实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

提高算法班

向量、矩阵、高斯消元

Mas

向量

既有大小又有方向的量称为 **向量**(Vector)，如力、速度、加速度、位移等 (可用有向线段来表示向量)

n 维向量 $\vec{a}$ 由 n 个 **分量**，其中第 i 个维度为 a_i ($a_i \in \mathbb{R}$)

可表示为(列向量)

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

或(行向量)

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

n 维向量可理解为 n 维空间中的一个点（2 维向量可理解为平面中的一个点）

两个向量相等当且仅当它们维度相同且各分量都相等

向量加法

对于两个 n 维向量 $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$ 和 $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$ 有

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} + b_{n-1} \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

对于任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足如下规则

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$

向量数乘

对于 n 维向量 $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$ 和任意实数 λ 有

$$\lambda\vec{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \cdots \\ \lambda a_{n-1} \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

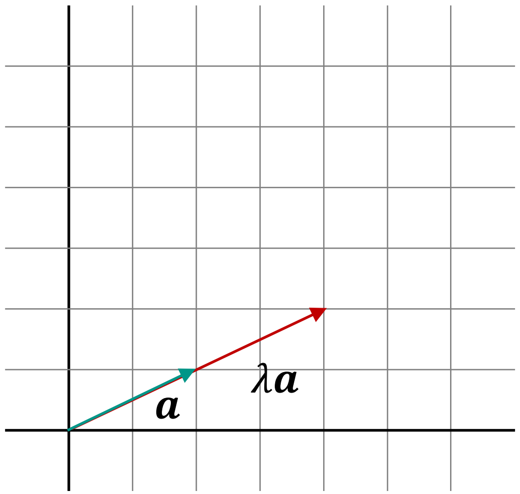
对于任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和任意实数 λ, μ 满足如下规则

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

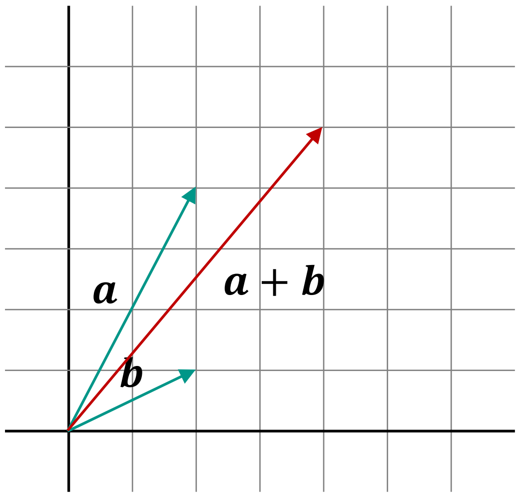
$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$$

向量运算几何意义



向量数乘



向量加法

线性组合

若干个相同维度 $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_n}$ 组成的集合 $\mathcal{A}$ 称为 **向量组**，记为 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_n}\}$

如

$$\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}\} = \left\{\begin{bmatrix}255\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\255\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\255\end{bmatrix}\right\}$$

给定向量组 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_n}\}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，若存在一组实数 $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n$ 使得

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} + k_3\boldsymbol{a_3} + \cdots + k_n\boldsymbol{a_n}$$

那么称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\mathcal{A}$ 线性表示，或称向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 $\mathcal{A}$ 的 **线性组合**

如向量组 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}\}\left\{\begin{bmatrix}255\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\255\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\255\end{bmatrix}\right\}$ 那么向量 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}0\\255\\255\end{bmatrix}$ 为向量组 $\mathcal{A}$ 的线性组合

显然零向量 $\boldsymbol{0}$ 能被与其同维度的向量组线性表示

线性相关/线性无关

给定向量组 $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3},\cdots,\boldsymbol{a_n}\}$，若存在 **不全为0** 的实数 $k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n$ 使得

$$k_1\boldsymbol{a_1}+k_2\boldsymbol{a_2}+k_3\boldsymbol{a_3}+\cdots+k_n\boldsymbol{a_n}=\boldsymbol{0}$$

则称向量组 $\mathcal{A}$ 是 **线性相关** 的，否则称向量组 $\mathcal{A}$ 是 **线性无关** 的

若向量组 $\mathcal{A}$ 线性无关，说明其中的向量相互不能线性表示

如 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{G},\boldsymbol{B}$ 彼此不能线性表示，因此向量组 $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{G},\boldsymbol{B}\}$ 是线性无关的

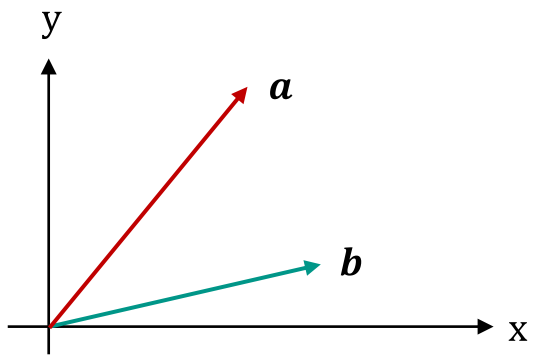
若向量组 $\mathcal{A}$ 线性相关，说明其中的向量可以相互线性表示

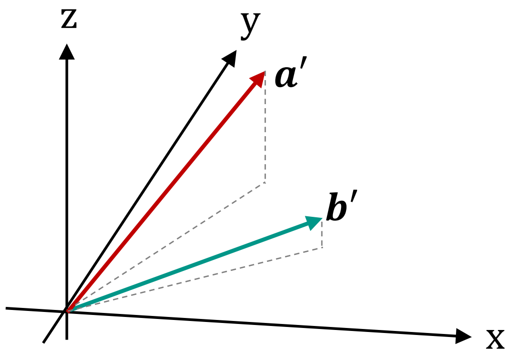
如 $\boldsymbol{C}$ 可由 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{G},\boldsymbol{B}$ 线性表示，因此向量组 $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{G},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$ 是线性相关的

$\mathcal{A}$ 为 n 维向量组那么

- 若 $\mathcal{A}$ 线性无关，则给向量组中的每个向量增加第 $n+1$ 个分量后，该向量组依旧线性无关
- 若 $\mathcal{A}$ 线性相关，去掉向量组中的每个向量的第 n 个分量，该向量组依旧线性相关

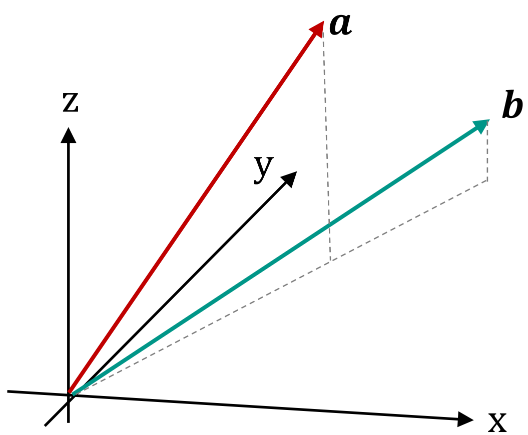
线性相关/线性无关

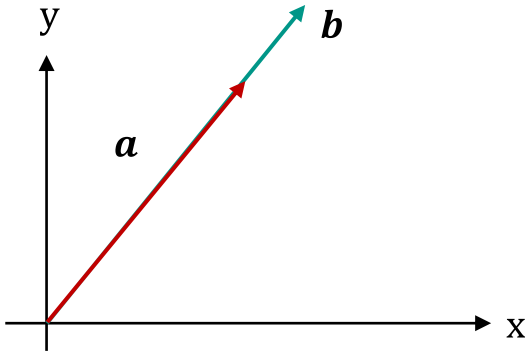




二维平面中 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ 线性无关

升维后 $\{\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'\}$ 依然 线性无关





三维空间中 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ 线性无关

降维后其投影 $\{\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'\}$ 线性相关

向量空间

设 $\mathcal{V}$ 为一非空向量组 且 $\mathcal{V}$ 对于向量的加法及数乘两种运算封闭，那么就称 $\mathcal{V}$ 为 **向量空间**

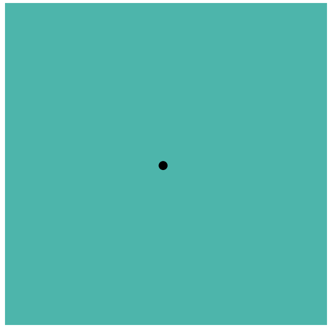
所谓封闭，是指在$\mathcal{V}$ 中向量进行数乘和加减 其结果依然在$\mathcal{V}$ 中，即

- 若 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$,则 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$
- 若 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}, k \in \mathbb{R}$,则 $k\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$

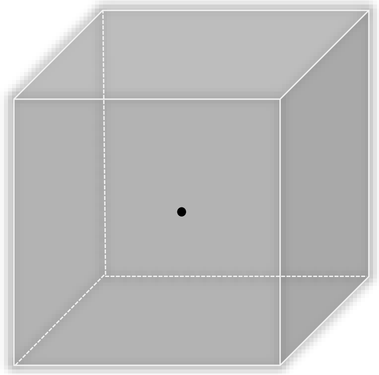
所有 n 维向量构成的集合是一个向量空间 $\mathbb{R}^n$

如

$\mathbb{R}^1 = \{x | x \in \mathbb{R}\}$



$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$



$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

张成空间

向量组 $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_n}\}$ 其所有线性组合构成的集合为向量空间

也称为向量组 $\mathcal{A}$ 的 **张成空间**

记为

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_n})=\left\{k_1\boldsymbol{a_1}+k_2\boldsymbol{a_2}+k_3\boldsymbol{a_3}+\cdots+k_n\boldsymbol{a_n}, k_{1,2,\cdots,n}\in\mathbb{R}\right\}$$

也称 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_n})$ 为向量组 $\mathcal{A}$ 张成

如

向量组 $\left\{\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ 那么

$$\mathbb{R}^3=\operatorname{span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

向量的秩

有向量组 $\mathcal{A}$ ，在$\mathcal{A}$ 中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$ 满足:

- 向量组 $\mathcal{A}' = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_r}\}$ 线性无关
- 向量组 $\mathcal{A}$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关

那么称向量组 $\mathcal{A}'$ 是向量组 $\mathcal{A}$ 的一个 **最大线性无关组**，简称 最大无关组

向量组 $\mathcal{A}$ 的最大无关组为 $\mathcal{A}' = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_r}\}$

$\mathcal{A}'$ 的向量个数 r 称为向量组 $\mathcal{A}$ 的**秩**，记做 $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$ 或 $\mathrm{r}(\mathcal{A})$

如 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\} = \left\{\begin{bmatrix}255\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\255\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\255\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\255\\255\end{bmatrix}\right\}$，那么 $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}\}$ 和 $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{C}\}$ 都为向量组 $\mathcal{A}$ 的最大无关组

即

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = 3$$

向量空间的基 & 坐标

已知 $\mathcal{V}$ 为向量空间，若其中的某向量组

$$\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$$

是 $\mathcal{V}$ 的最大无关组，那么向量组 $\mathcal{A}$ 被称为向量空间 $\mathcal{V}$ 的一个 **基**

向量空间的基并不唯一

假设 $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ 是向量空间 $\mathcal{V}$ 的一个基，则 $\mathcal{V}$ 中每个向量 $\boldsymbol{x}$ 可唯一地表示为：

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$$

其中 $k_{1,2,\cdots,n}\in\mathbb{R}$，上式的系数可以组成向量

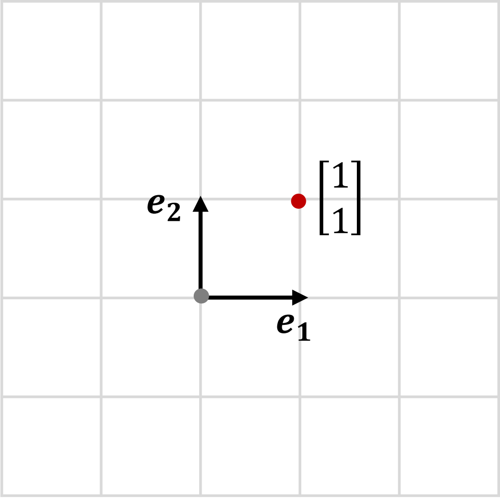
$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{bmatrix}$$

将其称为 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\mathcal{A}$ 下的坐标向量，或者简称为 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\mathcal{A}$ 下的 **坐标**

自然基、非自然基、坐标系

对于 $\mathbb{R}^n$ 都有**自然基**

$$\mathcal{E}: \boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

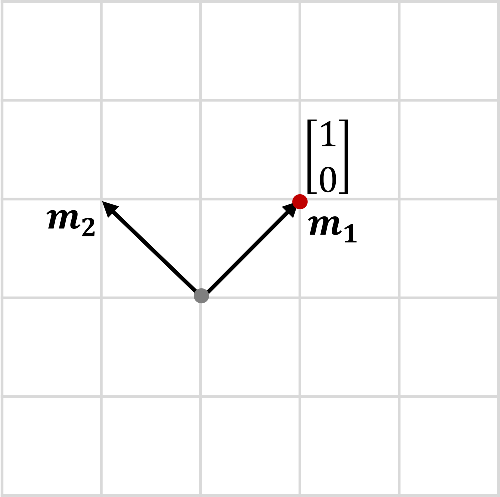


向量 $\mathbb{R}^2$ 的自然基对应平面直角坐标系

向量 $\boldsymbol{x}$ 的表示与在自然基下坐标表示相同，即 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$

当然有 **非自然基** 如

$$\mathcal{M}: \boldsymbol{m_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{m_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



若向量空间 $\mathcal{V}$ 的基为

$$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \cdots, \boldsymbol{a_n}\}$$

则 $\text{rank}(\mathcal{A})$ 称为 向量空间$\mathcal{V}$ 的**维度**，或者称 $\mathcal{V}$ 为 $\text{rank}(\mathcal{A})$ 维向量空间

向量点积

向量 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$ 的**点积**定义为

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

点积还被称为数量积或者标量积, 因为两向量点积运算后的结果是数量(标量)

向量的模(长度)

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

模为 0 的向量称为 **零向量** 记为 $\vec{0}$, 模为 1 的向量称为 **单位向量** 记为 $\vec{e}$

向量夹角

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}||}$$

#3234、向量夹角

题目描述

向量可用若干个分量描述,如二维向量 $\vec{v}$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

其几何意义可理解为二面平面上从原点出发,其 x 轴增量为 1 ,其 y 轴增量为 2

n 维向量其第 i 个维度的增量为 p_i .

对于两个 n 维向量 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$

其中

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \vec{v_2} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

定义向量 $\vec{v_1}$ 与向量 $\vec{v_2}$ 内积计算规则如下

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \sum_{i=1}^{n} (a_i \times b_i)$$

定义向量 $\vec{v_1}$ 的长度 $|\vec{v_1}|$ 计算规则如下

$$|\vec{v_1}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

对于两个向量 $\vec{v_1}$ 与向量 $\vec{v_2}$ 可按照如下规则计算其夹角 θ 余弦值

$$\cos\theta = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{|\vec{v_1}| \times |\vec{v_2}|}$$

再根据余弦值计算出夹角 θ

$$\theta = \frac{\mathrm{acos}(\cos\theta)}{\pi} \times 180$$

其中 acos 为余弦函数的反函数, $\mathrm{C{+}{+}}$ 中函数签名如下

```
double acos(double)
```

由于 $\mathrm{acos}(-1) = \pi$,可取该值计算

输入格式

第一行输入整数 n

第二行输入 n 个整数表示向量 $\vec{v_1}$

第三行输入 n 个整数表示向量 $\vec{v_2}$

输出格式

输出一个实数表示 $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$ 的夹角 θ ,结果保留两位小数

数据规模

对于 32% 的数据 $1 \le n \le 100, -10^3 \le x, y, p_i \le 10^3$

对于全部的数据 $1 \le n \le 10^3, -10^4 \le x, y, p_i \le 10^4$

线性方程组 & 矩阵

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校 LAB

英国数学家 阿瑟·凯莱 在 1858 年的《矩阵理论纪要》的论文中提出:

对于线性方程组:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

其中未知数名称 x, y 并不重要，所以将未知数系数提出用一种称为 **矩阵**(Matrix) 的紧凑形式表示

将其系数提出得到 **系数矩阵**(Coefficient matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

若将等式右边式子一并提出得到 **增广矩阵**(Augmented matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

矩阵

由于 $n \times m$ 个数值 $a_{ij}\ (1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ 排成 n 行 m 列的数表称为 n 行 m 列矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

上述矩阵还可记为 $A = (a_{ij})$

为表示矩阵 A 的行列数 $n \times m$ 的矩阵也记为 $A_{n\times m}$

矩阵 A 的第 i 行可看作行向量用 a_{i*} 表示，矩阵 A 的第 j 列可看作列向量用 a_{*j} 表示

$$\begin{array}{cc} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & a_{i*} \\ \qquad\qquad\qquad a_{*j} & \end{array}$$

矩阵

零矩阵

矩阵元素都为 0 时，称矩阵零矩阵(Zero matrix)，记为 O

方阵

矩阵行数与列数相同都为 n 时，称矩阵为 n 阶矩阵或 n 阶 方阵(Square matrix)，记为 A_n

主对角线

方阵中行数等于列数的元素构成主对角线

对角矩阵

主对角线之外的元素均为 0 的方阵称为 对角矩阵(Diagonal matrix)，如

$$\mathrm{A}_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

简记为

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$$

矩阵

单位矩阵

若对角矩阵对角线上元素都为 1 则将方阵称为单位矩阵，记为 I 或 E

对称矩阵

若 i 行 j 列的元素与 j 行 i 列的元素相等，则将方阵称为对称矩阵

三角矩阵

若方阵主对角线左下方的元素均为 0，称为上三角矩阵

若方阵主对角线右上方的元素均为 0，称为下三角矩阵

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

矩阵

行阶梯矩阵

非零矩阵若满足

- 非零行在零行(若存在的话)的上面
- 非零行的首项系数称作 **主元** (Pivot elemen)

  即最左边的首个非零元素严格比上面行的首项系数更靠右

则被称为 行阶梯矩阵(Row echelon form)

如

$$\begin{bmatrix} a & * & * & * & * \\ 0 & 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & 0 & c & * \end{bmatrix}$$

矩阵

行最简形矩阵

若 A 是行阶梯形矩阵并满足:

- 主元为 1
- 除主元外,其所在列的其它元素均为 0

则被称为 行最简矩阵(Reduced row echelon form)

如

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

矩阵加减

两个行列数相同的矩阵 A,B 可进行加减

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1m} \pm b_{1m} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2m} \pm b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} & \cdots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix}$$

对于行列数相同的矩阵 A,B,C 满足如下规则

$$A \pm B = B \pm A$$

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

矩阵数乘、矩阵转置

对于矩阵 A 与任意实数 λ 有

$$\lambda A = A\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}$$

对于矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$，那么 $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ 称为矩阵 A 的 **转置** ，记 A^T

对于矩阵 A, B 与任意实数 λ 满足如下规则

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

矩阵乘法

对于线性方程组

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+4y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

考虑求解

- 将 方程 $x+2y=3$ 乘 -3 得到 新方程 $-3x-6y=-9$
- 将 新方程 $-3x-6y=-9$ 与 $3x+4y=5$ 相加得到 $-2y=-4$

上述过程描述过于繁琐，将增广矩阵第一行记为 $r_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ 第二行记为 $r_2=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix}$

上述过程可描述为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2'=-3r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

进一步符号化

矩阵乘法

上述过程包含了两步

- 增广矩阵第一行不变，即 $r_1{}' = r_1$
- 增广矩阵第二行改变，即 $r_2' = -3r_1 + r_2$

阿瑟·凯莱规定下列运算得到 $r_1{}'$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\end{bmatrix} = 1 \times \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} + 0 \times \begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

阿瑟·凯莱规定下列运算得到 $r_2{}'$

$$\begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\end{bmatrix} = -3 \times \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

阿瑟·凯莱规定，把第一行运算的结果放在第一行，把第二行运算的结果放在第二行

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

这就是 **矩阵乘法**（Matrix multiplication）的最初定义

矩阵乘法

那么线性方程组 求解过程可描述为

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2'=-3r_1+r_2]{r_1'=1r_1+0r_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2'=0r_1-\frac{1}{2}r_2]{r_1'=1r_1+0r_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2'=0r_1+1r_2]{r_1'=r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

可描述为 $\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}$

而

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\1.5 & -0.5\end{bmatrix}$$

整个求解过程即为

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\1.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

矩阵乘法

设矩阵 $A=(a_{ij})$ 为一 $n\times p$ 的矩阵，矩阵 $B=(b_{ij})$ 为一 $p\times m$ 的矩阵

矩阵 $C=\left(c_{ij}\right)$

$$c_{ij}=a_{i*}\cdot b_{*j}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\times b_{kj}$$

将乘积记为 $C=AB$，如

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[1\quad 2]\cdot[5\quad 7] & [1\quad 2]\cdot[6\quad 8]\\ [3\quad 4]\cdot[5\quad 7] & [3\quad 4]\cdot[6\quad 8]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times 5+2\times 7 & 1\times 6+2\times 8\\3\times 5+4\times 7 & 3\times 6+4\times 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{bmatrix}$$

矩阵乘法

行观点视角

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

列观点视角

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

点积视角

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & ? \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

矩阵 A, B 相乘，遵循如下规则

- **$n \times p$ 的矩阵只能和 $p \times m$ 矩阵相乘**
- 相乘后的矩阵大小为 $n \times m$

对于能够相乘的矩阵 A, B, C 和任意实数 λ 满足如下运算规则

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

矩阵乘法不一定满足交换律

#911、矩阵乘法

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

题目描述

分别给定 $n \times p$ 和 $p \times m$ 的两个矩阵 A 和 B

求 $A \times B$

输入格式

第一行三个正整数 n, p, m ,表示矩阵的长宽

之后的 n 行,每行 p 个整数,表示矩阵 A

之后的 p 行,每行 m 个整数,表示矩阵 B

输出格式

输出 n 行,每行 m 个整数,表示矩阵 $A \times B$

每个数模 $10^9 + 7$ 输出

数据范围与提示

对于全部的数据 $1 \le n, p, m \le 500,\ -10^9 \le A_{i,j}, B_{i,j} \le 10^9$

矩阵的幂

若 A 为方阵 $k \in \mathbb{N}$

$$A^0 = I$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A^1 A^1$$

$$A^3 = A^1 A^1 A^1 = A^2 A^1$$

$$\cdots$$

$$A^{k+1} = A^k A$$

由于矩阵乘法满足结合律

$$A^k = \begin{cases} I, & k = 0 \\ A^{\frac{k}{2}} A^{\frac{k}{2}}, & 2 \mid k \\ A^{k-1} A, & \text{else} \end{cases}$$

求解矩阵幂次，同样可以使用二分快速幂进行优化

对于 $n \times n$ 方阵 求解 k 次幂 时间复杂度 $O(n^3 \log k)$

#801、Fibonacci 第 n 项

题目描述

大家都知道 Fibonacci 数列

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \ldots, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

现在问题很简单,输入 n 和 m

求 $f_n \bmod m$

输入格式

输入 n, m

输出格式

输出 $f_n \bmod m$

数据范围与提示

对于 100% 的数据, $1 \le n \le 2 \times 10^9, 1 \le m \le 10^9 + 10$

#801、Fibonacci 第 n 项

构造一个 2×1 的矩阵 $F_n = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$，考虑将其变为 $F_{n+1} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}$

不难发现

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

$$f_n = f_n$$

构造一个 2×2 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，那么有

$$F_{n+1} = AF_n = AAF_{n-1} = \cdots$$

即 $F_{n+1} = A^n F_1$，显然 $F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

使用矩阵快速幂加速递推即可，时间复杂度 $O(2^3 \times \log n)$

802、Fibonacci 前 n 项和

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校 LAB

题目描述

大家都知道 Fibonacci 数列吧

$$f_1=1,f_2=1,f_3=2,f_4=3,\ldots,f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$$

现在问题很简单,输入 n,m

求 $\{f_n\}$ 的前 n 项和 $S_n \mod m$

输入格式

输入 n,m

输出格式

输出前 n 项和 $S_n \mod m$

数据范围与提示

对于 100% 的数据, $1\le n\le 2\times 10^9, 1\le m\le 10^9+10$

802、Fibonacci 前 n 项和

构造一个 3×1 的矩阵 $F_n=\begin{bmatrix}S_{n-1}\\ f_n\\ f_{n-1}\end{bmatrix}$, 考虑将其变为 $F_{n+1}=\begin{bmatrix}S_n\\ f_{n+1}\\ f_n\end{bmatrix}$

不难发现

$$S_n=S_{n-1}+f_n$$
$$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$$
$$f_n=f_n$$

构造一个 $3\ \times 3$ 的矩阵 $A\ =\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, 那么有

$$F_{n+1}=AF_n=AAF_{n-1}=\cdots$$

即 $F_{n+1}=A^nF_1$, 显然 $F_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

使用矩阵快速幂加速递推即可 , 时间复杂度 $O(3^3\times\log n)$

802、Fibonacci 前 n 项和

f_i 表示 Fibonacci 数列第 i 项，存在性质

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \overbrace{f_3 - f_2}^{f_1} + \overbrace{f_4 - f_3}^{f_2} + \cdots + \overbrace{f_{n+1} - f_n}^{f_{n-1}} + \overbrace{f_{n+2} - f_{n+1}}^{f_n} = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1$$

直接求解 $f_{n+2} - 1$ 即可

类似的有

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_1 + f_4 - f_2 + \cdots + f_{2n} - f_{2n-2} = f_{2n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = \left(\sum_{i=1}^{2n} f_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1}\right) = f_{2n+1} - 1$$

$$f_n f_{n+1} = f_n(f_n + f_{n-1}) = f_n^2 + f_n f_{n-1} = f_n^2 + f_{n-1}(f_{n-1} + f_{n-2}) = \cdots = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$$

802、Fibonacci 前 n 项和

若 $n, k \in \mathbb{N}^+$ 有

$$f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$$

当 $k = 1,2,3$ 时，命题成立

设 $k \le x$ 时成立，考虑 $k = x + 1$ 时

$$f_{n+k} = f_{n+k-1} + f_{n+k-2}$$

$$= f_{k-1} f_{n+1} + f_{k-2} f_n + f_{k-2} f_{n+1} + f_{k-3} f_n$$

$$= (f_{k-1} + f_{k-2}) f_{n+1} + (f_{k-2} - f_{k-3}) f_n$$

$$= f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$$

命题得证

令 $k = n$ 有

$$f_{2n} = f_n (f_{n+1} + f_{n-1}) = f_n (2 f_{n+1} - f_n)$$

802、Fibonacci 前 n 项和

类似的有

$$f_{2k+1} = f_{k+(k+1)} = f_{k+1}f_{k+1} + f_k f_k = f_k^2 + f_{k+1}^2$$

借助上述性质，也可实现分治求解 $\{f_n, f_{n+1}\}$

令 $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，求出 $\{f_k, f_{k+1}\}$ 记 $p = f_k(2f_{k+1} - f_k),\ \ q = f_k^2 + f_{k+1}^2$

- 若 $2 \nmid n$

  此时 q 为公式对应结果，p 恰为 f_{n-1} 结果，返回 $\{q, p+q\}$ 即可

- 若 $2 \mid n$

  此时 p 为公式对应结果，q 恰为 f_{n+1} 结果，返回 $\{p, q\}$ 即可

对于求解 $\{f_n, f_{n+1}\}$ 时间复杂度 $O(\log n)$

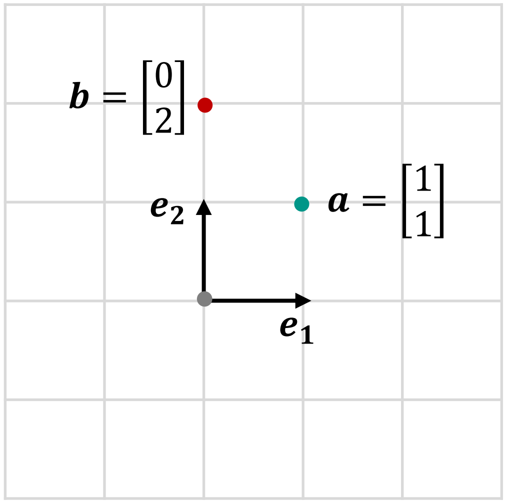
常数小于矩阵快速幂

```cpp
pair<LL, LL> fib(LL n)
{
    if (!n)
        return {0, 1};
    auto t = fib(n >> 1);
    LL p = t.first * (2 * t.second - t.first);
    LL q = t.first * t.first + t.second * t.second;
    if (n & 1)
        return {q, p + q};
    return {p, q};
}
```

矩阵左乘的几何意义

有

$$\overbrace{\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}}^{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}}=\overbrace{\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}}^{\boldsymbol{b}}$$



$\mathbb{R}^2$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都为 $\mathbb{R}^2$ 中的列向量

其坐标为自然基 $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 下描述

记

$$\boldsymbol{c}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{c}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

矩阵左乘的几何意义

根据矩阵乘法定义

$$A\boldsymbol{a} = 1\boldsymbol{c}_1 + 1\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{b}$$

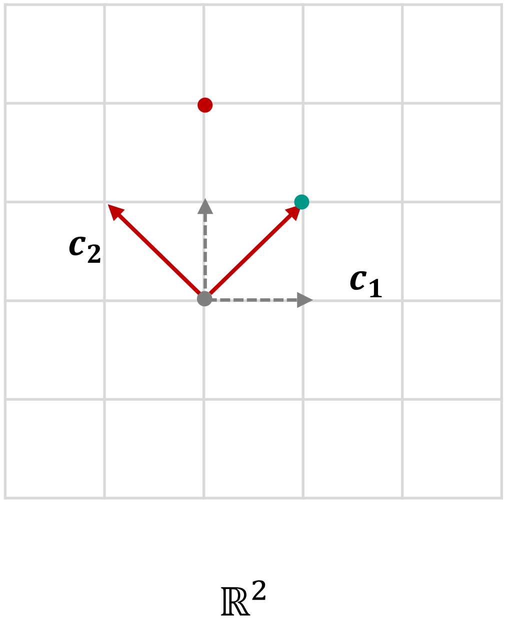
可解读为

向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标是在自然基下定义

$$\boldsymbol{a} = 1\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 \dashrightarrow \boldsymbol{b} = 1\boldsymbol{c}_1 + 1\boldsymbol{c}_2$$

若保持系数不变

将自然基替换为矩阵的列向量，即可得到向量 $\boldsymbol{b}$



消元法

消元法是指将方程组中的未知数通过有限次地变换，消去其中的某些元素，从而使问题获得解决的一种解题方法

代入消元

将某一未知数使用另外的未知数表示，代入原方程，从而消去其中一个未知数

加减消元

将方程组中一方程倍乘某常数加到另外一方程，从而消去其中一个未知数

消元法理论的核心主要如下

- 两方程互换,解不变
- 一方程乘以非零数 k，解不变
- 一方程乘以数 k 加上另一方程,解不变

一般的消元方式，方式步骤可能不固定，往往不利于计算机实现

初等行变换

完成消元法需要三种操作,这些操作作用在矩阵行上，所以又称为 **初等行变换**(Elementary row operations)

在单位阵上应用这三种初等行变换一次得到的矩阵称为 **初等行矩阵**(Elementary row matrix)

倍加变换 (row−addition transformations)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1'=r_1+kr_2}\begin{bmatrix}1 & k & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

倍乘变换 (row−multiplying transformations)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1'=kr_1}\begin{bmatrix}k & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

对换变换 (row−switch transformations)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

高斯消元法

德国数学家高斯对消元法进行了思考分析，得出如下结论

- 在消元法中，参与计算和发生改变的是方程中各变量的系数
- 各变量并未参与计算，且没有发生改变
- 可以利用系数的位置表示变量，从而省略变量
- 在计算中将变量简化省略，方程的解不变

高斯消元法 虽冠以数学王子高斯之名，但各个国家的古代数学中均已涉及该方法。如中国的《九章算术》

高斯在这些结论的基础上，提出了 **高斯消元法**(Gaussian Elimination)

- 构造线性方程组的增广矩阵
- 将增广矩阵利用 **初等行变换** 转为 **行阶梯矩阵**
- 回带求出方程组的解

高斯消元法

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

线性方程组

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 4y+z=2 \\ 3x+10y+2z=12 \end{cases}$$

对应 **增广矩阵** 为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

将其化为 **行阶梯矩阵**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3'=r_3-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3'=r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

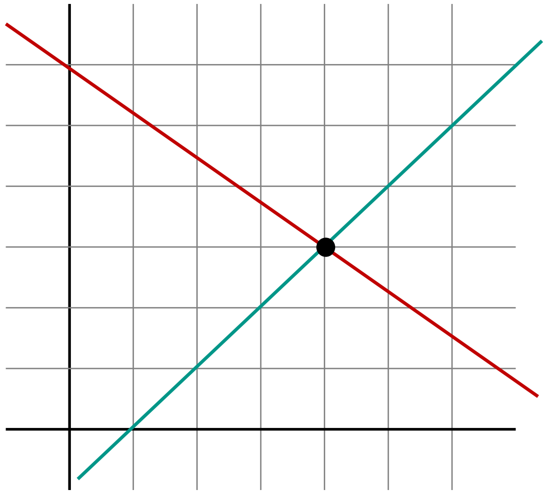
对应方程组为

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 4y+z=2 \\ -2z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

线性方程组解—几何意义

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$



若将方程看作直线,方程组的解为 $\mathbb{R}^2$ 自然基下 **交点** 坐标对应值

- 若不存在交点 (平行) 或 存在超过一个交点

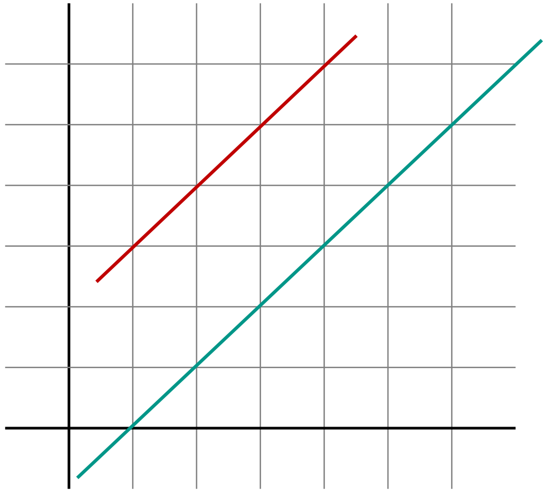
  无解

- 若重叠

  存在无穷多解

- 若存在唯一交点

  存在唯一解



#3230、高斯消元法

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

题目描述

已知 n 元线性一次方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

请根据输入的数据,编程输出方程组的解的情况

输入格式

第一行输入未知数的个数 n

接下来 n 行,每行 $n+1$ 个实数

表示每一个方程的系数及方程右边的值(增广矩阵)

输出格式

如果有唯一解,则输出解(小数点后保留两位小数)

如果方程组无解输出 No Answer

如果有无穷多实数解,输出 INF

数据范围

对于 100% 的数据, $1 \le n \le 100$

保证 $\forall 1 \le i,j \le n$,有 $|a_{i,j}| \le 100, |b_i| \le 300$

```
int Gauss()
{
  int r = 1;
  for (int c = 1; c <= n; c++)
  {
    int t = r;
    for (int i = r; i <= n; i++) // 寻找绝对值最大主元
      if (abs(a[i][c]) > abs(a[t][c]))
        t = i;
    if (abs(a[t][c]) < EPS)
      continue;
    swap(a[r], a[t]);                // 交换行
    for (int i = n + 1; i >= c; i--) // 系数归1
      a[r][i] /= a[r][c];
    for (int i = r + 1; i <= n; i++) // 消去下方主元对应列系数
      if (abs(a[i][c]) > EPS)
        for (int j = n + 1; j >= c; j--)
          a[i][j] -= a[i][c] * a[r][j];
    r++; // 矩阵的秩
  }
  if (r < n + 1)
  {
    for (int i = r; i <= n; i++)
      if (abs(a[i][n + 1]) > EPS) // 无穷多解
        return 2;                 // 无解
    return 1;
  }
  for (int c = n - 1; c >= 1; c--) // 回代
    for (int j = n; j > c; j--)
      a[c][n + 1] -= a[c][j] * a[j][n + 1];
  return 0;
}
```

#3230、高斯消元法

在选择主元时应挑选系数绝对值较大行

一方面可避免挑选主元系数为 0 ，另一方面在主元系数归一可避免该行后续系数过大

若后续系数过大，对其他行消去系数时可能产生精度误差（相乘时结果较大）

若在该过程中记录 选出非 0 系数主元，该数量即为矩阵的 **秩**

若某列 (主元) 无法选出非 0 系数，说明 该列向量 能被 其它列向量 线性组合

最终检查行阶梯矩阵进行检查，对于某行系数全为 0

- 若 结果 $d \neq 0$，说明无解
- 若 结果 $d = 0$

  如增广矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 对应方程组 $\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ 此时方程组有无穷多解

  对于 x_3 这样的未知量称为**自由元**

高斯-约旦消元法

高斯-约旦消元法 (Gauss – Jordan Elimination) 步骤如下

- 构造线性方程组的增广矩阵
- 将增广矩阵利用 **初等行变换** 转为 **行最简矩阵**
- 消除各主元系数得出解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3'=r_3-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3'=r_3-r_2]{r_1'=r_1-\frac{r_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2'=r_2-\frac{r_3}{2}]{r_1'=r_1+\frac{r_3}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

对应方程组为

$$\begin{cases} x = 2 \\ 4y = 4 \\ -2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

高斯/高斯-约旦消元 本质为求系数矩阵的 **逆矩阵**

实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

谢谢观看