CS 4 计算原理与排列组合

览遍千秋 / Fujisaki

20230803

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology, HUST

基本计数原则

- 两个基本计数原则：**乘积法则**和**求和法则**。

- 乘积法则：假定一个过程可以被分解成两个任务。如果完成第一个任务有 n_1 种方式，在第一个任务完成后有 n_2 种方式完成第二个任务，那么完成这个过程有 $n_1 n_2$ 种方式。
- 求和法则：如果完成第一项任务有 n_1 种方式，完成第二项任务有 n_2 种方式，并且这些任务不能同时执行，那么完成第一或第二项任务有 $n_1 + n_2$ 种方式。

例题 01

基本计数原则

- 某个计算机中心有 32 台微机，每台微机有 24 个端口。问在这个中心里有多少个不同的微机端口。
- 选择一个端口的过程由两个任务组成。首先挑一台微机，然后在这台微机上挑一个端口。因为有 32 种方式选择微机，而不管选择了哪台微机，又有 24 种方式选择端口，所以由成绩法则存在 $32 \cdot 24 = 768$ 个端口。

例题 02

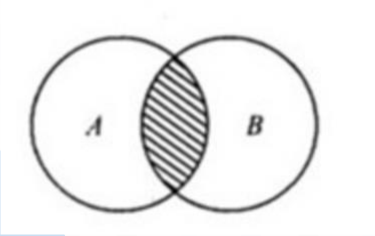
基本计数原则

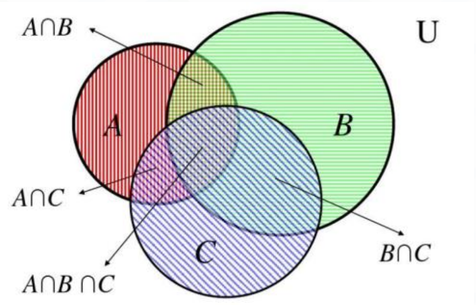
- 假定要选一位数学学院的教师或数学专业的学生作为校委会的代表。如果有 37 位数学学院的教师和 83 位数学学院的学生，那么这个代表有多少种不同的选择？

- 完成第一项任务，选一位数学学院的教师，可以有 37 种方式。完成第二项任务，选一位数学专业的学生，有 83 种方式。根据求和法则，结果有 $37+83=120$ 种可能的方式来挑选这个代表。

容斥原理 / 减法法则

- 容斥原理（减法法则）：如果一个任务或者可以通过 n_1 种方法执行或者可以通过 n_2 种另一类方法执行，那么执行这个任务的方法数是 $n_1 + n_2$ 减去两类方法中执行这个任务相同的方法。
- 数学化的，集合 A_1, A_2 与并集 $A_1 \cup A_2$ 满足 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$





华中科技大学
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology, HUST
洛谷

例题 03

容斥原理 / 减法法则

- 某计算机公司收到了 350 份计算机毕业生设计一组新网络服务器工作的工作申请书。假如这些申请人中有 220 人主修的事计算机科学专业，有 147 人主修的是商务专业，有 51 人既主修了计算机科学专业又主修了商务专业。那么，有多少申请人既没有主修计算机科学专业又没有主修商务专业？

例题 03

容斥原理 / 减法法则

- 为了求出既没有主修计算机科学专业又没有主修商务专业的申请人的个数，可以从总的申请人数中减去主修计算机科学专业的人数，或减去主修商务专业的人数（或减去二者人数之和）。
- 设 A_1 是主修计算机科学专业的学生的集合，A_2 是主修商务专业学生的集合，那么 $A_1 \cup A_2$ 是主修计算机科学专业或主修商务专业学生的集合，$A_1 \cap A_2$ 是记住修计算机科学专业又主修商务专业学生的集合。
- 根据容斥原理，$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 220 + 147 - 51 = 316$，则答案为 $350 - 316 = 34$ 人。

鸽巢原理

- 鸽巢原理：如果 $k+1$ 个或更多的物体放入 k 个盒子，那么至少有一个盒子包含了 2 个或更多的物体。
- 广义鸽巢原理：如果 N 个物体放入 k 个盒子，那么至少有一个盒子包含了至少 $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ 个物体。

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST 洛谷

例题 04

鸽巢原理

- 如果有 5 个可能的成绩 A、B、C、D 和 F，那么在一个班级里最少有多少个学生才能保证至少 6 个学生得到相同的分数？

- 为保证至少 6 个学生得到相同的分数，需要的最少学生数是使得 $\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil = 6$ 的最小整数 N。这样的最小整数是 $N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$。

例题 05

鸽巢原理

- 从一副标准的 52 张扑克牌（不含大小王）中必须选多少张牌才能保证选出的牌中至少有 3 张是红心？

- 我们不用广义鸽巢原理回答这个问题，因为我们要保证存在 3 张红心而不仅仅是 3 张同样花色的牌。注意在最坏情况下，在选一张红心以前可能已经选了所有的黑桃、方块、梅花，总共 39 张牌，下面选的 3 张牌都讲师红心。因此为得到 3 张红心，可能需要选 42 张牌。

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST 洛谷

排列与组合

- 排列：集合 S 由 n 个不同的元素组成，取出其中 r 个，排成**有序**的一排，方案数为

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- 特别地，当 $n = r$，$A(n,r) = A(n,n) = n!$。

- $A(n,r)$ 亦可记作 $P(n,r)$、A_n^r、P_n^r。

排列与组合

- 组合：集合 S 由 n 个不同的元素组成，取出其中 r 个，排成**无序**的一排，方案数为

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

- 观察可得，$C(n,r)=\frac{A(n,r)}{A(r,r)}$。
- 排列可以视作：先从集合 S 中，取出一个大小为 r 的组合，再对取出的 r 个元素进行排序。根据乘积法则，即有 $A(n,r)=C(n,r)\cdot A(r,r)$。
- $C(n,r)$ 亦可记作 C_n^r、$\binom{n}{r}$。

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST 洛谷

排列与组合

- 组合数具有一些重要性质：
- $C_n^r = C_n^{n-r}$
- $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

（帕斯卡恒等式）

例题 06

排列与组合

- 计算以下式子：

$$C_4^2, A_4^2, C_{200}^1, A_5^5$$

- $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{2\times2\times3} = 10$
- $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$
- $C_{200}^1 = 200$
- $A_5^5 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

计数导论

- 实际涉及的计数问题，往往不能通过一个组合数公式简单求出，需要使用一定的计数技巧。
- 无法通过计数技巧直接计算答案的时候，直接列举所有可能的情况，往往也能够得到奇效。

- 后面，我们将介绍一些计数技巧。

有重复的排列

- 给出具有 n 个对象的集合 S，选出 r 个进行排列，可以重复选择。
- 从第 1 个位置到第 r 个位置，均有 n 种选择，方案数为 n^r。

有重复的组合 / 插板法

- 给出具有 n 个对象的集合 S，选出 r 个，不关心顺序，可以重复选择。
- 由于不关心顺序，我们只需要考虑每一个元素选择的数量。
- 将 r 个选出的萝卜坑排成一列，我们按照向其中插入 $n-1$ 个隔板。在第 0 个隔板和第 1 个隔板中间的，是第一个对象对应的物品；第 1 个隔板和第 2 个隔板中间的，是第二个对象对应的物品、第 $i-1$ 个隔板和第 i 个隔板中间的，是第 i 个对象对应的物品。
- 一共有 $r-1$ 个空，放 $n-1$ 个隔板，所以答案是 C_{r-1}^{n-1}？

有重复的组合 / 插板法

- 一共有 $r-1$ 个空，放 $n-1$ 个隔板，所以答案是 C_{r-1}^{n-1}？
- 这样的答案是不正确的，因为，这样的取法，假定了每个空只能放一个隔板。
- 我们加上 n 个物品，强制每两个隔板之间有一个物品，这样就是从 $n+r-1$ 个空中选 $n-1$ 个位置，在每个位置放一个隔板。
- 最终的方案数为 $C(n+r-1,n-1)$。

排列与组合

类型	是否允许重复	公式
r 排列	否	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r 组合	否	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r 排列	是	n^r
r 组合	是	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

小球与盒子

- 可辨别的：不同；有标号；颜色不同……
- 不可辨别的：相同……

可辨别的小球与可辨别的盒子

- 把 n 个不同的物体分配到 k 个不同的盒子，使得第 i 个盒子中放入 n_i 个物体的方案数为

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}=\frac{A_n^n}{A_{n_1}^{n_1}A_{n_2}^{n_2}\cdots A_{n_k}^{n_k}}$$

- 将 n 个物体进行排列后，$1\sim n_1$ 给 1 号盒子、$n_1+1\sim n_1+n_2$ 给 2 号盒子……
- 但是，$1\sim n_1$ 的物品顺序是无所谓的，其方案数为 $A_{n_1}^{n_1}$，需要除去，其他盒子同理。
- 这样的过程称为去序。

不可辨别的小球与可辨别的盒子

- 把 n 个相同的物体分配到 k 个不同的盒子，盒子可以为空。
- 与前面可重组合推导过程相同，使用插板法，补入 k 个物体，强制要求每个盒子至少放入一个物品。
- 结论为 $C(n+k-1,k-1)$。

- 如果盒子不可以为空？
- $C(n-1,k-1)$

可辨别的小球与不可辨别的盒子

- 结论涉及第二类斯特林数。
- 为了体系的完备，这里不加任何解释的给出结论，同学们也无需记忆和理解：
- 将 n 个可辨别的物体放入 k 个不可辨别的盒子的方案数为

$$\sum_{j=1}^{k} S(n,j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{i} (j-i)^n$$

不可辨别的小球与不可辨别的盒子

- 将 n 个不可辨别的物体放入 k 个不可辨别的盒子里的方案数为 $p_k(n)$。
- 遗憾的是，关于这个数，我们没有更简单的表示方式。
- 有兴趣的同学可以自行查阅更多的资料。

例题 07

排列与组合

- 有多少种方式，可以把 52 张标准扑克牌发给 4 个人，每人 5 张？

- 52 个可辨别的小球，分给 5 个可辨别的盒子，依次分 5,5,5,5,32 个。
- 套用结论，答案为 $\frac{52!}{5!5!5!5!32!}$。

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST 洛谷

例题 08

排列与组合

- 将 10 个相同的小球放到依次编号为 1 ~ 8 的 8 个桶中，一共有多少种方法?

- 不可辨别的物体与可辨别的盒子。
- 套用结论，答案为 $C(8+10-1,10)=C(17,10)=19448$。

例题 09

排列与组合

- 将 4 个雇员安排在 3 间相同的办公室，有多少种方式？可以有空办公室。

- 可辨别的物品与不可辨别的盒子。问题规模很小，直接枚举得答案。

例题 09

排列与组合

类别	方案（共 14 种）
4 个雇员安排在同一间办公室	{{A,B,C,D}}
3 个雇员安排在同一间办公室，另一名单独一间	{{A,B,C},{D}}，{{A,B,D},{C}}，{{A,C,D},{B}}，{{B,C,D},{A}}
2 个雇员同一间，另外 2 个同一间	{{A,B},{C,D}}，{{A,C},{B,D}}，{{A,D},{B,C}}
2 个同一间，另外 2 个各一间	{{A,B},{C},{D}}，{{A,C},{B},{D}}，{{A,D},{B},{C}}，{{B,C},{A},{D}}，{{B,D},{A},{C}}，{{C,D},{A},{B}}

例题 10

排列与组合

- 将 6 本相同的书放到 4 个相同的书柜里，有多少种不同的方式？

- 不可辨别的物体与不可辨别的盒子。枚举所有情况：

6	5,1	4,2
4,1,1	3,3	3,2,1
3,1,1,1	2,2,2	2,2,1,1

- 共 9 种方案。

例题 11

排列与组合

- [CSP-J 2021] 6 个人，两个人组一队，总共组成三队，不区分队伍的编号。不同的组队情况有多少种？

- 可辨别的物体与不可辨别的盒子。无法直接套用公式，采用组合技巧。
- 先把三队视作不同的，那么可以套用公式 $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$
- 由于三队是相同的，再去序，$\frac{90}{3!} = 15$。
- 答案即为 15。

错排数

- 考虑一个有 n 个元素的排列，若一个排列中所有的元素都不在自己原来的位置上，那么这样的排列就称为原排列的一个错排。
- 错排数就是这样排列的个数。
- 错排数的推导较为复杂，这里不再给出，记忆结论即可。

$$D(n) = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

$$D(n) = (n-1)\big(D(n-1) + D(n-2)\big)$$

$$D(1) = 0, D(2) = 1$$

限时练习 ● 考试地址

https://www.luogu.com.cn/contest/122537

考试起讫时间

: ～ :

限时练习讲评

题号	1	2	3	4	5
答案	C	A	B	D	A
题号	6	7	8	9	10
答案	D	C	B	C	C
题号	11	12	13	14	
答案	A	B	D	B	

限时练习讲评

- 1. 在计算机语言 BASIC 的某个版本中，变量的名字是含有一个或两个字母数字字符的符号串，其中的大写和小写字母是不加区分的（一个字母数字字符或者取自 26 个英文字母，或者取自 10 个数字）。此外，变量名必须以字母开始，并且必须与由两个字符构成的用于程序设计的 5 个保留字相区别。在 BASIC 的这个版本中有多少个不同的变量名？
- 由于单字符变量名必须是字母，$V_1 = 26$。又根据乘法法则存在 $26 \cdot 36$ 个以字母打头且以字母数字字符结尾的 2 位字符串。但是其中 5 个不包含在内，答案为 $26 + 26 \cdot 36 - 5 = 957$。

限时练习讲评

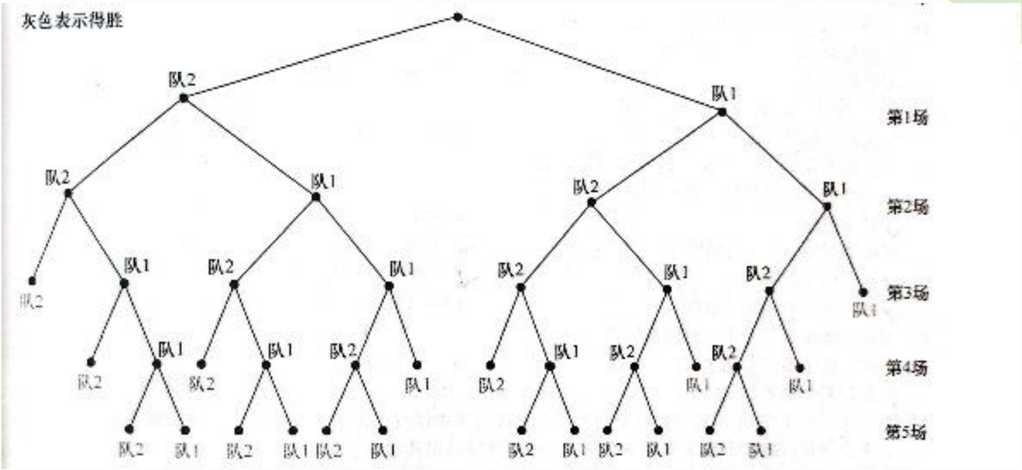
- 2. 以 1 开始或以 00 结束的 8 位位串有多少个?

- 构造以 1 开头的 8 位位串，共有 $2^7 = 128$ 种。以 00 结尾的 8 位位串，共有 $2^6 = 64$ 种。同时以 1 开始、00 结尾的位串共有 $2^5 = 32$ 种。由容斥原理，答案为 $128 + 64 - 32 = 160$ 种。

限时练习讲评

- 3. 在队 1 和队 2 的决赛至多由 5 次比赛构成。先胜 3 次的队赢得决赛。决赛可能出现多少种不同的方式?

- 采用列举的方法，可以绘制树图，可见共有 20 种不同决赛的方式:



限时练习讲评

- 4. 在进入竞赛的 100 个不同的人中，有多少种方法选出一名冠军、一名亚军、一名季军？

- 从 100 个人中选出 3 个进行有序排列，答案为 $A_{100}^{3} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$。

限时练习讲评

- 5. 用 0,1,2,3,4,5 可以组成多少个没有重复数字的 5 位奇数？

- 先排末位，有 C_3^1 种选择方式。再排首位，有 C_4^1 种选择方式。最后排其他位置，有 A_4^3 种选择方式。因此答案为 $C_3^1C_4^1A_4^3=288$ 种。

限时练习讲评

- 6. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 名同学排队。甲同学必须站在乙同学前面，乙同学必须站在丁同学前面，一共有多少种不同的排队方案？

- 7 名同学排队共有 A_7^7 种方案，甲乙丙顺序已经固定，去序，答案为 $\frac{A_7^7}{A_3^3} = 840$。

限时练习讲评

- 7. 有 10 个运动会名额，分给 1 ~ 7 班，每个班至少分一个名额，有多少种分配方法?
- 插板法，10 个物品形成的 9 个空隙中插入 6 个插板，分成 7 段，答案为 C_9^6。

限时练习讲评

- 8. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有多少种？

- 两类选修课中各选一门，共 $C_4^1 C_4^1 = 16$ 种方案。体育选两门，艺术选一门，共 $C_4^2 C_4^1 = 24$ 种方案。艺术选两门，体育选一门，共 $C_4^1 C_4^2 = 24$ 种方案。求和共 64 种。

限时练习讲评

- 9. 要安排 3 名学生到 2 个乡村做志愿者，每名学生只能选择去一个村，每个村里至少有一名志愿者，则不同的安排方法共有多少种？

- 将 3 名学生分成两组，有 3 种分法。分配给两个村，有 2 种分法。故答案为 6。

限时练习讲评

- 10. 从 4 名男生和 3 名女生中，任选 3 名男生和 2 名女生，分别担任 5 门不同学科的课代表，则不同安排方法的种数是？

- 首先从 4 名男生和 3 名女生中，任选 3 名男生和 2 名女生，共有 $C_4^3C_3^2$ 种情况。再分别担任 5 门不同学科的课代表，共有 A_5^5 种情况。所以共有 $C_4^3C_3^2A_5^5 = 1440$ 种方案。

限时练习讲评

- 11. 有多少种方式使得 6 个男士和 5 个女士站成一排并且没有两个女士彼此相邻？

- 先将 6 名男士排好，共有 A_6^6 种方式。5 名女士选择 6 名男士隔出的 7 个空位中的 5 个并有序排列，共有 A_7^5 种方式。因此答案为 $A_6^6 A_7^5 = 1814400$ 种。

限时练习讲评

- 12. 有甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻，则不同排列方式共有多少种？

- 因为丙丁要在一起，先把丙丁捆绑，看作一个元素，联通乙、戊看成三个元素排列，共有 A_3^3 种排列方式。为了使甲不在两段，必须且只需甲再次三个元素的中间两个位置任选一个位置插入，有 2 种插空方式。丙丁两人顺序可以交换，2 种方式。故总方案数为 $A_3^3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ 种。

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science & Technology, HUST 洛谷

限时练习讲评

- 13. 计算机系统的每一个用户有一个由 6 ~ 8 个字符构成的密码，其中每个字符是大写字母或者数字，且每个密码必须至少包含一个数字。有多少种可能的密码?

- 分长度为 6,7,8 讨论。长度为 6 的个数为 $36^6 - 26^6 =$ 1,867,866,560。长度为 7 的个数为 $36^7 - 26^7 =$ 70,332,353,920。长度为 8 的个数为 $36^8 - 26^8 =$ 2,612,282,842,880 。求和得答案为 2,684,483,063,360 。

限时练习讲评

- 14. 从 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这十个数字中取出三个数，其和为不小于 10 的偶数的不同取法有多少种？

- 十个数字中有 5 个偶数 5 个奇数，所取出的三个数含有三个偶数的取法有 C_5^3 种，两个奇数一个偶数的取法有 $C_5^2C_5^1$ 种。其中和小于 10 的取法有 9 种，答案为 $C_5^3+C_5^2C_5^1-9=51$ 种。