组合与线代

排列、组合、向量与矩阵等

郑欣

2024 年 7 月 30 日

1 组合数学

- 组合数
- Twelvefold Way
- 容斥与反演
- 鸽巢原理

2 线性代数

组合数

$\binom{m}{n}$ 表示 m 个物品选出 n 个的方案数，也可以记作 C_m^n：

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n(n-1)\dots 1}$$

特别地，当 $n < 0$ 或 $n > m$ 时，$\binom{m}{n} = 0$。

$\binom{m}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ $(\sum_i n_i = m)$ 表示将 m 个物品分为 k 组，第 i 组恰有 n_i 个物品的方案数：

$$\binom{m}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{m!}{n_1!\, n_2! \, \dots \, n_k!}$$

特别地，$\binom{m}{n} = \binom{m}{n, m-n}$。

一些结论

- 当 $m \geq 0$，$n = m$ 或 $n = 0 \Leftrightarrow \binom{m}{n} = 1$；
- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$；
- $\binom{m}{n} = \binom{m}{n-1} + \binom{m-1}{n-1}$（杨辉三角，Luogu P2822）；
- $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$（二项式定理，Luogu P1313）；
- $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$；
- $\sum_{i=n}^{m} \binom{i}{n} = \binom{m+1}{n+1}$；

例题 1

小练习

证明：$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$。

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\binom{2n}{n}.$$

例题 2

小练习

证明：$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$。

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$$

$$2^n + 0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1 + (-1)^i) = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i}$$

Twelvefold Way

Twelvefold Way（Luogu P5824）：n 个球放进 m 个桶，球和桶可能有标号也可能无标号（不可区分），每个桶中球的数量可能有限制也可能限制至多或至少一个，每个球必须放进一个桶。求所有情况下的方案数。

数量限制	没有限制	至多一个	至少一个
球有标号，桶有标号	m^n	$m^{\underline{n}}$	$m!\left\{ {n \atop m} \right\}$
球无标号，桶有标号	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
球有标号，桶无标号	$\sum_{k=1}^{m} \left\{ {n \atop k} \right\}$	$[n \leq m]$	$\left\{ {n \atop m} \right\}$
球无标号，桶无标号	$p_m(n+m)$	$[n \leq m]$	$p_m(n)$

基础计数

Q1：n 个不同的球放进 m 个不同的桶，求方案数。

A1：m^n

Q2：从 m 个桶中选出 n 个放球，桶有顺序。

A2：$\binom{m}{n}n! = m^{\underline{n}}$（$m$ 的 n 次下降幂）

Q5：从 m 个桶中选出 n 个放球，桶没顺序。

A5：$\binom{m}{n}$

Q8, Q11：n 个球放进 m 个相同的桶，每个桶至多一个球。

A8, A11：$[m \geq n]$（只要桶不少于球就可以装完所有球）。

隔板法

Q6：n 个相同的球放进 m 个不同的桶，桶不能为空。

相当于把 n 个球排成一行切成 m 段，第 i 段表示第 i 个桶。

隔板法：n 个球有 $n-1$ 个空，用 $m-1$ 个板子插空分成 m 段。方案数 $\binom{n-1}{m-1}$。

Q4：n 个相同的球放进 m 个不同的桶，桶可以为空。

就是说两个板子可以插到同一个空中。

相当于再新加入 m 个球，每段至少一个球。方案数 $\binom{n+m-1}{m-1}$。

Q12：n 个相同的球放进 m 个相同的桶，桶不能为空。

只关心每个桶中球的数量，且不关心桶的顺序。不妨假设每个桶球的数量不增。

整数划分：将 n 拆成 m 个不增的数相加的方案数。用 $p_m(n)$ 表示。

- 边界：$p_0(0) = 1$。
- 转移：$p_m(n) = p_{m-1}(n-1) + p_m(n-m)$。即在 $n-1$ 拆成 $m-1$ 个数的方案后加入 1，或者在原方案的基础上对每个数 $+1$。

直接转移 $O(n^2)$，用生成函数可以优化到 $O(n\log n)$。

Q10：n 个相同的球放进 m 个相同的桶，桶可以为空。

相当于再新加入 m 个球，每个桶至少一个球。方案数 $p_m(n+m)$。

Q9：n 个不同的球放进 m 个相同的桶，桶不能为空。

相当于将 n 个元素划分成 m 个等价类的方案。

称这样的方案数为第二类斯特林数，用 ${n \brace m}$ 表示。

- ${0 \brace 0} = 1$。当 $n \geq 1$，${n \brace 0} = 0$，${n \brace 1} = {n \brace n} = 1$；
- ${n \brace m} = m{n-1 \brace m} + {n-1 \brace m-1}$：将第 n 个元素单独作为一个等价类；或在现有的 m 个等价类中选一个加入，有 m 种可能。

Q3：n 个不同的球放进 m 个不同的桶，桶不能为空。

将 n 个球划分成 m 个等价类。

对于每种划分方法，将同一个等价类放入同一个桶。等价类和桶对应的方法有 $m!$ 种。

等价类一共 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ 种划分方法，所以总方案数 $m!\left\{ {n \atop m} \right\}$。

Q7：n 个不同的球放进 m 个相同的桶，桶可以为空。

桶为空就是说少一种等价类。

枚举等价类数量 k $(1 \leq k \leq m)$，方案数一共 $\sum_{k=1}^{m} \left\{ {n \atop k} \right\}$。

Q3：n 个不同的球放进 m 个不同的桶，桶不能为空。

我们不好求某些桶中存在空桶的方案数，但很容易求出某些桶必须同时为空的方案：

按 $1, 2, \ldots, m$ 给桶编号。假设空桶的编号集合为 S，则使得 S 内所有桶为空（但不一定所有空桶都在 S 内）的方案一共 $(m - |S|)^n$ 种。

容斥原理

对于 n 个集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathcal{U}$，有

$$\left|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

其中 A_I 表示所有 A_i $(i \in I)$ 的交集，即 $A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$，且 $A_\varnothing = \mathcal{U}$。

适用于一些求并集（至少满足某个条件）困难但是交集（同时满足某些条件）很好求的问题。

- $\left|\overline{A_1}\right| = |\mathcal{U}| - |A_1|$;
- $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right| = |\mathcal{U}| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$;
- $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = |\mathcal{U}| - |A_1| - |A_2| - |A_3|$
  $+|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$;
- $\ldots$

例题 3

错排问题

求满足 $\pi_i \neq i$ 的长为 n 的排列 π 的数量。

存在性：存在使得 $\pi_i = i$ 的 i $\quad\Rightarrow\quad$ 任意性：对于每个 $i \in S$ 都有 $\pi_i = i$。

例题 4

错排问题

给一个包含 n 种元素的可重集，第 i 个元素出现 a_i 次。求取出 k 个元素的方案数。

如果不考虑元素个数的限制，那么方案数就是 $\binom{n+k-1}{n-1}$。但如果有上限，就会有些方案是不合法的。

存在性：存在不合法（第 i 个元素取了 $> a_i$ 个）的 i $\quad\Rightarrow\quad$ 任意性：每个 $i \in S$ 都不合法。

例题 5

JSOI2011 分特产

m 种物品，第 i 种物品有 a_i 个。要求将物品分给 n 个人，且每个人至少分到一个物品。求方案数。

范围：$n, m, a_i \leq 1000$

首先假设没有“至少分到一个”的条件。第 i 种物品有 $\binom{a_i+n-1}{n-1}$ 种分法。由于每种物品相互独立，一共有 $\prod_i \binom{a_i+n-1}{n-1}$ 种方案。

存在性：有一个人分不到 $\quad \Rightarrow \quad$ 任意性：每个 S 内的人都分不到。

例题 5

JSOI2011 分特产

m 种物品，第 i 种物品有 a_i 个。要求将物品分给 n 个人，且每个人至少分到一个物品。求方案数。

范围：$n, m, a_i \le 1000$

首先假设没有“至少分到一个”的条件。第 i 种物品有 $\binom{a_i+n-1}{n-1}$ 种分法。由于每种物品相互独立，一共有 $\prod_i \binom{a_i+n-1}{n-1}$ 种方案。

存在性：有一个人分不到 $\Rightarrow$ 任意性：每个 S 内的人都分不到。

再考虑容斥。如果固定 $(n-k)$ 个人分不到，则有 $\prod_i (n-k)^{a_i}$ 种方案。于是答案为

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \prod_{i=1}^{m} \binom{a_i+k-1}{k-1}$$

预处理组合数然后可以 $O(nm)$ 算出答案。

反演

反演：已知 f 关于 g 的表达式，求 g 关于 f 的表达式。

例子：

- 前缀和：$f(n) = \sum_{i \le n} g(i)$；
- 差分：$g(n) = f(n) - f_{n-1}$。

容斥中有时候每个子集是等价的。

$f(n)$：至多选 n 个的方案数；　$g(n)$：恰好选 n 个的方案数。

$f(n) = \sum_{i\le n} \binom{n}{i} g(i) \quad \Rightarrow \quad g(n) = \sum_{i\le n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} f(i)$。

错排问题：

- $g(n)$：所有 i 都满足 $\pi_i \neq i$；　$f(n)$：至多 n 个 i 满足 $\pi_i \neq i$。
- $f(n) = n!$（任意一种排列都至多只有 n 个 $\pi_i \neq i$）。

莫比乌斯反演

- $f(n)$：n 的因子的答案之和；　$g(n)$：n 的答案。

  $f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \Rightarrow \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d)$。
- $f(n)$：n 的倍数的答案之和；　$g(n)$：n 的答案。

  $f(n) = \sum_{n|d} g(d) \quad \Rightarrow \quad g(n) = \sum_{n|d} \mu(d/n) f(d)$。

比如题目限制 $\gcd(i,j) = k$，那么就可以转化为求 $k \mid \gcd(i,j)$ 的答案，即 $k \mid i$ 且 $k \mid j$。

莫比乌斯函数：

- 积性函数：$\mu(1) = 1$，$\mu(p) = -1$，$\mu(p^e) = 0\ (e \geq 2)$。
- $\sum_{d|n} \mu(d) = [n = 1]$。

高维前缀和

$f(S)$：S 的子集的答案之和； $g(S)$：S 的答案。

$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T) \quad \Rightarrow \quad g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T)$。

二维前缀和：

- $S(x, y) = \sum_{i \le x} \sum_{j \le y} a(i, j)$；
- $a(x, y) = S(x, y) - S(x-1, y) - S(x, y-1) + S(x-1, y-1)$。

Q8, Q11：n 个球放进 m 个相同的桶，每个桶至多一个球。

鸽巢原理

$n+1$ 个球放进 n 个桶，存在一个桶有 ≥ 2 个球。

推广：$kn+1$ 个球放进 n 个桶，存在一个桶有 $\geq k+1$ 个球。

例题 6

例题

证明：任意一个大小为 10 的集合 $S \subseteq \{1, \ldots, 100\}$ 存在两个不相交的非空子集 $A, B \subseteq S$，满足 A 和 B 的所有元素之和相等。

S 一共有 1023 个非空子集，但最多只有 1000 种不同取值。

所以存在和相等的两个子集 $A' \neq B'$。

令 $A = A' \setminus B'$，$B = B' \setminus A'$ 即可。

例题

给一个长为 n 的序列 a，找到一个子序列，使得所有元素之和 $\bmod n = 0$。

范围：$n \le 10^6$

Hint：子序列 $\Rightarrow$ 区间

考虑 a 的前缀和 A。

$A_0, A_1, \ldots, A_n \bmod n$ 只有 n 种不同取值 $(0, \ldots, n-1)$，所以存在 $\ell < r$ 使得 $A_\ell \equiv A_r \pmod{n}$。

所以区间 $[\ell+1, r]$ 满足和为 $(A_r - A_\ell) \bmod n = 0$。

CF 618F　Double Knapsack

给两个个长为 n 的序列 a,b，每个元素都在 $[1,n]$ 区间内。分别在 a 和 b 种找到一个子序列，使得两个子序列元素之和相等。

范围：$n \le 10^6$

还是先把解限制为区间。记 a,b 的前缀和分别为 A,B，不妨设 $A_n \le B_n$。

对于每个 A_i，找到一个 $\ge A_i$ 的最小的 B_j。

由于 B 中每个元素不超过 n，$B_j \le A_i + n - 1$，因此 $B_j - A_i$ 只有 $0 \sim n-1$ 这 n 种取值。

一共有 $n+1$ 个 A_i，每个 A_i 对应一个 B_j，所以一定存在 $A_i, A_{i'}$ $(i < i')$，以及对应的 $B_j, B_{j'}$，使得 $B_j - A_i = B_{j'} - A_{i'}$，即 $A_{i'} - A_i = B_{j'} - B_j$。

选取区间 $a_{i+1} \sim a_{i'}$ 与 $b_{j+1} \sim b_{j'}$ 即可。

1 组合数学

2 线性代数

- 向量与矩阵
- 矩阵快速幂
- 高斯消元

向量

一个长为 n 的数组，一般用粗体的小写字母表示。

行向量：

$$\boldsymbol{x}^\top = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

列向量：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

向量

向量运算：

- 加法：$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$
- 数乘：$k\boldsymbol{x}$
- 点乘：$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y}$

性质：

- $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x}$

矩阵

一个 n 行 m 列的二维数组，一般用粗体的大写字母表示。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n2} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

可以拆成 n 个 m 维行向量，或 m 个 n 维列向量。

当 $n = m$ 时，称这个矩阵为方阵，n 为矩阵的阶数。

特别地，行向量是 $1 \times n$ 的矩阵，列向量是 $n \times 1$ 的矩阵。

矩阵

矩阵运算:

- 加法: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$
- 数乘: $k\boldsymbol{A}$
- 向量乘: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$
- 矩阵乘: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$
- 转置: $\boldsymbol{A}^\top$

性质:

- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$
- 通常 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$

矩阵

单位矩阵：只有主对角线为 1，其它位置都是 0。一般用 $\boldsymbol{I}$ 表示。

性质：

- $\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
- $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$

零矩阵：所有元素都是 0 的矩阵。一般用 $\mathbf{0}$ 表示。

对称矩阵：满足 $\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}$ 的矩阵。$A_{ij} = A_{ji}$。

矩阵快速幂

斐波那契数列

已知 $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n \geq 2)$，求 $f_n \bmod p$。

范围：$n \leq 10^{18}$

无法从 f_{n-1} 递推到 f_n，但可以从 (f_{n-1}, f_{n-2}) 递推到 (f_n, f_{n-1})：

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{f}_n = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{A} \ldots (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_1))$。

矩阵快速幂

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_5 &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_1))) \\
&= ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}))f_1
\end{aligned}
$$

类似快速幂计算出 $\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, \ldots, \boldsymbol{A}^{2^k}$，按二进制位乘起来得到 $\boldsymbol{A}^{n-1}$，然后计算 $\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{f}_1$。

广义快速幂：只要有结合性就能快速幂（比如 Floyd）。

矩阵快速幂

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$:

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n$:

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \\ n-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例题 1

路径计数

一个无向图，求任意两点之间恰好经过 k 条边的路径数。

范围：$n \leq 300, k \leq 10^{18}$

用 $\boldsymbol{A}$ 表示邻接矩阵，则 A_{ij} 表示 i 到 j 恰好经过 1 条边的路径数。

$(\boldsymbol{A}^2)_{ij} = A_{ik}A_{kj}$，因此 $(\boldsymbol{A}^2)_{ij}$ 表示 i 到 j 恰好经过 2 条边的路径数。

类似地，$\boldsymbol{A}^k$ 表示恰好经过 k 条边。矩阵快速幂求 $\boldsymbol{A}^k$ 即可。

例题 2

Luogu P5059　中国象棋

一个 $n \times n$ 的棋盘，在棋盘上放棋子。求每行至少两个棋子，且每个棋子左右没有棋子的方案数。

范围：$n \leq 10^{18}$

显然每行独立，可以直接乘起来。

固定某行，用 $f_{i,j,0/1}$ 表示第 i 列，前面放了至少 j $(j \leq 2)$ 个棋子，且第 i 列是否放了棋子的方案数。

则我们有一个 f_{i-1} 到 f_i 的转移，且可以表示成 6×6 的矩阵。快速幂即可。

解方程

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & (1) \\ 2x + y - 4z = -1 & (2) \\ 3x - 2y + 4z = 8 & (3) \end{cases}$$

- $(2) - 2 \cdot (1):\ 3y - 6z = -3 \ \Rightarrow\ y - 2z = -1 \qquad (2')$
- $(3) - 3 \cdot (1):\ y + z = 5 \qquad (3')$
- $(1) - (-1) \cdot (2'):\ x - z = 0 \qquad (1')$
- $(3') - (2'):\ 3z = 6 \ \Rightarrow\ z = 2 \qquad (3'')$
- $(1') - (-1) \cdot (3''):\ x = 2 \qquad (1'')$
- $(2') - (-2) \cdot (3''):\ y = 3 \qquad (2'')$

解方程

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = -1 \\ 3x - 2y + 4z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- 每个方程就是从矩阵中抽一个行向量出来点乘变量。
- 两个方程的加减就是对行向量的加减。
- 可以写成 $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ 的形式（$\mathbf{0}$ 表示全为 0 的向量）。

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 4z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + 4z - 8 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3y - 6z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 4z - 8 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3y - 6z + 3 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

解方程

$$\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ y-2z+1=0 \\ y+z-5=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y-2z+1=0 \\ y+z-5=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y-2z+1=0 \\ 3z-6=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

解方程

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

无解或多解

不是所有方程都有唯一解。

无解：

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x+z-4=0 \\ y-z+2=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

无解或多解

无穷多解：

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x+4y-6=0 \\ 3x+6y-9=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x+z-4=0 \\ y-z+1=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

一个方程能由另外一些方程线性组合得到。

高斯消元

高斯消元：选择一个方程中的某个变量，将其它方程中的这个变量消掉。

对于 n 行 m 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$：

- 从 1 到 n 枚举 i。对于每个 i，找一个最小的 j，使得存在 $i' \geq i$，$A_{i'j} \neq 0$。
- 如果找到了 j，将第 i' 行与第 i 行交换，这样就可以保证 $A_{ij} \neq 0$。然后用第 i 行对其它行消元：
$$\boldsymbol{A}_k \leftarrow \boldsymbol{A}_k - \frac{A_{kj}}{A_{ij}}\boldsymbol{A}_i$$
- 否则找不到 j 直接返回，此时只有矩阵的前 $(i-1)$ 行非 0。我们称非 0 行数为矩阵的秩（线性无关的行向量数量），记作 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$；最后得到的矩阵为行标准型矩阵。

时间复杂度 $O(n^2m)$。

对于有 n 个方程 m 个未知数的方程组 $A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，将 A 和 $\boldsymbol{b}$ 拼成一个 n 行 $(m+1)$ 列的新矩阵 $A'=[A \quad \boldsymbol{b}]$。对 A' 高斯消元：

- 若 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A')=m$，则方程有唯一解，解为 $x_i=A'_{i,m+1}$；
- 若 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A')<m$，则方程有无穷多解；
- 若 $\operatorname{rank}(A)<\operatorname{rank}(A')$，则方程无解。

模板题：Luogu P2455

Code

```
// 对 A 高斯消元, 返回 rank(A)
// n 行 m 列, 下标从 0 开始
int Gauss(vector<vector<double>> &A, int n, int m) {
    for (int i = 0, j = -1; i < n; ++i) {
        int r = i;
        do {
            if (++j >= m) return i;
            for (int k = i; k < n; ++k) {
                if (abs(A[k][j]) > abs(A[r][j])) r = k;
            }
        } while (abs(A[r][j]) <= eps);
        if (j >= m) break;
        // 找到一个非 0 行与 i 交换, 以保证 A_ij > 0
        swap(A[i], A[r]);
        // A_i ← A_i/A_ij
        for (int l = j + 1; l < m; ++l) A[i][l] /= A[i][j];
        A[i][j] = 1;
        for (int k = 0; k < n; ++k) {
            if (k == i) continue;
            // A_k ← A_k − A_kj A_i
            for (int l = j + 1; l < m; ++l) A[k][l] -= A[k][j] * A[i][l];
            A[k][j] = 0;
        }
    }
    return n;
}
```

例题 3

例题

n 个开关 m 个灯，每个开关同时控制第 k_{i1} 和 k_{i2} 个灯。给定灯的初始状态和最终状态，求一种按开关的方案。

范围：$n < 29$

每个灯的最终状态就是所有控制它的开关操作次数加起来（模 2 意义下）。

假设第 j 个开关打开了 x_j 次，第 i 个灯的最终状态为 b_i，则有方程组

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i,$$

其中 A_{ij} 表示第 i 个灯能不能被开关 j 控制（即 $A_{k_{j1}j} = A_{k_{j2}j} = 1$）。

直接高消求 $\boldsymbol{x}$ 即可。

例题 4

Luogu P10499　开关问题

n 个开关 m 个灯，每个开关同时控制第 k_{i1} 和 k_{i2} 个灯。每个开关最多只能按一下，求有多少种方案能从一个状态变成另一个状态。

范围：$n < 29$

在上一题的基础上要求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{b} \pmod 2$ 的解数。

结论：如果方程有解，则有 $2^{n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})}$ 组解。

就是模 2 意义的高消，支持动态插入行向量。

维护高消后的矩阵的行向量。用 $\boldsymbol{A}_i$ 存放最高位为 i 的行向量，如果不存在这样的向量则 $\boldsymbol{A}_i = \mathbf{0}$。

一开始所有 $\boldsymbol{A}_i = 0$。当插入一个行向量 $\boldsymbol{x}$，从 $\boldsymbol{A}_n$ 到 $\boldsymbol{A}_1$ 遍历 $\boldsymbol{A}_i$，并检查 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 位：

- 若 $\boldsymbol{x}_i = 0$ 则无事发生；
- 若 $\boldsymbol{x}_i = 1$ 且 $\boldsymbol{A}_i \neq \mathbf{0}$，则令 $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{A}_i$；
- 若 $\boldsymbol{x}_i = 1$ 且 $\boldsymbol{A}_i = \mathbf{0}$，则令 $\boldsymbol{A}_i \leftarrow \boldsymbol{x}$，并退出循环。

一般用 `bitset` 存放 $\boldsymbol{A}_i$，如果维数较低可以用 `long long`。一次插入复杂度 $O(n^2/w)$。

Luogu P3812　线性基

有 n 个值域 `long long` 的数，选任意多个使得异或和最大。

范围：$n \le 50$

首先构造出这 n 个数的线性基 $A_0, \ldots, A_{63}$。

从大到小枚举 A_i，如果 $x_i = 0$，则令 $x \leftarrow x \oplus A_i$。可以证明 x 为 A 能线性组合出的最大值。

例题 6

HNOI2011　XOR 和路径

给一个无向连通带权图。从 1 号点出发，每次等概率随机往一个邻居走，走到 n 号点时停止。求走过的路径上的边权异或和的期望。

范围：$n \le 100$

每个二进制位独立，因此可以分开计算每位的期望最后加起来。

用 f_u 表示从 u 走到 n 的异或和为 1 的概率。则有 $f_n = 0$ 且

$$f_u = \sum_{(u,v)\in E} \frac{w(u,v) + (1 - 2w(u,v))f_v}{\deg(v)},$$

这样我们就得到一个关于 f 的方程组，高斯消元即可。

Thanks