

训练赛3题解

October 27, 2023

- 考虑容斥原理，我们只要求出有 i 个约束被违背（即有 i 个index满足 $|p_i - i| = k$ ）的总方案数即可。
- 对 $\text{mod } k$ 相同的数进行处理。问题转化为 $k = 1$ 的情形。
- 令 $dp_{i,j,0/1}$ 为当前处理到 i ，已经有 j 个约束被违背，上一个数有没有被违背约束的方案数。
- 总体的时间复杂度为 $O(n^2)$ （应该可以通过FFT/NTT加速到 $O(n \log^2 n)$ ）。

tree

- 给定一个顶点子集 $n-1, n \in S$ ，我们考虑LCA所在子树恰好包含顶点子集 S 的方案数，我们不妨假设 $|S| \geq 3$ 。
- 令 x 是 S 的最小元素，我们考察两个集合：
 - $L = [n] \setminus (S \setminus \{x\})$ 中的元素其 p_i 的值必须仍然在 L 中，选取方案数为 $(n - |S|)!$ ；
 - $R = S \setminus \{x\}$ ：其元素 p_i 的值必须在 S 中，且 n 和 $n-1$ 的LCA必须恰好为 x ，选取方案数为 $(|S| - 1)!/2$ （可以考虑LCA的往上跳的那种做法，证明恰好一半的概率LCA为 x ）。
- 为了计算答案，我们只需要计算子集 S 的大小为 k 的权值和即可，这只需要计算 $\prod_{i=1}^{n-2} (1 + A_i x)$ 的各项系数即可。分治FFT可以在 $O(n \log^2 n)$ 时间内求解。

- 对于每个 m ，问题为标准的FWT。做法为考虑序列 $c = (c_i)$ 表示每个数的出现次数，则答案为 c 自卷积 m 次后的值，即 $iFWT(FWT(c)^m)$ 。
- 注意到 $iFWT$ 操作满足线性性质，即 $iFWT(a + b) = iFWT(a) + iFWT(b)$ ，因此答案为 $iFWT(\sum_{m=0}^n FWT(c)^m)$ 。利用等比数列求和公式即可。