

# 图论专题

吴戈

2024 年 2 月 15 日

由于图论知识点不多，一般都是根据每题不同的性质而得出不同的解法。  
所以本节课主要靠一些题目帮助大家找到做这类题的方法。

## Problem

$n$  个点  $m$  条边的有向图，边有黑白两色，你需要构造一种给点黑白染色的方案，使得在白点只能走它连出的白边，黑点只能走它连出的黑边时，1 到  $n$  的最短路最长，无法到达视为  $+\infty$ 。

$$n, m \leq 5 \times 10^5$$

## Problem

定义一条路径的权值为路径上所有边的编号直接相连所得到的十进制数的大小。求 1 到每个点的最短路,  $\text{mod } 10^9 + 7$ 。

$$n \leq 10^5$$

## Problem

构造不降序列  $a_1 \dots a_n$  满足  $1 \leq a_i \leq k$  以及  $m$  条约束, 约束形如:

- $a_i \neq w$
- $a_i + a_j \leq w$
- $a_i + a_j \geq w$

构造任意一个合法序列或报告无解。

## Problem

交互题。一张未知竞赛图，至多询问  $2n$  次  $(i, S)$  得到  $i \rightarrow j, j \in S$  的  $j$  的数量，求有多少个点  $u$  满足  $u \rightsquigarrow v$  对于任意  $v$  均存在。  
 $n \leq 250$ 。

## Problem

给定一张 DAG, 给每条边一个 1 或 2 的权值使得所有 1 到  $n$  的路径长度相等或报告无解。

$n \leq 10^3$ ,  $m \leq 5 \times 10^3$ 。

## Problem

对一个长度为  $n$  的合法括号序列  $s$ , 给出  $q$  个限制:  $s_{l_i \sim r_i}$  中左括号比右括号多  $c_i$  个。构造一个满足限制的合法括号序列或报告无解。  
 $n \leq 3000, q \leq 5 \times 10^5$ 。



## Problem

给定一张有向图，从 1 出发走到  $n$ ，每个时刻可以选择一种操作执行：

- 永久 ban 掉一条边。
- 随机走一条出边。

求最优策略下最劣要经过多少时刻。保证有解。

$n, m \leq 2 \times 10^5$ 。

## Problem

给定一张  $n$  个点  $m$  条边的 DAG 和源点  $s$ , 边  $e(u, v)$  的权值  $w_e$  是  $p - l_v$ , 其中  $l_v$  是  $s$  到  $v$  经过的最短边数。对于每个点  $t$ , 求一条边  $e$  满足  $s$  到  $t$  一定经过  $e$ , 且  $w_e$  最大。  
 $p \geq n$ ,  $n, m \leq 10^6$ 。

## Problem

给定四个长度为  $n$  的序列  $a, b, p, q$ , 判断能否通过以下操作使  $a = b$ :

- 选定区间  $[l, r] \subseteq [1, n]$  满足  $p_l \leq r$ , 给  $a_{l \sim r}$  减一。
- 选定区间  $[l, r] \subseteq [1, n]$  满足  $l \leq q_r$ , 给  $a_{l \sim r}$  加一。

$\sum n \leq 5 \times 10^5$ ,  $0 \leq a_i, b_i \leq 10^9$ ,  $0 \leq q_i \leq i \leq p_i \leq n + 1$ 。

部分分:  $n \leq 100$ ,  $n \leq 5000$ 。

## Problem

$n$  个点的竞赛图,  $i \neq j$  之间的边有  $\frac{a_i}{a_i+a_j}$  的概率是  $i \rightarrow j$ , 否则是  $j \rightarrow i$ 。求缩点后第一个强连通分量的期望大小。  
 $n \leq 14$ 。

## Problem

数轴上顺次有  $n$  个点  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。有一只小青蛙，初始时在  $a_s$  处。小青蛙有两个参数：步长  $d$  和灵活程度  $k$ 。其中，步长  $d$  是确定的，而灵活程度  $k$  是可以调整的。小青蛙可以从某个点跳到另一个点。但这是有要求的：小青蛙能从  $a_i$  跳到  $a_j$ ，当且仅当  $d - k \leq |a_i - a_j| \leq d + k$ 。给定  $a_1, \dots, a_n$  和  $d$ 。你需要回答  $q$  次询问，每次询问给定一个灵活程度  $k$  和一个下标  $i$ ，你需要回答：此时的小青蛙能否跳到  $a_i$ ？

保证  $1 \leq n, q \leq 2 \times 10^5$ ,  $1 \leq s, i \leq n$ ,  $1 \leq a_i, d, k \leq 10^6$ ,

$a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。

## Problem

给定一张  $n$  个点  $m$  条边的带边权无向图,  $q$  次询问给定  $a_i, s_i, t_i$ , 问如果把第  $a_i$  条边的权值加一,  $s_i$  到  $t_i$  的最小瓶颈是否会增加一。  
 $n, m, q \leq 2 \times 10^5$ 。