Catalan 数列

以下问题属于 Catalan 数列：

1. 有 $2n$ 个人排成一行进入剧场。入场费 5 元。其中只有 n 个人有一张 5 元钞票，另外 n 人只有 10 元钞票，剧院无其它钞票，问有多少种方法使得只要有 10 元的人买票，售票处就有 5 元的钞票找零？
2. 一位大城市的律师在她住所以北 n 个街区和以东 n 个街区处工作。每天她走 $2n$ 个街区去上班。如果他从不穿越（但可以碰到）从家到办公室的对角线，那么有多少条可能的道路？
3. 在圆上选择 $2n$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数？
4. 对角线不相交的情况下，将一个凸多边形区域分成三角形区域的方法数？
5. 一个栈（无穷大）的进栈序列为 $1,2,3,\cdots,n$ 有多少个不同的出栈序列？
6. n 个结点可构造多少个不同的二叉树？
7. n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成 $2n$ 项 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$，其部分和满足 $a_1+a_2+\cdots+a_k\geq 0(k=1,2,3,\cdots,2n)$ 对与 n 该数列为？

其对应的序列为：

H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	...
1	1	2	5	14	42	132	...

（Catalan 数列）

递推式

该递推关系的解为：

$$H_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}(n \geq 2, n \in \mathbf{N_+})$$

关于 Catalan 数的常见公式：

$$H_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} H_{i-1} H_{n-i} & n \geq 2, n \in \mathbf{N_+}\\ 1 & n = 0, 1 \end{cases}$$

$$H_n = \frac{H_{n-1} (4n-2)}{n+1}$$

$$H_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

??? note " 例题 [洛谷 P1044 栈]"
　题目大意：入栈顺序为 $1,2,\ldots ,n$，求所有可能的出栈顺序的总数。

=== "C++"

```
```cpp
#include <iostream>
using namespace std;
int n;
long long f[25];
```
```

````
int main() {
  f[0] = 1;
  cin >> n;
  for (int i = 1; i <= n; i++) f[i] = f[i - 1] * (4 * i - 2) / (i + 1);
  // 这里用的是常见公式2
  cout << f[n] << endl;
  return 0;
}
```
````

=== "Python"

````
```python
f = [0] * 25
f[0] = 1
n = int(input())
for i in range(1, n + 1):
    f[i] = int(f[i - 1] * (4 * i - 2) // (i + 1))
    # 这里用的是常见公式2
print(f[n])
```
````

封闭形式

卡特兰数的递推式为

$$H_n = \sum_{i=0}^{n-1} H_i H_{n-i-1} \quad (n \geq 2)$$

其中 $H_0 = 1, H_1 = 1$。设它的普通生成函数为 $H(x)$。

我们发现卡特兰数的递推式与卷积的形式很相似，因此我们用卷积来构造关于 $H(x)$ 的方程：

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n\geq 0} H_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} H_i x^i H_{n-i-1} x^{n-i-1} x \\ &= 1 + x \sum_{i\geq 0} H_i x^i \sum_{n\geq 0} H_n x^n \\ &= 1 + xH^2(x) \end{aligned}$$

解得

$$H(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

那么这就产生了一个问题：我们应该取哪一个根呢？我们将其分子有理化：

$$H(x) = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4x}}$$

代入 $x = 0$，我们得到的是 $H(x)$ 的常数项，也就是 H_0。当 $H(x) = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$ 的时候有 $H(0) = 1$，满足要求。而另一个解会出现分母为 0 的情况（不收敛），舍弃。

因此我们得到了卡特兰数生成函数的封闭形式：
````

$$H(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

接下来我们要将其展开。但注意到它的分母不是斐波那契数列那样的多项式形式，因此不方便套用等比数列的展开形式。在这里我们需要使用牛顿二项式定理。我们来先展开 $\sqrt{1-4x}$：

$$\begin{aligned}(1-4x)^{\frac{1}{2}}&=\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n\\&=1+\sum_{n\geq 1}\frac{(\frac{1}{2})^{\underline{n}}}{n!}(-4x)^n\end{aligned}\tag{1}$$

注意到

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{n}}&=\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-3)}{2}\\&=\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}\\&=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n(2n-2)!!}\\&=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\end{aligned}$$

这里使用了双阶乘的化简技巧。那么带回 (1) 得到

$$\begin{aligned}(1-4x)^{\frac{1}{2}}&=1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}(-4x)^n\\&=1-\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}2x^n\\&=1-\sum_{n\geq 1}\binom{2n-1}{n}\frac{1}{(2n-1)}2x^n\end{aligned}$$

带回原式得到

$$\begin{aligned}H(x)&=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\\&=\frac{1}{2x}\sum_{n\geq 1}\binom{2n-1}{n}\frac{1}{(2n-1)}2x^n\\&=\sum_{n\geq 1}\binom{2n-1}{n}\frac{1}{(2n-1)}x^{n-1}\\&=\sum_{n\geq 0}\binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{(2n+1)}x^n\\&=\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}x^n\end{aligned}$$

这样我们就得到了卡特兰数的通项公式。

路径计数问题

非降路径是指只能向上或向右走的路径。

1. 从 $(0,0)$ 到 (m,n) 的非降路径数等于 m 个 x 和 n 个 y 的排列数，即 $\binom{n+m}{m}$。

2. 从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的除端点外不接触直线 $y=x$ 的非降路径数：

   先考虑 $y=x$ 下方的路径，都是从 $(0,0)$ 出发，经过 $(1,0)$ 及 $(n,n-1)$ 到 (n,n)，可以看做是 $(1,0)$ 到 $(n,n-1)$ 不接触 $y=x$ 的非降路径数。

   所有的的非降路径有 $\binom{2n-2}{n-1}$ 条。对于这里面任意一条接触了 $y=x$ 的路径，可以把它最后离开这条线的点到 $(1,0)$ 之间的部分关于 $y=x$ 对称变换，就得到从 $(0,1)$ 到 $(n,n-1)$ 的一条非降路径。反之也成立。从而 $y=x$ 下方的非降路径数是 $\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}$。根据对称性可知所求答案为 $2\binom{2n-2}{n-1}-2\binom{2n-2}{n}$。

3. 从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的除端点外不穿过直线 $y=x$ 的非降路径数：

   用类似的方法可以得到：$\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$