训练赛3题解

October 6, 2023

xor

- 令$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为异或基，则答案为$(x_1|x_2|\ldots|x_m) * 2^{m-1}$（原因：对于第$i$位而言，假设$x_1$中包含第$i$位，则对于任意的$S \subseteq [m] \setminus \{1\}$，$\bigoplus_{i \in S} x_i$与$\bigoplus_{i \in S \cup \{1\}}$中恰好一者该位为1）。

count

- 假设a_i出现k_i次，则产生贡献为$m!/\prod_{i=1}^{n} k_i!$。由Lucas定理，$k_1, k_2, \ldots, k_n$必须两两and为0。
- 问题转化为对于m的每一个数位i，选择一个数a_j，使得$2^i a_j$之和恰好为S的方案总数为奇数还是偶数个。
- 二进制下从高位向低位dp，$dp_{i,j}$为只看前i位，与S的差值为j的方案数模2的值。
- 注意到当$j > 10^5$时，无论低位如何选数都不可能满足要求。因此，dp的第二维只需维护$0 \le j \le 10^5$即可，总体时间复杂度为$O(nA \log S)$。

matrix

- 假设矩阵A也已经固定，令$\mathrm{rank}(A) = r$。若A的列向量生成空间不包含C的列向量生成空间V，则无解。否则B的个数为$2^{n(n-r)}$。
- 令$f_{n,s,t}$为$x_1, x_2, \ldots, x_n$生成空间维数为s，与V的交维数为t的方案数，则转移有三种情况需要考虑:
  1. x_{n+1}已经在$\mathrm{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$中，此时$s$和$t$都不增加，方案数为$2^s$；
  2. $\mathrm{span}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$的维数增加，交的维数也增加。令$\{z_1, z_2, \ldots, z_t\}$是交出来空间$V_t$的一组基，$\{z_1, z_2, \ldots, z_t, \ldots, z_s\}$是$\mathrm{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的一组基，则$x_{n+1}$使得两者的维度增加当且仅当$x_{n+1}$可以写成$a \in V \setminus V_t$与$b \in \mathrm{span}(z_{t+1}, z_{t+2}, \ldots, z_{s-t})$之和。注意到这种分解也是唯一的，因此方案数为$(2^{\dim(V)} - 2^t) * 2^{s-t}$。
  3. 否则，s增加，t不增加，只需用总和减去两者即可。