# 图论选讲

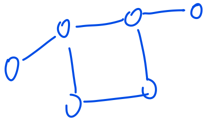
王浏清

2024/9

# 图论选讲

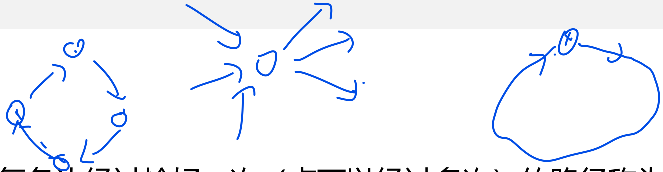
- **用边来表示点之间关系的结构**
- 有向图、无向图、树等等。

# 欧拉回路



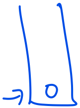
- 对一张图，每条边经过恰好一次（点可以经过多次）的路径称为欧拉路径。
- 如果路径起点和终点相同，则称为欧拉回路。

# 欧拉回路

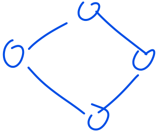


- 对一张图，每条边经过恰好一次（点可以经过多次）的路径称为欧拉路径。
- 如果路径起点和终点相同，则称为欧拉回路。
- 怎么求欧拉回路？
- 判定：有向图每个点入度和出度相同，无向图每个点度数为偶数。
- DFS，用栈纪录。出栈序是一个合法的欧拉路径。

DFS



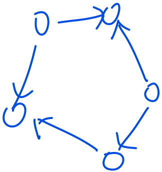
# CF527E Data Center Drama

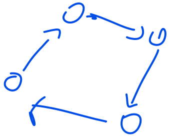


d奇的点一定有偶数个

$\sum deg = 2(m)$

- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的连通无向图（有自环）。
- 你需要加入尽可能少的边，然后给每条边定向。
- 你需要让每个点的出度和入度都是偶数。
- 问最少要加入多少条边，并给出最终的定向方案。

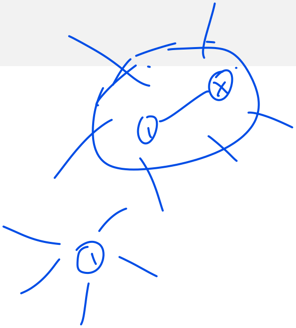




# CF527E Data Center Drama

- 每个点的出度和入度都是偶数。等价于定向前度数为偶数。
- 将度数为奇数的点两两配对。总边数为奇数时添加一个自环。

# 最小生成树



- kruscal 和 prim 算法。

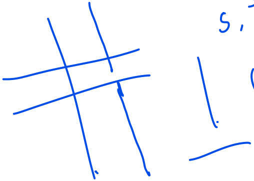
# 网格图

1e6 1e6

$n \cdot (m-1)$
$+ m(n-1)$

- 给定一个 $n \times m$ 的网格图。
- 点 $(i,j)$ 和点 $(i,j+1)$ 之间有一条边权为 $a_i$ 的边。
- 点 $(i,j)$ 和点 $(i+1,j)$ 之间有一条边权为 $b_j$ 的边。
- 给定 $a, b$，求这个图的最小生成树。

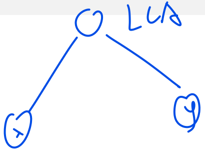
$s, t$

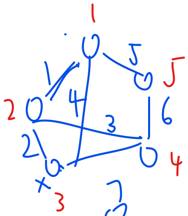


$(n-s)$
$(m-t)$

$a, b$

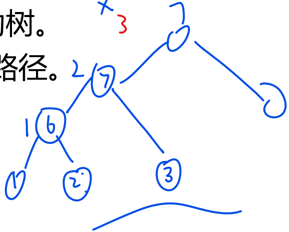
# Kruscal 重构树




e

- 在跑 kruscal 算法的同时建出一棵辅助树。
- 可以快速求出两点之间最大值最小的路径。




2n-1

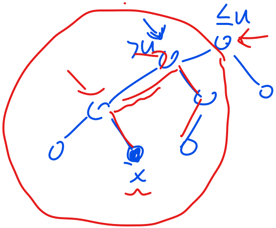
# [NOI2018] 归程

- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向图。每条边有长度 $l$ 和海拔 $p$。
- $Q$ 次询问。每次询问起点 $x$ 和水位 $u$。
- 每次从 $x$ 点坐车出发，车子不能经过积水路段 $p \le u$。下车后不能再上车。
- 问从 $x$ 走到 $1$ 号点，最短步行距离是多少。强制在线。

$d_x$ $\le u$

# [NOI2018] 归程

- 可以求出 1 号点到每个点的最短路作为一个点的权值。
- 问题转化为询问 $x$ 所在的不涉水连通块中权值的最小值。
- 连通块可以通过 kruscal 重构树求出。

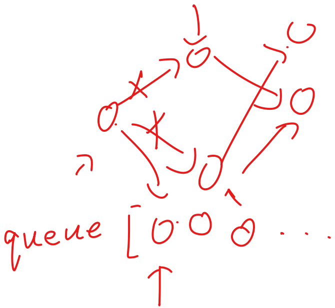


# [NOI2018] 归程

- 可以求出 1 号点到每个点的最短路作为一个点的权值。
- 问题转化为询问 $x$ 所在的不涉水连通块中权值的最小值。
- 连通块可以通过 kruscal 重构树求出。

# 拓扑排序

- 对于有向无环图，求拓扑序。
- 队列。



# 最短路

Johnson

$f_x$

$e(u,v,w)$

$w \leftarrow w + f_u - f_v$

$f_u + w > f_v$

$w + f_u - f_v$

$+f_2 - f_1 \quad +f_3 - f_2$

$d_x : 1 \to x$

$d : [\quad]$

- 单源最短路径。
- 非负边权：Dijkstra。
- 负边权：SPFA，bellman-ford。 $O(n \cdot m)$
- 多源最短路径。
- Floyd，Johnson 。

$m \sim n^2$

$O(n^3)$ $\quad O(nm \cdot \log)$

for $i = 1 \to n$
  for $j = 1 \to m$
    if $(d_v > d_u + w)$
      $d_v = d_u + w$

$Ans' = Ans + f_n - f_1$

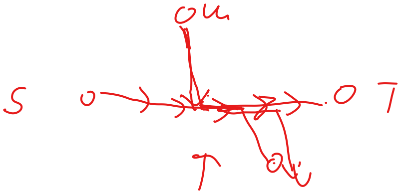
$f_u + w \geq f_v$

$f_u + w - f_v \geq 0$

# [JOI2018] Commuter Pass

- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的非负边权无向图。
- 你可以选择一条 $S$ 到 $T$ 的最短路，并将路径上所有边的边权清零。
- 问从 $U$ 到 $V$ 的最短路。

# [JOI2018] Commuter Pass




- 分层图最短路。
- 关键结论：$U, V$ 之间最短路和 $S, T$ 之间最短路重合部分一定是连续的一段。

① 原 $u$ $w + d_u = d_v$

② 原 $S \to T$ $o$ $(u, v, w)$

③ 原、 $v$

# 差分约束

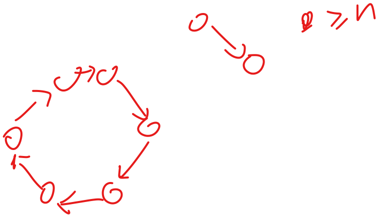
$d_x + w \geq d_y$

$i \xrightarrow{d} j$

- 建图，跑最短路。
- 形如 $x_i + d \geq x_j$ 的条件。

# 差分约束

- 建图，跑最短路。
- 形如 $x_i + d \geq x_j$ 的条件。
- 一组合法的解等价于一组最短路。
- 判断是否有负环。



# [1007] 倍杀测量者

log

$n, m$

个 $(i, j, k)$

— lg

$l \le \frac{x_j}{x_i} \le r$

- 有 $n$ 个人，给定若干个限制条件 $i, j, k$:
-
$$k - t \le \frac{x_j}{x_i} \le k + t$$
- 求最大的 $t$ 使得至少有一个限制条件不满足。

$\log l \le \log \frac{x_j}{x_i}$

$= \log x_j - \log x_i \le \log r$

二分

$\log x_i$

$b = a_i$

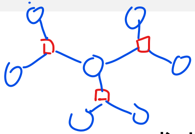
$a_j \ge a_i + \log l$

$a_i \ge a_j - \log r$

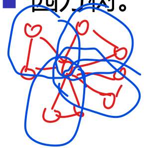
# [1007] 倍杀测量者

- 将条件转化为
- $$(k-t)x_i \le x_j \le (k+t)x_i$$
- 两边取对数 $\log x_j - \log x_i \ge \log(k-t)$
- 二分答案跑差分约束即可。

# Tarjan 算法



- DFS 求出 dfs 序和 low 数组。
- 强连通分量。
- 割边、割点。
- 点双连通分量。
- 边双连通分量。
- 园方树。



DFS dfn

low = min{low, dfn}

dfs:(x)

low = dfn = ++idx

for y

if (!v[y])

low = min(low, dfn[y])

else

dfs(y), low = min(low, low[y])

low

low ≥ dfn

sta

low ≥ dfn

low ≥ dfn

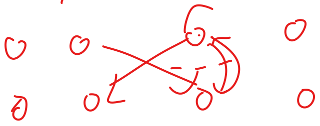
# 2-SAT 问题

若 a 则 b

$x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n$

0/1 0/1 0/1

2n



- 转化为强连通分量。
- 拓扑序求可行解。
- 注意：2-SAT 的最优解问题是不可做的。

$x_i$ 和 $\neg x_i$ 在一个环中

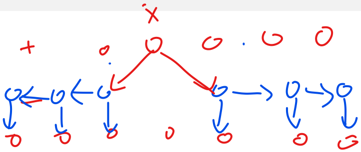
DAG

$x_i \longrightarrow \neg x_i$

$x_i$ $P_1$ $P_1 < P_2$

$\neg x_i$ $P_2$ $P_2 < P_1$

# [PA2010] RIDDLE



x y

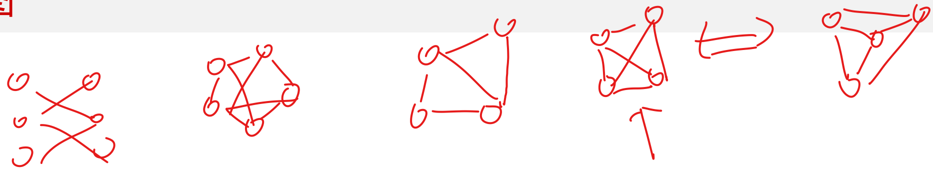
$\neg x \to y$

$\neg y \to x$

- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向图。$n$ 个点被划分成了 $k$ 个部分。
- 请选出一些关键点，使得对于每个部分恰好有一个关键点，对于每条边至少有一个端点是关键点。

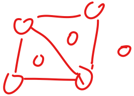
至多

# 平面图



- 对于一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向图。如果所有的边只在节点处相交，则称为平面图。
- $K_{3,3}$ 和 $K_5$ 不是平面图。
- 欧拉公式，$n - m + r = p + 1$。$r$ 表示平面图的面数，$p$ 表示连通块数。

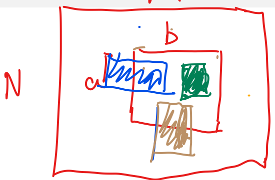
点 边 面



$4 - 5 + 3 = 1 + 1$

$2 = 2$

# [USACO21JAN] Paint by Letters P

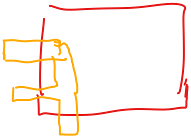


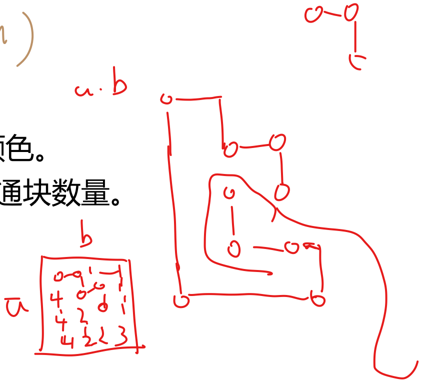

$O(N+M)$

a · b

- 给定一个 $N \times M$ 的矩阵，每个位置有一种颜色。
- $Q$ 次询问，每次询问一个子矩阵中的同色连通块数量。
- $N, M, Q \leq 1000$。

面





# [USACO21JAN] Paint by Letters P

- 用欧拉公式转化为求点数、边数和面数。
- 怎么求面数?

# [USACO21JAN] Paint by Letters P

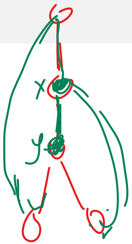
- 用欧拉公式转化为求点数、边数和面数。
- 怎么求面数?
- 预处理出整个矩阵的每个面，并标号。

# 图论杂题选讲

- 熟练运用上述学到的知识点。
- 开始!

# CF521E Cycling City

DFS树

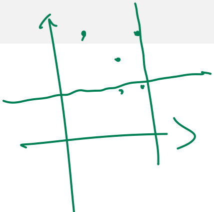



- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向简单图。
- 能否找到图中两点 $(x, y)$ 满足 $x, y$ 之间存在三条不相交的路径。如果有，输出方案。

# CF521E Cycling City

- 先求出 DFS 树。
- 如果两条非树边对应的路径相交，则可以构造出来。

# CF547D Mike and Fish



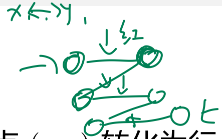
$(x, y)$

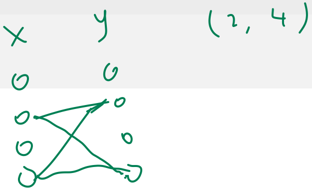
- 给定 $N$ 个正整数点，你需要给每个点染成红色或蓝色。
- 对于任何一条水平线或垂直线，线上两种颜色的点的数量差至多为 1。
- 求染色方案。

# CF547D Mike and Fish

- 给定 $N$ 个正整数点，你需要给每个点染成红色或蓝色。
- 对于任何一条水平线或垂直线，线上两种颜色的点的数量差至多为 $1$。
- 求染色方案。

# CF547D Mike and Fish



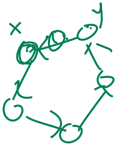



- 行列模型。将点 $(x, y)$ 转化为行 $x$ 和列 $y$ 之间的一条边。
- 如果将红色和蓝色看成入度和出度，问题转化为给边定向。
- 对于一条路径上的边，交替染色即可。
- 对于任意一个图，度数为奇数的点一定有偶数个。我们将这偶数个点两两配对染色即可。
- 其余部分每个点度数都是偶数，可以跑欧拉回路。

# CF555E Case of Computer Network

边双

- 给定一个 $n$ 个节点 $m$ 条边的无向图。和 $q$ 对二元组 $s, t$。
- 问是否存在一种给每条边定向的方案，使得对于每个二元组都能从 $s$ 到达 $t$。



# CF555E Case of Computer Network

- 边双缩点，路径覆盖。

# CF587D Duff in Mafia

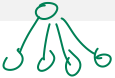
- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向图。每条边有一个颜色 $c$ 和权值 $t$。
- 你需要选出~~一~~条边使得选出的边是一个匹配，同时剩下每种颜色的边也是一个匹配。

  若干　　任何两边无公共点
- 你需要最小化选出的边中最大值的。

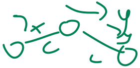
# CF587D Duff in Mafia

- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向图。每条边有一个颜色 $c$ 和权值 $t$。
- 你需要选出一条边使得选出的边是一个匹配，同时剩下每种颜色的边也是一个匹配。
- 你需要最小化选出的边中最大值的。

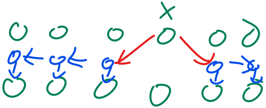
# CF587D Duff in Mafia



- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向图。每条边有一个颜色 $c$ 和权值 $t$。
- 你需要选出一条边使得选出的边是一个匹配，同时剩下每种颜色的边也是一个匹配。
- 你需要最小化选出的边中最大值的。



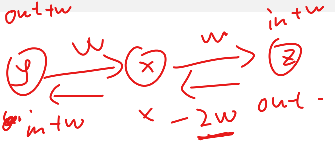
- 首先二分答案转化为判定问题。
- 观察到条件可以转化为，有公共点的同色边不能同时不选，有公共点的边不能同时选。
- 转化为 2-SAT 问题。需要前后缀优化建图。

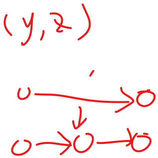


# CF1610F Mashtali: a Space Oddysey

- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向图。每条边的边权是 $1$ 或 $2$。
- 现在你需要给每条边定向，$in(x)$ 表示指向 $x$ 的边的边权和，$out(x)$ 表示从 $x$ 出发的边的边权和。
- 你需要最大化满足 $|in(x) - out(x)| = 1$ 的点的数量。

# CF1610F Mashtali: a Space Oddysey



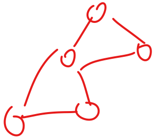




- 首先一个点满足的必要条件是相邻边权之和为奇数。
- 下面我们构造一个方法让所有邻边和为奇数的点都满足。
- 如果边 $(x, y), (x, z)$ 的边权相同，我们可以让两条边首尾相连，合成一条新边 $(y, z)$。
- 这样每个点的邻边和不变。最后每个点最多只有两条邻边，直接定向即可。

# CF1610F Mashtali: a Space Oddysey

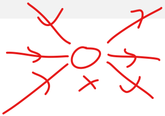
- 首先一个点满足的必要条件是相邻边权之和为奇数。
- 下面我们构造一个方法让所有邻边和为奇数的点都满足。
- 如果边 $(x, y), (x, z)$ 的边权相同，我们可以让两条边首尾相连，合成一条新边 $(y, z)$。
- 这样每个点的邻边和不变。最后每个点最多只有两条邻边，直接定向即可。

# AGC032C - Three Circuits



- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的简单无向连通图。问是否能将图划分成恰好三个环。环上的点可以重复。

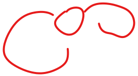
# AGC032C - Three Circuits

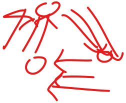


- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的简单无向连通图。问是否能将图划分成恰好三个环。环上的点可以重复。
- 必要条件是存在欧拉回路。

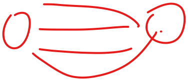
- 如果存在度数 $\geq 6$ 的点，则可以划分。
- 现在只有度数为 $2/4$ 的点，度数为 $2$ 的点可以消掉。现在所有点度数为 $4$。

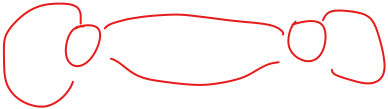
# AGC032C - Three Circuits

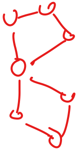




- 现在只有度数为 $2/4$ 的点，度数为 $2$ 的点可以消掉。现在所有点度数为 $4$。
- 如果有三个点，则一定有解。
- 现在只用考虑一个点和两个点的情况。







# [CCO2021] Travelling Merchant

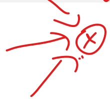
- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的有向图。 $(a_i, b_i, r_i, p_i)$
- 第 $i$ 条边从 $a_i$ 到 $b_i$，只有资产 $\geq r_i$ 时才能走，走过去后资产会增加 $p_i$。
- 对于每个点，问从该点出发，出发时最少要有多少资产，才能在图上永远不停的走下去。

# [CCO2021] Travelling Merchant

- 提示：对于没有出度的~~边~~点，不能一直走下去，直接删除。

# [CCO2021] Travelling Merchant

$(a, b, r, q)$ $w$ $\max(r, w-q)$



走到 x 身上至少要 w

- 提示：对于没有出度的点，不能一直走下去，直接删除。
- 所有边有出度，说明如果不考虑资产限制，则可以一直走下去。
- 我们找到图中限制最大的边是 $(a, b, r, q)$，说明走到 $a$ 时，资产 $\geq r$ 则可以一直走下去。
- 在 $a$ 点打上 $r$ 的标记，然后将边删除。
- 此时会产生新的点没有出度，删除点后将标记反推。

# CF1477D Nezzar and Hidden Permutations

$deg_i = n-1$

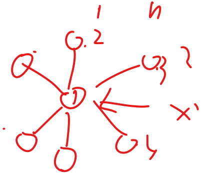
- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向图。
- 你需要构造两个长度为 $n$ 的排列 $p, q$，满足 $p_i \neq q_i$ 的位置数最多，并且满足：
- 对于每条边 $(u, v)$，$(p_u - p_v)(q_u - q_v) > 0$。

# CF1477D Nezzar and Hidden Permutations

- 给定一个 $n$ 个点 $m$ 条边的无向图。
- 你需要构造两个长度为 $n$ 的排列 $p, q$，满足 $p_i \neq q_i$ 的位置数最多，并且满足：
- 可以把 $p, q$ 看成两个拓扑序，对应的原图的定向方案应该相同。
- 如果存在度数为 $n - 1$ 的点，则这个点一定 $p_i = q_i$。直接删除。

# CF1477D Nezzar and Hidden Permutations

反图

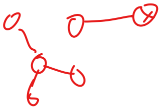


- 现在所有点度数 $\le n-1$。
- 求原图的反图，度数 $\ge 1$。
- 考虑菊花图，能构造一个所有 $p_i \ne q_i$ 的方案。

$p_x = 1, \quad p\ 2, 3, \cdots$

$q_x = n \quad q\ 1 \cdots$

# CF1477D Nezzar and Hidden Permutations



- 反图删边不会更劣。我们将原图划分成若干个菊花图即可。