实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

蛟龙四班

算法复杂度分析、枚举

Mas

IO流重定向

在一般情况下,程序默认从控制台中进行输入$stdin$和输出$stdout$

通过文件重定向可以从文件进行输入和输出

从$data.in$文件中读入:

```
freopen("data.in", "r", stdin);
```

向$data.out$文件输出:

```
freopen("data.out", "w", stdout);
```

快速读入

一般情况下$C/C++$读取数据是以字节流的形式读取,速度较慢

$C++$快读(字符流读入)在数据量级

```
int read()
{
    int x = 0, f = 1;
    char ch = getchar();
    while (ch < '0' || ch > '9')
    {
        if (ch == '-')
            f = -1;
        ch = getchar();
    }
    while (ch >= '0' && ch <= '9')
    {
        x = (x << 1) + (x << 3) + (ch ^ 48);
        ch = getchar();
    }
    return x * f;
}
```

#86、判断质数

【题目描述】

质数(又称为素数)，只能被 1 和本身除尽，输入一个整数，判断是否质数。

【输入格式】

输入一个整数 a。($0 \le a \le 10^{16}$)

【输出格式】

如果是质数，输出 `TRUE` ，否则输出 `FALSE` 。

【输入样例】

```
11
```

【输出样例】

```
TRUE
```

在 $2 \sim n-1$ 范围内寻找n的因子

如果能找到因子,那么说明n不是质数

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
    long long n;
    cin >> n ;

    for(int i = 2 ; i < n-1 ; i++)
    {
        if( n % i == 0  )
            cout << "FALSE";
    }
    cout << "TRUE";
    return 0;
}
```

输入 6 将会输出什么?

这个程序有没有问题?

#86、判断质数

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main()
{
	long long n;
	cin >> n ;
	int f = 1; //初始时 f = 1
	if( n < 2 ) //  小于 2  的整数都不是质数
		f = 0;
	for(int i = 2 ; i < n-1 ; i++)
		if( n % i == 0  )
		{
			f = 0; //找到因子 f = 0
			break; //  跳出(结束)当前循环
		}
	if(  f == 1  ) //根据f的值输出结果
		cout << "TRUE";
	else
		cout << "FALSE";
	return 0;
}
```

当break被执行时,将会结束当前层的循环

当continue被执行时,将会跳过当前这一次的循环(尝试执行下一次循环)

当输入 −1000 时将会输出什么?

结果是否正确?

当你提交这份代码,将会得到

评测详情

测试点 #1	Accepted	memory:1.75 MB	time: 46 ms
测试点 #2	Accepted	memory:604 KB	time: 43 ms
测试点 #3	Accepted	memory:648 KB	time: 53 ms
测试点 #4	Accepted	memory:648 KB	time: 42 ms
测试点 #5	Time Limit Exceed	memory:1.65 MB	time: 1.00 s
测试点 #6	Accepted	memory:624 KB	time: 42 ms
测试点 #7	Accepted	memory:624 KB	time: 26 ms
测试点 #8	Accepted	memory:1.74 MB	time: 43 ms
测试点 #9	Time Limit Exceed	memory:1.78 MB	time: 1.00 s
测试点 #10	Time Limit Exceed	memory:1.78 MB	time: 1.00 s

算法复杂度

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

- **TLE：**

  $Time\ Limit\ Exceeded$ 程序运行超过了时间限制

- **MLE：**

  $Memory\ Limit\ Exceeded$ 程序运行时使用了超过内存限制的空间

算法的复杂度是用来衡量算法好坏的一个指标,常用时间复杂度和空间复杂度

它们一般都是关于输入数据量的函数,例如$O(n), O(n^2), O(\log n)$

时间复杂度简单分析

时间复杂度只关心算法中最耗时的部分,舍去常数部分(包括附加项和系数),通常用简单的函数O来表示

时间复杂度为$O(n)$

```
for( int  i = 1 ; i <= n ; i++ )
    cout << i << endl;
```

时间复杂度为$O(n \times m)$

```
for( int  i = 1 ; i <= n ; i++ )
    for( int  j = 1 ; j <= m ; j++ )
        cout << i <<" " << j << endl;
```

时间复杂度为$O(\log\ n)$

```
while( n  > 0 )
    n /= 2;
```

这段代码时间复杂度为?

```
for( int  i = 1 ; i <= n ; i++ )
    for( int  j = 1 ; j <= i ; j++ )
        cout << i <<" " << j << endl;
```

#86、判断质数

上一份代码时间复杂度为 $O(n)$

n 极限情况能到达 10^{16}，如果输入的 n 是一个接近10^{16} 的质数

$1000\ ms$ 不可能得出结果

对于判断质数, 只需要考虑 $[2,\sqrt{n}]$ 的因子即可

所有数的因子都是成对出现的(平方数可看作完全相同的一对因子)

对于大于2的合数 n，其必然有一个因子在 $[2,\sqrt{n}]$ 范围内

即 $a \times b = n$ ， $a \le \sqrt{n}, b \ge \sqrt{n}$

- 若 $a < \sqrt{n}, b < \sqrt{n}, a \times b < n$，与条件不符
- 若 $a > \sqrt{n}, b > \sqrt{n}, a \times b > n$, 与条件不符

```
for(int i = 2 ; i * i <= n ; i++)
    if( n % i == 0  )
    {
        f = 0;
        break;
    }
```

这种写法会导致数据溢出

如果一定要写成乘法,应该怎么样才不会溢出呢?

```
for(int i = 2 ; i  <= n / i ; i++)
    if( n % i == 0  )
    {
        f = 0;
        break;
    }
```

时间复杂度 $O(\sqrt{n})$

时间复杂度简单分析

时间限制： $1000ms$能干些什么？

数量级小于等于$\mathbf{10^8}$基本上可以认为在$1000ms$不会超时

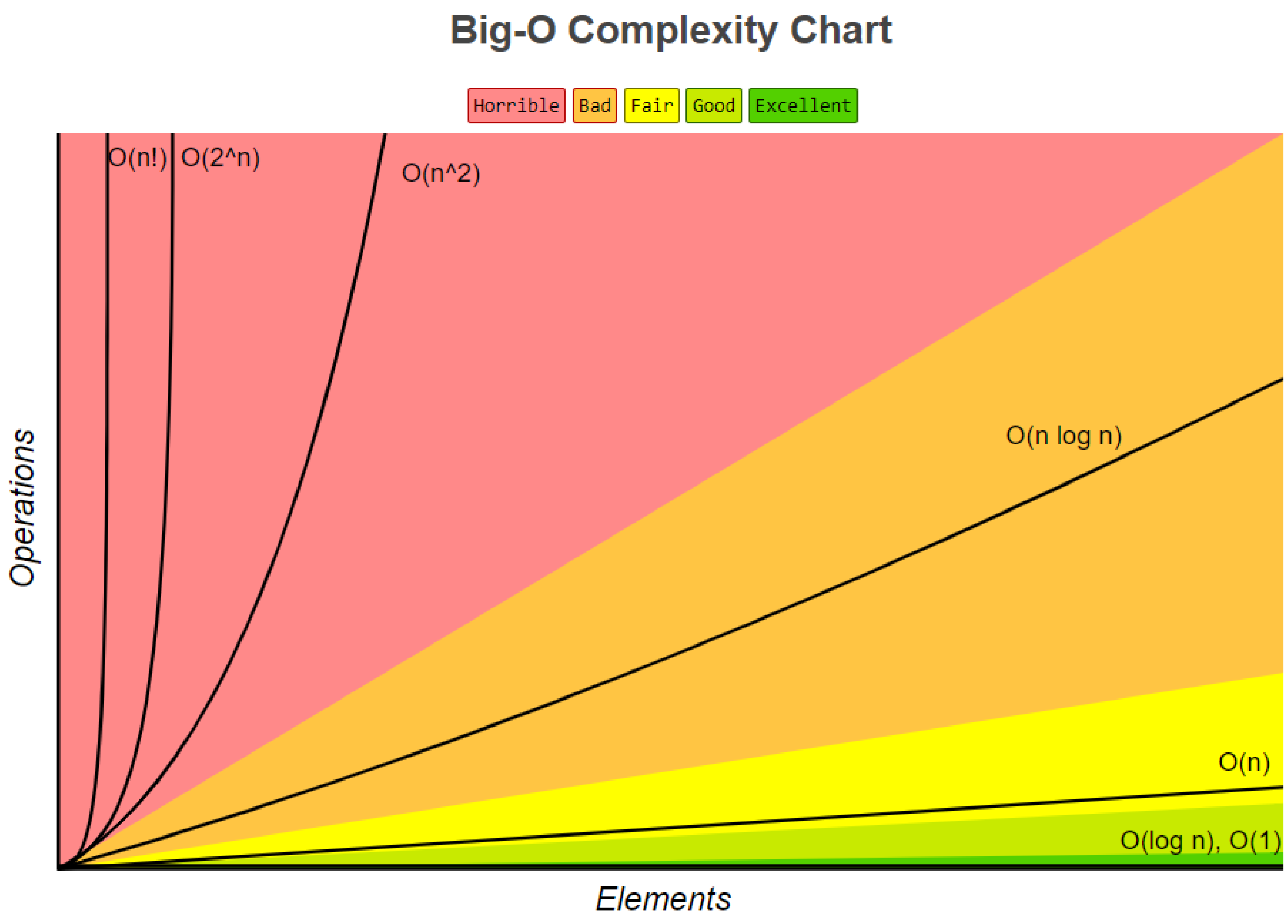
根据评测机器的性能,如果数量级超过10^8 ,将会超时

时间复杂度	1000ms处理数据量
$O(n)$	$\le 10^8$
$O(n^2)$	$\le 10^4$
$O(n^3)$	≤ 450
$O(n!)$	≤ 11
$O(2^n)$	≤ 26
$O(n\log n)$	$\le 5\times 10^5$
$O(\sqrt{n})$	$\le 10^{16}$
$O(\log n)$	\
1	\

上表仅供参考(未考虑输入输出耗时)

请以具体评测机性能为准

时间复杂度简单分析



图表来源：https://www.bigocheatsheet.com/

随着数据规模的增大

不同时间复杂度的执行次数增长速率不同

我们最希望能够得到常数级别的时间复杂度

空间复杂度

- 空间限制,256MB能干些什么?
- $256\ MB\ =\ 2^8\ MB\ =\ 2^{18}\ KB\ =\ 2^{28}\ Byte$
- $4\ Byte\ =\ 1\ int$ (32位)
- $256MB\ =\ 2^{26}\ =\ 67{,}108{,}864\ \approx\ 6*10^7$个$int$
- 256MB的内存空间最多大约能开的int数组长度为60000000

在函数内声明的基本数据类型都分配在栈上,在函数外声明的数据类型都分配在堆上
很多OJ对于栈内存大小限制为128MB,如果需要分配较多空间,建议写在函数外

枚举

枚举就是根据提出的问题,一一列出该问题的所有可能的解

逐一列出,检验每个可能解是否是问题的正解,如果是就采纳,如果不是就继续判断下一个

枚举法一般比较直观,容易理解,但由于要检查所有的可能解,因此**效率往往不高**

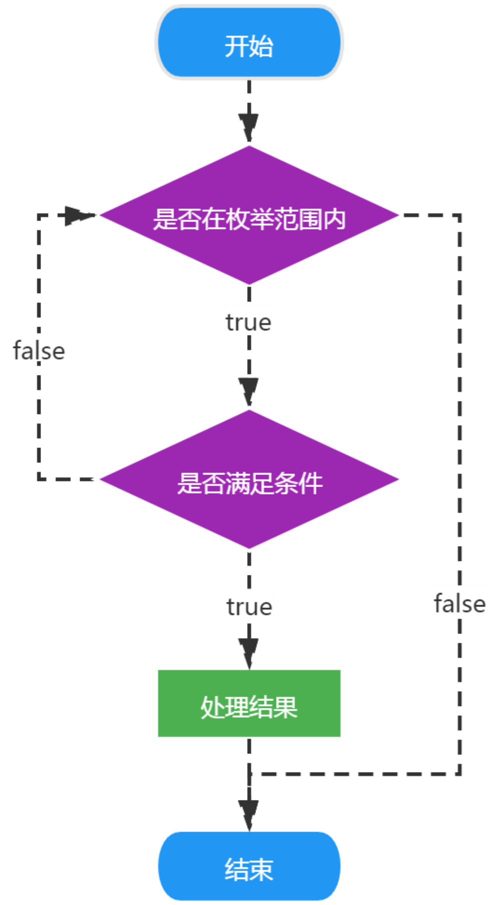
能够用枚举法解决的题目往往是最简单的一类题目

这种题目具有以下特点:

1. 解枚举范围是有穷的
2. 检验条件是确定的

枚举题解题解题套路

- **确定枚举范围**
- **写出条件判断表达式**



#1603、整除的数(加强版)

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校 LAB

题目描述

1、2、3……n 这 $n(0<n\le 10^{18})$ 个数中有多少个数可以被正整数 b 整除。

输入

第一行包含一个整数 $T(1\le T\le 10^5)$

每组数据占一行，每行给出两个正整数 $n(0<n\le 10^{18})$、$b(1\le b\le 10^{18})$。

输出

输出每组数据相应的结果。

样例输入

```
3
2 1
5 3
10 4
```

样例输出

```
2
1
2
```

对于每次询问,枚举所有倍数,时间复杂度$O(TN)$

根据整除的性质易知 $1\sim n$ 中 能被 b整除的数个数为$\left\lfloor\frac{n}{b}\right\rfloor$

直接计算即可

时间复杂度$O(T)$

#872、回文日期

实验舱 青少年编程 LAB 走近科学 走进名校

题目描述

给你两个合法日期 a, b (保证 b 在 a 之后,用 8 位整数表示,前 4 位代表年份,然后 2 位代表月份,最后 2 位代表日期

众所周知闰年的时候, 2 月份是有 29 天的,而且只有当年份是 400 的倍数,或者是 4 的倍数但不是 100 的倍数,才是闰年

一个整数是回文的,表示,从前向后的每一位整数,和从后向前的每一位整数是相同的,也可以说它是对称的

例如 20100102 就是回文的,并且代表 2010 年 1 月 2 日

对于从 a 到 b 的所有日子(用 8 位数表示),需要你统计有多少个是回文的

输入格式

两行,每行一个 8 位数字
第一行是起始日期
第二行是结束日期

输出格式

一个整数,代表从起始日期到结束日期中是回文的个数

样例输入

```
20110101
20111231
```

样例输出

```
1
```

考虑将日期当作一个整数

枚举 $s \sim e$范围内所有整数

- 合法日期
- 回文日期

最坏情况下枚举范围为$10101 \sim 99991231$

考虑枚举 $\left\lfloor\frac{s}{10000}\right\rfloor \sim \left\lfloor\frac{e}{10000}\right\rfloor$,作为年份

对于每个年份可以组合出一个回文数日期

验证每个日期是否合法

同时验证该回文数是否在 $s \sim e$ 范围内即可

#1847、递增三元组

题目描述

给定三个整数数组

$$A = [A_1, A_2, \dots A_N]$$

$$B = [B_1, B_2, \dots B_N]$$

$$C = [C_1, C_2, \dots C_N]$$

请你统计有多少个三元组 (i, j, k) 满足:

$$1 \le i, j, k \le N, A_i < B_j < C_k$$

输入格式

第一行包含一个整数 N 。
第二行包含 N 个整数 $A_1, A_2, \dots, A_N$ 。
第三行包含 N 个整数 $B_1, B_2, \dots, B_N$ 。
第四行包含 N 个整数 $C_1, C_2, \dots, C_N$ 。

输出格式

一个整数表示答案。

输入样例:

```
3
1 1 1
2 2 2
3 3 3
```

输出样例:

```
27
```

数据范围

对于全部数据: $1 \le N \le 10^5, 0 \le A_i, B_i, C_i \le 10^5$

#1847、递增三元组

枚举三个数

时间复杂度$O(n^3)$

考虑将三个数组排序

枚举两个数第三个数二分查找验证是否存在

时间复杂度 $O(n^2\log n)$

尝试枚举中间的数 B_i

二分查找统计 A 中有多少个数小于 B_i

再使用二分查找统计 C 中有多少个数大于 B_i

乘法原理累加即可,时间复杂度$O(n\log n)$

#2402、四数之和

题目描述

有四个数 a, b, c, d

其中 a 取值在集合 A 中, b 取值在集合 B 中, c 取值在集合 C 中, d 取值在集合 D 中

想要使 $a+b+c+d=M$,问可能的取值有多少种

输入格式

第一行一个整数 M

接下来四行以 A, B, C, D 的顺序描述四个集合,每行的开头表示集合中元素的个数 k_i ,之后 k_i 个数表示元素的取值

保证一个集合内这 k_i 个数两两不同

输出格式

一行一个整数表示合法取值的组合个数

数据范围

记 $|A|$ 表示 A 集合的大小

对于 20% 的数据, $\max |A|, |B|, |C|, |D| \leq 50$

对于 50% 的数据, $\max |A|, |B|, |C|, |D| \leq 300$

对于 100% 的数据, $\max |A|, |B|, |C|, |D| \leq 5000, M \leq 10^7$,各个集合中元素大小不超过 10^7

保证所有数字都是非负的,即大于等于0

#2402、四数之和

直接枚举四个集合

时间复杂度$O(|A| \times |B| \times |C| \times |D|)$

使用数组统计其中一个数组中数出现的次数,枚举其中三个集合

时间复杂度$O(|A| \times |B| \times |C|)$

两层循环 枚举 集合 A,B ,数组统计 所有 $A_i + B_j$出现的次数

两层循环 枚举 集合 C,D ,累加 $M - C_i + D_j$出现的次数即为答案

时间复杂度$O(|A| \times |B| + |C| \times |D|)$

#1025 最大公约数和最小公倍数问题

题目描述

输入二个正整数 x_0, y_0 ,求出满足下列条件的 P, Q 的个数

条件:

- P, Q 是正整数
- 要求 P, Q 以 x_0 为最大公约数,以 y_0 为最小公倍数

试求:

满足条件的所有可能的两个正整数的个数

输入格式

两个正整数 x_0 和 y_0

输出格式

输出满足条件的所有可能的两个正整数的个数。

数据规模

对于全部的数据 $2 \leq x_0 \leq 1000000, 2 \leq y_0 \leq 1000000$

考虑枚举 P, Q

P, Q 范围为 $x_0 \sim y_0$

分别求出最大公约数和最小公倍数

令 $N = y - x, T = \min(p, q)$

求最大公约数时间复杂度为$O(\log T)$

时间复杂度$O(N^2 \log T)$

#1025 最大公约数和最小公倍数问题

性质

$$P \times Q = \gcd(P, Q) \times lcm(P, Q)$$

即

$$P \times Q = x_0 \times y_0$$

枚举 P ,枚举范围为 $x \sim y$, 步长为 x , 根据性质直接求出 Q

如果满足题目要求,累加方案数

令 $N = \frac{y-x}{x}$,$T = \min(p, q)$

时间复杂度为 $O(NlogT)$

实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

谢谢观看