实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

提高算法班

倍增

Mas

ST表

ST表(Sparse Table) 是用于解决 **可重复贡献问题** 的数据结构

可以处理解决静态RMQ(Range Maximum/Minimum Query)问题

它主要应用倍增的思想,可以实现 $O(nlogn)$ 预处理、 $O(1)$ 查询

可重复贡献问题

若对于运算 op,满足 $x \text{ op } x = x$,则对应的区间询问就是一个可重复贡献问题

如 max/min/gcd ,所以 RMQ 和区间 GCD 就是一个可重复贡献问题

区间和不具备该性质,若求区间和时预处理区间重叠,则导致重叠部分被重复计算

另外 op 还必须满足结合律才能使用 ST 表求解

ST表

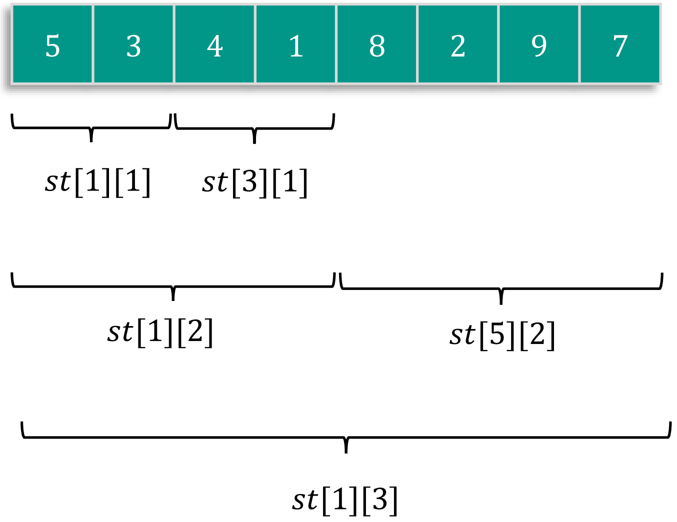
令$st[i][j]$表示区间$[i, i+2^j-1]$的最大值

显然$st[i][0] = A[i]$

此外$st[i][j]$可由$\left[i, i+2^{j-1}-1\right]$与$[i+2^{j-1}, i+2^j-1]$两个区间得到,长度为长$2^{j-1}$

即

$$st[i][j] = \begin{cases} A[i], & j = 0 \\ \max(\,st[i][j-1]\,, st[i+2^{j-1}][j-1]\,)\,, & j > 0 \end{cases}$$



ST表

对于每次询问给出的$[L, R]$,其长度为$R - L + 1$

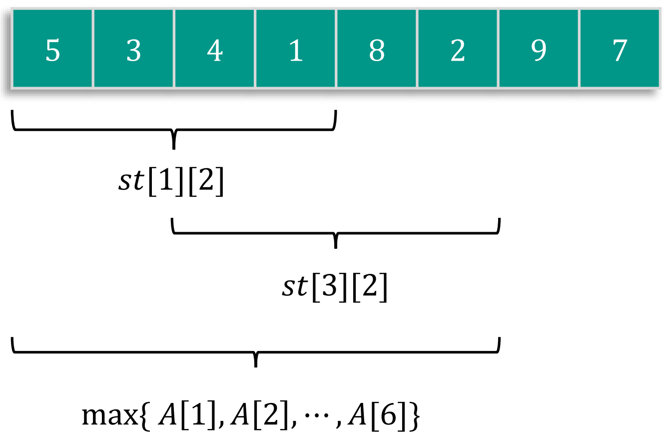
令$k = \lfloor \log_2(R - L + 1) \rfloor$,即$2^k$为不超过$R - L + 1$的最大整数

考虑将$[L, R]$拆分成$[L, L + 2^k - 1]$与$[R - 2^k + 1, R]$两个区间

由于RMQ可重复贡献

$[L, L + 2^k - 1]$与$[R - 2^k + 1, R]$ 两个区间产生重合对答案无影响

$$\max_{L \le i \le R} A_i = \max(\, st[L][k]\,, st[R - 2^k + 1][k]\,)$$



#711、数列区间最大值

题目描述

输入一串数字,给你 M 个询问

每次询问就给你两个数字 X,Y ,要求你说出 X 到 Y 这段区间内的最大数

输入格式

第一行两个整数 N,M 表示数字的个数和要询问的次数
接下来一行为 N 个数
接下来 M 行,每行都有两个整数 X,Y

输出格式

输出共 M 行,每行输出一个数

数据范围与提示

对于全部数据, $1 \le N \le 10^5, 1 \le M \le 10^6, 1 \le X \le Y \le N$

数字不超过 `C/C++` 的 `int` 范围

样例输入

```
10 2
3 2 4 5 6 8 1 2 9 7
1 4
3 8
```

样例输出

```
5
8
```

#2614、区间GCD

题目描述

给定 n 个正整数 $a_1 \sim a_n$

m 次询问,每次询问给定一个区间 $[L, R]$,输出 $a_L \sim a_R$ 的最大公因数

输入格式

第一行两个整数 n, m

第二行 n 个整数表示 $a_1 \sim a_n$

以下 m 行,每行 2 个整数表示询问区间的左右端点

输出格式

共 m 行,每行表示一个询问的答案

数据规模

对于 20% 的数据, $n \le 100, m \le 100$

对于 100% 的数据, $1 \le n \le 10^5, 1 \le m \le 10^5$

对于全部的数据 $0 < a_i \le 10^9$

输入样例

```
5 3
4 12 3 6 7
1 3
2 3
5 5
```

输出样例

```
1
3
7
```

#2617、区间的连续段

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校 LAB

题目描述

给你一个长为 n 的序列 a 和一个常数 k

有 m 次询问

每次查询一个区间 $[l, r]$ 内所有数最少分成多少个连续段,使得每段的和都不超过 k

如果这一次查询无解,输出 `NO ANSWER`

输入描述

第一行三个数 n, m, k
第二行 n 个数表示这个序列 a
之后 m 行,每行给出两个数 l r 表示一次询问

输出描述

输出 m 行,每行一个整数,表示答案

数据规模

对于 40% 的数据, $1 \le n, m \le 5000, 1 \le a_i, k \le 10^9$
对于 100% 的数据, $1 \le n, m \le 10^5, 1 \le a_i, k \le 10^9$

输入格式

```
5 5 7
2 3 2 3 4
3 3
4 4
5 5
1 5
2 4
```

输出格式

```
1
1
1
2
2
```

#2617、区间的连续段

若贪心往后处理,时间复杂度$O(mn)$

令 $st[i][j]$ 为从 i 开始 ,分 2^j 段时下一段的起始下标

$st[i][0]$可以双指针或者前缀和+二分得到

此外

$$st[i][j] = st[\ st[i][j-1]\ ][j-1]$$

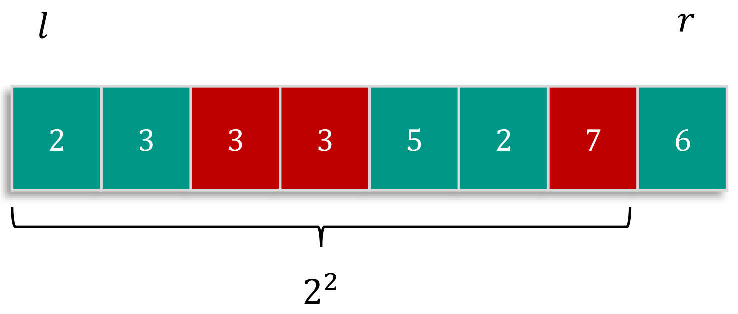
当 $L \sim R$ 内存在一个元素值大于K,此时无解

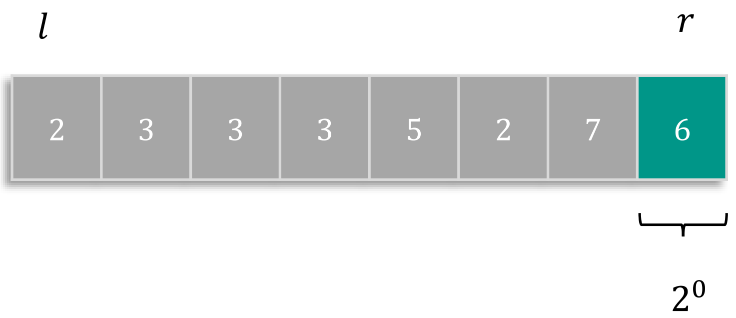
若答案为 T ,考虑求出 T

求解 T 的过程可理解为将 T 进行二进制拆分

对于每一次询问,从 L 开始尽可能大步往后跳,累加步数即可

时间复杂度$O(nlogn)$





#965、萌萌哒

题目描述

一个长度为 n 的大数,用 $S_1S_2S_3\ldots S_n$ 表示

其中 S_i 表示数的第 i 位, S_1 是数的最高位,告诉你一些限制条件

每个条件表示为四个数 (l_1, r_1, l_2, r_2)

即两个长度相同的区间,表示子串 $S_{l_1}S_{l_1+1}S_{l_1+2}\ldots S_{r_1}$

与 $S_{l_2}S_{l_2+1}S_{l_2+2}\ldots S_{r_2}$ 完全相同

比如 $n=6$ 时,某限制条件 $(l_1=1, r_1=3, l_2=4, r_2=6)$,那么 123123 、 351351 均满足条件,但是 12012 、 131141 不满足条件,前者数的长度不为 6 ,后者第二位与第五位不同

问满足以上所有条件的数有多少个

输入格式

第一行两个数 n 和 m ,分别表示大数的长度,以及限制条件的个数

接下来 m 行,对于第 i 行,有 4 个数 l_{i1} 、 r_{i1} 、 l_{i2} 、 r_{i2} ,分别表示该限制条件对应的两个区间

输出格式

一个数,表示满足所有条件且长度为 n 的大数的个数,答案可能很大,因此输出答案模 10^9+7 的结果即可

数据范围与提示

对于全部的数据 $1 \le n \le 10^5, 1 \le m \le 10^5, 1 \le l_{i1}, r_{i1}, l_{i2}, r_{i2} \le n$ 并且保证 $r_{i1}-l_{i1}=r_{i2}-l_{i2}$

对于$x \in [l_1, r_1]$, $y \in [l_2, r_2]$ 用并查集合并

统计连通块个数 cnt

对于首位所在连通块只能选取 1~9

其它连通块可取 0~9,答案为 $9 \times 10^{cnt-1}$

时间复杂度$O(nm)$

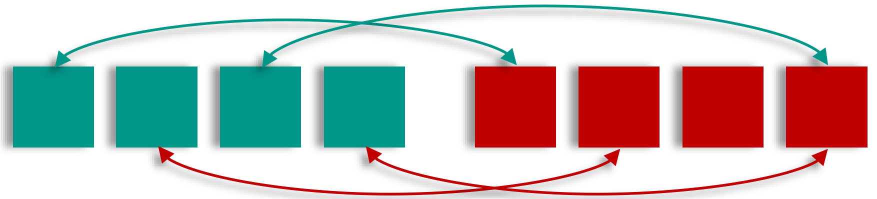
样例输入

```
4 2
1 2 3 4
3 3 3 3
```

样例输出

```
90
```

#965、萌萌哒



尝试将 **区间内各点相等** 转化为 某个程度上的 **整个区间相等**

考虑建立 $\log_2 n$ 层并查集,第 i 层维护长度为 2^i 的区间连通信息

即在并查集第 i 层上**整个区间相等** 即表示 **区间内各点相等**

令 $fa[i][j]$ 表示区间 $[i, i+2^j-1]$ 在第 j 层并查集中的编号

若需要将 $x \in [l_1, r_1]$, $y \in [l_2, r_2]$ 每个元素进行逐个合并, 记 $k = \lfloor \log_2(r_1 - l_1 + 1) \rfloor$

可将区间 $[l_1, r_1]$ 拆分成 $[l_1, l_1 + 2^k - 1]$ 与 $[r_1 - 2^k + 1, r_1]$

可将区间 $[l_2, r_2]$ 拆分成 $[l_2, l_2 + 2^k - 1]$ 与 $[r_2 - 2^k + 1, r_2]$

将区间 $[l_1, l_1 + 2^k - 1]$ 与 $[l_2, l_2 + 2^k - 1]$ 合并,将区间 $[r_1 - 2^k + 1, r_1]$ 与 $[r_2 - 2^k + 1, r_2]$ 合并

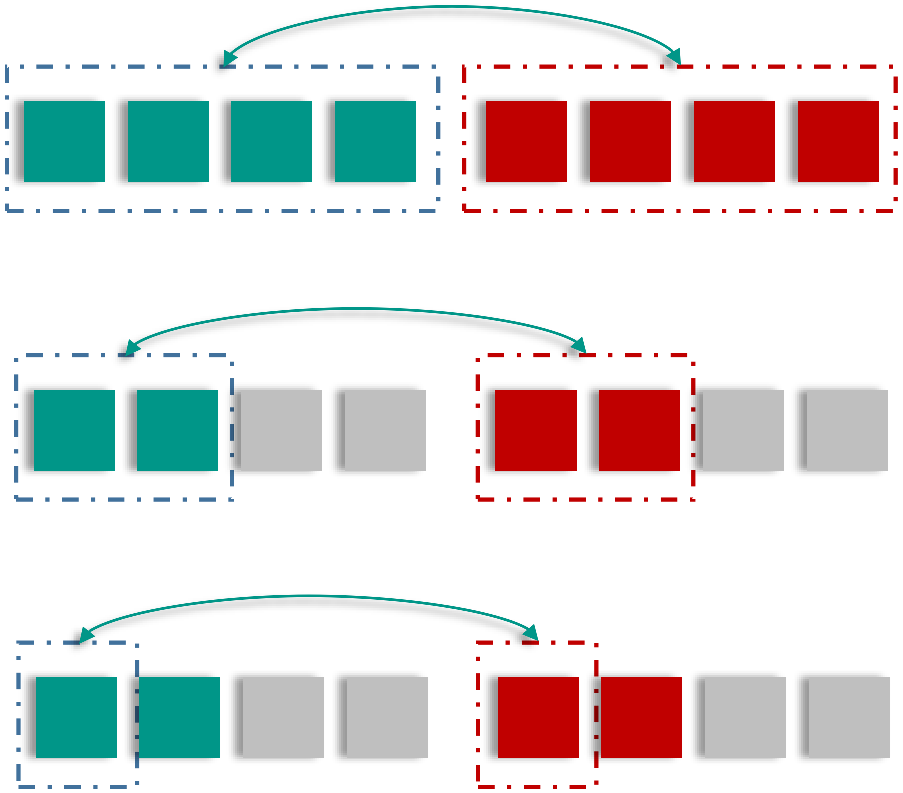
#965、萌萌哒

考虑将长度为 2^k 为左端点为x,y的区间合并过程

- 将第 k 层并查集中两个区间合并, 即修改两个区间在第 k 层并查集中的编号
- 向下递归处理

  将 $[x, x+2^{k-1}-1]$与 $[y, y+2^{k-1}-1]$合并

  将$[x+2^{k-1}, x+2^k-1]$与$[y+2^{k-1}, y+2^k-1]$
- 若发现两个区间在第 k 层并查集中的编号, 不再向下



最后仅需要考察第 0 层并查集的情况

处理所有限制需要合并 $O(m)$ 次

向下合并的总次数是 $O(n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\cdots)=O(n)$ 次

总时间复杂度为 $O((n+m)\alpha(n))$

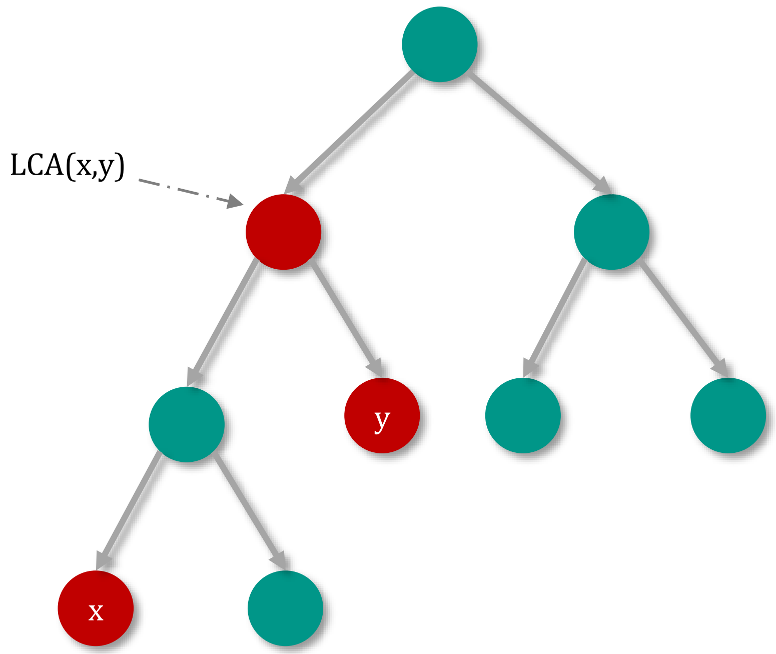
最近公共祖先(LCA)

最近公共祖先简称 LCA(Lowest Common Ancestor)

给定一棵有根树,一个点到根节点的路径上的所有点称为该点的祖先

若点u同时是点x,y的祖先,那么u称为x,y的公共祖先

x,y的所有公共祖先中,深度最大的点称为x,y的最近公共祖先



另一种理解

x 到 y 的路径上深度最大的点为 x,y 的最近公共祖先

记某点集 $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ 的最近公共祖先为 $\mathrm{LCA}(v_1,v_2,\dots,v_n)$ 或 $\mathrm{LCA}(S)$

最近公共祖先(LCA)

LCA性质

- $\text{LCA}(u) = u$
- u 是 v 的祖先,当且仅当 $\text{LCA}(u, v) = u$
- 如果 u 不为 v 的祖先并且 v 不为 u 的祖先,那么 u, v 分别处于 $\text{LCA}(u, v)$ 的两棵不同子树中
- 前序遍历中 $\text{LCA}(S)$ 出现不晚于 S 中任何元素,后序遍历中 $\text{LCA}(S)$ 出现不早于 S 中任何元素
- 两点集并的最近公共祖先为两点集分别的最近公共祖先的最近公共祖先,即

$$\text{LCA}(A \cup B) = \text{LCA}(\,\text{LCA}(A), \text{LCA}(B)\,)$$

- 两点的最近公共祖先必定处在树上两点间的最短路上
- $D(u, v) = H(u) + H(v) - 2H(\,\text{LCA}(u, v)\,)$ $D(u, v)$ 是树上两点间的最短距离 ,$H(u)$ 表示 u 到树根的距离

最近公共祖先(LCA)

- 朴素算法求 LCA

  先向上调整深度较大的点,令它们深度相同

  然后再共同向上跳,最后一定会相遇,相遇点即为 LCA

  最坏情况下时间复杂度为$O(n)$

- 倍增算法求 LCA

  令 $st[u][i]$ 表示节点 u 的 2^i 层的祖先，$deep[u]$ 表示 u 的深度

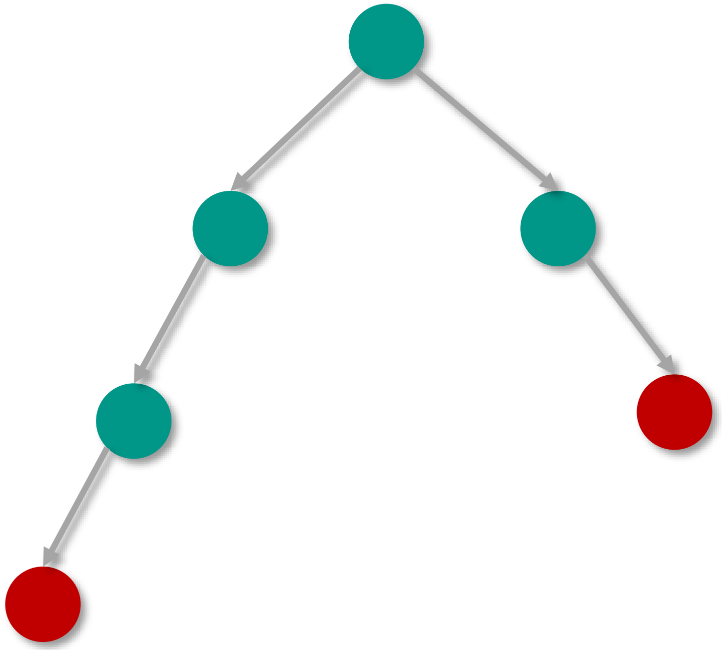
$$st[u][0] = fa_u$$

  此外

$$st[u][i] = st[\,st[u][\,i-1\,]\,][\,i-1\,]$$

  $st[u][i]$ 可在 dfs 中求出

  时间复杂度$O(n\log n)$



最近公共祖先(LCA)

对于每一次询问

将询问的两点u,v上跳至同一深度

计算出 u,v 的深度差 y

将 y 进行二进制拆分,倍增上跳

若 u,v 深度一致且相等,那么找到答案

若 u,v 深度不一致

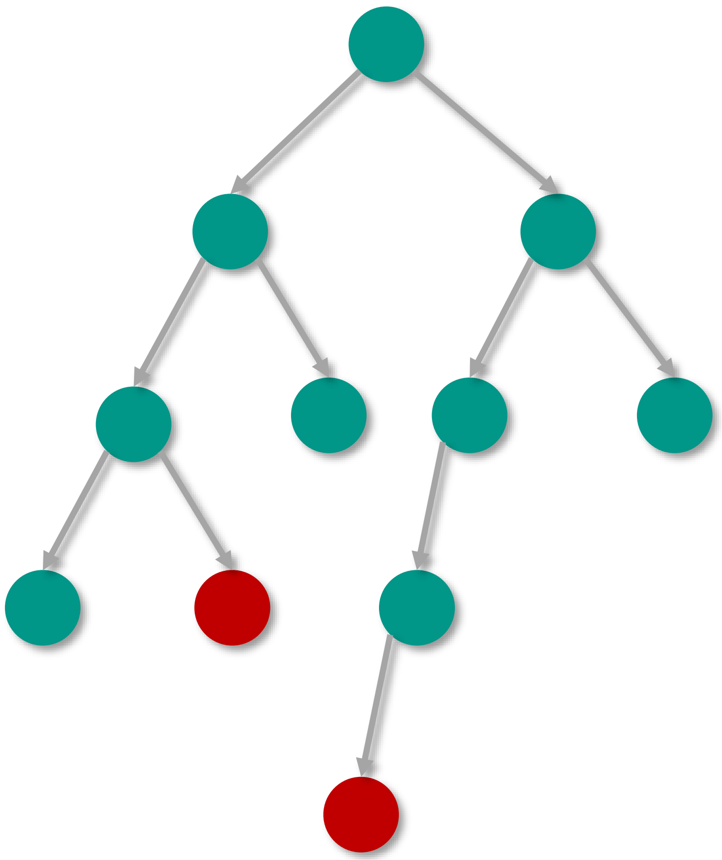
从最大的 i 开始循环尝试一直尝试到 0

若 $st[u][i] \neq st[v][i]$, 说明 u,v 的 2^i 层祖先并非 LCA

则 $u = st[u][i], v = st[v][i]$, 即大步倍增上跳

最后 LCA 为 $st[u][0]$

每次询问时间复杂度$O(\log n)$



#2623、最近公共祖先

题目描述

给定一棵有根多叉树,请求出指定两个点直接最近的公共祖先

输入格式

第一行包含三个正整数 N, M, S ,分别表示树的结点个数、询问的个数和树根结点的序号

接下来 $N-1$ 行每行包含两个正整数 x, y ,表示 x 结点和 y 结点之间有一条直接连接的边(数据保证可以构成树)

接下来 M 行每行包含两个正整数 a, b ,表示询问 a 结点和 b 结点的最近公共祖先

输出格式

输出包含 M 行,每行包含一个正整数,依次为每一个询问的结果

数据规模

对于 20% 的数据, $N \leq 10, M \leq 10$

对于 100% 的数据, $N \leq 200000$, $M \leq 200000$

如果询问次数1000000?

是否还有其他的做法?

能否离线处理?

能否转为RMQ问题?

#723、Dis

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

题目描述

给出 n 个点的一棵树,多次询问两点之间的最短距离

注意：边是双向的

输入格式

第一行为两个整数 n 和 m ,其中 n 表示点数, m 表示询问次数

接下来 $n-1$ 行,每行三个整数 x,y,k ,表示点 x 和点 y 之间存在一条边长度为 k

再接下来 m 行,每行两个整数 x,y ,表示询问点 x 到点 y 的最短距离

输出格式

输出 m 行

对于每次询问,输出一行

数据范围与提示

对于全部数据, $2 \le n \le 10^4, 1 \le m \le 2 \times 10^4, 0 < k \le 100, 1 \le x,y \le n$

样例输入1

```
2 2
1 2 100
1 2
2 1
```

样例输出1

```
100
100
```

样例输入2

```
3 2
1 2 10
3 1 15
1 2
3 2
```

样例输出2

```
10
25
```

#723、Dis

该题中两点间的最短路径必然是一条简单路径(即不重复经过某条边)

不难想到该条路径为 $u \to \mathrm{LCA}(u,v) \to v$

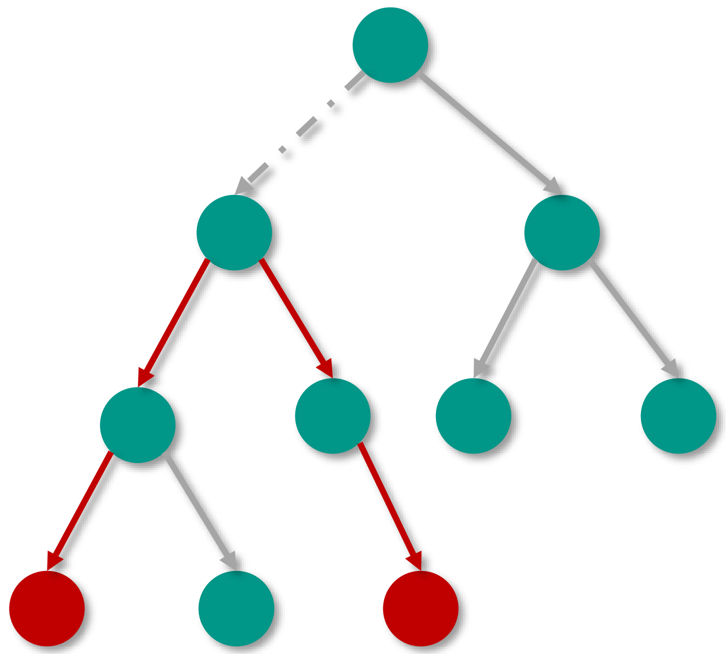
即 树上(非负边权)两点最短路径 必然经过 LCA

记 $D(u,v)$ 是树上两点间的最短距离 ,$H(u)$ 表示 u 到树根的距离

$$D(u,v) = H(u) + H(v) - 2H(\,\mathrm{LCA}(u,v)\,)$$

dfs 预处理时求出 $H(u)$

对于每组询问,时间复杂度$O(\log n)$



#725、聚会

题目描述

Y 岛风景美丽宜人,气候温和,物产丰富

Y 岛上有 N 个城市,有 $N-1$ 条城市间的道路连接着它们,每一条道路都连接某两个城市

幸运的是,小可可通过这些道路可以走遍 Y 岛的所有城市

神奇的是,乘车经过每条道路所需要的费用都是一样的

小可可,小卡卡和小 YY 经常想聚会,每次聚会,他们都会选择一个城市,使得三个人到达这个城市的总费用最小

由于他们计划中还会有很多次聚会,每次都选择一个地点是很烦人的事情,所以他们决定把这件事情交给你来完成

他们会提供给你地图以及若干次聚会前他们所处的位置,希望你为他们的每一次聚会选择一个合适的地点

输入格式

第一行两个正整数, N 和 M ,分别表示城市个数和聚会次数

后面有 $N-1$ 行,每行用两个正整数 A 和 B 表示编号为 A 和编号为 B 的城市之间有一条路。城市的编号是从 1 到 N 的;

再后面有 M 行,每行用三个正整数表示一次聚会的情况:小可可所在的城市编号,小卡卡所在的城市编号以及小 YY 所在的城市编号

输出格式

一共有 M 行,每行两个数 P 和 C ,用一个空格隔开

表示第 i 次聚会的地点选择在编号为 P 的城市,总共的费用是经过 C 条道路所花费的费用

样例输入

```
6 4
1 2
2 3
2 4
4 5
5 6
4 5 6
6 3 1
2 4 4
6 6 6
```

样例输出

```
5 2
2 5
4 1
6 0
```

若x,y的聚会点,答案可为 LCA(x,y)

现要求 x,y,z 的聚会点

数据范围与提示

对于 40% 的数据中, $1 \le N,M \le 2\times 10^3$

对于 100% 的数据中, $1 \le N,M \le 5\times 10^5$

#725、聚会

记 $p_1 = \mathrm{LCA}(x,y), p_2 = \mathrm{LCA}(x,z), p_3 = \mathrm{LCA}(y,z)$, $H(u)$ 表示 u 到根节点的距离

在树上仅存在以下两种情况

- 若 $p_1 = p_2 = p_3$

  聚会点可为 $p_1/p_2/p_3$

- 若 $p_1 = p_2 \neq p_3$ 或 $p_1 \neq p_2 = p_3$ 或 $p_1 \neq p_3 = p_2$

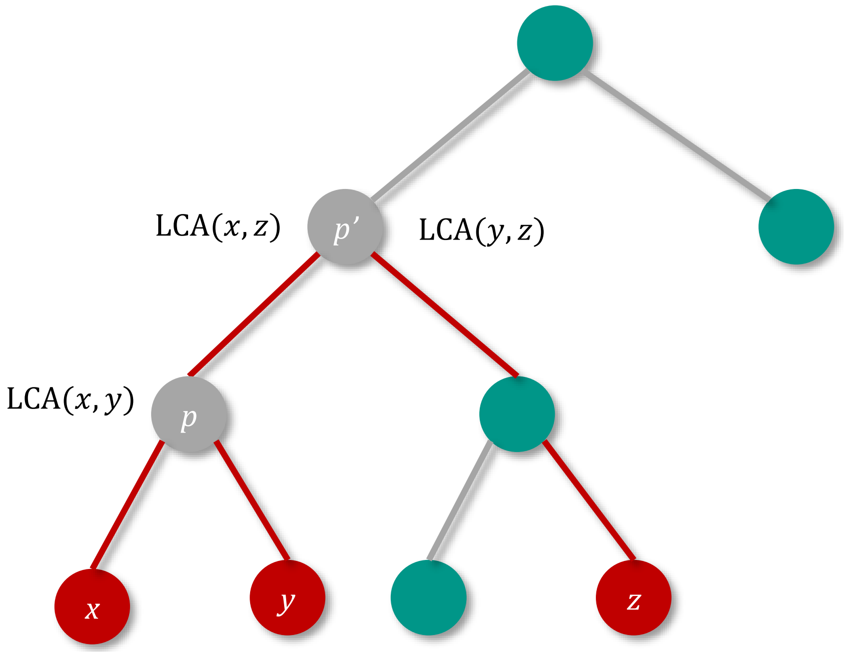
  不妨记不相等的 LCA 为 p , 两个相等的 LCA 为 p' , 不难发现 $p' = \mathrm{LCA}(x,y,z)$

  根据定义 p' 深度不大于 p 的深度

  若选择 p' 为聚会点,移动距离为 $dis_{x\to p} + dis_{y\to p} + 2dis_{p\to p'} + dis_{z\to p'}$

  若选择 p 为聚会点,移动距离为 $dis_{x\to p} + dis_{y\to p} + dis_{z\to p'} + dis_{p'\to p}$

  聚会点为 p 显然更优



最短路径为 $H(x) + H(y) + H(z) - H(p_1) - H(p_2) - H(p_3)$, 每组询问时间复杂度$O(\log n)$

实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

谢谢观看