

Div1 F 消除

Pengzhike

2024 年 3 月 30 日

题意简述

消除

给定一个包含 0, 1, ? 的序列，对它的所有子序列，求有多少种把 ? 变成 0 或 1 的方案，使每次可以删去 *0 或 1* 的子串，最后变为空串。输出答案和。

$$n \leq 10^6$$

几个简单的性质

Prop 1

如果第一个 bit 是 1，序列一定是好的。

几个简单的性质

Prop 1

如果第一个 bit 是 1，序列一定是好的。

Proof 1

总是考虑第三个 bit：若为 0，则选择这个 0 删去第二和第三个 bit；若为 1，则选择第一个 1 删去第一和第二个 bit。由此可以始终保持序列的第一个 bit 为 1，直至删去整个序列。

Remark

同理，最后一个 bit 是 0，序列一定是好的。

几个简单的性质

Prop 2

一个 01 序列是好的，当且仅当可以分配一个合法的括号序列，且匹配的一对括号对应的 bit 不为 01。

几个简单的性质

Prop 2

一个 01 序列是好的，当且仅当可以分配一个合法的括号序列，且匹配的一对括号对应的 bit 不为 01。

Prop 3

可以在 Prop 2 中把“合法的括号序列”改为“嵌套不超过两层的合法括号序列”。

几个简单的性质

Prop 2

一个 01 序列是好的，当且仅当可以分配一个合法的括号序列，且匹配的一对括号对应的 bit 不为 01。

Prop 3

可以在 Prop 2 中把“合法的括号序列”改为“嵌套不超过两层的合法括号序列”。

Proof 3

00xx00 变成 $()()()$; 0100x0 变成 $((()))$; 0110x0 变成 $((()))$;
0111x0 变成 $((()))$; 1xxxx0 变成 $()()()$; 100001 变成 $((()))$;
101x01 变成 $()()()$; 110001 变成 $((()))$; 110011 变成 $((()))$;
111x01 变成 $((()))$; 111x11 变成 $((()))$ 。

几个简单的性质

Prop 4

若序列开头是 00，则其是好的，当且仅当删去开头的 00 后的序列是好的。

几个简单的性质

Prop 4

若序列开头是 00，则其是好的，当且仅当删去开头的 00 后的序列是好的。

Proof 4

充分性是显然的。

而若第三个 bit 为 1，则知删去开头 00 后序列是好的。

否则第三个 bit 为 0，若开头两个 00 均对应左括号，此时不妨将 0000 对应的 $(())$ 改为 $()()$ 。

几个简单的做法

sol 1

从左往右遍历，能匹配就匹配，遇到单个 1 时就可以结束。

几个简单的做法

sol 1

从左往右遍历，能匹配就匹配，遇到单个 1 时就可以结束。

sol 2

一个序列是好的，当且仅当开头是 1，或者末尾是 0，或者存在一个偶数位置上是 0，它的下一个是 1。

几个简单的做法

sol 1

从左往右遍历，能匹配就匹配，遇到单个 1 时就可以结束。

sol 2

一个序列是好的，当且仅当开头是 1，或者末尾是 0，或者存在一个偶数位置上是 0，它的下一个是 1。

- ▶ 以上两种做法的正确性由前面的性质保证。不难将 checker 转化为计数。
- ▶ 复杂度 $O(cn)$ ，其中， c 为一个小常数。