双人博弈（game）

Alice 获胜当且仅当某个数字出现了奇数次。

平方分解（square）

根据拉格朗日四平方和定理，答案不超过 4。

判定答案是否为 1 是平凡的。

推广费马平方和定理，判断答案是否为 2 只需考察 $\prod_{i=l}^{r} i$ 是否所有 $4k+3$ 形式的质因子幂均为偶数次。这里我们可以直接从 r 暴力向 l 依次分解质因子，如果不合法及时 break，复杂度分析可以考虑所有 $4k+3$ 质数在 10^9 内的间隔。

根据勒让德三平方和定理，判断答案是否为 3 只需考察 $\prod_{i=l}^{r} i$ 能否表示为 $4^p(8q+7)$ 的形式，对 $r=0,1,\cdots,7$ 统计 $\sum_{i=l}^{r}[i \bmod 8 = r]$ 即可。

异或操作（xor）

显然我们只关心 $\text{span}(x)$。不妨假设所有 x 线性无关且是简化阶梯型。

对于某个 a_i 如果想找到 $\max_{y\in\text{span}(x)}\{a_i \text{ xor } y\}$，只需要按照最高位从高到低的顺序考虑所有 x，如果 a_i 不包含 x 的最高位就将 a_i 异或上 x。

考虑枚举所有 x 的最高位是哪些位，对于每个 a_i 就已经确定了他会异或上哪些 x。这说明如果某一位不是任何 x 的最高位，它与其他位就是独立的，可以直接贪心求解。对于是某个 x 最高位的位，因为 k 很小，直接暴力 $O(2^k)$ 枚举所有 x 这一位是否为 1 是可以接受的。这个做法的时间复杂度是 $O\left(\binom{m}{k}nm2^k\right)$。

要进一步优化，我们将暴力枚举改为从高位到低位搜索。对于当前位有两种选择：

1. 若我们还没有确定所有 k 个 x 的最高位，当前位可以成为某个 x 的最高位。
2. 不将当前位作为任意一个 x 的最高位，可以立即以 $O(2^k)$ 的复杂度计算当前位对答案的贡献。

显然，如果以第 2 种选择计算的贡献已经是 n 了，就不需要考虑第 1 种选择。我们再加上一个优化，若当前答案加上 $(2^b-1)n$ 都不超过最佳答案就回溯。那么每 $\log n$ 以第 2 种选择计算的贡献不是 n 的位，都必须选择至少一次选项 1。

时间复杂度为 $O(\log n^k 2^k nm)$。

序列计数（seq）

注意到 $x^0 \bmod m, x^1 \bmod m, \cdots$ 构成 ρ 型，且环长是 $\varphi(m)$ 的约数。也就是说 a_i 总是可以约束在 $O(\varphi(m))$ 级别，最后再乘以组合数计算方案数。为了计算方案数，我们除了总和与乘积还关心有多少个 a_i 在环上。

DP 状态是 $f(\text{sum}, \text{product}, \text{number of elements in cycles})$，对每个 x 依次背包即可。

时间复杂度为 $O(m^5)$ 或 $O(m^6)$，取决于是否使用前缀和优化。