# 图论选讲

## 省选计划 B 组讲课

Gemini 张宸睿
qq:2367441769

洛谷网校

2024 年 7 月 20 日

# 写在前面

- 很多人说，图论就是背模板。
- 对于算法来讲是如此，但是我们在做题的时候，遇到的最大的问题其实是如何转化为图论模型。
- 经常会发出“这竟然是一道图论题!”这样的感叹（比如我在做2021年联合省选的时候）。
- 所以这节课，不仅介绍一些经典算法模型，选择的例题多为需要转化问题的题目。

# 基本的最短路模型

- 这里不再赘述最短路算法的内容。
- 最短路做题的方法一般是：分析题目、转化为最短路模型、套模板。
- 将用一两道例题介绍转化的方法。

## Luogu P6961

- 给定一张有向图 $G$，边带非负权值，给定常数 $k$，求一条 $1 \to n$ 的路径，使得路径上前 $k$ 大的边权和最小。
- $1 \leq n, m \leq 2 \times 10^3$.

## Luogu P6961

- 假如已经知道了一条路径，第 $k$ 大的边权，记作 $w$，将所有边的权值减去 $w$。
- 如果边权为负数，则将边权变成 0。
- 这样求出的最短路，理应只有前 $k$ 大的有值。
- 枚举每一条边作为第 $k$ 大的边即可。复杂度 $O(m^2 \log n)$。

## 证明

- 对于一条路径，如果选择的边恰好是第 $k$ 大，那么无所谓。
- 如果选择的边是第 $k'(k' > k)$ 大的边，那么当选择第 $k$ 大的边时一定更优。
- 如果选择的边是第 $k'(k' < k)$ 大的边，那么此时，第 $[k'+1, k]$ 大的边的权值都会被多算权值，其实也不优。

# GXOI/GZOI2019 旅行者

- 给定无向带权图，以及 $k$ 个关键点，求任意两个关键点之间的最短路的距离的最小值。
- $1 \leq n \leq 10^5$.

## GXOI/GZOI2019 旅行者

- 这种多源问题，一般考虑建立超级源点和超级汇点。但是如果直接考虑超级源汇，就自己走到自己去了。要求任意两个点都能有概率被选到，容易想到二进制分组。
- 每一位让 $1 \to 0$，对于两个不同的点，总有一位不一样，就会被选进答案。复杂度 $O(m \log^2 n)$。
- bonus：如何做到 $O(m \log n)$。

## GXOI/GZOI2019 旅行者

- 对于一条路径 $p_i \to p_j$，一定可以找到中间一条边 $(u, v)$ 使得左侧的点到 $p_i$ 更近，右侧的点到 $p_j$ 更近。
- 所以我们可以处理到 $u$ 的最近的关键点 $p_i$，到 $v$ 的最近的关键点 $p_j$，用 $dis(p_i, u) + dis(p_j, v) + w(u, v)$ 更新答案。

# 最短路图/树

- 考虑最短路的结构 $dis_v \leq dis_u + w(u, v)$，如果刚好等于，相当于到 $v$ 的最短路可以从 $u$ 来，连一条 $u \to v$ 的边。
- 根据 dijkstra 的过程，这个图是一个 dag。
- 如果每个点只记一个父亲，那么这个图会变成一棵树。

## Luogu P6880

- 给定一个 $N$ 点 $M$ 边的有向图，每条边从 $U_i$ 指向 $V_i$，经过这条边的代价为 $C_i$。
- 我们可以翻转一条边，即让他从 $U_i$ 指向 $V_i$ 变为从 $V_i$ 指向 $U_i$，这时会有 $D_i$ 的代价产生。
- 你要从点 1 到点 $N$，再从点 $N$ 回到点 1，你想知道，通过翻转一条边，或者不翻转，能得到的最小代价和为多少？
- $1 \leq n \leq 200$.

# Luogu P6880

- 它只能反向一条边，不妨枚举一下这是哪一条边。考虑反向这条边可能形成的三种情况（其实是四种）：
- $1 \to n$ 走最短路，$n \to v_i \to u_i \to 1$，即必经 $v_i \to u_i$ 的最短路.
- $n \to 1$ 走最短路，$1 \to v_i \to u_i \to n$，即必经 $v_i \to u_i$ 的最短路.
- $1 \to v_i \to u_i \to n$，$n \to v_i \to u_i \to 1$，即两种都走必经 $v_i \to u_i$.
- $1 \to n$ 和 $n \to 1$ 都走最短路（这种提前判断就好了）.

# Luogu P6880

- 那怎么求出必经某条边的最短路呢？记录一下 1 到所有点，$n$ 到所有点，所有点到 1，所有点到 $n$ 的最短路。设 $dis(i,j)$ 为 $i \to j$ 的最短路，则必经第一种 $v_i \to u_i$ 的最短路即为 $dis(n, v_i) + len(v_i, u_i) + d(u_i, 1)$。
- 我们反向了某条边后如果这条边在原先最短的必经路径上的话原先的最短路就不存在了，子任务2每条边都有一条与之相同的重边就不会影响最短路。
- 我们考虑必经边有多少条，我们可以处理出最短路径树，而必经边一定在树上，树边最多有 $n$ 条，那么如果是树边就暴力重跑一遍暴力就好了。

## 同余最短路

- 同余最短路其实是一种优化最短路建图的方法。
- 通常是解决给定 $m$ 个整数，求这 $m$ 个整数能拼凑出多少的其他整数（这 $m$ 个整数可以重复取）或给定 $m$ 个整数，求这 $m$ 个整数不能拼凑出的最小（最大）的整数。

## Luogu P2371

- 墨墨突然对等式很感兴趣，他正在研究 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ 存在非负整数解的条件。
- 给定 $n, a_{1\dots n}, l, r$，求出有多少 $b \in [l, r]$ 可以使等式存在非负整数解。

## Luogu P2371

- 先将答案差分，不妨设 $a_1$ 是最小的 $a$。
- 不妨将一个表示出来的数 $p$ 写成 $p' + qa_1$，其中 $p'$ 是 $p \bmod a_1$ 等价类中最小的能表示出来的数。
- 有了 $p'$ 就很好求得答案。接下来只需要 $a_1$ 个点，并且用 $a_j, (j \neq i)$ 建边。
- 接下俩跑最短路就求出了所有 $\mathbb{Z}_{a_1}$ 下的 $p'$。

# ARC084D

- 给定正整数 $K$，找到 $K$ 的倍数中最小的数位和是多少。
- $1 \leq K \leq 10^5$.

# ARC084D

- 直接建 $0, 1, \ldots, K-1$ 这 $K$ 个点，从 $i$ 向 $(i \times 10 + j) \bmod K$ 连一条 $K$ 的边，从 $1, 2, \ldots, 9$ 开始跑最短路，求到 $0$ 的最短路即可。

# 差分约束

- 单源最短路有三角形不等式 $dis_v \leq dis_u + w(u, v)$。
- 有 $n$ 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 和若干，限制形如 $x_i$ ` $x_j \leq w$，求一组符合要求的变量，可能还要求尽量小。
- 对所有限制建边 $(j, i, w)$，然后求最短路，最短路数组即为一组合法变量，有负环即无解。
- 注意这里隐形限制，每个数非负。

# 省选联考2021 矩阵游戏

- 随便选则第一行第一列，就可以推出所有行列。
- 然后考虑调整，对某一行奇数位置加 $x$ 偶数位置减 $x$ 矩阵依然合法，列同理。
- 这样可以得到所有合法矩阵，然后列方程差分约束求出每行每列的 $x$ 即可。

# Johnson 全源最短路

- 求任意两个点之间的最短路。
- 用 floyd 算法复杂度是 $O(n^3)$。
- 如果没有负权，用 dijkstra 复杂度为 $O(nm \log n)$，在稀疏图上有很好的效率。

## Johnson 全源最短路

- 仍然考虑三角不等式，移项得到 $dis_u - dis_v + w(u, v) \geq 0$。
- 于是变换边权 $w'(u, v) = w(u, v) + dis_u - dis_v$。
- 对于一条路径 $s \to t$，最短路变为 $dis'(s, t) - dis_s + dis_t$。有点类似高中的裂项。
- 用途 johnson 费用流。

# 最小生成树

- kruscal 算法，prim 算法相信大家都会。
- boruvka 算法
- 用来解决边权互不相同的最小生成树，主要用途边数在 $O(n^2)$ 级别的题目中。维护一个森林，对于每棵树处理一条最小边连向其他树，每次操作合并连起来的树。注意到，这样一定不可能成环，且最多会进行 $O(\log|V|)$ 轮。

## 最小生成树

- 性质 1：最小生成树的每种权值的边的可重集是固定的。
- 根据 kruscal 的过程可以证明。

## Luogu P4208

- 最小生成树计数。
- $1 \le n \le 100$.

## Luogu P4208

- 根据前文提到的性质，$\leq w$ 权值的边组成的森林点集应该是相同的。
- 在此基础上，可以用矩阵树定理求方案数。
- 将每一步的方案乘起来即为答案。

# 最小生成树

- 性质 2：两个点 $x, y$ 之间路径最大边权的最小值，等于它们在最小生成树上路径的最大边权。
- 定义：kruscal 重构树。
- 根据 kruscal 算法，在连接两个连通块的时候即为瓶颈路。由于边权是从小往大枚举的，所以一定是最小的。
- 于是乎，把边也看作点，合并两个连通块时将边作为两个连通块的父亲，这条边作为新的连通块的代表。

# 求最小生成树

- 其实所有这一类问题都只做了一件事，减少边的数量。
- 边数 $O(m)$ 的图，求 MST 的复杂度为 $O(m \log n)$。

# 曼哈顿距离最小生成树

- 给定 $n$ 个平面上的点，求曼哈顿距离最小生成树。
- $1 \leq n \leq 10^5$.

# 曼哈顿距离最小生成树

- 做这一类题时考虑一种支配对的思想。
- 边 $(x, y)$ 在 MST 中，当且仅当以 $x$ 为中心沿横竖斜方向将平面切成八个区域后，$y$ 为它所在区域中距离 $x$ 最近的点。
- 于是边的数量变成了 $\Theta(n)$。

## CF888G

- 给定 $n$ 个数 $a_1, \ldots, a_n$，由此建立一张完全图。
- 其中 $i, j$ 之间边权为 $a_i \operatorname{xor} a_j$，求最小生成树。
- $1 \le n \le 10^5$.

# CF888G

- 无论是 prim 还是 kruskal 算法都建立于将所有边排序。这里不能所以考虑 boruvka 算法。
- 考虑建出所有点的 01 trie，注意到 01 trie 是可以合并且可删除（可减）的，所以可以再对每个连通块维护 01 trie。
- 这样就能轻松找到不在同一个连通块里的最大值了。复杂度 $O(n \log n \log V)$。
- 此题还可以用 kruscal 重构树倒着建来实现，更好做。

## CF1981E

- $n$ 条线段和一个序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，第 $i$ 条线段是 $[l_i, r_i]$。
- 对于任意的 $i, j$，若 $a_i, a_j$ 相交，则 $i, j$ 之间连一条边权为 $|a_i - a_j|$ 的边。相交的定义为 $\max(l_1, l_2) \le \min(r_1, r_2)$。
- 求最小生成树。
- $1 \le n \le 10^5$.

## CF1981E

- 对于所有与 $[l, r]$ 在同一侧相交的线段，只需要找到 $a$ 的前驱和后继。
- 首先如果能构成一棵树，那么前驱后继肯定是最优的。
- 对于三条互相连边的区间，一定只有最短的两条边被选上。而对于一条链，两边都会被选上。
- 这样，正确性也得到了保证。

# Tree MST

- 给定一棵 $n$ 个节点的树，现有有一张完全图，两点 $x, y$ 之间的边长为 $w_x + w_y + dis_{x,y}$，其中 $dis$ 表示树上两点的距离。
- 求最小生成树。
- $1 \leq n \leq 10^5$.

# Tree MST

- 模仿 CF1981E，点分治。
- 对于分治中心 $r$，处理每个点的权值 $w'_x = dis(r, x) + w_x$。
- 取最小的 $w'_x$，然后与其他子树的点连边即可。总边数是 $O(n \log n)$ 的。

## 强连通

- 图上两个点 $u, v$ 如果相互可达，则称其为强连通的。
- 对于一个极大强连通的连通块，称为强连通分量。
- 这里就不再赘述 Tarjan 算法的流程。

# Kosaraju 算法

- 考虑在一个点结束递归的时候加入序列，然后后序遍历这个序列。
- 在反图上 dfs，所有能跑倒的点即为一个 scc。
- 反图和正图的 scc 相同，对于逆后续序列，遍历到的一定是拓扑序在前的。
- 算法优势：在 $m = O(n^2)$ 的图上可以用 bitset 加速，复杂度变为 $O(\frac{n^2}{w})$

# [ARC092F] Two Faced Edges

- 有一个 $N$ 个点 $M$ 条边的有向图。保证图中不存在重边和自环。
- 试判断将每条边反向，其他边不变的情况下，图中强连通分量的数量是否改变。若改变，输出 ‘diff‘，否则输出 ‘same‘。

- $1 \leq N \leq 10^3$，$1 \leq M \leq 2 \times 10^5$。

## [ARC092F] Two Faced Edges

- 此题复杂度的瓶颈在于最后的 bfs 是 $O(n+m)$ 的，然而此时是不需要访问已经访问过的点的，用 bitset 可以做到 $O(\frac{nm}{w})$。

## 2-SAT

- 一般的 k-SAT 问题就是给你 $n$ 个变量 $a_i$，每个变量有 $k$ 个取值，然后给你若干条件，形如 $a_i = x \Rightarrow a_j = y$，并让你求出满足所有条件的一组解。
- 而当 $k > 2$ 时已经被证明为 NPC 问题，没有多项式复杂度的解法，故我们只考虑 2-SAT 问题。
- 具体来讲，我们可以对每个数建两个点，分别代表两种取值。假如 $i \to j$ 存在边代表若 $i$ 满足则 $j$ 也满足。
- 如果一个变量的两个取值的点可以互相推出，那么就无解，可以用 tarjan 求。
- 解的构造：取 scc 标号小的。

# [JSOI2019] 精准预测

- 题面在洛谷搜吧。

# [JSOI2019] 精准预测

- 每个火星人在每个时刻只有死或者生两种状态，所以我们考虑拆点 2-SAT。
- 对于每个火星人在每个时刻拆成一个点，然后对于连边就按照题目描述模拟。
- 如果一个火星人 $i$ 在 $t$ 时刻活着，那么其在 $t-1$ 时刻也一定活着。如果其在 $t$ 时刻死亡，那么在 $t+1$ 时刻也一定死亡。
- 考虑有用的时间状态，其实就是所有与 $m$ 个条件有关的时间和 $T+1$，那么我们就可以把时空复杂度降为 $O(n+m)$。

# [JSOI2019] 精准预测

- 接下来的问题是如何求解答案，我们对于每个火星人求出当其在 $T+1$ 时刻活着时，有多少个火星人一定死亡。
- 这个我们可以直接在缩点后的 dag 上跑有向图连通性（由于会算重不能直接统计个数），用 bitset 可以在 $O(\frac{n^2}{w})$ 的时间复杂度内实现。
- 但是空间不太允许，那么我们就把关键点（死亡点）拆成若干份，每份 $D$ 个点，这样空间复杂度降为 $O(\frac{nD}{w})$，时间复杂度为 $O(\frac{n^3}{Dw})$，当 $D=10^4$ 时就可以通过此题。

## 点双和边双

- 割边：删除这条边后图被分成两个部分。割点：删除这个点后图被分成若干部分。
- 对于割边和割点的 tarjan 算法这里不再赘述。
- 边双连通分量：不经过割边。点双连通分量：不存在一个点，删除后这个部分不连通了。
- 前者可以求出割边后直接建。
- 对于点双连通分量，不建议写点双缩点而是写圆方树。

# 圆方树和仙人掌

- 对于一个点双连通分量建立一个新点，令这些点是方点，剩下的是圆点。讲方点和圆点连起来。
- 容易发现这形成了一棵树的结构（连通，无环）。并且是一个典型的二分图。
- 所有叶结点都是圆点，它们是原图中的非割点；所有非叶圆点是原图的割点，删除它们后原图的每个连通块就是圆方树上删除它后的各个子树。
- 考虑 $x \to y$ 的任意简单路径，一定经过且只经过它们在圆方树上路径中所有方点对应的点双。并且一定经过树上路径中所有圆点。

# 【模板】静态仙人掌

- 给你一个有 $n$ 个点和 $m$ 条边的仙人掌图，和 $q$ 组询问。
- 每次询问两个点 $u, v$，求两点之间的最短路。
- 仙人掌就是不存在一条边属于两个环。

# 【模板】静态仙人掌

- 每个环就应该属于一个点双，建处这个仙人掌的圆方树。
- 最短路径一定是沿着圆方树上的边走，但是走到一个方点相当于走过一个环。
- 环上的最短路很好处理，记录在方点的儿子处。
- 假设 $u, v$ 的 lca 是一个方点，那么特殊分讨即可。

# [省选联考 2023] 城市建造

- 即给定一张 $n$ 个点 $m$ 条边的无向连通图 $G=(V,E)$，询问有多少该图的子图 $G'=(V',E')$，满足 $E'\neq\varnothing$ 且 $G-E'$ 中恰好有 $|V'|$ 个连通块，且任意两个连通块大小之差不超过 $k$，保证 $0\leq k\leq 1$，请输出答案对 998244353 取模的结果。

# [省选联考 2023] 城市建造

- 先思考 $m = n - 1$ 的情况。
- 显然选择的关键点必须连通，转化成树上连通块问题考虑树形背包。
- 枚举连通块个数后，每个连通块的大小就确定了，对于 $k = 0$ 的情况有 $d(n)$ 个，$k = 1$ 时是整除分块，不超过 $O(\sqrt{n})$。
- 观察背包的性质，发现如果一个子树 $>$ 当前连通块大小，则必须选，如果刚好等于只能选一个，否则一定不能选。那么此时背包的第二维就被压成了 $O(1)$。
- 一次 dp 是 $O(n)$ 的，总复杂度即为 $O(n^{1.5})$。

- 好像没有列在课表上，但是我觉得比较重要的内容。
- 已经去掉了省选没有考过的内容。

# 优化建图

- 在众多图论模型之中，如果完整地把图建出来，时空复杂度会不允许。这个时候利用一些题目的特殊性质可以减少点数和边数。

## cf1904f

- 给定一棵 $n$ 个点的树与 $m$ 个限制，每个限制形如“点 $c$ 的权值在 $a$ 至 $b$ 的路径上最大/小”。
- 试为每个点赋 $1 \sim n$ 中互不相同的权值，满足所有限制，或判断不存在。
- $n, m \leq 2 \times 10^5$。

## cf1904f

- 考虑如果 $x < y$ 则连边 $x \to y$。如果这个图没有环则合法，拓扑排序即可。
- 直接建边是 $O(nm)$ 的。
- 树剖+线段树优化建边，复杂度变为 $O(n\log^2 n)$。

# 欧拉路径和哈密顿路径

- 恰好 2 个奇度数点，有欧拉路。没有奇度数点的图有欧拉回路。
- 通过图中所有顶点一次且仅一次的通路称为哈密顿通路，通过图中所有顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路。一般哈密顿路题目只有 $O(2^n poly(n))$ 的做法。

## CF1186F

- 给定 $n$ 个节点，$m$ 条边的无向图，记 $d_i$ 为第 $i$ 个点的度。
- 需要保留不超过 $\lceil \frac{n+m}{2} \rceil$ 条边，并保证对于任意一个点 $i$ 满足 $f_i \geq \lceil \frac{d_i}{2} \rceil$ 其中 $f_i$ 表示 $i$ 点在保留的图中的度。
- 求需要保留哪些边。

## CF1186F

- 假设度数全为偶数，可以找一条欧拉回路。在欧拉回路上每隔一条边删一条即可。
- 由于总度数和一定是偶数，那么一定有偶数个奇度数的点，我们新建一个虚点，向每个奇数点连边。
- 这样就所有点的度数就是偶数了。然后我们考虑删边，由于虚边不能删，与虚边相邻的边其实也不能删（删了那个奇数点就不满足了），也就是说只有两边都是实边的实边才可以删。然后继续隔一个删一个即可。

# 竞赛图

- 定义：$n$ 个点 $\binom{n}{2}$ 条边的有向完全简单图。
- 竞赛图强连通分量缩点之后会形成一条链，拓扑序在前的节点会往后面每一个节点连边。
- 竞赛图必然包含一条哈密顿通路。
- 强连通竞赛图必然包含一条哈密顿回路。

## POI2017 Turysta

- 求强连通竞赛图的哈密顿回路。

## POI2017 Turysta

- 这里给出一个 $O(n^2)$ 的构造。记 $x \to y$ 代表存在 $x$ 到 $y$ 的路径。
- 首先构造哈密顿通路，考虑增量构造。
- 假设我已经求出前 $i-1$ 个点的一个哈密顿通路，考虑将 $i$ 加入。设前面的哈密顿通路起点为 $s$ 终点为 $t$，每个点 $x$ 下一个点为 $nxt_x$。如果 $t \to i$ 或者 $i \to s$ 那么直接将 $i$ 加入这条链即可，将 $t$ 或 $s$ 设成 $i$。
- 否则一定是 $s \to i \to t$。
- 那么显然一定存在一个 $x$ 使得 $x \to i, i \to nxt_x$。将 $i$ 插到 $x, nxt_x$ 之间，即令 $nxt_i = nxt_x, nxt_x = i$ 即可。

## POI2017 Turysta

- 考虑找到第一个 $x$ 使得 $x \to s$，也就是第一可以成环的位置，设为新的 $t$。现在得到了一个环 $s \to nxt_s \to \cdots \to t \to s$。这里我们不把 $t \to s$ 这条边显示出来，也就是说 $nxt_t$ 还是哈密顿通路上的下一个点。另外由于这个图是强连通的，所以一定可以找到这样一个 $x$。
- 然后考虑加入 $nxt_t$，还是设为 $i$。
- 如果 $i \to s$，那么直接扩展即可。否则我们直接找到第一个 $x$ 使得 $i \to x$，那么我们可以简单地构造出下面这样的路径。
- 设 $x$ 的前一个是 $y$，那么构造 $i \to x \to \cdots \to t \to s \to \cdots \to y \to i$。此时为了保证 $nxt_t$ 还是哈密顿通路上的点，我们令 $s = t, t = i$，修改 $nxt_s$ 为原来的 $s$，$nxt_y$ 为 $i$ 即可。由于 $x$ 是第一个 $i \to x$，所以一定有 $y \to i$。

## POI2017 Turysta

- 如果压根找不到 $x$ 呢？仔细想想发现确实有这种情况，因为只有后继节点有一个连向前面那么就保证了强连通的性质。既然如此，那这些点不如直接摆烂，让后面那个点去往前连，比如下面这样
- $i \to x \to \cdots \to t \to s \to \cdots \to y \to nxt_t \to \cdots \to i$。注意这里这里 $nxt_t$ 即 $t$ 在哈密顿通路中的下一个点，即图中圆圈中最左边的点。然后和上面类似，只需把 $nxt_y = i$ 修改为 $nxt_y = nxt_t$，这里 $t$ 是原来的 $t$。注意由于红圈中的点没有向前面连边，那么前面的每个点都会向其中的点连边，所以一定有 $y \to nxt_t$。
- 然后这样一直跑，由于强连通，所以 $x$ 最后一定存在，所以一定会求出一条哈密顿回路其中的一条链，其中起点是 $s$，终点是 $t$ 且 $t \to s$。
- 容易发现这个流程的复杂度为 $O(n^2)$。

## 竞赛图

- 将出度序列从小到大排序得到 $s_i$，设 $sum_i = \sum_{j=1}^{i} s_j$，则该图是竞赛图当且仅当 $\forall 1 \le k \le n, sum_k \ge \binom{k}{2}$。
- 如果是强连通竞赛图则不存在 $1 \le k \le n-1, sum_k = \binom{k}{2}$
- 竞赛图的每一个强连通分量可以看成一个前缀集合，集合中的点到集合外的点的方向全是里 $\to$ 外。

## 补充内容

- 由于讲课的时间有限，所以很多“冷门”算法没有提及，但是为了防止爆冷，在我们还有时间的情况下，多多了解是没有坏处的。
- 弦图（其具体应用还是很常见的）。
- 支配树。
- 斯坦纳树（我不确定这个东西是不是算 dp，如果 dp 课程里没有的话，大家可以自行学习）。
- 最小树形图/最小内向森林。
- 三/四元环计数，这个好像没什么特殊的考法，所以大家可以自行学习。
- 团。
- 线图。
- 图的着色问题。

## 补充内容

- 按照课表，匹配和网络流不是我讲，所以那一部分的内容，今天没有涉及。
- 但是这两个部分也十分重要。

*Thanks!*