动态规划 3

wrpwrp
洛谷网校

前言

今天是一些个人感觉比较有意义的题目选讲。

大概是覆盖一些计数 DP，树DP, 图 DP。

因为也有很多计数 DP 在图上，所以就不明显地把这三类问题分开了。

Farthest City

构造一张 N 个点的无向连通图，边权都是 1。记图中 1 到 u 的最短路径长度为 d_u，你需要保证 $\max\{d_1, d_2, ..., d_{N-1}\}$ **严格小于** d_N。求构造方案数模 M 的值，方案区分节点编号。

- $3 \leq N \leq 500$
- $10^8 \leq M \leq 10^9$
- N, M は整数

Farthest City

这是一个图计数的问题。

考虑到这个图点数不大， 且限制是一个关于最短路的限制， 由于所有点边权为 1， 不妨考虑按照分层图的形式来进行计数。

Farthest City

考虑设 f(i, j) 表示考虑前 i 个点， 最后一层的点数为 j 的方案数，
那么有转移：

$$f_{i,j} = 2^{\binom{j}{2}} \sum_{k=1}^{i-j} \binom{n-1-(i-j)}{j} (2^k - 1)^j f_{i-j,k}$$

于是可以简单做到 N^3 。

CSA

给定一棵树，求有多少个排列 $p_1, p_2 \cdots p_n$满足：

$p_1, p_2 \cdots p_n$的任意一个前缀 $p_1, p_2 \cdots p_i$在树上是连通的。

树的大小 $n \leq 10^6$

CSA

不妨先确定一下排列的第一个数是啥。

然后， 我们以这个点为根考虑问题。

CSA

我们发现，其实问题等价于对这棵树标号， 使得子节点的标号总是比父节点小。

这个“标号”也就是这个点在数列中出现的位置。

CSA

问题转化为一个标号问题，简单DP+换根即可。

[AGC030D] Inversion Sum

给你一个长度为 n 的数列，然后给你 q 个交换或不交换操作， 你可以选择操作或者不操作，问所有情况下逆序对的总和。 答案需要对 10^9 + 7 取模。 n ≤ 3000，q ≤ 3000。

[AGC030D] Inversion Sum

考虑一个转化， 我们把问题转化为每个操作有 0.5 的概率执行，求期望以后我们把期望乘以 2^q 就是答案。

[AGC030D] Inversion Sum

对于任意一对位置 (i, j)， 我们考虑这构成一对逆序对的概率。

[AGC030D] Inversion Sum

设 $f(i, j)$ 表示 i 位置大于 j 位置的概率。

那么每次修改 (x, y) 的时候， 有：

$f(x, y) = f(y, x) = 0.5 * (f(x, y) + f(y, x))$

$f(j, x) = f(j, y) = (f(j, x) + f(j, y)) * 0.5$

$f(x, j) = f(y, j) = (f(x, j) + f(y, j)) * 0.5$

shopping

马上就是小苗的生日了，为了给小苗准备礼物，小葱兴冲冲地来到了商店街。商店街有 n 个商店，并且它们之间的道路构成了一棵树的形状。

第 i 个商店只卖第 i 种物品，小苗对于这种物品的喜爱度是 w_i，物品的价格为 c_i，物品的库存是 d_i。但是商店街有一项奇怪的规定：如果在商店 u,v 买了东西，并且有一个商店 p 在 u 到 v 的路径上，那么必须要在商店 p 买东西。小葱身上有 m 元钱，他想要尽量让小苗开心，所以他希望最大化小苗对买到物品的喜爱度之和。

这种小问题对于小葱来说当然不在话下，但是他的身边没有电脑，于是他打电话给同为OI选手的你，你能帮帮他吗?

对于全部的测试点，保证 $1 \le n \le 500$，$1 \le m \le 4000$，$1 \le T \le 5$，$0 \le w_i \le 4000$，$1 \le c_i \le m$，$1 \le d_i \le 100$。

shopping

一句话题意： 树上背包， 要求买了物品的点构成一个连通块。

shopping

和树上连通块有关的问题，常常联想到点分治解决。

shopping

考虑点分治， 处理包含当前重心的连通块的答案。

处理过程中做一个树上的多重背包就好了， 单调队列和二进制拆分都是可以的。

具体地， 为了保证选出来是一个连通块， 我们在转移的时候先强制加入一个当前点的物品。

这样我们一共进行 $n \log n$ 次转移， 每次转移的复杂度是 $O(m)$ 或者 $O(m \log c)$ 的。足以通过这个题。

[CEOI2016] kangaroo

有一个园子，里面有 n 个草丛排成一排，标号 $1\sim n$，有一个袋鼠，从 s 出发，每次跳一步跳到一个其他的草丛，经过每个草丛恰好一次，最终到达 t。显然他会跳跃 $n-1$次为了不被人类发现，袋鼠每次跳跃的方向必须与前一次不同。

具体地，如果他现在在 now，他是从 $prev$ 跳跃一次到达 now 的，然后他跳跃一次到达 $next$：

- 那么如果 $prev<now$，就必须有 $next<now$；
- 如果 $now<prev$，就必须有 $now<next$。

问从 s 到 t 的方案数模 10^9+7的结果。

两个路线不同，当且仅当草丛被访问的顺序不同。

保证至少有一种方案初始时可以往任意方向跳。

对于 100% 的数据，$2\le n\le 2\times 10^3$，$1\le s,t\le n$

[CEOI2016] kangaroo

观察排列的形态。

[CEOI2016] kangaroo

可以发现， 问题就是求有多少个排列， 使得每个数两边的数同时小于或者大于这个数， 第一个数是 s， 最后一个数是 t。

这个排列第 i 个位置其实就是袋鼠到达的第 i 个位置。

[CEOI2016] kangaroo

进行一个 DP 刻画这个过程即可。

Tenzing and Random Operations

有一长度为 n 的序列 a 和一整数 v，对该序列进行 m 次操作。

每次操作中，等概率地随机选择一整数 $i \in [1, n]$，对所有的 $j \in [i, n]$，赋值 $a_j \leftarrow a_j + v$，求出 m 次操作后 $\Pi_{i=1}^{n} a_i$ 的期望值，对 $10^9 + 7$ 取模。

数据范围：$0 \le n \le 5000$，$1 \le m, v \le 10^9$，$a_i \in [1, 10^9] \cap \mathbb{Z}$。

Tenzing and Random Operations

题意就是每次选一个位置做后缀加， 求全局乘积期望。

Tenzing and Random Operations

我们可以通过乘法分配律理解这个问题， 但是这里考虑一个组合意义来使得问题更加清晰。

Tenzing and Random Operations

考虑最后答案 $\prod a$ 的组合意义， 相当于 i -> i + 1 有 a_i 种方案，求 1 走到 n + 1 方案数。

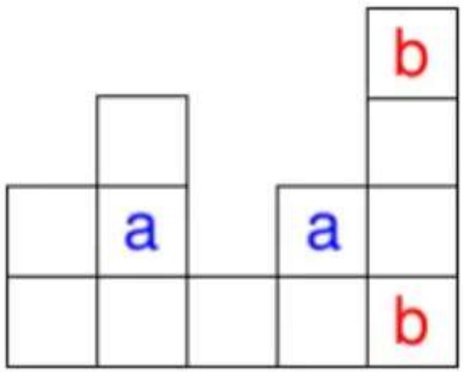
Tenzing and Random Operations

修改就相当于在某个位置放下工具， 这个人走到这个位置可以拿起工具， 之后就可以用这个工具从某个位置走到下一个位置。

Tenzing and Random Operations

考虑 f[i][j] 表示前 i 个位置用 j 个工具，讨论当前是不用工具/用一个放下了的工具/用一个没有被放下过的工具即可。

[COCI2008-2009#4] PERIODNI



如图，给定一个由 n 列组成的表格，每一列的底部都是对齐的。

你需要再里面填入 k 个相同的数。但不得有任意两个数在同一行或者同一列。

比如，上图中 `b` 的填写就是不合法的；因为两个 `b` 在同一列上。但 `a` 的填写是合法的，因为这两个 `a` 虽然在同一行，但是中间断开了，所以不算做非法。

请求出填写的方案总数 $\bmod 10^9+7$ 的结果。

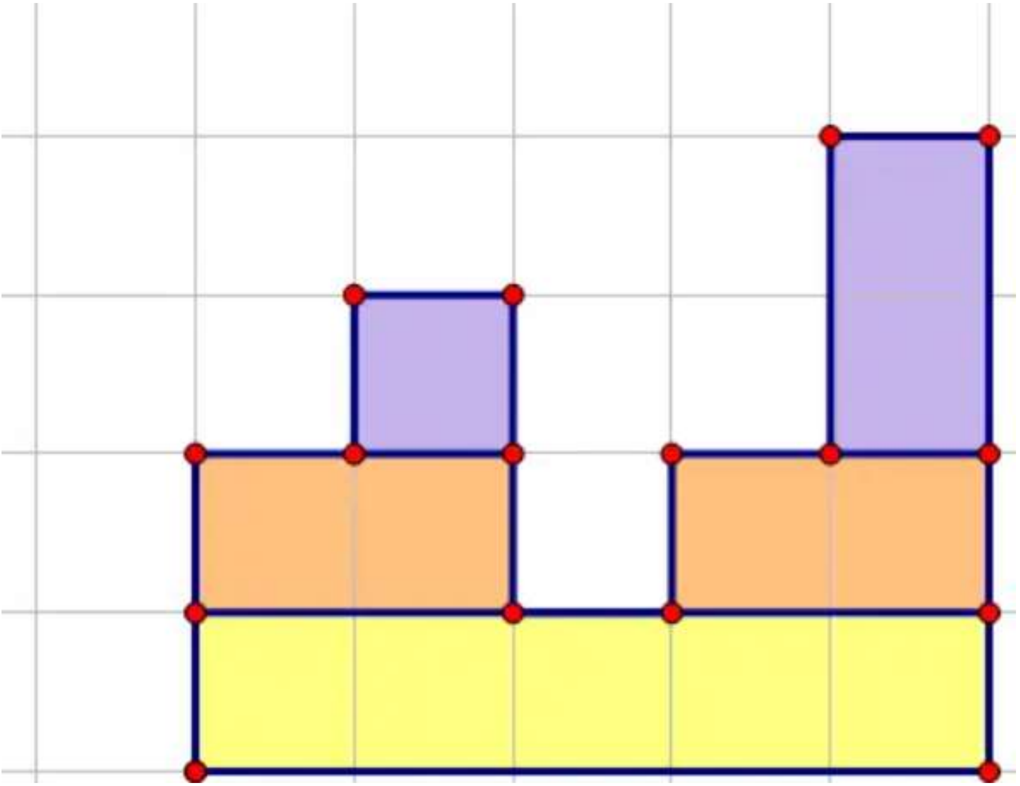
- 对于 40% 的数据，输入的数字都小于 15；
- 对于 70% 的数据，输入的数字都小于 100；
- 对于 100% 的数据，$1 \le n,k \le 500$，层高不会超过 10^6。

[COCI2008-2009#4] PERIODNI

初看难以下手， 因为在不规则的东西里边填数比较难以处理。

[COCI2008-2009#4] PERIODNI

考虑把这个大矩形从下往上划分成小矩形。



[COCI2008-2009#4] PERIODNI

矩形里面填 k 个数， 要求每行每列只有一个数怎么做?

[COCI2008-2009#4] PERIODNI

考虑对这个图建立笛卡尔树。先在子树里面放， 再在当前的大矩形里边放。

这样我们可以知道有多少列是用不了的（被子树占据）。

跑一个树上背包即可。

[ABC160F] Distributing Integers

有一颗节点编号为1至N的树,第i条边连接点a_i和b_i。对于1至N的每个k进行如下操作:

- 按如下操作在树上每个点写一个数字:
  - 在点k上写上1
  - 按从2到N的顺序将数写在节点上:
    - 选择一个仍未写有数字且与已写有数字的点相邻的点,如果有多个这样的点,随机选择一个。
- 输出所有写法的数量(结果模10^9+7)

- $2 \leq N \leq 2 \times 10^5$
- $1 \leq a_i, b_i \leq N$

[ABC160F] Distributing Integers

其实就是前面 CSA 那个题， 放个简单题防止大家睡着了。

所以想做前面那个题可以来这里交。

#(subset sum = K) with Add and Erase

维护一个箱子，有 Q 个操作，分为如下类型：

- `+ x`，表示向箱子中扔一个写有数字 x 的球。
- `- x`，表示从箱子中拿出一个写有数字 x 的球（保证存在这样的球）。

每一次操作后，计算：有多少种从箱子里拿球的方法，使得拿的球上写有的数字的总和为 K（并不需要真正拿出球）？答案对 998244353 取余。

#(subset sum = K) with Add and Erase

“可撤销” 背包的模板。

加入就是背包， 减去就倒着循环一下就完事了。

#(subset sum = K) with Add and Erase

```
if (op == '+') {
    rep (i, K, x) pls (f[i], f[i - x]);
}
else {
    lep (i, x, K) sub (f[i], f[i - x]);
}
```

#(subset sum = K) with Add and Erase

这种背包实际上是在做一个多项式乘法。

加入就是乘一个多项式， 删除是除一个多项式。

#(subset sum = K) with Add and Erase

再考虑一个问题， 有一个序列， 每个位置上都有一个大小为 w_i 的数， 分别求强制不包含 w_{1~n} 的情况下， 凑出来大小为 C 的背包的方案数?

#(subset sum = K) with Add and Erase

当然可以线段树分治。

但是根据我们前面所说， 只需要对钦定不能选的那个包做回退就好了。

P4645 [COCI2006-2007#3] BICIKLI

这个地方有 n 个城镇，从 $1 \sim n$ 编号，其中有 m 条**单向**道路连接它们。比赛将在 1 号城镇开始并在 2 号城镇结束。

主办方想知道，一共有多少条不同的路线？

> 对于 100% 的数据，$1 \le n \le 5 \times 10^4$，$1 \le m \le 10^5$。

P4645 [COCI2006-2007#3] BICIKLI

如果有一条从起点到终点的路径上有环， 答案就是无穷大。

我们保留可能在一条从起点到终点的路径上的点， 有环就是无穷大， 否则按拓扑序 DP 即可。

[HNOI2019] 校园旅行

某学校的每个建筑都有一个独特的编号。一天你在校园里无聊，决定在校园内随意地漫步。

你已经在校园里呆过一段时间，对校园内每个建筑的编号非常熟悉，于是你情不自禁的把周围每个建筑的编号都记了下来——但其实你没有真的记下来，而是把每个建筑的编号除以 2 取余数得到 0 或 1，作为该建筑的标记，多个建筑物的标记连在一起形成一个 01 串。

你对这个串很感兴趣，尤其是对于这个串是回文串的情况，于是你决定研究这个问题。

学校可以看成一张图，建筑是图中的顶点，而某些顶点之间存在无向边。对于每个顶点我们有一个标记（0 或者 1）。每次你会选择图中两个顶点，你想知道这两个顶点之间是否存在一条路径使得路上经过的点的标记形成一个回文串。

一个回文串是一个字符串使得它逆序之后形成的字符串和它自己相同，比如 “010”，“1001” 都是回文串，而 “01”，“110” 不是。注意长度为 1 的串总是回文串，因此如果询问的两个顶点相同，这样的路径总是存在。此外注意，经过的路径不一定为简单路径，也就是说每条边每个顶点都可以经过任意多次。

对于 30% 的数据，$1 \leq m \leq 10^4$；

对于 70% 的数据，$1 \leq n \leq 3000$，$1 \leq m \leq 5 \times 10^4$；

对于 100% 的数据，$1 \leq n \leq 5000$，$1 \leq m \leq 5 \times 10^5$，$1 \leq q \leq 10^5$。

[HNOI2019] 校园旅行

首先有一个比较好想的暴力是这样的。

设 f[i][j] 表示 (i, j) 存在一条合法路径， 然后枚举 i 连出去的边和 j 连出去的边转移。

这样的复杂度是 m^2 的。

[HNOI2019] 校园旅行

接下来是一个难以想到的点。

考虑缩减边的数量。

[HNOI2019] 校园旅行

我们考虑拼接的过程。一个回文串可以被拆成若干段01，10，00，11 的组合。对于最后对称的两段，由于可以反复横跳，我们只关心这段长度的奇偶性是否相同。

可以发现这等价于我们只保留这种颜色的边，判断这里是不是构成一个二分图。

对于一个二分图，在这个图里边反复走，长度的奇偶性不会有改变。

[HNOI2019] 校园旅行

于是我们有以下策略：

先保留同色边，对于一个同色连通块，保留一棵生成树。如果这个块不是二分图，随便连个自环。

对于连接不同色的两个点的边，这些边一定构成二分图，也保留一棵生成树即可。

于是边数和点数同级了，跑之前的暴力即可。

感谢