23 春季基础算法 B Contest10

ruogu

2023 年 4 月 29 日

题目概览

1. 组合数的函数
2. 又是越狱
3. 杨辉三角形
4. ICPC 参赛

组合数的函数

C_i^m

题目大意

定义函数 $S(n,m)=\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}$，T 组询问，询问 $S(n,m)$ 的值。
$(1\le T\le 10^5, 1\le m\le n\le 2\times 10^5)$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

把它记住

$$\binom{n+1}{m+1}$$

题目大意

定义函数 $S(n, m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{m}$，T 组询问，询问 $S(n, m)$ 的值。
$(1 \le T \le 10^5, 1 \le m \le n \le 2 \times 10^5)$

- 考虑利用如下组合恒等式 $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

组合数的函数

题目大意

定义函数 $S(n,m)=\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}$，T 组询问，询问 $S(n,m)$ 的值。
$(1\le T\le 10^5, 1\le m\le n\le 2\times 10^5)$

- 考虑利用如下组合恒等式 $\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$
- 我们可以对 $S(n,m)$ 尝试进行一些化简!

组合数的函数

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m} &= \binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m} \\
&= \binom{m+1}{m+1}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m} \\
&= \binom{m+2}{m+1}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{n}{m} \\
&= \binom{n}{m+1}+\binom{n}{m} \\
&= \binom{n+1}{m+1}
\end{aligned}
$$

组合数的函数

- 因此问题就变为了每次询问求一个组合数

组合数的函数

- 因此问题就变为了每次询问求一个组合数
- 根据组合数的定义式 $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$，我们可以先线性预处理出所有排列数与排列数的逆元，随后便可以 $O(1)$ 回答每次询问。

组合数的函数

- 因此问题就变为了每次询问求一个组合数
- 根据组合数的定义式 $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$，我们可以先线性预处理出所有排列数与排列数的逆元，随后便可以 $O(1)$ 回答每次询问。
- 关于预处理主要利用了如下两个式子:

$$pre[i] = pre[i-1] * i\% mod \quad inv[i] = inv[i+1] * (i+1)\% mod$$

$O(\log n)$ $inv[N] = modinv(fac[N])$

其中

$$pre[i] = i! \quad inv[i] = \frac{1}{i!}$$

$\frac{1}{(N-1)!} = \frac{1}{N!} \cdot N.$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = pre[n] * inv[m] * inv[n-m]$$

组合数的函数

- 因此问题就变为了每次询问求一个组合数
- 根据组合数的定义式 $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$，我们可以先线性预处理出所有排列数与排列数的逆元，随后便可以 $O(1)$ 回答每次询问。
- 关于预处理主要利用了如下两个式子:

$$pre[i] = pre[i-1] * i\% mod \; inv[i] = inv[i+1] * (i+1)\% mod$$

其中

$$pre[i] = i! \; inv[i] = \frac{1}{i!}$$

- 时间复杂度 $O(T)$

又是越狱

题目大意

n 个相邻的位置，每个位置可以染 m 种颜色，问不超过 k 对相邻位置颜色相同的染色方案数。

$(1 \le n, m \le 2 \times 10^5, 0 \le k \le n-1)$

又是越狱

题目大意

n 个相邻的位置，每个位置可以染 m 种颜色，问不超过 k 对相邻位置颜色相同的染色方案数。
$(1 \le n, m \le 2 \times 10^5, 0 \le k \le n-1)$

- 提供两种思路，递推与组合意义直接计算。

题目大意

n 个相邻的位置，每个位置可以染 m 种颜色，问不超过 k 对相邻位置颜色相同的染色方案数。
$(1 \le n, m \le 2\times 10^5, 0 \le k \le n-1)$

- 提供两种思路，递推与组合意义直接计算。
- 对于递推，考虑 f[i][j] 表示当前染到 i 位置，前面一共有 j 对相邻位置同色的方案数。

$$f[n][m] = (m-1)f[n-1][m-1] + f[n-1][m]$$

$i+T=n$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$m\ (m-1)(m-1)(m-1)\ \cdots$

$\binom{n-1}{i} *$

1 2/3 4 5/6 7/8/9 10 11

合并后有T个格子(T,m表示)：$m*(m-1)^{T-1}$

又是越狱

题目大意

n 个相邻的位置，每个位置可以染 m 种颜色，问不超过 k 对相邻位置颜色相同的染色方案数。
$(1 \le n, m \le 2 \times 10^5, 0 \le k \le n-1)$

- 提供两种思路，递推与组合意义直接计算。
- 对于递推，考虑 f[i][j] 表示当前染到 i 位置，前面一共有 j 对相邻位置同色的方案数。
- 则对于 i 位置，染色要么与 i - 1 位置同色 (方案为 f[i - 1][j - 1])，要么与 i - 1 位置异色 (方案为 (m - 1) $\times$ f[i - 1][j])。

又是越狱

题目大意

n 个相邻的位置，每个位置可以染 m 种颜色，问不超过 k 对相邻位置颜色相同的染色方案数。
$(1 \le n, m \le 2 \times 10^5, 0 \le k \le n - 1)$

- 提供两种思路，递推与组合意义直接计算。
- 对于递推，考虑 f[i][j] 表示当前染到 i 位置，前面一共有 j 对相邻位置同色的方案数。
- 则对于 i 位置，染色要么与 i - 1 位置同色 (方案为 f[i - 1][j - 1])，要么与 i - 1 位置异色 (方案为 (m - 1) $\times$ f[i - 1][j])。
- 故有 f[i][j] = f[i - 1][j] * (m - 1) + f[i - 1][j - 1]，初始条件为 f[1][0] = 0。

又是越狱

题目大意

n 个相邻的位置，每个位置可以染 m 种颜色，问不超过 k 对相邻位置颜色相同的染色方案数。
$(1 \leq n, m \leq 2 \times 10^5, 0 \leq k \leq n-1)$

- 提供两种思路，递推与组合意义直接计算。
- 对于递推，考虑 f[i][j] 表示当前染到 i 位置，前面一共有 j 对相邻位置同色的方案数。
- 则对于 i 位置，染色要么与 i - 1 位置同色 (方案为 f[i - 1][j - 1])，要么与 i - 1 位置异色 (方案为 (m - 1) × f[i - 1][j])。
- 故有 f[i][j] = f[i - 1][j] * (m - 1) + f[i - 1][j - 1]，初始条件为 f[1][0] = 0。
- 然而如果直接递推计算的话复杂度是 $O(n^2)$ 的，有没有优化计算的方法呢？

又是越狱

- 在杨辉三角中,f[i][j] 的一种含义为从 (0,0) 到 (i,j) 的所有合法路径的权值和，其中每条合法路径初始权值为 f[1][1], 每次可以选择向下方走或者向右下方走，权值均不变。

又是越狱

- 在杨辉三角中,f[i][j] 的一种含义为从 (0,0) 到 (i,j) 的所有合法路径的权值和，其中每条合法路径初始权值为 f[1][1], 每次可以选择向下方走或者向右下方走，权值均不变。
- 对于递推式 f[i][j] = f[i - 1][j] * (m - 1) + f[i - 1][j - 1]，我们同样可以用这样一种视角来解读:f[i][j] 的含义为从 (1,0) 到 (i,j) 的所有合法路径的权值和，其中每条合法路径初始权值为 f[1][0], 每次可以选择向下方走同时权值乘以 (m-1), 或者向右下方走权值不变。

又是越狱

- 在杨辉三角中,f[i][j] 的一种含义为从 (0,0) 到 (i,j) 的所有合法路径的权值和，其中每条合法路径初始权值为 f[1][1], 每次可以选择向下方走或者向右下方走，权值均不变。
- 对于递推式 f[i][j] = f[i - 1][j] * (m - 1) + f[i - 1][j - 1]，我们同样可以用这样一种视角来解读:f[i][j] 的含义为从 (1,0) 到 (i,j) 的所有合法路径的权值和，其中每条合法路径初始权值为 f[1][0], 每次可以选择向下方走同时权值乘以 (m-1), 或者向右下方走权值不变。
- 对于某个 f[i][j], 从 (1,0) 走到 (i,j) 的所有合法路径权值均为一个定值:$m \times (m-1)^{i-1-j}$，这是因为所有路径均向下方走了 i - 1 - j 次，每次权值均会乘以 (m-1)。而总的路径数为 $\binom{i-1}{j}$, 这可以由杨辉三角的含义得出。

又是越狱

- 在杨辉三角中,f[i][j] 的一种含义为从 (0,0) 到 (i,j) 的所有合法路径的权值和，其中每条合法路径初始权值为 f[1][1], 每次可以选择向下方走或者向右下方走，权值均不变。
- 对于递推式 f[i][j] = f[i - 1][j] * (m - 1) + f[i - 1][j - 1]，我们同样可以用这样一种视角来解读:f[i][j] 的含义为从 (1,0) 到 (i,j) 的所有合法路径的权值和，其中每条合法路径初始权值为 f[1][0], 每次可以选择向下方走同时权值乘以 (m-1), 或者向右下方走权值不变。
- 对于某个 f[i][j], 从 (1,0) 走到 (i,j) 的所有合法路径权值均为一个定值:$m \times (m-1)^{i-1-j}$，这是因为所有路径均向下方走了 i - 1 - j 次，每次权值均会乘以 (m-1)。而总的路径数为 $\binom{i-1}{j}$, 这可以由杨辉三角的含义得出。
- 因此我们可以得到 f[i][j] $= m \times (m-1)^{i-1-j} \times \binom{i-1}{j}$。

又是越狱

- 而答案即为 $\sum_{i=0}^{k} f[n][i]$, 使用快速幂以及第一题提到的预处理手段即可在 $O(KlogK)$ 内求得答案。

又是越狱

- 而答案即为 $\sum_{i=0}^{k} f[n][i]$，使用快速幂以及第一题提到的预处理手段即可在 $O(KlogK)$ 内求得答案。
- 对于组合意义，可以考虑首先固定第一个位置的颜色，共 m 种，再在剩下的 n - 1 个位置中选择 i 个位置染与前一个位置相同的颜色，方案数为 $\binom{n-1}{i}$，对于其余 $n-1-i$ 个位置，其需要与前一个位置的颜色不同，方案数为 $(m-1)^{n-1-i}$。因此 n 个位置中有 i 对相邻位置同色的方案数为 $m \times (m-1)^{n-1-i} \times \binom{n-1}{i}$。

又是越狱

- 而答案即为 $\sum_{i=0}^{k} f[n][i]$，使用快速幂以及第一题提到的预处理手段即可在 $O(KlogK)$ 内求得答案。
- 对于组合意义，可以考虑首先固定第一个位置的颜色，共 m 种，再在剩下的 n - 1 个位置中选择 i 个位置染与前一个位置相同的颜色，方案数为 $\binom{n-1}{i}$，对于其余 $n-1-i$ 个位置，其需要与前一个位置的颜色不同，方案数为 $(m-1)^{n-1-i}$。因此 n 个位置中有 i 对相邻位置同色的方案数为 $m \times (m-1)^{n-1-i} \times \binom{n-1}{i}$。
- 后续与递推方法一样求个前缀和即可。

$$\sum_{i=0}^{k} m(m-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}$$

klogk / k

每挪一个乘一个(m-1)：O(k)

杨辉三角形

题目大意

将杨辉三角中的数按从上到下、从左到右的顺序把所有数排成一列，可以得到一个数列 P。给定一个正整数 N，求 N 第一次在 P 中出现的位置 $(1 \le \boxed{N} \le 10^9)$

$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$

每一行递增

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$\binom{n}{2} \ge 10^9$ $n = 10^5$.

$\binom{n}{3} \ge 10^9$ $n(n-1)(n-2) \ge 6\times10^9$ $n = 2000$

$\binom{n}{4} \ge 10^9$

$\binom{n}{5} \ge 10^9$

$2000^2 + 10^5$

否则：$\binom{n}{1} = n$.

杨辉三角形

题目大意

将杨辉三角中的数按从上到下、从左到右的顺序把所有数排成一列，可以得到一个数列 P。给定一个正整数 N，求 N 第一次在 P 中出现的位置 $(1 \leq N \leq 10^9)$

- 首先对于杨辉三角，其每一行是对称的，因此我们只考虑一行中递增的前半段。

杨辉三角形

题目大意

将杨辉三角中的数按从上到下、从左到右的顺序把所有数排成一列，可以得到一个数列 P。给定一个正整数 N，求 N 第一次在 P 中出现的位置 $(1 \leq N \leq 10^9)$

- 首先对于杨辉三角，其每一行是对称的，因此我们只考虑一行中递增的前半段。
- 再细分讨论，讨论答案位置为在第四列及之后列与第三列之前这两种情况。

$\geq \binom{n}{3}$ 0 1 2.

杨辉三角形

题目大意

将杨辉三角中的数按从上到下、从左到右的顺序把所有数排成一列，可以得到一个数列 P。给定一个正整数 N，求 N 第一次在 P 中出现的位置 $(1 \le N \le 10^9)$

- 首先对于杨辉三角，其每一行是对称的，因此我们只考虑一行中递增的前半段。
- 再细分讨论，讨论答案位置为在第四列及之后列与第三列之前这两种情况。
- 对于前者，考虑到对于杨辉三角中的第 k 行，其第四列及以后均为一个关于 k 的三次以上多项式，故可以打一个大小为 $\boxed{(\sqrt[3]{N})^2}$ 的杨辉三角表，表外的每一行中的第四列及后续列中的元素大小均超过了 10^9，所以不需要考虑。

$<[2000]^2$ -

杨辉三角形

- 对于表内的超过 10^9 的元素也不需要考虑，如果表内某个元素恰好是 N，则用其位置对答案取 Min。

杨辉三角形

- 对于表内的超过 10^9 的元素也不需要考虑，如果表内某个元素恰好是 N，则用其位置对答案取 Min。
- 对于位置在第三列这种情况，说明存在某个 i 使得 $N \times 2 = i * (i-1)$。这意味着 $N \times 2$ 介于两个相邻的完全平方数 $(i-1)^2$ 与 i^2 之间。因此有 $\left\lfloor \sqrt{N \times 2} \right\rfloor = i - 1$，借助该式求得 i 并检查是否满足 $N \times 2 = i * (i-1)$ 即可。对于第二列与第一列的情形相信大家都会计算。

$\binom{N}{2} = X$

杨辉三角形

- 对于表内的超过 10^9 的元素也不需要考虑，如果表内某个元素恰好是 N，则用其位置对答案取 Min。
- 对于位置在第三列这种情况，说明存在某个 i 使得 $N \times 2 = i * (i-1)$。这意味着 $N \times 2$ 介于两个相邻的完全平方数 $(i-1)^2$ 与 i^2 之间。因此有 $\lfloor \sqrt{N \times 2} \rfloor = i - 1$，借助该式求得 i 并检查是否满足 $N \times 2 = i * (i-1)$ 即可。对于第二列与第一列的情形相信大家都会计算。
- 因此时间复杂度为 $\boxed{O(\sqrt[3]{N})^2}$

$\frac{6 \times 5}{2} = 15$

$\frac{7 \times 6}{2} = 21.$

ICPC 参赛

题目大意

n 位同学，每位同学有一个能力值，问选出三名同学且其相互之间能力值之差不超过 X 的方案数。
$(1 \le n \le 5 \times 10^5, 1 \le a_i, X \le 10^9)$

题目大意

n 位同学，每位同学有一个能力值，问选出三名同学且其相互之间能力值之差不超过 X 的方案数。
$(1 \le n \le 5 \times 10^5, 1 \le a_i, X \le 10^9)$

- 首先对 n 位同学的能力值排序，然后考虑固定能力值最小的那位同学位置为 i，那么要求的即为选择另外两位同学的合法方案数。

$X=8$

$4 \quad 5 \quad \boxed{5 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 13} \quad 15 \quad 17$

左　　　　　　　　右

$\binom{6}{2}$

题目大意

n 位同学，每位同学有一个能力值，问选出三名同学且其相互之间能力值之差不超过 X 的方案数。
$(1 \le n \le 5 \times 10^5, 1 \le a_i, X \le 10^9)$

- 首先对 n 位同学的能力值排序，然后考虑固定能力值最小的那位同学位置为 i，那么要求的即为选择另外两位同学的合法方案数。
- 利用能力值之差的限制，通过二分查找可以得出可选择的能力值最大的同学的位置 pos_i，因此对于 i 位置方案为 $\binom{pos_i - i}{2}$

题目大意

n 位同学，每位同学有一个能力值，问选出三名同学且其相互之间能力值之差不超过 X 的方案数。
$(1 \le n \le 5 \times 10^5, 1 \le a_i, X \le 10^9)$

- 首先对 n 位同学的能力值排序，然后考虑固定能力值最小的那位同学位置为 i，那么要求的即为选择另外两位同学的合法方案数。
- 利用能力值之差的限制，通过二分查找可以得出可选择的能力值最大的同学的位置 pos_i，因此对于 i 位置方案为 $\binom{pos_i - i}{2}$

$a[pos_i] - a[i] \le X$

- 最终答案即为 $\sum_{i=1}^{n} \binom{pos_i - i}{2}$

The End

谢谢大家