

CSP-S 模拟赛题解

2023年10月8日

T1 树计数

- 因为是有向路径，所以两个方向都能统计答案。
- 因为是排列，所以一条路径的贡献是 $\frac{l(l+1)}{2}$ 。
- 只要求形如 $\sum \sum dis^2(u, v)$ 的东西，简单树形dp可以解决。
- 复杂度 $O(n)$

T2 数对计数

- 将过程反过来，容易发现是辗转相减法。
- 记录 (a, b, c) 表示一个过程： $(a, b), (a, b + a), (a, b + 2a) \cdots (a, b + ca)$ ，其中 $a < b$ 。
- 查询时只要查形如 $a = p \bmod q, b = q, \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor \leq c$ 的 (a, b, c) 对数。
- 把所有三元组排序然后 lower_bound 就好了。
- 复杂度 $O(n \log^2 n)$

T3 背包计数

- 使用单调队列优化多重背包。
- dsu on tree 合并，复杂度是 $O(nm \log n)$ 。
- 当然你注意到如果合并两边大小都超过 m 可以直接平方合并。
- 大小超过 m 的轻儿子数量不超过 $\frac{n}{m}$ 个，所以复杂度是 $O(nm \log m)$ 的。
- 实际上因为数据的特殊性，把单调队列换成二进制分组会更快。
- 以上做法都可以通过本题。

T4 数列计数

- 把题目条件改写成这样： $\prod \gcd(k^2, a_i) = k$ 。
- 设 $f(i, x)$ 表示确定了前 i 位，当前 $\prod_{j=1}^i \gcd(k^2, a_j) = x$ 时的方案数。
- 容易发现只有 $x|k$ 的 x 有用。
- 转移的系数是 $g(t = \frac{x'}{x}) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{t} \rfloor} [\gcd(i, \frac{k^2}{t}) = 1] = \sum_{d|\frac{k^2}{t}} \mu(d) \lfloor \frac{m}{dt} \rfloor$ 。
- 因为 $\frac{k^2}{t}$ 和 k 的所有质因子都是一样的，所以实际上可以改写为 k 。
- 注意到转移过程中 $t \neq 1$ 的项不超过 $\log k$ 个，不妨枚举它，然后乘上 $\binom{n}{i} g(1)^{n-i}$ 。
- 设 $k = \prod p_i^{c_i}$ ，那暴力转移的复杂度是 $\prod \frac{(c_i+1)(c_i+2)}{2}$ ，在 $k \leq 10^{15}$ 时最多是 18370800。
- 求解 g 可以使用高维差分，复杂度 $\prod (c_i + 2)$ ，在 $k \leq 10^{15}$ 时最多是 2125764。