

Trie 树

——清华大学 李欣隆

Trie

- 即字典树，一般用到01trie比较多，经常用于解决位运算问题
- 和“值域线段树”是类似的结构

Luogu8306 【模板】字典树

给定 n 个模式串 s_1, s_2, \dots, s_n 和 q 次询问, 每次询问给定一个文本串 t_i , 请回答 $s_1 \sim s_n$ 中有多少个字符串 s_j 满足 t_i 是 s_j 的**前缀**。

一个字符串 t 是 s 的前缀当且仅当从 s 的末尾删去若干个（可以为 0 个）连续的字符后与 t 相同。

输入的字符串大小敏感。例如, 字符串 `Fusu` 和字符串 `fusu` 不同。

对于全部的测试点, 保证 $1 \leq T, n, q \leq 10^5$, 且输入字符串的总长度不超过 3×10^6 。输入的字符串只含大小写字母和数字, 且不含空串。

Solution

动态开点线段树

- 如果我们要建立一棵值域为 $[1, 10^9]$ 的线段树该怎么办?
- 注意到因为线段树的复杂度为 $O(m \log n)$, 所以 m 次操作最多访问到 $m \log n$ 个节点, 当 $n \gg m$ 时, $m \log n \ll n$
- 于是我们可以用一个叫做“动态开点”的策略
- 我们不需要把线段树预先建出来, 直到访问到一个节点的时候, 如果其为空, 再建出来

动态开点线段树

- 我们使用指针维护的线段树
- 初始的线段树是一个 $l=1, r=10^9$ 的节点，这个节点没有左右儿子
- 每次操作时，如果访问到了一个节点，且这个节点还不存在，则我们将这个点建出来
- 进行 m 次操作后，空间复杂度为 $O(\min(n, m \log n))$

最大异或和

- 给你 n 个正整数，求其中选两个数，做异或运算，最大能得到多少？
- $n \leq 1e5$ ，每个数都是 `int`

U109923 [Codechef REBXOR]Nikitosh and xor

给定一个长度为 n 的数列 a_1, a_2, \dots, a_n , 选定四个整数 $l_1, r_1, l_2, r_2 (1 \leq l_1 \leq r_1 < l_2 \leq r_2 \leq n)$, 则函数 $F(l_1, r_1, l_2, r_2)$ 的计算方式如下:

$$F(l_1, r_1, l_2, r_2) = (a_{l_1} \oplus a_{l_1+1} \oplus \dots \oplus a_{r_1}) + (a_{l_2} \oplus a_{l_2+1} \oplus \dots \oplus a_{r_2})$$

对于所有符合条件的 (l_1, r_1, l_2, r_2) , 求 $F(l_1, r_1, l_2, r_2)$ 的最大值。

对于前 40% 的数据: $n = 5 \times 10^3$

对于后 60% 的数据: $n = 4 \times 10^5$

$a_i \in [0, 10^9]$

Solution

Luogu4551 最长异或路径

- 给一棵树，边有边权，求所有简单路径中边权xor和最大的一条路径

Solution

- 这里是边权
- 可以发现x到y的边权xor和等价于x到根的边权xor和, 与y到根的边权xor和, 的xor
- 为什么

Solution

- 因为xor的性质，一条边被xor两次会自动抵消
- 可以发现lca到根的路径上每条边都被xor了两次，所以都抵消了
- 于是使用trie树，维护最大xor和即可

洛谷 P9196 [JOI Open 2016] 销售基因链

- 给很多模式字符串，每次查询时给两个字符串 s_1, s_2 ，问有多少模式字符串前缀是 s_1 ，后缀是 s_2
- 字符串总长度 10^6 ，字符串和询问个数 10^5

Solution

- 考虑开两棵trie树，分别把所有模式字符串顺序和倒序插入
- 这样我们查询时也将a串顺序在trie上跑，b串倒序在trie上跑
- 问题转换为在第一棵trie树的子树中和第二棵trie树的子树中有多少共同元素
- 将每个点在第一棵树DFS序位置当做x坐标，在第二棵树DFS序位置当做y坐标，转换为二维数点
- $O(|S| + (n+m)\log n)$

[Ynoi????] TEST_68

题目描述

给定一棵 n 个节点的树，第 i 个点有一个权值 a_i 。

对每个点 x ，其的答案为其所在子树外的所有点中，选两个可以相同的点 i, j ， a_i 异或 a_j 的最大值，如果选不出两个点，则认为 x 的答案是 0。

数据范围

共有 20 个测试点。

对于 10% 的数据，满足 $1 \leq n \leq 10^2$ 。

对于另外 20% 的数据，满足 $1 \leq n \leq 10^4$ 。

对于另外 30% 的数据，树构成一条链。

对于另外 20% 的数据，满足 $0 \leq a_i \leq 10^2$ 。

对于 100% 的数据，满足 $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$ ， $0 \leq a_i \leq 10^{18}$ 。

Solution

考虑找到两个点 x, y 满足 $a_x \text{ xor } a_y$ 是最大的，如果有很多组这样的 (x, y) ，我们随便选一组。

可以发现除了 x 到根的路径与 y 到根的路径以外，所有点的子树补中都同时包含了 x, y ，所以其答案均为 $a_x \text{ xor } a_y$ 。

然后对于这两条点到根的路径，我们可以从上到下维护一个trie，因为一条链的子树补是相互包含的关系，每次插入一些元素同时查询最大异或和，这样就维护出了这两条链上每个点的答案。

总时间复杂度 $O(nw)$ ，这里认为值域是 $O(2^w)$ 。

空间复杂度可以使用压缩trie做到 $O(n)$ ，std直接写了个大空间的实现。

Luogu6072 『MdOI R1』 Path

给定一棵 n 个点的无根树，边有边权。

令 $V(x, y), E(x, y)$ 分别表示树上 x, y 之间的简单路径上的所有点的集合和所有边的集合，特别地，当 $x = y$ 时， $V(x, y) = \{x\}$ ， $E(x, y) = \varnothing$ 。

再令边集 E 的权值 $f(E)$ 为 E 中所有边的权值的异或和，当 $E = \varnothing$ 时， $f(E) = 0$ 。

现在，要你求出

$$\max_{1 \leq x, y, u, v \leq n, V(x, y) \cap V(u, v) = \varnothing} (f(E(x, y)) + f(E(u, v)))$$

通俗的讲，你要选择两条简单路径，满足没有重合的点，且边权异或和之和最大。

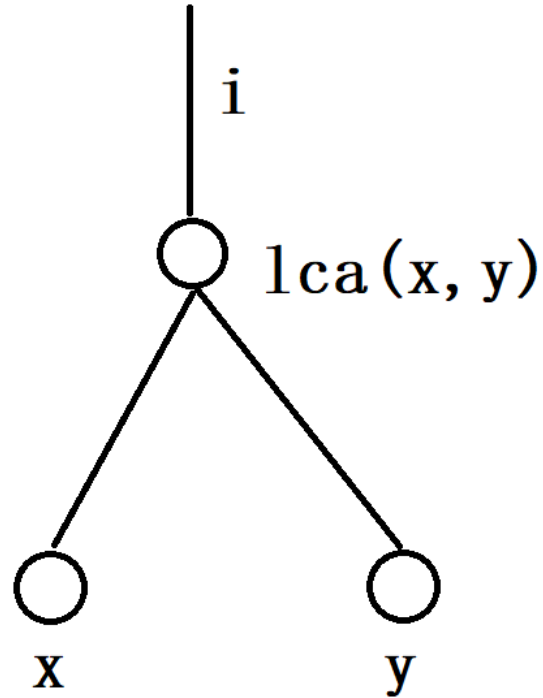
- 我加强一下， $n \leq 3e6$ ，5s

Solution

- 边权树的路径xor可以通过树上前缀和变成点权树的两点xor
- 我们可以发现问题即找出一个点*i*使得*i*子树内选两个点的xor加上*i*的子树外选两个点的xor最大
- 发现每个点的子树外选两个点最大xor和是可以用上一个题的做法 $O(n \log n)$ 算出来的，问题在于子树内如果需要计算每个点的答案的话是 $O(n \log^2 n)$ 的
- 先把每个点子树外的答案算出来，即为 $f[i]$

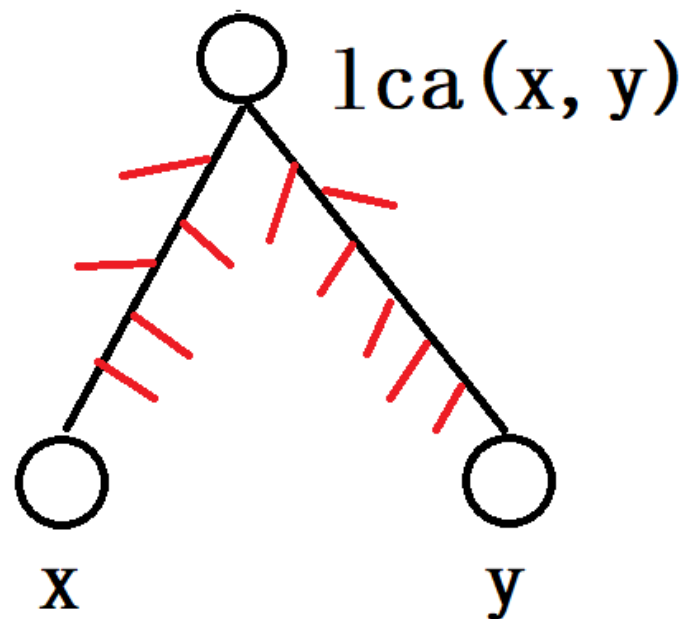
Solution

- 还是找出全局最大的 $x \text{ xor } y$
- 1. x 和 y 都在 i 子树内, 这种情况 i 一定是 $\text{lca}(x, y)$ 的祖先, 求这条路径上最大的 $f[i]$ 即可



Solution

- 2.x和y都在子树外，这种情况我们只需要考虑所有x到y路径上的点的所有儿子，因为子树外的答案一定是 $x \text{ xor } y$ 了，子树内点越多越优
- 可以发现这里因为所有儿子构成的子树不相交所以trie插入次数是 $O(n)$ 的



Solution

- 3.x在子树内y在子树外, 以及对称的情况
- 这种情况我们从x扫到lca(x,y)算一遍子树内最大xor和, 从y扫到lca(x,y)算一遍子树内最大xor和即可
- 这里插入次数也是 $O(n)$ 的
- 总时间复杂度 $O(n\log n)$