culmina en que el nivel de certeza que tengamos sobre que sean ciertas simultáneamente resulte simplemente en el producto de las probabilidades de cada una.

III: Marginalización

Si tenemos una proposición A que toma valores en un conjunto $A \in a_i, i = 1, \dots, N$ y queremos ver como se relaciona con una proposición B podemos usar la regla del producto como:

$$P(A|BC) = \frac{P(B|AC)P(A|C)}{P(B|C)} \quad (6)$$

Luego, si sumamos sobre todos los valores posibles que puede tomar A obtenemos:

$$\sum_i P(A = a_i|BC) = \sum_i \frac{P(B|A = a_iC)P(A = a_i|C)}{P(B|C)} = 1 \quad (7)$$

la suma resulta en 1 por el resultado que vimos en I, entonces podemos escribir $P(B|C)$ como:

$$P(B|C) = \sum_i P(B|A = a_iC)P(A = a_i|C) = \sum_i P(B, A = a_i|C) \quad (8)$$

Es interesante notar cómo es que se compone $\sum_i P(B|A = a_iC)P(A = a_i|C)$, el primer término asume como información cierta $A = a_i$ y con ello calcula la probabilidad de B , pesándola con qué tanta confianza tenemos sobre esa hipótesis de que $A = a_i$ sea cierta.