实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

提高算法班

题目选讲

Mas

#3503、卡牌计分游戏

题目描述

Mas 有 N 张卡牌

其中第 i 张卡牌上有正整数 A_i

Mas 可以任意翻开每张卡牌，若卡牌正面朝上那么其中的数字将计入得分

Mas 非常讨厌数字 4 ，请你统计在所有的翻牌情况下一共会出现多少个数字 4

输入格式

第一行输入一个整数 N

第二行输入 N 个整数 A_i

输出格式

输出一个整数表示 4 出现的次数

数据规模

对于 15% 的数据 $1 \le N \le 20$

对于 30% 的数据 $1 \le N \le 28$

对于 45% 的数据 $1 \le N \le 34$

对于 100% 的数据 $1 \le N \le 40, 1 \le A_i \le 10^8$

#3503、卡牌计分游戏

不难想到这题需要 Meet in the middle

分别枚举出前一半的选取情况 L 与后一半的选取情况 R

考虑统计答案，考虑基数十进制排序过程（*最坏情况下仅有 10 个数位*）

对于结果的第 i 位若产生 4

X_p 表示 L 中第 i 个数位为 p 的集合

Y_q 表示 R 中第 i 个数位为 q 的集合

- 若 $i-1$ 位无进位

  有

$$4\times 10^i \le (x+y) \bmod 10^{i+1} < 5\times 10^i$$

  枚举 L 的数位 p，那么仅需考虑 $Y_{(4-p) \bmod 10}$ 的选取

#3503、卡牌计分游戏

令 X', Y' 维护 X, Y 中各数 $\bmod 10^i$ 的结果

对于 $X' + Y' < 10^i$ 都可计入贡献

在基数排序过程中，上一轮为以 $i-1$ 作为第一关键字的排序结果(X', Y'内部有序)

	1	2	3
X	21	27	28
X'	**1**	7	8
Y	21	22	27
Y'	**1**	**2**	**7**

	1	2	3
X	21	27	28
X'	1	**7**	8
Y	21	22	27
Y'	**1**	**2**	7

#3503、卡牌计分游戏

	1	2	3
X	21	27	28
X’	1	7	**8**
Y	21	22	27
Y’	**1**	**2**	7

上述过程可双指针维护

- 若 $i-1$ 位有进位

有

$$3\ \times 10^i \le (x+y) \bmod 10^{i+1} < 4\ \times 10^i$$

枚举 L 的数位 p , 那么仅需考虑 $Y_{(3-p) \bmod 10}$ 的选取

同样令 X', Y' 维护 X, Y 中各数 $\bmod 10^i$的结果

对于 $X' + Y' \ge 10^i$ 都可计入贡献

#3503、卡牌计分游戏

	1	2	3
X	21	27	28
X’	**1**	7	8
Y	11	12	19
Y’	1	2	**9**

	1	2	3
X	21	27	28
X’	1	**7**	8
Y	11	12	19
Y’	1	2	**9**

	1	2	3
X	21	27	28
X’	1	7	**8**
Y	11	12	19
Y’	1	**2**	**9**

该过程同样可双指针维护

双指针维护时不应同向移动

时间复杂度 $O(100 \times 2^{\frac{n}{2}})$

#2406、逃不掉的股票购买

题目描述

Mas 知道了 SYC 集团接下来 N 天的股票价格,其中第 i 天的价格为 p_i .

Mas 现在拥有 10^{100} 的现金,他在 i 可以选择下列三个操作之一进行:

- 以 p_i 的价格购入一个单位的 SYC 集团股票
- 以 p_i 的价格售出一个单位的 SYC 集团股票
- 不做任何交易

第 N 天结束时 Mas 不能持有任何股票,请你计算他能获得的最大收益

输入格式

第一行输入一个正整数 N

第二行输入 N 个非负整数,表示每天的价格 p_i

输出格式

输出一个整数,表示能获得的最大收益

数据规模

对于 10% 的数据 $1 \le n \le 10$

对于 40% 的数据 $1 \le n \le 5000$

对于全部的数据 $1 \le n \le 2 \times 10^5, 1 \le p_i \le 10^9$

输入样例1

```
8
2 5 4 3 7 1 8 6
```

输出样例1

```
16
```

样例解释1

第 1 天购入一个单位股票,收益为 -2

第 2 天售出一个单位股票,收益为 3

第 3 天购入一个单位股票,收益为 -1

第 4 天购入一个单位股票,收益为 -4

第 5 天售出一个单位股票,收益为 3

第 6 天购入一个单位股票,收益为 2

第 7 天售出一个单位股票,收益为 10

第 8 天售出一个单位股票,收益为 16

#2406、逃不掉的股票购买

容易想到需要尽可能低价购入高价卖出

尝试找出之前天数中的最小值售出，不难想到该贪心策略错误

考虑反悔贪心

设 P_{buy} 为全局最优解中的购入价格 P_{sell} 为全局最优解中的售出价格

$$P_{\text{sell}} - P_{\text{buy}} = P_{\text{sell}} - P_i + P_i - P_{\text{buy}}$$

维护一个以价格为关键字的小根堆

从前往后依次加入当前价格 P_i

每次尝试以堆顶价格购入 (若可盈利即堆中存在 $p_j < p_i$)，同时再向堆中再次加入 P_i

若取到重复加入的 P_i 说明 P_{sell} 存在一个更优的选择

此时累加 $P_{\text{sell}} - P_i$ 可抵消前一次 P_i 对答案的贡献

时间复杂度 $O(n \log n)$

3
1 2 100

#3016、又是滑动窗口

题目描述

给定一个长度为 n 的序列 A

请你找出一个连续区间,使得区间元素之和不小于 K

这样的区间可能存在多个,请你找出最小的长度(若不存在输出 `-1`)

输出格式

第一行输入两个整数 n, k
第二行输入 n 个整数,其中第 i 个整数表示元素 A_i

> *输入数据较多,请使用较快的输入方式进行读入!*

输出格式

输出一个整数表示满足条件的最小长度,如果不存在输出 `-1`

数据规模

对于测试点 $1 \sim 4$, $1 \leq n \leq 1000, -1000 \leq A_i \leq 1000$
对于测试点 $5 \sim 9$, $1 \leq n \leq 5 \times 10^5, 0 \leq A_i \leq 10^6$
对于测试点 $10 \sim 15$, $1 \leq n \leq 5 \times 10^5, -10^9 \leq A_i \leq 10^9$
对于测试点 $16 \sim 20$, $1 \leq n \leq 10^7, -10^9 \leq A_i \leq 10^9, 1 \leq k \leq 10^9$

输入样例1

```
3 3
1 0 1
```

输出样例1

```
-1
```

输入样例2

```
3 3
2 -1 2
```

输出样例2

```
3
```

求出前缀和数组 sum

对于 sum_i 令 $S = \{\text{sum}_j \mid 0 \leq j < i\}$

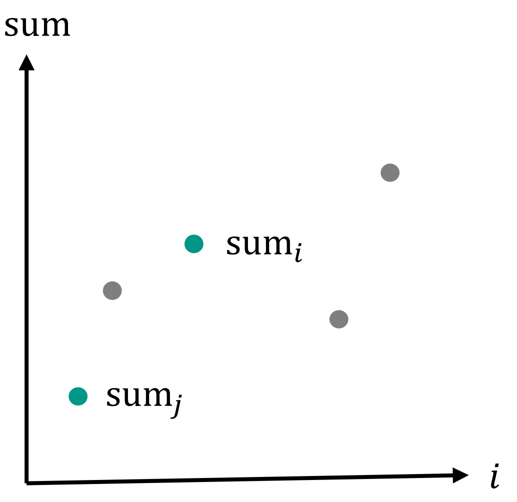
从 S 中选出元素

若满足 $\text{sum}_i - \text{sum}_j$ 则用 $i - j$ 进行更新

上述过程时间复杂度 $O(n^2)$

考虑维护 S , 删去无意义的元素

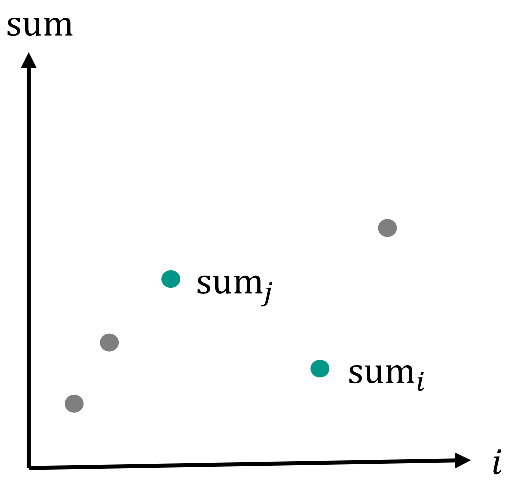
#3016、又是滑动窗口



$\mathrm{sum}_i - \mathrm{sum}_j \geq k$

若存在后续 sum_x 能与 sum_j 构成子数组

但 $i - j < x - j$, 可将 sum_j 淘汰



$\mathrm{sum}_i \leq \mathrm{sum}_j$

若存在后续 sum_x 能与 sum_j 构成子数组

那么也必然能与 sum_i 构成

由于 $x - i < x - j$, 可将 sum_j 淘汰

右图对应优化可保证 保留 sum 下标递增 且 值递增 ，考虑使用单调队列维护(为保证前缀子段被考虑，需将 sum_0 加入队列)

对于左图优化仅需在入队前将 队首 sum_j 与当前 sum_i 以 $\mathrm{sum}_i - \mathrm{sum}_j \geq k$ 为条件进行淘汰(同时更新答案)

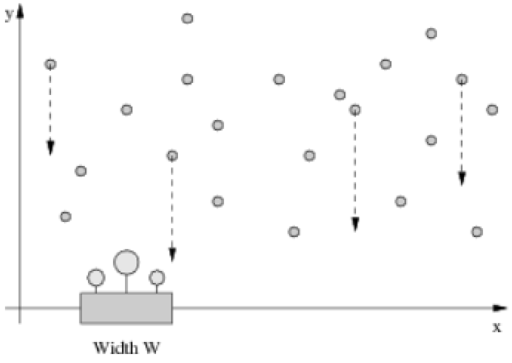
时间复杂度 $O(n)$

#2557、花盆

题目描述

$Sifo$ 需要 Mas 帮忙浇花

给出 N 滴水的坐标, y 表示水滴的高度, x 表示它下落到 x 轴的位置



每滴水以每秒 1 个单位长度的速度下落

你需要把花盆放在 x 轴上的某个位置,使得从被花盆接着的第 1 滴水开始,到被花盆接着的最后 1 滴水结束,之间的时间差至少为 D

我们认为,只要水滴落到 x 轴上,与花盆的边沿对齐,就认为被接住

给出 N 滴水的坐标和 D 的大小,请算出最小的花盆的宽度 W

数据范围

对于 40% 的数据: $1 \le N \le 1000, 1 \le D \le 2000$

对于 100% 的数据: $1 \le N \le 100000, 1 \le D \le 1000000, 0 \le x, y \le 10^6$

输入格式

第一行 2 个整数 N 和 D

第 $2 \sim N+1$ 行每行 2 个整数,表示水滴的坐标 (x, y)

输出格式

仅一行 1 个整数,表示最小的花盆的宽度

如果无法构造出足够宽的花盆,使得在 D 单位的时间接住满足要求的水滴,则输出 `-1`

样例解释

有 4 滴水, $(6,3),(2,4),(4,10),(12,15)$

水滴必须用至少 5 秒时间落入花盆

花盆的宽度为 2 是必须且足够的

把花盆放在 $4 \sim 6$ 的位置,它可以接到 1 和 3 水滴, 之间的时间差为 $10-3=7$ 满足条件

输入样例

```
4 5
6 3
2 4
4 10
12 15
```

输出样例

```
2
```

#2557、花盆

思路1

容易想到随着花盆宽度增大越容易满足条件，考虑二分答案

将所有水滴根据 x 排序，二分确定当前花盆大小 W

对于每个确定的 W 维护两个单调队列

两个队列的头尾元素 x 差值不超过 W（有可能存在多个队首不满足差值不超过 W，应当循环淘汰）

队列内维护 y 的最值

若区域内**存在**两个最值差值不小于 D 说明当前花盆大小 W 能够满足条件

时间复杂度 $O(n\log\max(y))$

元素差值不小于定值？能否参考 #3016、又是滑动窗口 思路？

#2557、花盆

思路2

区间 $[l,r]$ 内 y 的最值之差不小于 D 那么该区间满足条件

对于左端点 l 考虑其第一个满足条件的右端点 r

随着 l 递增右端点 r 单调非降

若不然，对于满足条件的区间 $[l_1,r_1]$ 与 $[l_2,r_2]$ 有 $l_1 < l_2 \le r_2 < r_1$

显然 l_1 其右端点应为 r_2 而非 r_1，矛盾

枚举左端点 l 使用单调队列分别维护区间最值

若队首下标小于 l 淘汰队首（同样需要循环淘汰），再令 r 不断后移直到区间最值之差不小于 D

同时将 r 访问过的元素加入单调队列以维护最值

若能够找到满足条件的区间则更新区间长度

时间复杂度 $O(n)$

#2403、笛卡尔树

题目描述

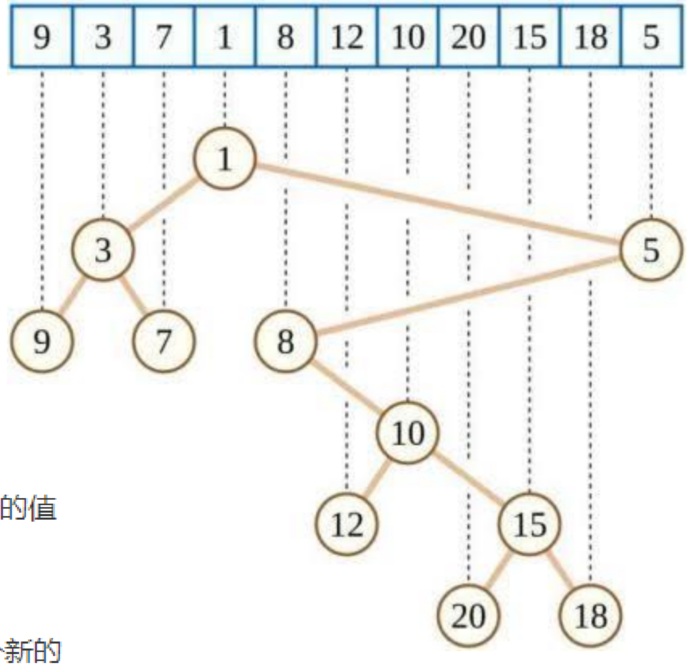
对于一个长度为 n 且不包含重复元素的序列 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$,我们定义其对应的笛卡尔树是一棵二叉树,其根节点的编号为 $p=\min\{a_i\}$ 即序列 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ 中最小值出现的位置,其左右子树分别是序列 $\{a_i\}_{i=1}^{p-1}$ 和 $\{a_i\}_{i=p+1}^{n}$ 所对应的笛卡尔树

> *特别的,空序列对应的笛卡尔树是空树*

笛卡尔树满足一些性质,比如说其中序遍历就是原序列

笛卡尔树还满足堆性质,即一个节点对应权值小于其子树内任意一点的权值

下图展示了序列 $[9\ 3\ 7\ 1\ 8\ 12\ 10\ 20\ 15\ 18\ 5]$ 所对应的笛卡尔树:



对于给定序列构建其对应的笛卡尔树的一种常用方式是增量构造,即在序列 $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$ 对应的笛卡尔树的基础上,通过加入最右端的一个新的值 a_n ,来得到序列 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ 对应的笛卡尔树

具体实现过程中,通常需要使用某种数据结构维护出当前笛卡尔树“从根出发一直向右儿子走得到的点列”（称之为**右链**）,当右端出现一个新的值时,这个值将会加入右链,同时将右链中的一段后缀移除

现在给出一个长度为 n 且不包含重复元素的序列 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$,请你构造出它所对应的笛卡尔树

为了检验你真的构造出了这棵树,我们要求你输出每个节点的父节点的编号

输入格式

输入的第一行包含一个整数 n 表示序列的长度

第二行包含 n 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,表示序列。保证 $\{a_i\}$ 互不相同

输出格式

输出一行 n 个整数 $fa_1, fa_2, \cdots, fa_n$ 表示每个节点的父节点编号

数据范围

对于 30% 的数据, $n \le 10$

对于 60% 的数据, $n \le 5000$

对于 100% 的数据, $n \le 10^6, 1 \le a_i \le 10^6$

笛卡尔树

笛卡尔树 (Cartesian Tree) 是一种二叉树

每一个结点由一个键值二元组 (k,w) 构成,要求 k 满足 **二叉搜索树** 的性质而 w 满足 **堆** 的性质

如果笛卡尔树的 k,w 键值确定且 k 互不相同 w 也互不相同，那么该笛卡尔树的结构是唯一的

考虑任意将元素按照键值 k 排序，逐一插入到当前的笛卡尔树中

每次插入的元素必然在这个树的右链(右链：即从根结点一直往右子树走,经过的结点形成的链的末端)

从下往上比较右链结点与当前结点 u 的 w，若找到一个右链上的结点 x 满足 $w_x < w_u$

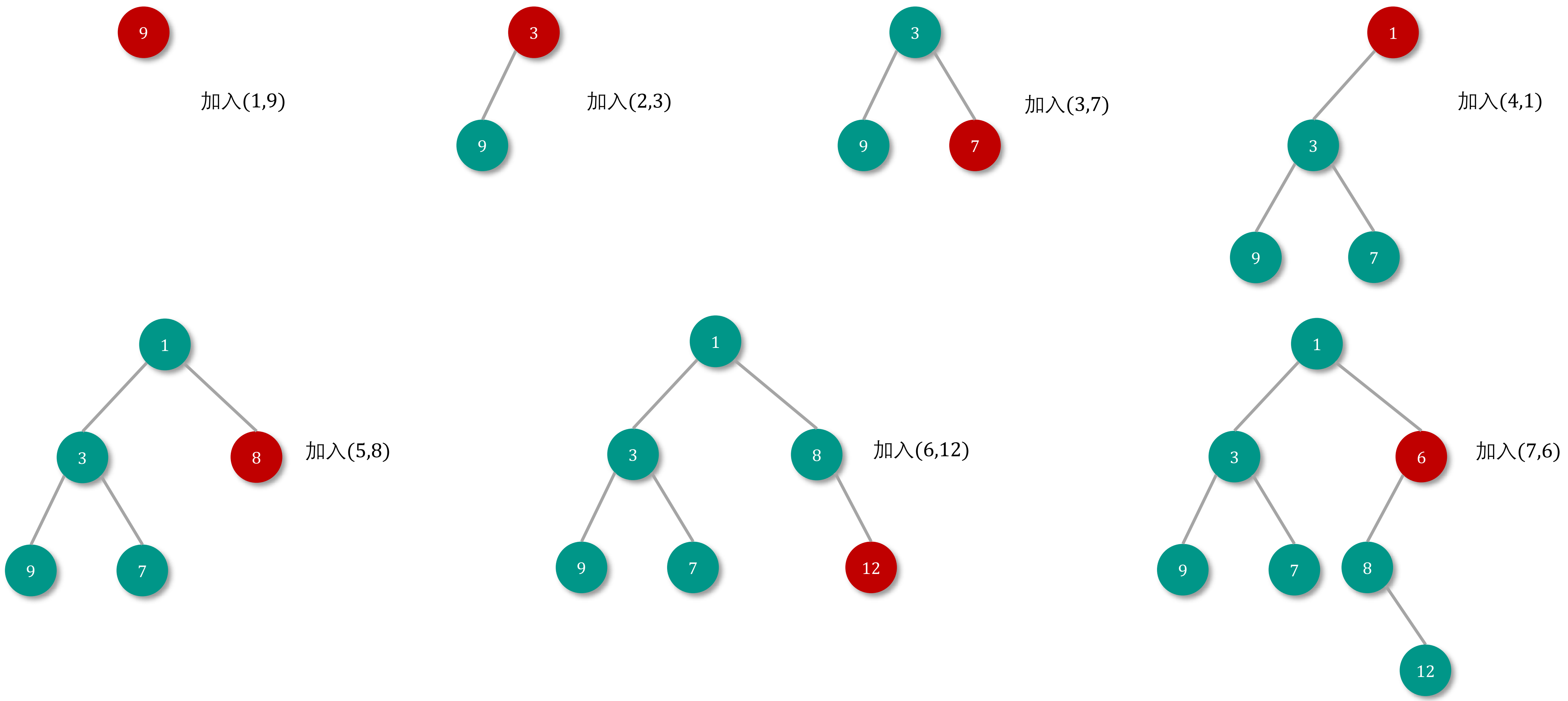
就把 u 接到 x 的右儿子上，而 x 原本的右子树就变成 u 的左子树

每个数最多进出右链一次,上述过程可用栈维护

栈中维护当前笛卡尔树的右链上的结点

一个点不在右链上那么从栈中弹出，时间复杂度 $O(n)$

笛卡尔树



笛卡尔树

单调栈维护右链

弹栈过程中将当前节点的左孩子不断更新成已弹栈的节点编号

并将栈顶元素(若存在)的右孩子设为当前节点编号

再看 直方图中最大的矩形

笛卡尔树内各子树对应原序列一段连续区间

对于每个方格 i 需要知道不小于 H_i 的左右边界,以计算能扩展的宽度

若各个位置以 (i, H_i) 构建笛卡尔树

长度即为子树大小,记以 i 为根的子树大小为 cnt_i

遍历 笛卡尔树 以 $H_i \times cnt_i$ 更新答案即可

时间复杂度 $O(n)$

```
int build()
{
    int cur = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        while (cur && h[s[cur]] >= h[i])
            tree[i].l = s[cur--];
        if (cur)
            tree[s[cur]].r = i;
        s[++cur] = i, tree[i].val = h[i];
    }
    return s[1];
}
long long dfs(int u)
{
    if (!u)
        return 0;
    long long cnt = dfs(tree[u].l) + dfs(tree[u].r);
    ans = max(ans, tree[u].val * (cnt + 1));
    return cnt + 1;
}
```

#3017、超级钢琴

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

题目描述

小 Z 是一个小有名气的钢琴家,最近 C 博士送给了小 Z 一架超级钢琴,小 Z 希望能够用这架钢琴创作出世界上最美妙的音乐

这架超级钢琴可以弹奏出 n 个音符,编号为 1 至 n

第 i 个音符的美妙度为 A_i ,其中 A_i 可正可负

一个 "**超级和弦**" 由若干个编号连续的音符组成,包含的音符个数不少于 L 且不多于 R

我们定义超级和弦的美妙度为其包含的所有音符的美妙度之和

两个超级和弦被认为是相同的,当且仅当这两个超级和弦所包含的音符集合是相同的

小 Z 决定创作一首由 k 个超级和弦组成的乐曲,为了使得乐曲更加动听,小 Z 要求该乐曲由 k 个不同的超级和弦组成

我们定义一首乐曲的美妙度为其所包含的所有超级和弦的美妙度之和

小 Z 想知道他能够创作出来的乐曲美妙度最大值是多少

输入格式

输入第一行包含四个正整数 n, k, L, R

其中 n 为音符的个数, k 为乐曲所包含的超级和弦个数, L 和 R 分别是超级和弦所包含音符个数的下限和上限

接下来 n 行,每行包含一个整数 A_i ,表示按编号从小到大每个音符的美妙度

输出格式

输出只有一个整数,表示乐曲美妙度的最大值

输入样例

```
4 3 2 3
3
2
-6
8
```

输出样例

```
11
```

数据规模

对于测试点 1 , $N \le 10, k \le 100$
对于测试点 2 , $N \le 1000, k \le 500000$
对于测试点 3 , $N \le 100000, k \le 1$
对于测试点 4 , $N \le 10000, k \le 10000$
对于测试点 5 , $N \le 500000, k \le 100000$
对于测试点 6 , $N \le 80000, k \le 80000$
对于测试点 7 , $N \le 100000, k \le 100000$
对于测试点 8 , $N \le 100000, k \le 500000$
对于测试点 $9 \sim 10$, $N \le 500000, k \le 500000$
所有数据满足: $-1000 \le A_i \le 1000$, $1 \le L \le R \le n$ 且保证一定存在满足要求的乐曲

样例解释

共有 5 种不同的超级和弦:

- 音符 $1 \sim 2$,美妙度为 $3 + 2 = 5$
- 音符 $2 \sim 3$,美妙度为 $2 + (-6) = -4$
- 音符 $3 \sim 4$,美妙度为 $(-6) + 8 = 2$
- 音符 $1 \sim 3$,美妙度为 $3 + 2 + (-6) = -1$
- 音符 $2 \sim 4$,美妙度为 $2 + (-6) + 8 = 4$

最优方案为:乐曲由和弦 $1, 3, 5$ 组成,美妙度为 $5 + 2 + 4 = 11$

#3017、超级钢琴

求出前缀和数组 sum

对于当前位置 i，能贡献的最大值为 $\max_{j=i-L-1}^{i+R-1}\{\mathrm{sum}_j - \mathrm{sum}_i\}$

sum_i 为定值仅需要保证 sum_j 取到最大值即可

考虑使用 ST 表维护区间内最大值下标

大根堆内维护四元组 $\{ i , \mathrm{L} , \mathrm{R} , \mathrm{pos} \}$

其中 i 为起点 L / R 为区间上下界, pos 为 最值下标，以 $\mathrm{sum}_{\mathrm{pos}} - \mathrm{sum}_i$ 为关键字排序

将每个位置的最大贡献加入大根堆，每次从大根堆中取出一个节点累加贡献

考虑到一个起点 i 可能多次贡献, 其中 $\mathrm{L} \sim \mathrm{pos} - 1$ 可能存在一个最值，其中 $\mathrm{pos} + 1 \sim \mathrm{R}$ 可能存在一个最值

考虑再将两个情况加入优先队列，一共取出 k 次累加贡献即可

时间复杂度 $O(k \log n)$

#3556、策略游戏

题目描述

小 L 和小 Q 在玩一个策略游戏

有一个长度为 n 的数组 A 和一个长度为 m 的数组 B ,在此基础上定义一个大小为 $n \times m$ 的矩阵 C ,满足 $C_{ij} = A_i \times B_j$

> *所有下标均从 1 开始*

游戏一共会进行 q 轮,在每一轮游戏中,会事先给出 4 个参数 l_1, r_1, l_2, r_2 ,满足 $1 \le l_1 \le r_1 \le n$ 、 $1 \le l_2 \le r_2 \le m$

游戏中,小 L 先选择一个 $l_1 \sim r_1$ 之间的下标 x ,然后小 Q 选择一个 $l_2 \sim r_2$ 之间的下标 y

定义这一轮游戏中二人的得分是 C_{xy}

小 L 的目标是使得这个得分尽可能大,小 Q 的目标是使得这个得分尽可能小。同时两人都是足够聪明的玩家,每次都会采用最优的策略

请问：按照二人的最优策略,每轮游戏的得分分别是多少?

数据范围

对于所有数据, $1 \le n, m, q \le 10^5$, $-10^9 \le A_i, B_i \le 10^9$

对于每轮游戏而言, $1 \le l_1 \le r_1 \le n$, $1 \le l_2 \le r_2 \le m$

输入格式

第一行输入三个正整数 n, m, q ,分别表示数组 A ,数组 B 的长度和游戏轮数

第二行： n 个整数表示 A_i ,分别表示数组 A 的元素

第三行： m 个整数表示 B_i ,分别表示数组 B 的元素

接下来 q 行,每行四个正整数,表示这一次游戏的 l_1, r_1, l_2, r_2

输出格式

输出共 q 行,每行一个整数,分别表示每一轮游戏中,小 L 和小 Q 在最优策略下的得分

#3556、策略游戏

记 小 L 选的数为 x 小 Q 选的数为 x

先考虑 Q 的策略

当 $x \geq 0$ 时小 Q 应令 $y = \min_{i=l_2}^{r_2}\{B_i\}$ 最优

当 $x < 0$ 时小 Q 应令 $y = \max_{i=l_2}^{r_2}\{B_i\}$ 最优

进一步讨论小 L 的选取

- 此时 $x \geq 0$

  若 $y \geq 0$

  那么 $x = \max_{i=l_1}^{r_1}\{A_i\}$ 最优

  小 Q 无负数可选，小 L 选取最大正整数 小 Q 选最小非负整数

#3556、策略游戏

若 $y < 0$

那么$x = \min_{i=l_1}^{r_1}\{A_i\}$ 最优

小 Q 有负数可选，小 L 选取最小非负整数 小 Q 选最小负整数

- 此时 $x < 0$

若 $y < 0$

那么$x = \min_{i=l_1 \wedge A_i<0}^{r_1}\{A_i\}$

小 Q 无非负数可选，小 L 选最小负整数 小 Q 选最大负整数

若 $y > 0$

那么 $x = \max_{i=l_1 \wedge A_i<0}^{r_1}\{A_i\}$

小 Q 有正数可选，小 L 选取最大负整数 小 Q 选最大正整数

#3556、策略游戏

对于上述情况中仅需维护

- A 的区间 **最大值**
- B 的区间 **最大值**
- A 的区间 **最小值**
- B 的区间 **最小值**
- A 的区间 **负最大值**
- A 的区间 **非负最小值**

可使用数据结构维护

对于区间负最大值可令原序列非负为极小值正常维护即可

对于区间非负最小值可令原序列负为极大值正常维护即可

对于四类情况取最大值即为答案

若使用 ST 表维护，时间复杂度 $O(n\log n + m\log m + q)$

#3020、开车旅行

题目描述

小 A 和小 B 决定利用假期外出旅行,他们将想去的城市从 $1 \sim n$ 编号,且编号较小的城市在编号较大的城市的西边,已知各个城市的海拔高度互不相同,记城市 i 的海拔高度为 h_i

城市 i 和城市 j 之间的距离, $d_{i,j}$ 恰好是这两个城市海拔高度之差的绝对值

即 $d_{i,j} = |h_i - h_j|$

旅行过程中,小 A 和小 B 轮流开车,第一天小 A 开车,之后每天轮换一次。他们计划选择一个城市 s 作为起点,一直向东行驶,并且最多行驶 x 公里就结束旅行

小 A 和小 B 的驾驶风格不同,小 B 总是沿着前进方向选择一个最近的城市作为目的地,而小 A 总是沿着前进方向选择第二近的城市作为目的地(注意:本题中如果当前城市到两个城市的距离相同,则认为离海拔低的那个城市更近).如果其中任何一人无法按照自己的原则选择目的的城市,或者到达目的地会使行驶的总距离超出 x 公里,他们就会结束旅行

在启程之前,小 A 想知道两个问题:

1、 对于一个给定的 $x = x_0$,从哪一个城市出发,小 A 开车行驶的路程总数与小 B 行驶的路程总数的比值最小(如果小 B 的行驶路程为 0 ,此时的比值可视为无穷大,且两个无穷大视为相等)。如果从多个城市出发,小 A 开车行驶的路程总数与小 B 行驶的路程总数的比值都最小,则输出海拔最高的那个城市

2、对任意给定的 $x = x_i$ 和出发城市 s_i ,小 A 开车行驶的路程总数以及小 B 行驶的路程总数

数据范围与约定

对于 100% 的数据, $1 \le n, m \le 10^5, -10^9 \le h_i \le 10^9, 1 \le s_i \le n, 0 \le x_i \le 10^9$ 数据保证 h_i 互不相同

输入输出格式详见题面

不难看出当起点确定后,

开车路线就被唯一确定

#3020、开车旅行

考虑处理出每个位置 i 往后得最大值下标 ga_i 和次大值下标 gb_i

可排序后离线后链表解决，也可 set + 二分 解决, 该部分时间复杂度 $O(n\log n)$

对于一次询问直接模拟时间复杂度 $O(n)$，考虑倍增优化

记 $nxt[i][j][k]$ 表示 k 先开车以 i 为起点 2^j 天后目的地下标

其中 $k=0$表示 A 先开车, $k=1$ 表示 B 先开车

初始时

$$nxt[i][0][0]=ga_i$$

$$nxt[i][0][1]=gb_i$$

当 $j=1$ 时, 由于 2^0 为奇数, 计算 2^1 时需要更换先开车的人员

$$nxt[i][1][k]=nxt\left[nxt[i][0]\right][0][1-k]$$

#3020、开车旅行

当 $j \geq 1$ 时

$$nxt[i][j][k] = nxt\left[nxt[i][j-1][k]\right][j-1][k]$$

记 $da[i][j][k]$ 表示 k 先开车以 i 为起点 2^j 天后 ***A* 走的路程**，$db[i][j][k]$ 表示 k 先开车以 i 为起点 2^j 天后 ***B* 走的路程**

其中 $k=0$表示 A 先开车, $k=1$ 表示 B 先开车

初始时

$$da[i][0][0] = |\,H[i] - H[ga_i]\,| \quad , \qquad db[i][0][1] = |\,H[i] - H[gb_i]\,|$$

$$da[i][0][1] = db[i][0][0] = 0$$

当 $j = 1$ 时,由于 2^0 为奇数, 计算 2^1 时需要更换先开车的人员

$$da[i][1][k] = da[i][0][k] + da\left[nxt[i][0][k]\right][0][1-k]$$

$$db[i][1][k] = db[i][0][k] + db\left[nxt[i][0][k]\right][0][1-k]$$

#3020、开车旅行

当 $j \geq 1$ 时

$$da[i][j][k] = da[i][j-1][k] + da\big[nxt[i][j-1][k]\big][j-1][k]$$

$$db[i][j][k] = db[i][j-1][k] + db\big[nxt[i][j-1][k]\big][j-1][k]$$

要求起点为 S 且路程不超过 X 的路线两人路程

令 $i = \log_2 n$ 开始尝试开车,不断减小 i

若 $nxt[S][i][0]$ 有值 且 路程之和 不超过 X

分别累加 $da[S][i][0]$ 和 $db[S][i][0]$

同时令 $S = nxt[S][i][0]$

时间复杂度$O(m \log n)$

#3025、排列上的操作

题目描述

称逆序对为一个序列中满足 $i<j$ 且 $a_i>a_j$ 的二元组 (i,j)

若一个排列的逆序对个数为奇数,则称它为一个奇排列,否则它被称为偶排列

给出一个长度为 N 的排列,有 4 种操作

- `1 l r` 交换 A_L 和 A_R
- `2 l r` 翻转区间 $[L,R]$ 内的数
- `3 l r k` 将区间 $[L,R]$ 内的数左移 K 位
- `4 l r k` 将区间 $[L,R]$ 内的数右移 K 位

对一个长度为 n 的序列的操作定义如下:

- 翻转: 对于所有 $1\le i\le N$,将第 i 个位置的数移动到第 $N-i+1$ 个位置
- 左移 K 位: 对于所有 $2\le i\le N$,将第 i 个位置的数移动到第 $i-1$ 个位置,第 1 个位置的数移动到第 N 个位置,重复此操作 k 次
- 右移 K 位: 对于所有 $1\le i<n$,将第 i 个位置的数移动到第 $i+1$ 个位置,第 N 个位置的数移动到第 1 个位置,重复此操作 K 次

> *上述定义中同一个操作内的移动都是同时进行的*

现在 Mas 想要知道每次操作之后这个排列是奇排列还是偶排列

输入格式

第一行两个整数 N,M ,表示序列的长度和操作的次数

第二行 N 个整数,表示一个 $1\sim N$ 的排列

接下来 M 行,每行三或四个整数,表示一次操作,具体格式及其含义见题目描述

输出格式

共 M 行表示每次操作后的答案

若为奇排列则输出 1 否则输出 0

数据规模

对于前 5% 的数据, $1\le N,M\le 100,1\le K\le 10$

对于另外 5% 的数据, $1\le N,M,K\le 1000$

对于前 45% 的数据, $1\le N\le 10^3,1\le M\le 10000$

对于另外 5% 的数据, $1\le N,M\le 2\times 10^5$,保证对于任意操作都有 $R-L=1$

对于另外 5% 的数据, $1\le N,M\le 2\times 10^5$,保证输入中仅存在操作 1

对于另外 5% 的数据, $1\le N,M\le 2\times 10^5$,保证输入中仅存在操作 2

对于 100% 的数据, $1\le N,M\le 2\times 10^5,1\le L\le R\le n,1\le K\le 10^9$

#3025、排列上的操作

若一个排列逆序对数量为奇数称为 **奇排列**，否则称为 **偶排列**

逆序对数量奇偶性，可称为排列的奇偶性

一个排列中的任意两个不相邻元素交换，逆序对数量改变奇偶性

设排列为:

$$a_1, \cdots, a_n, a, b, b_1, b_2, \cdots, b_m$$

先考虑相邻交换

交换 a 与 b 变为

$$a_1, \cdots, a_n, b, a, b_1, b_2, \cdots, b_m$$

显然 $a_1 \sim a_n$ 与 $b_1 \sim b_m$ 中的元素逆序数不变，而 a 和 b 的逆序数改变

- 当 $a < b$ 时

  交换后 a 的逆序数加 1 而 b 的逆序数不变

#3025、排列上的操作

- 当 $a > \ b$ 时

  交换后 a 的逆序数不变 而 b 的逆序数减 1

所以相邻交换后，排列改变奇偶性

再考虑一般交换的情形：

设排列为：

$$a_1, \cdots, a_n, a, b_1, b_2, \cdots, b_m, b, c_1, \cdots$$

将其作 m 次相邻变换变为：

$$a_1, \cdots, a_n, a, b, b_1, b_2, \cdots, b_m, c_1, \cdots$$

再进行 $m + 1$ 次相邻变换变为：

$$a_1, \cdots, a_n, b, b_1, b_2, \cdots, b_m, a, c_1, \cdots$$

经过了 $2m + 1$ 次相邻对换 完成了 a, b 的对换

命题得证

#3025、排列上的操作

分别考虑每种操作

操作 1

若 $L \neq R$ 此时必然改变奇偶性

操作 2

反转可视为 $\lfloor \frac{R-L+1}{2} \rfloor$ 对不相邻交换

操作 3

每移动一位可视为依次向左做了 $R-L$ 次相邻交换

$$1\ 2\ 3\ 4 \rightarrow 1\ 2\ 4\ 3 \rightarrow 1\ 4\ 3\ 2 \rightarrow 4\ 1\ 2\ 3$$

即一共进行了 $K \times (R-L)$ 次交换

操作 4

同理每移动一位可视为依次向右做了 $R-L$ 次相邻交换，即一共进行了 $K \times (R-L)$ 次交换

求出原序列逆序对奇偶性，再对每种操作分情况讨论即可

时间复杂度 $O(N \log N)$

#3021、矩阵上的操作

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校 LAB

题目描述

给定一个 $n \times m$ 的矩阵,初始时矩阵各个元素都为 0

现在如下三种操作:

- `1 x y v` 将 $x \sim y$ 列上的所有元素加上值 v ,保证 $1 \le x \le y \le m, -10^9 \le v \le 10^9$
- `2 x v` 将第 x 行所有元素替换为 v ,保证 $1 \le x \le n, -10^9 \le v \le 10^9$
- `3 x y` 询问第 x 行第 y 列元素的值,保证 $1 \le x \le n, 1 \le y \le m$

现在给出 Q 个操作,请你实现

输入格式

第一行输入三个整数$ n, m, Q
接下来 Q 行,每行为上述三种操作之一

输出格式

对于每个 `3 x y` 操作,输出询问的值

数据规模

对于前 10% 的数据 $1 \le n, m, Q \le 5000$
对于另外 20% 的数据 $1 \le n, m, Q \le 2 \times 10^5$,保证不存在操作 `2 x v`
对于全部的数据 $1 \le n, m, Q \le 2 \times 10^5$

输入样例

```
3 3 9
1 1 2 1
3 2 2
2 3 2
3 3 3
3 3 1
1 2 3 3
3 3 2
3 2 3
3 1 2
```

输出样例

```
1
2
2
5
3
4
```

样例解释

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\2&2&2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&4&3\\1&4&3\\2&5&5\end{pmatrix}$$

#3021、矩阵上的操作

对于不存在 操作2 的情况

仅需将所有列看作一个元素,仅维护一维差分数组即可,区间内所有列上元素加定值,单点修改维护即可

考虑存在 操作2 时的情况

对于每个 操作3 仅会被距它最近的一个 操作2 影响，考虑消除该 操作2 的影响

记某个 操作3 发生时 不考虑 所有的操作2 该位置 (x, y) 上的值为 sum_1，距该 操作3 最近的 操作2 发生前 该位置的值为 sum_2

若考虑 操作2 最终答案为 $sum_1 - sum_2 + k$

将所有操作离线存储

记录所有 操作2 能影响的 操作3 ,令 $ans[i]$ 表示第 i 个操作之前受到的影响

从前往后处理，对于遇到的每个 操作2 对于每个所影响的操作3 令其 $ans[i] = v - sum_2$

对于每个 操作3 输出 $ans + sum_1$

时间复杂度 $O(\, m \log n\,)$

#3029、区间GCD询问

题目描述

给定一个长度为 N 的数列 A ,以及 M 条指令,每条指令可能是以下两种之一:

- `C l r d` ,表示把 $A_l \sim A_r$ 都加上 d
- `Q l r` ,表示询问 $A_l \sim A_r$ 的最大公约数($\gcd$)

对于每个询问,输出一个整数表示答案

输入格式

第一行两个整数 N, M

第二行 N 个整数 A_i

接下来 M 行表示 M 条指令,每条指令的格式如题目描述所示

输出格式

对于每个询问,输出一个整数表示答案

每个答案占一行

数据范围

对于全部的数据 $1 \le N \le 500000, 1 \le M \le 100000, 1 \le A_i \le 10^{18}, |d| \le 10^{18}$

存在性质

$$(a,b) = (b, a-b) = (a, a-b)$$

对于 a , b 任意公约数 d

$$d \mid a \wedge d \mid b \implies d \mid a-b$$

即 d 也是 b , $a-b$ 的公约数

同理可证 a , $b-a$ 的情况

推广到多个数

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \cdots, a_n - a_{n-1})$$

#3029、区间GCD询问

考虑线段树维护差分序列 d

需要实现两个区间操作

- 查询区间 A_x 的值即 $\sum_{i=1}^{x} d_i$
- 查询区间 $\gcd(d_l, \cdots, d_r)$ 的值

由于 gcd 满足结合律，对于区间询问直接将原有的 + 操作改为 gcd 操作

对于 Q 询问仅需要输出

$$\gcd\left(A_l, \gcd(d_{l+1}, \cdots, d_r)\right)$$

对于区间修改仅需要对 d_l 和 d_{r+1} 进行单点修改即可

总时间复杂度 $O(m \log^2 n)$

#3032、工作日

实验舱 青少年编程 LAB 走近科学 走进名校

题目描述

Alex 高中毕业了,他现在是大学新生

虽然他的专业是计算机,但他还是要上体育课,这对他来说完全是一个意外

快要期末了,但是不幸的 Alex 的体育学分还是零蛋!

Alex 可不希望被开除,他想知道到期末还有多少天的工作日,这样他就能在这些日子里修体育学分

但是在这里计算工作日可不是件容易的事情：从现在到学期结束还有 n 天(从 $1 \sim n$ 编号),他们一开始都是工作日

接下来学校的工作人员会**依次**发出 q 个指令,每个指令可以用三个参数 l, r, k 描述:

- 如果 $k=1$,那么从 l 到 r (包含端点)的所有日子都变成**非**工作日
- 如果 $k=2$,那么从 l 到 r (包含端点)的所有日子都变成**工作日**

帮助 Alex 统计每个指令下发后,剩余的工作日天数

输入格式

第一行一个整数 n ,第二行一个整数 q ,分别是剩余的天数和指令的个数

接下来 q 行,第 i 行有 3 个整数 l_i, r_i, k_i ,描述第 i 个指令

输入格式

第一行一个整数 n ,第二行一个整数 q ,分别是剩余的天数和指令的个数

接下来 q 行,第 i 行有 3 个整数 l_i, r_i, k_i ,描述第 i 个指令

输出格式

输出 q 行,第 i 行表示第 i 个指令被下发后剩余的工作日天数

数据规模

对于 30% 的数据 $1 \le n, q \le 10^5$

对于全部的数据 $1 \le n \le 10^9, 1 \le q \le 10^5, 1 \le l_i \le r_i \le n, k_i \in \{1,2\}$

#3032、工作日

若 $n \le 10^5$ 直接权值线段树维护即可（区间赋值 、区间查询）

若不离散化

堆式存储线段树需要开 $4n$ 长度的数组

动态开点

并不在初始时建出完整线段树，仅在使用到该节点时开辟节点

对于每个节点 p

令 $p.\mathrm{ls}$ 表示其左孩子编号 $p.\mathrm{rs}$ 表示其右孩子编号

每次 修改/查询 需要用到某个节点时，若该节点不存在则开辟该节点

对于每次 区间查询 或 区间修改 至多访问到 $2\log n$ 个节点

时/空间复杂度 $O(m\log n)$

#3031、等差数列

题目描述

为了检验学生的掌握情况 Mas 布置了一道习题:

给定一个长度为 N 的数列,初始时第 i 个数为 v_i ,学生们要按照 Mas 的给出的操作步骤来改变数列中的某些项的值

操作步骤的具体形式为: `A s t a b` (s, t, a, b 均为整数,它表示在序列的 $[s, t]$ 区间上加上初值为 a ,步长为 b 的等差数列

即 v_i 变为 $v_i + a + b \times (i - s)$ (对于 $s \le i \le t$)

在焦头烂额地计算之余,学生们还得随时回答 Mas 提出的问题

问题形式为: `B s t` (s, t 均为整数, $1 \le s \le t \le N$),表示 Mas 询问当前序列的 $[s, t]$ 区间最少能划分成几段,使得每一段都是等差数列
如 `1 2 3 5 7` 最少能划分成 2 段,一段是 `1 2 3` ,另一段是 `5 7`

询问是需要同学们计算出答案后,作为作业交上来的

虽然操作数加问题数总共只有 Q 个, Mas 还是觉得这个题很无聊很麻烦

于是他想让你帮他算一份标准答案

数据规模

对 30% 的数据, $N, Q \le 5000$

对 100% 的数据, $1 \le N, Q \le 10^5, 1 \le s \le t \le N, -10^5 \le a, b, v_i \le 10^5$

输入格式

第 1 行输入 1 个整数 N

第 $2 \sim N + 1$ 行,每行输入一个整数

第 $i + 1$ 行输入一个整数表示 v_i

第 $N + 2$ 行输入 1 个整数 Q

第 $N + 3 \sim N + Q + 2$ 行,每行描述了一个操作或问题,格式如题中所述

输出格式

若干行,每行一个整数,表示对一个问题的回答

请按照输入中的顺序依次给出回答

#3031、等差数列

对于 A s t a b 操作，考虑维护差分序列 d

令

$$d_s \leftarrow d_s + a \qquad d_{t+1} \leftarrow d_{t+1} - a - b \times (s - t)$$

对于 $s + 1 \leq i \leq r$ 再令

$$d_i \leftarrow d_i + b$$

若使用线段树维护上述操作对应两个单点修改 和 一个区间 修改 操作

对于 $s = t$ 及 $t = n$ 时的情况应当特判处理

下表对应 2 6 1 2 操作

a	1	2	3	4	5	6	7	8
d	1	1	1	1	1	1	1	1
d’	1	1 + 1	1 + 2	1 + 2	1 + 2	1 + 2	1 − 9	1
a’	1	3	6	9	12	15	7	8

#3031、等差数列

对于 B s t 操作

序列为等差数列，那么其 差分序列 d_s 任意 $d_{s+1} = \cdots = d_t$

线段树节点维护

s_1 维护 (l,r) 最少划分几段

s_2 维护 $[l,r)$ 最少划分几段

s_3 维护 $(l,r]$ 最少划分几段

s_4 维护 $[l,r]$ 最少划分几段

lval 左端点差分值

rval 右端点差分值

那么对于叶子节点 $s_1 = 0, s_2 = s_3 = s_4 = 1$

对于节点 p 其左右孩子为 lr, rs 考虑向上合并时

$$\mathrm{p}.s_4 = \min\left\{\begin{matrix} \mathrm{ls}.s_4 + \mathrm{rs}.s_4 - [\,\mathrm{ls.rval} = \mathrm{rs.lval}\,], \\ \mathrm{ls}.s_2 + \mathrm{rs}.s_4\,, \\ \mathrm{ls}.s_4 + \mathrm{rs}.s_3 \end{matrix}\right\}$$

#3031、等差数列

$$\mathrm{p}.s_2 = \min\begin{Bmatrix} \mathrm{ls}.s_4 + \mathrm{rs}.s_2 - [\,\mathrm{ls.rval} = \mathrm{rs.lval}\,], \\ \mathrm{ls}.s_4 + \mathrm{rs}.s_1\,, \\ \mathrm{ls}.s_2 + \mathrm{rs}.s_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{p}.s_3 = \min\begin{Bmatrix} \mathrm{ls}.s_3 + \mathrm{rs}.s_4 - [\,\mathrm{ls.rval} = \mathrm{rs.lval}\,], \\ \mathrm{ls}.s_1 + \mathrm{rs}.s_4\,, \\ \mathrm{ls}.s_3 + \mathrm{rs}.s_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{p}.s_1 = \min\begin{Bmatrix} \mathrm{ls}.s_3 + \mathrm{rs}.s_2 - [\,\mathrm{ls.rval} = \mathrm{rs.lval}\,], \\ \mathrm{ls}.s_3 + \mathrm{rs}.s_1\,, \\ \mathrm{ls}.s_1 + \mathrm{rs}.s_2 \end{Bmatrix}$$

查询时同样以上述规则合并结果

查询答案时仅需在线段树上查询 $d_{l+1} \sim d_r$ 的划分信息

时间复杂度 $O(Q\log n)$

LAB

实验舱

青少年编程

走近科学 走进名校

谢谢观看