

高精度与运算

陆明琪

清华大学

July 26, 2023

我们为什么需要高精度

int	有符号 32 位整数 $-2,147,483,648 \sim 2,147,483,647$	4 字节
unsigned int	无符号 32 位整数 $0 \sim 4,294,967,295$	4 字节
long long	64 位有符号整数 $9,223,372,036,854,775,808 \sim 9,223,372,036,854,775,807$	8 字节
unsigned long long	64 位无符号整数 $0 \sim 18,446,744,073,709,551,615$	8 字节

简单模拟

考虑以下加法计算：

$$\begin{array}{r} 9876 \\ + \quad 346 \\ \hline \end{array}$$

简单模拟

考虑以下加法计算：

$$\begin{array}{r} 9876 \\ + 346 \\ \hline 12 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下加法计算：

$$\begin{array}{r} 9876 \\ + 346 \\ \hline 122 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下加法计算：

$$\begin{array}{r} 9876 \\ + 346 \\ \hline 1222 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下加法计算：

$$\begin{array}{r} 9876 \\ + 346 \\ \hline 10222 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下加法计算：

$$\begin{array}{r} 9876 \\ + 346 \\ \hline 10222 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下加法计算：

$$\begin{array}{r} 9876 \\ + 346 \\ \hline 10222 \end{array}$$

注意进位问题，加法进位最多进一位。

演示

<https://www.luogu.com.cn/problem/P1601>

十进制表达

$$9876 = 6 * 10^0 + 7 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3$$

$$346 = 6 * 10^0 + 4 * 10^1 + 3 * 10^2 + 0 * 10^3$$

先将对应位相加，再做进位运算

十进制表达

$$\begin{aligned}9876 + 346 &= 6 * 10^0 + 7 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3 \\&\quad + 6 * 10^0 + 4 * 10^1 + 3 * 10^2 + 0 * 10^3 \\&= (6 + 6) * 10^0 + (7 + 4) * 10^1 + (8 + 3) * 10^2 + (9 + 0) * 10^3 \\&= 12 * 10^0 + 11 * 10^1 + 11 * 10^2 + 9 * 10^3 \\&= 2 * 10^0 + (1 * 10^1 + 11 * 10^1) + 11 * 10^2 + 9 * 10^3 \\&= 2 * 10^0 + 12 * 10^1 + 11 * 10^2 + 9 * 10^3 \\&= \dots \\&= 2 * 10^0 + 2 * 10^1 + 2 * 10^2 + 10 * 10^3 \\&= 2 * 10^0 + 2 * 10^1 + 2 * 10^2 + 0 * 10^3 + 1 * 10^4 \\&= 10222.\end{aligned}$$

演示

<https://www.luogu.com.cn/problem/P1601>

高精度加低精度

$$\begin{aligned} 9876 + 346 &= 6 * 10^0 + 7 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3 \\ &\quad + 346 * 10^0 \\ &= (6 + 346) * 10^0 + 7 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3 \\ &= 352 * 10^0 + 7 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3 \\ &= 2 * 10^0 + (35 * 10^1 + 7 * 10^1) + 8 * 10^2 + 9 * 10^3 \\ &= 2 * 10^0 + 45 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3 \\ &= \dots \\ &= 2 * 10^0 + 2 * 10^1 + 2 * 10^2 + 10 * 10^3 \\ &= 2 * 10^0 + 2 * 10^1 + 2 * 10^2 + 0 * 10^3 + 1 * 10^4 \\ &= 10222. \end{aligned}$$

判断减数与被减数的大小关系

对于减法来说，为了简化问题，我们希望 $a - b$ 中的 $a \geq b$ 。

判断减数与被减数的大小关系

对于减法来说，为了简化问题，我们希望 $a - b$ 中的 $a \geq b$ 。
如果 $a < b$ 的话， $a - b = -(b - a)$ ，答案为 $b - a$ 前增加一个负号。

判断减数与被减数的大小关系

对于减法来说，为了简化问题，我们希望 $a - b$ 中的 $a \geq b$ 。

如果 $a < b$ 的话， $a - b = -(b - a)$ ，答案为 $b - a$ 前增加一个负号。

方法：

1. 如果 a 的长度比 b 长的话， $a > b$ ；如果 a 的长度比 b 短的话， $a < b$ 。
2. 当 a, b 长度相等时，比较其字典序。
3. 可以顺便把相结果等为 0 的情况特判掉。

简单模拟

考虑以下减法计算：

$$\begin{array}{r} 1001 \\ - \quad 13 \\ \hline \end{array}$$

简单模拟

考虑以下减法计算：

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 0\ 1\ 3 \\ \hline 1\ 0\ -1\ -2 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下减法计算：

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 0\ 1\ 3 \\ \hline 1\ 0\ -2\ 8 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下减法计算：

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 0\ 1\ 3 \\ \hline 1\ -1\ 8\ 8 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下减法计算：

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 0\ 1\ 3 \\ \hline 0\ 9\ 8\ 8 \end{array}$$

退位

注意：减法可能会退超过一位！
比如 $1000 - 999$ 。

退位

注意：减法可能会退超过一位！

比如 $1000 - 999$ 。

一种可行的方法是从 a 的最高位起找第一个不是零的数开始输出。

演示

<https://www.luogu.com.cn/problem/P2142>

简单模拟

考虑以下乘法计算：

$$\begin{array}{r} 8765 \\ * \quad 46 \\ \hline \end{array}$$

简单模拟

考虑以下乘法计算：

$$\begin{array}{r} 876 \\ * 46 \\ \hline 484236 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下乘法计算：

$$\begin{array}{r} 876 \\ * \underline{46} \\ \hline 484236 \\ 322824 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下乘法计算：

$$\begin{array}{r} 876 \\ * 46 \\ \hline 3276 \quad 6636 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下乘法计算：

$$\begin{array}{r} 876 \\ * 46 \\ \hline 3276696 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下乘法计算：

$$\begin{array}{r} 876 \\ * \quad 46 \\ \hline 328296 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下乘法计算：

$$\begin{array}{r} 876 \\ * 46 \\ \hline 40296 \end{array}$$

简单模拟

考虑以下乘法计算：

$$\begin{array}{r} 876 \\ * 46 \\ \hline 40296 \end{array}$$

进位

注意：乘法可能会进超过一位！
比如 $999 * 999$ 。

进位

注意：乘法可能会进超过一位！

比如 $999 * 999$ 。

一种可行的方法是从 $\text{len}(a) + \text{len}(b)$ 起向高位进位。

演示

<https://www.luogu.com.cn/problem/P1303>

高精度除低精度

392/17

高精度除低精度

$$392/17$$

$$3/17 = 0 \cdots 3$$

高精度除低精度

$$392/17$$

$$3/17 = 0 \cdots 3$$

$$(3 * 10 + 9)/17 = 39/17 = 2 \cdots 5$$

高精度除低精度

$$392/17$$

$$3/17 = 0 \cdots 3$$

$$(3 * 10 + 9)/17 = 39/17 = 2 \cdots 5$$

$$(5 * 10 + 2)/17 = 52/17 = 3 \cdots 1$$

高精度除低精度

$$392/17$$

$$3/17 = 0 \cdots 3$$

$$(3 * 10 + 9)/17 = 39/17 = 2 \cdots 5$$

$$(5 * 10 + 2)/17 = 52/17 = 3 \cdots 1$$

商为 023，余数为 1

演示

<https://www.luogu.com.cn/problem/P1480>

高精度除高精度

法一：用减法来模拟高精度除低精度中的低精度对低精度除法/取模。

高精度除高精度

法一：用减法来模拟高精度除低精度中的低精度对低精度除法/取模。

比如 $392/17$ 中计算 $39/17$ 就可以用减法计算。

$39 - 17 = 22$, $22 - 17 = 5$, 因而商 2 余 5。

高精度除高精度

法二：倍增的方法

(a, b) 为 (偶, 偶) 时, $a/b = (a/2)/(b/2)$

(a, b) 为 (偶, 奇) 时, $a/b = [(a/2)/b] * 2$

(a, b) 为 (奇, 偶) 时, $a/b = (a - 1)/b$

(a, b) 为 (奇, 奇) 时, $a/b = [(a - b)/b] + 1$

高精度除高精度

法二：倍增的方法

(a, b) 为 (偶, 偶) 时, $a/b = (a/2)/(b/2)$

(a, b) 为 (偶, 奇) 时, $a/b = [(a/2)/b] * 2$

(a, b) 为 (奇, 偶) 时, $a/b = (a - 1)/b$

(a, b) 为 (奇, 奇) 时, $a/b = [(a - b)/b] + 1$

复杂度带一个 \log , 因为每两步 a 至少有一次为偶数, 范围至少减少一半。

练习

<https://www.luogu.com.cn/problem/P1932>

非整除：无限小数

当高精度除低精度中的低精度对低精度取模结果有相同时产生循环节。

注意：循环节在相同的后一位！

非整除：无限小数

当高精度除低精度中的低精度对低精度取模结果有相同时产生循环节。

注意：循环节在相同的后一位！

例子： $1/7 = 0.142857\cdots$

什么是二进制

$$(9876)_{10} = 6 * 10^0 + 7 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3$$

什么是二进制

$$(9876)_{10} = 6 * 10^0 + 7 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3$$

$$(1101)_2 = 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3$$

什么是二进制

$$(9876)_{10} = 6 * 10^0 + 7 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3$$

$$(1101)_2 = 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3$$

自然地，由定义我们就能做到二进制转十进制。

什么是二进制

$$(9876)_{10} = 6 * 10^0 + 7 * 10^1 + 8 * 10^2 + 9 * 10^3$$

$$(1101)_2 = 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3$$

自然地，由定义我们就能做到二进制转十进制。

也可以写成 $(1101)_2 = \underline{1} + 2 * (\underline{0} + 2 * (\underline{1} + 2 * (\underline{1})))$

十进制转二进制

$$\begin{aligned}13 &= (13\%2) + 2 * (13/2) \\&= 1 + 2 * 6 \\&= 1 + 2 * ((6\%2) + 2 * (6/2)) \\&= 1 + 2 * (0 + 2 * 3) \\&= 1 + 2 * (0 + 2 * (1 + 2 * 1)) \\&= 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3 \\&= (1101)_2.\end{aligned}$$

练习

<https://www.luogu.com.cn/problem/P1143>

CSP2020

<https://www.luogu.com.cn/problem/P7073>

CSP2022

<https://www.luogu.com.cn/problem/P8815>

Thanks

谢谢大家。