训练赛5题解

November 25, 2023

count

解法

我们先证明如下引理:

引理

对于$A \subseteq \mathbb{Z}_n$，若$S \triangleq A + (\mathbb{Z}_n \setminus A) \neq \mathbb{Z}_n$，则存在正整数$m|n$满足

- A 和S的周期为p，即对于任意的$i \in \mathbb{Z}_n$, $i \in A$ (同样的，$i \in S$) 当且仅当$i + p \in A$ (同样的，$i + p \in S$)。这里的加法是模n意义下的加法。
- 更进一步，存在唯一的$0 \leq x < p$，使得$x \notin S$.

我们首先利用反证法证明上述性质。
若结论不然，令p_0为最小周期，则存在$0 \leq x_0 < x_1 < p_0$使得$x_0, x_1 \notin S$。由S的定义，对于任意的$i, j \in \mathbb{Z}_n$满足$i - j = x_1 - x_0$，我们有$i \in A$当且仅当$j \in A$。此时不难验证$\gcd(p_0, x_1 - x_0)$为A和S的周期，矛盾。

count

解法

由上述引理，给定周期p以及$0 \le x < p$，令

$$S_{p,x} = \{i \in \mathbb{Z}_n \mid i \equiv x \mod p\}.$$

我们考虑$A + (\mathbb{Z}_n \setminus A) = S_{p,x}$的个数$f_{p,x}$。
为了求出$f_{p,x}$，我们考虑有多少周期为p的集合A满足$x \notin A + (\mathbb{Z}_n \setminus A)$。一方面，上述恰好等于$\sum_{d|p} f_{d,x \mod d}$。而另一方面，上述集合的个数$g_{p,x}$恰好等于下列方程解的个数:

- $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1} \in \{0, 1\}$;
- 对于任意的$0 \le i, j < p$满足$i + j \equiv x \mod p$，$z_i = z_j$;
- 另外有m个形如$z_i = 0$或者$z_i = 1$的约束。

不难发现上述集合个数恰好为0或者2的幂次的形式，至多$O(m^2)$个x需要额外讨论$g_{p,x}$的取值，且所有取值都可在$O(1)$时间内得到。

count

解法

可以发现对于最终的答案，我们只需要求$\sum_{d|n}\sum_{0\le x<d} f_{d,x}$即可。由上述讨论有恒等式$\sum_{d|p} f_{d,x} \mod d = g_{p,x}$。因此，由莫比乌斯变换，

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\sum_{0\le x<d} f_{d,x} &= \sum_{d|n}\sum_{0\le x<d}\sum_{r|d}\mu(d/r)g_{r,x} \mod d \\ &= \sum_{r|n}\sum_{0\le x<r} g_{r,x}\left(\sum_{d|n/r}\mu(d)d\right)\end{aligned}$$

综合以上讨论，问题可以在$O(m^2 d(n))$内解决，其中$d(n)$为n的因子个数（10^{18}内的数其因子个数不超过103680）。

xor

- 考虑判定问题：判定某个单组询问答案是否小于等于k。
- 将所有权重小于等于k的边加入，不妨假设s和t连通。考虑该连通分支的一个生成树，令W_u为通过树边从s走到u的异或和，则s到t能达成的数集合为：

$$W_t \oplus span(\{W_u \oplus W_v \oplus w_e | e = (u, v)\text{是非树边}\}).$$

- 这是一个典型的可以用线性基解决的问题，对于单个询问我们可以逐次加入边（利用并查集等数据结构）进行判定。
- 对于多组询问，我们考虑将询问挂在对应的节点上，同样的按照边权从小到大加入边，通过启发式合并离线同时处理这一系列询问。

gamble

- 策略：设置赢到R分或者输到L分停止游戏进行结算。
- 计算给定L, R后，赢到R分的概率：令p_i为从i分出发赢到R分的概率。

$$p_i = pp_{i+1} + (1-p)p_{i-1},$$

其中边界条件$p_R = 1$，$p_{-L} = 0$。通过特征方程$x = px^2 + 1 - p$可知p_i的形式为$p_i = A\left(\frac{1-p}{p}\right)^i + B$。
- 得到概率后，可以证明目标函数具有凸性，可以通过三分等方式得到最优L, R取值范围（需要注意，当x接近100，p接近50时，L, R具有较大的上界）