提高算法班

排列数、组合数、二项式定理、全错排、圆排列

Mas

加法 & 乘法原理

加法原理

完成某个工程有 n 类方法，其中 a_i 代表第 i 类方法的方案数

完成工程不同的方案数为

$$S=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

乘法原理

完成某个工程可分为 n 个步骤，其中 a_i 表示第 i 个步骤的方案数

完成工程不同的方案数为

$$S=\prod_{i=1}^{n} a_i$$

排列数

从 n 个不同元素中任取 m 个元素按照**一定的顺序**排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列

从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数

n 取 m 的排列数 记作 A_n^m 或 P_n^m

排列数计算公式

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

全排列

从 n 个不同元素中取出 n 个元素的所有排列的个数

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1 = n!$$

全排列是排列数的一个特殊情况

组合数

从 n 个不同元素中任取 m 个元素组成一个集合,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合

从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数

n 选 m 的组合数记作 C_n^m

组合数也被称为 **二项式系数** ,常用 $\binom{n}{m}$ 表示

组合数计算

当 $m > n$ 时

$$A_n^m = C_n^m = 0$$

否则

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

组合数

组合数递推式

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}$$

组合意义证明

有 n 个鸡蛋其中恰好有一个鸡蛋为坏鸡蛋，取 m 的方案数为 $\binom{n}{m}$

- m 个都为好鸡蛋时方案数为 $\binom{n-1}{m}$
- m 个中存在坏鸡蛋时方案数为 $\binom{n-1}{m-1}$

  第一步取出坏鸡蛋

  第二步从 $n-1$ 个好鸡蛋中取出 $m-1$ 个鸡蛋

即

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}$$

上升/下降阶乘幂

定义 $n^{\underline{k}}$ 为 n 的 k 次 **下降次幂**

$$n^{\underline{k}} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \prod_{i=n-k+1}^{n} i$$

其中 $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

定义 $n^{\overline{k}}$ 为 n 的 k 次 **上升次幂**

$$n^{\overline{k}} = n \times (n+1) \times \cdots \times (n+k-1) = \prod_{i=n}^{n+k-1} i$$

其中 $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

下降阶乘幂

根据定义

$$n^{\underline{k}} = (-1)^k (n-k+1)^{\overline{k}}$$

$$n^{\overline{k}} = (-1)^k (1-k-n)^{\underline{k}}$$

排列数 定义为

$$A_n^m = n^{\underline{m}}$$

组合数 定义为

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \dfrac{n^{\underline{m}}}{m!}, & m \geq 0 \\ 0, & m < 0 \end{cases}$$

重新定义组合数后，组合数的上指标 n 可为任意实数

负数不存在阶乘定义故$m < 0$ 时 规定 $\binom{n}{m} = 0$； 特殊的仅当 $n \in \mathbb{N}$ 时有 $\binom{n}{n} = 1$

通常将 $\binom{n}{m}$ 中的 n 称为 组合数/二项式系数 的 **上指标**，$\binom{n}{m}$ 中的 m 称为 组合数/二项式系数 的 **下指标**

组合数性质

对称恒等式

若 $n, m \in \mathbb{N}$ 有

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

证明

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!\,\big(n-(n-m)\big)!} = \binom{n}{n-m}$$

吸收恒等式

若 $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^{+}$，有

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$$

证明

$$\binom{r}{k} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \frac{r}{k} \times \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$$

组合数性质

相伴恒等式

若 $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ 有

$$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}$$

证明

$$(r-k)\binom{r}{k} = (r-k)\binom{r}{r-k} = (r-k)\frac{r^{\underline{r-k}}}{(r-k)!} = r\frac{(r-1)^{\underline{r-k-1}}}{(r-k-1)!} = r\binom{r-1}{r-1-k} = r\binom{r-1}{k}$$

加法公式(帕斯卡恒等式)

若 $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$$

证明

$$\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} = \frac{(r-1)^{\underline{k}}}{k!} + \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} = \frac{(r-k)(r-1)^{\underline{k-1}}}{k!} + \frac{k(r-1)^{\underline{k-1}}}{k!} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \binom{r}{k}$$

组合数性质

平行恒等式

若 $n, m \in \mathbb{N}$ 有

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{n+m+1}{m}$$

证明

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+m}{m}$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m}$$

$$= \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+m}{m} = \cdots$$

根据 **加法恒等式** ，前两项可不断合并

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{n+m}{m-1} + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m}$$

组合数性质

上指标求和

根据 **对称恒等式** 有

$$\sum_{i=0}^{x}\binom{r+i}{i}=\sum_{i=0}^{x}\binom{r+i}{r}$$

$$=\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{r+x}{r}=\overbrace{\binom{0}{r}+\binom{1}{r}+\cdots+\binom{r-1}{r}}^{0}+\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{r+x}{r}$$

$$=\sum_{i=0}^{r+x}\binom{i}{r}$$

再根据 **平行恒等式、对称恒等式** 有

$$\sum_{i=0}^{x}\binom{r+i}{i}=\binom{r+x+1}{r+1}=\sum_{i=0}^{r+x}\binom{i}{r}$$

令 $n = r+x, m = r$ 有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

组合数性质

上式组合意义证明

有 $n+1$ 个物品编号 $0 \sim n$ 从中选取 $m+1$ 个物品，总方案为

$$\binom{n+1}{m+1}$$

当选取的最大编号为 i 时方案数为 $\binom{i}{m}$

- 第一步选出编号为 i 的物品
- 第二步从 $0 \sim i-1$ 中选出 m 个

考虑最大编号的所有情况,即

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

组合数性质

上式归纳证明

当 $n = 0$ 时显然成立

设 $n = k$ 时成立，即

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{i}{m} = \binom{k+1}{m+1}$$

考虑 $n = k + 1$

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{i}{m} = \binom{k+1}{m} + \sum_{i=0}^{k} \binom{i}{m} = \binom{k+1}{m} + \binom{k+1}{m+1} = \binom{k+2}{m+1}$$

命题得证

组合数 & 等差数列

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

证明

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2}$$

根据 **上指标求和** 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2} = \sum_{i=0}^{n}\binom{i+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

组合数 & 等差数列

记

$$S_i(n) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} j, & i = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} S_{i-1}(j), & i > 1 \end{cases}$$

上页结论即为 $S_2(n) = \binom{n+2}{3}$

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{i+2}{3} = \binom{n+3}{4}$$

不难归纳证明

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} S_{k-1}(i) = \binom{n+k}{k+1}$$

组合数 & 平方和

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$$

证明

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i \times (i-1)}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \times (n+1)}{2} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{2}$$

根据 **上指标求和** 有

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \times (n+1)}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

$$= \frac{n \times (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \times n \times (n+1)}{3}$$

$$= \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$$

组合数 & 立方和

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} (i^2 \times (i+1) - i^2) = \sum_{i=1}^{n} (i \times i \times (i+1) - i^2) = \sum_{i=1}^{n} ((i-1) \times i \times (i+1) + i \times (i+1) - i^2)$$

$$= 6\sum_{i=1}^{n} \binom{i+1}{3} + 2\sum_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2} - \sum_{i=1}^{n} i^2$$

根据 **上指标求和** 有

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 6\binom{n+2}{4} + 2\binom{n+2}{3} - \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n-1) \times n \times (n+1) \times (n+2)}{4} + \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{3} - \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n^2 (n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

自然数的幂次和是否存在某些性质?

组合数性质

上指标翻转

若 $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ 有

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$$

证明

$$\binom{r}{k} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = (-1)^k \frac{(k-r-1) \times (k-r-2) \times \cdots \times (1-r) \times (-r)}{k!} = (-1)^k \frac{(k-r-1)^{\underline{k}}}{k!} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$$

三项式系数恒等式

若 $r \in \mathbb{R}, m, k \in \mathbb{N}$ 有

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r-k}{m-k}\binom{r}{k}$$

证明

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \frac{r!\,m!}{m!\,(r-m)!\,k!\,(m-k)!} = \frac{r!}{(r-m)!\,k!\,(m-k)!} = \frac{(r-k)!\,r!}{(r-m)!\,(m-k)!\,(r-k)!\,k!} = \binom{r-k}{m-k}\binom{r}{k}$$

#786、组合数的函数

题目描述

定义函数 $S(n,m)$ 其中 $n,m \in \mathbb{N}^+$

$$S(n,m)=\sum_{i=0}^{n} C_i^m$$

> 其中 C_i^j 为 i 选 j 的组合数

输入格式

第一行输入一个整数 T ,表示 T 组询问

每组询问输出一行两个整数 n,m

输出格式

每组询问输出一行表示 $S(n,m)$ 的结果

结果可能很大输出 $\bmod 1000000007$ 后的结果

数据范围

对于 10% 数据 $1 \le T \le 100, 0 \le m \le 1000, \max(1,m) \le n \le 1000$

对于 20% 数据 $1 \le T \le 1000, 0 \le m \le 10^4, \max(1,m) \le n \le 10^4$

对于全部数据 $1 \le T \le 10^5, 0 \le m \le 2\times 10^5, \max(1,m) \le n \le 2\times 10^5$

插板法

求$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$的正整数解个数

问题等价于

有 n 个球，在 n 个球中插入 $k-1$ 个挡板,将球分成 k 组，第 i 组的大小对应于 x_i

方案数为

$$\binom{n-1}{k-1}$$

求$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$的非负整数解个数

每组预付一个球，分组完后再移除，问题等价于

有 $n+k$ 个球，在 $n+k$ 个球中插入 $k-1$ 个挡板，将球分成 k 组，第 i 组的大小对应于 x_i+1

方案数为

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

插板法

给定非负整数$a_1, a_2, \cdots, a_k$,求$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的非负整数解个数,要求满足 $x_1 \geq a_1, x_2 \geq a_2, \cdots, x_k \geq a_k$

给每组先减去 a_i，当作没有限制的求非负整数解个数问题，最后每组加上对应的 a_i

方案数为

$$\binom{n + k - 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i}{k - 1}$$

求1 $\sim n$ 这 n 个自然数中选 k 个,这 k 个数中任何两个数都不相邻的组合个数

设选的数为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$，令 $x_1 = m_1, x_2 = m_2 - m_1, \cdots, x_k = m_k - m_{k-1}, x_{k+1} = n - m_k$

问题等价于

求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n$ 的非负整数解个数，要求 $x_1 \geq 1, x_2, x_3, \cdots x_k \geq 2$ 且 $x_{k+1} \geq 0$

方案数为

$$\binom{n - k + 1}{k}$$

#2468、解方程

题目描述

给定 n 和 k

请求出方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

的非负整数解个数

答案对 998244353 取模

输入格式

一行两个整数 n 和 k

输出格式

一行表示答案

数据范围

对于 30% 的数据, $1 \leq n, k \leq 20$

对于 50% 的数据, $1 \leq n, k \leq 10^3$

对于 100% 的数据, $1 \leq n, k \leq 10^6$

组合数 & 斐波那契数列

规定每次只能往上走 1 或 2 级台阶,登上 n 级台阶共有多少种走法

记 F_n 为斐波那契数列第 n 项， a_n 为登上 n 级台阶的方案数

不难看出 $a_n = F_{n+1}$

- 有 0 步走 2 级台阶,剩余 n 步走 1 级, 方案数为 $\binom{n}{0}$
- 有 1 步走 2 级台阶,剩余 $n-2$ 步走 1 级, 方案数为 $\binom{n-1}{1}$ （ $n-2$ 步中插入一步走 2 级/共 $n-1$ 步选出 1 步走 2 级)
- 有 2 步走 2 级台阶,剩余 $n-4$ 步走 1 级, 方案数为 $\binom{n-2}{2}$
- 有 3 步走 2 级台阶,剩余 $n-6$ 步走 1 级, 方案数为 $\binom{n-3}{3}$

……

通过数学归纳法不难得出如下结论

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$$

二项式定理

二项式定理阐明了一个展开式的系数：

若 $n \in \mathbb{N}^+$ 有

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

证明

当 $n = 1$ 时

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b$$

定理成立

假设当 $n = m$ 时命题成立

二项式定理

考虑 $n = m + 1$ 时

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)\sum_{\mathrm{i}=0}^{m}\binom{m}{i}a^{m-i}b^{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a^{m-i+1}b^{i} + \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a^{m-i}b^{i+1}$$

$$= \binom{m}{0}\mathrm{a}^{m+1} + \binom{m}{m}b^{m+1} + \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}a^{m-i+1}b^{i} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}a^{m-i}b^{i+1}$$

$$= \mathrm{a}^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}a^{m-i+1}b^{i} + \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i-1}a^{m-i+1}b^{i}$$

$$= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{i=1}^{m}\left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1}\right)a^{m-i+1}b^{i} = \sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}a^{m+1-i}b^{i}$$

综上

$n \in \mathbb{N}^{+}$ 时二项式定理成立

二项式定理 & 组合数

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

性质1

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

令 $a=1,b=1$ 二项式展开即为上式

性质2

$$\sum_{i=0}^{n}\left((-1)^i\times\binom{n}{i}\right)=[n=0]$$

令 $a=1,b=-1$ 二项式展开即为上式

性质3

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}=n2^{n-1}$$

组合数 & 二项式定理

证明

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = \binom{n}{1} + 2\times\binom{n}{2} + \cdots + n\times\binom{n}{n} = \binom{n}{n-1} + 2\times\binom{n}{n-2} + \cdots + n\times\binom{n}{0}$$

根据 **相伴恒等式** 有

$$= n\binom{n-1}{n-1} + n\binom{n-1}{n-2} + n\binom{n-1}{n-3} + \cdots + n\binom{n-1}{0}$$

$$= n\times\left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right) = n2^{n-1}$$

尝试证明

$$\sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$$

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校 LAB

性质4 (范德蒙德卷积)

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

根据二项式定理

$$(1+x)^n(1+x)^m=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right)$$

令 $k=i+n-k$ 有

$$(1+x)^n(1+x)^m=\sum_{k=0}^{n+m}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}x^k$$

由于

$$(1+x)^{n+\mathrm{m}}=\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k$$

对比指数和系数，所以有

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

组合数 & 二项式定理

组合意义证明

从 n 个男生和 m 个女生中选出 k 人方案数为 $\binom{n+m}{k}$, 所有情况如下

选出 0 个男生 k 个女生 , 方案数为 $\binom{n}{0}\binom{m}{k}$

选出 1 个男生 $k-1$ 个女生 , 方案数为 $\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}$

……

选出 $k-1$ 个男生 1 个女生 , 方案数为 $\binom{n}{k-1}\binom{m}{1}$

选出 k 个男生 0 个女生 , 方案数为 $\binom{n}{k}\binom{m}{0}$

相加即为 $\binom{n+m}{k}$

特殊的 , 当 $k = n = m$ 时有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

二项式定理 & 费马小定理

若 p 为素数且 $(a,p)=1$ 有 $a^p \equiv a \pmod p$

证明

当 $a=1$ 时，$1^p \equiv 1 \pmod p$

假设 $a^p \equiv a \pmod p$ 成立，考虑 $(a+1)^p$

二项式展开

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a^{p-i}$$

由于

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!\,(p-i)!}$$

当 $1 \le i \le p-1$ 时，$p \perp i!$ 且 $p \perp (p-i)!$

所以当 $1 \le i \le p-1$ 时

二项式定理 & 费马小定理

$$p \mid \binom{p}{i}$$

即

$$\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod{p}$$

可得

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p}$$

根据假设 $a^p \equiv a \pmod{p}$

即

$$(a+1)^p \equiv a + 1 \pmod{p}$$

命题得证

#2126、计算系数

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

题目描述

给定一个多项式

$$(by+ax)^k$$

请求出多项式展开后 $x^n y^m$ 项的系数

输入格式

共一行,包含 5 个整数,分别为 a,b,k,n,m
每两个整数之间用一个空格隔开

输出格式

共 1 行,包含一个整数,表示所求的系数
这个系数可能很大,输出对 10007 取模后的结果

数据范围

对于 30% 的数据,有 $0 \le k \le 10$

对于 50% 的数据,有 $a=1,b=1$

对于 100% 的数据,有 $0 \le k \le 1000, 0 \le n,m \le k$,且 $n+m=k, 0 \le a,b \le 1000000$

多重集的排列

多重集是指包含重复元素的广义集合

设 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1,n_2 个 a_2,⋯,n_k 个 a_k 组成的多重集, S 的全排列个数为

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!}$$

可认为有 k 种不一样的球,每种球个数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 且 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$

n 个球的全排列数就是 **多重集的排列数** ，多重集的排列数常被称作 **多重组合数**

可以用多重组合数的符号表示上式

$$\binom{n}{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k}=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(n_i!)}$$

#789、X-factor Chain

题目描述

输入正整数 x

求 x 的大于 1 的因子组成的满足任意前一项都能整除后一项的序列的最大长度

以及满足最大长度的序列的个数。

输入格式

多组数据

每组数据一行,包含一个正整数 x

输出格式

对于每组数据,输出序列的最大长度以及满足最大长度的序列的个数

数据范围与提示

对于全部数据, $1 \le x \le 2^{20}$,不超过 5×10^4 组询问

根据唯一分解定理

$$x = \prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$$

考虑数列首项为 x 的任意一个质因子

若每一项乘上一个剩余的质因子必然满足条件

最大长度为 $\sum_{i=1}^{n} c_i$

方案数为(多重集的排列数)

$$\frac{(\sum_{i=1}^{k} c_i)!}{\prod_{i=1}^{k}(c_i!)}$$

预处理出 $1 \sim 2^{20}$ 范围内所有数的最小质因子

每组询问时间复杂度 $O(\log x)$

圆排列

n 个人围成一圈，所有的排列数记为 Q_n^n

考虑其中已经排好的一圈，从不同位置断开又变成不同的队列

所以有

$$Q_n^n \times n = A_n^n$$

$$\Longrightarrow Q_n^n = \frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$$

由此可知部分圆排列的公式

$$Q_n^r = \frac{A_n^r}{r} = \frac{n!}{r \times (n-r)!}$$

#2762、圆舞曲

题目描述

有一天, n 人(n 是偶数)在广场上相遇,跳了两支圆舞曲,每支圆舞曲正好由 $\frac{n}{2}$ 人组成

圆舞是由 1 人或更多的人组成的舞蹈圈

如果两个圆舞可以通过选择第一个参与者转化为另一个圆舞,则两个圆舞是无法区分(相等)的

例如圆舞 $[1,3,4,2]$, $[4,2,1,3]$ 和 $[2,1,3,4]$ 是不可区分的

如果 $n=2$,那么方式的数量是 1 : 一个圆舞曲由第一个人组成,第二个人的圆舞曲由第二个人组成

如果 $n=4$,那么方案数是 3

可能的方案:

- 一个圆舞曲 $[1,2]$,另一个 $[3,4]$
- 一支圆舞 $[2,4]$,另一支 $[3,1]$
- 一个圆舞 $[4,1]$,另一个 $[3,2]$

你的任务是：如果每个圆舞曲正好由 $\frac{n}{2}$ 人组成,找出 n 人可以跳两支圆舞曲的方案数量。

输入格式

包含一个整数 n

输出格式

输出一个整数表示方案数

数据规模

对于全部的数据 $2 \le n \le 20, 2 \mid n$

分为选人、排列两个步骤

从 n 个人中选出 $\frac{n}{2}$ 个方案数为 $C_n^{\frac{n}{2}}$

两个队伍存在镜像关系，所以选人方案数为 $\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2}$

对于一个长度为 $\frac{n}{2}$ 的圆排列数为 $Q_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{n}{2}-1\right)!$

所以答案为

$$\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2}\times\left(\frac{n}{2}-1\right)!\times\left(\frac{n}{2}-1\right)!$$

错位排列

n 封不同的信,编号$1\sim n$,将 n 封信放在编号 $1\sim n$ 的信封中,要求信封的编号与信的编号不一样,求方案数

令 D_n 表示长度为 n 的全错排方案数

考虑到第 n 个信封,暂把第 n 封信放在第n个信封中,考虑两种情况的递推:

- 前 $n-1$ 个信封全部装错

  因前 $n-1$ 个已全部装错,所以第 n 封只需要与前面任一位置交换,有 $\mathrm{D}_{n-1}\times(n-1)$种情况

- 前 $n-1$ 个信封有一个没有装错其余全部装错

  若前 $n-1$ 个信封中有一个没装错,把没装错的与 n 交换, 有 $D_{n-2}\times(n-1)$种情况

其他情况下无法通过一次操作将其变为长度为 n 的全错排

综上

$$D_n=\begin{cases} 0, & n=1 \\ 1, & n=2 \\ (n-1)\times(D_{n-1}+D_{n-2}), & n>2 \end{cases}$$

#2125、集体婚礼

题目描述

国庆期间, S 市刚刚举行了一场盛大的集体婚礼

为了使婚礼进行的丰富一些,司仪临时想出了有一个有意思的节目,叫做**考新郎**,具体的操作是这样的:

- 首先,给每位新娘打扮得几乎一模一样,并盖上大大的红盖头随机坐成一排
- 然后,让各位新郎寻找自己的新娘.每人只准找一个,并且不允许多人找一个.
- 最后,揭开盖头,如果找错了对象就要当众跪搓衣板...

看来做新郎也不是容易的事情...

假设一共有 N 对新婚夫妇,其中有 M 个新郎找错了新娘,求发生这种情况一共有多少种可能

输入格式

输入数据的第一行是一个整数 T ,表示测试实例的个数

然后是 T 行数据,每行包含两个整数 N 和 M

输出格式

对于每个测试实例,请输出一共有多少种发生这种情况的可能数量

每个实例的输出占一行

数据规模

对于全部的数据 $1 < M \le N \le 20$

考虑从 n 个新娘中选出 m 个

令这 m 个新郎全部选错

答案为

$$\binom{n}{m} \times D_m$$

康托展开

康托展开用于求 “一个 $1 \sim n$ 的任意排列的排名”

设有 $1 \sim n$ 的排列 p , 对任意字典序比 p 小的$1 \sim n$ 的排列 p'

一定存在下标 x $(1 \le x < n)$, 对于 $i < x$ 满足

$$p'_i = p_i \ \wedge \ p'_x < p_x$$

x 之后元素随意

考虑一个排列的第 i 位

若 $i + 1 \sim n$ 中存在元素小于 p_i , 将其与 p_i 交换那么将得到更小的排列

记 cnt_i 为 $i + 1 \sim n$ 中小于 p_i 的元素个数， 不难得出排名为

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{cnt}_i \times (n - i)!$$

可用 树状数组/线段树/平衡树/归并排序 维护逆序对 , 时间复杂度 $O(n \log n)$

逆康托展开

逆康托展开用于求 “给定一个 $1 \sim n$ 的排名，还原具体排列”

排列的排名和排列是一一对应（满足双射关系）

$$n! = (n-1)! + (n-1)! \times (n-1)$$

$$= (n-2)! + (n-2)! \times (n-2) + (n-1)! \times (n-1)$$

$$\vdots$$

$$= 1 + 2 \times 2! + \cdots + (n-2)! \times (n-2) + (n-1)! \times (n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} \big((n-i) \times (n-i)!\big)$$

那么

$$\sum_{i=j}^{n-1} (\mathrm{cnt}_i \times (n-i)!) \le \sum_{i=j}^{n-1} \big((n-i) \times (n-i)!\big) = (n-j+1)!$$

即 $j \sim n-1$ 位贡献之和不超过 $(n-j+1)!$

逆康托展开

所以取出 cnt_1 可直接除以 $(n-1)!$ 向下取整，而 $2\sim n$ 位的贡献可直接 $\bmod (n-1)!$

后续的 cnt_i 可类似得出

对于一个排名 rnk

首先令 $\text{rnk} \leftarrow \text{rnk} - 1$

考虑首位，有 $\left\lfloor\frac{\text{rnk}}{(n-1)!}\right\rfloor$ 个元素比首位小，首位为第 $\left\lfloor\frac{\text{rnk}}{(n-1)!}\right\rfloor + 1$ 小元素，再令 $\text{rnk} \leftarrow \text{rnk} \bmod (n-1)!$

考虑次位，有 $\left\lfloor\frac{\text{rnk}}{(n-2)!}\right\rfloor$ 个元素比次位小，次位为**剩余**第 $\left\lfloor\frac{\text{rnk}}{(n-2)!}\right\rfloor + 1$ 小元素，再令 $\text{rnk} \leftarrow \text{rnk} \bmod (n-2)!$

考虑第三位，有 $\left\lfloor\frac{\text{rnk}}{(n-3)!}\right\rfloor$ 个元素比第三位小，第三位为**剩余**第 $\left\lfloor\frac{\text{rnk}}{(n-3)!}\right\rfloor + 1$ 小元素，再令 $\text{rnk} \leftarrow \text{rnk} \bmod (n-3)!$

……

可用 树状数组/线段树/平衡树 维护第 K 小元素，时间复杂度 $O(n\log n)$

#2498、Cantor Expansion

题目描述

求 $1 \sim N$ 的一个给定全排列在所有 $1 \sim N$ 全排列中的排名

结果对 998244353 取模

输入格式

第一行一个正整数 N

第二行 N 个正整数,表示 $1 \sim N$ 的一种全排列

输出格式

一行一个非负整数,表示答案对 998244353 取模的值

说明/提示

对于 10% 数据, $1 \leq N \leq 10$

对于 50% 数据, $1 \leq N \leq 5000$

对于 100% 数据, $1 \leq N \leq 200000$

LAB
实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

谢谢观看