DP 及其优化

吴戈

2024 年 2 月 19 日

简介

动态规划（Dynamic Programming, DP）是一种通过把原问题分解为相对简单的子问题的方式求解复杂问题的方法。

几个特点：最优子结构、无后效性、子问题重叠性。

基本步骤：描述状态，写下转移，思考优化。

背包

有 n 个物品和一个容量为 W 的背包，每个物品有重量 w_i 和价值 v_i 两种属性，要求选若干物品放入背包使背包中物品的总价值最大且背包中物品的总重量不超过背包的容量。

01 背包

每种物品只有一个。

设 $f_{i,j}$ 表示前 i 件物品，选取物品重量和为 j 的最大价值。

$$f_{i,j} = \max(f_{i-1,j}, f_{i-1,j-w_i} + v_i)$$

时间复杂度为 $\mathcal{O}(nW)$。

有时候空间开不下，我们会利用滚动数组或者直接采用以下写法：

$$f_j = \max(f_j, f_{j-w_i} + v_i)$$

完全背包

每种物品有无限个。

设 f_j 表示选取物品重量和为 j 的最大价值。

$$f_j = \max(f_j, f_{j-w_i} + v_i)$$

时间复杂度为 $\mathcal{O}(nW)$。

注意，如果循环从 $1 \to W$，是完全背包，否则是 01 背包。

多重背包

每种物品有 c_i 个。

$$f_{i,j} = \max(f_{i-1,j}, f_{i-1,j-k\times w_i} + k \times v_i)$$

时间复杂度为 $\mathcal{O}(W \sum k_i)$。

二进制分组优化能将每种物品拆成至多 $\log_2 c_i$ 个，然后做 01 背包。

单调队列优化能将复杂度优化为 $\mathcal{O}(nW)$。

P4141

Problem

给定 n 件物品，对所有 $i \in [1,n], j \in [1,m]$ 求去掉第 i 件物品后，用剩下物品填满体积为 j 的背包的方案数。
$n, m \leq 2000$。

P2371

Problem

给定 $n, a_{1\sim n}, l, r$，求有多少 $b \in [l, r]$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ 有非负整数解。
$n \le 12$，$0 \le a_i \le 5 \times 10^5$，$1 \le l \le r \le 10^{12}$。

Hint: 真的需要存储 10^{12} 个状态吗?

P8392

Problem

有 $2m+1$ 种物品，重量分别为 $-m,-m+1,\ldots,m-1,m$。重量为 i 的物品有 a_i 个。
问在物品重量之和恰好为 l 的基础上，你最多能拿多少物品。
$m \le 300, -10^{18} \le l \le 10^{18}, 0 \le a_i \le 10^{12}$。

Hint: 如果重量只需要不超过 l 怎么做。

P4322

Problem

给你一棵树，每个节点有 a_i, b_i，选择 k 个节点使得 $\frac{\sum a_i}{\sum b_i}$ 最大化，要求此 k 个节点构成一棵树且根节点为 0 。
$n, k \le 2500, a_i, b_i \le 10^4$。

区间 DP

一般可以将此描述为：有多个决策点，通过枚举决策点分为子问题，然后合并多个子问题来求得最优解。

$$f_{i,j} = \max_k(f_{i,k} + f_{k+1,j} + cost)$$

在遇到环上问题时，通常断环为链然后倍长。

石子合并

Problem

环形操场上有 n 堆石子，每次选相邻两堆合并，并将新的一堆的石子数，记为该次合并的得分。求最后合并成一堆的最大得分。
$n \leq 100$

$$f(i,j) = \max_k \{f(i,k) + f(k+1,j)\} + \sum_{l=i}^{j} a_l$$

Problem

有 N 家洗车店从左往右排成一排。
有 M 个人要来消费，第 i 个人会驶过第 a_i 个开始一直到第 b_i 个洗车店，且会选择这些店中最便宜的一个进行一次消费，但是如果这个最便宜的价格大于 c_i ，那么这个人就不洗车了。
请给每家店指定一个价格，使得所有人花的钱的总和最大
$n \leq 50, m \leq 1000$。

设 $f(i,j,k)$ 表示区间 $[i,j]$ 的最小值为 k 时候的收益。(仅考虑 $i \leq a \leq b \leq j$) 的人。

转移时候枚举最小值位置 x ，那么有

$$f(i,j,k) = \max_x \{f(i,x-1,p \geq k) + f(x+1,j,q \geq k) + cost(i,j,x,k)\}$$

AGC026D

Problem

给定 n 列网格，第 i 列高为 h_i。
要求对格子染成红蓝两种颜色，使得每个 2×2 的格子里面有恰好 2 个红色格子、2 个蓝色格子求方案数，对 $10^9 + 7$ 取模。
$n \leq 100, h_i \leq 10^9$。

hint: h_i 全相等怎么做?

Problem

一个 $n \times m$ 的矩阵，每行被分成若干部分，每个部分至多填入一个 1，其它元素都是 0。记 q_i 表示第 i 列中 1 的个数，求 $\max\left\{\sum_{i=1}^{m} q_i^2\right\}$。

$n, m \le 100$。

P6563

Probelm

猜一个 $[1,n]$ 中的整数 x。花费 a_i 可以知道 $x > i$ 是否成立，保证 $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le 10^9$，求最坏情况下需要多少代价才能保证猜中 x。

$\sum n \le 7100$。部分分：$500, 2000$。

四边形不等式

如果遇到

$$f(i,j)=\min(f(i,k-1)+f(k,j)+w(i,j))$$

朴素地来做时间复杂度肯定是 $\mathcal{O}(N^3)$ 的。

不过若 $w(i,j)$ 满足下列性质:

1. 区间包含的单调性，即对于 $i \le i' \le j' \le j$ 有 $w(i',j') \le w(i,j)$。
2. 四边形不等式，即对于 $a \le b \le c \le d$ 有 $w(a,c)+w(b,d) \le w(a,d)+w(b,c)$ ，即交叉优于包含。

则有以下定理

1. 如果 w 满足两个性质，那么 f 也满足四边形不等式
2. 若 f 满足四边形不等式，设 $s(i,j)$ 为取得最优解时候的 k ，那么有 $s(i,j-1) \le s(i,j) \le s(i+1,j)$。

四边形不等式

如何判断 $w(i,j)$ 是否满足四边形不等式?

移项后只需要 $g(j) = w(x,j) - w(x+1,j)$ 单调即可。

四边形不等式

证明函数满足四边形不等式。使用归纳法。要证：

$$f(i,j)+f(i+1,j+1)\le f(i+1,j)+f(i,j+1)$$

假设右边两式的最优点分别是 x,y 并带入左边，(这里假设 $x\le y$，如果 $x>y$ 只需要交叉带入即可)，发现最后只需要

$$f(i,x)+f(i+1,y)\le f(i+1,x)+f(i,y)$$

四边形不等式

最后需要证明 $s(i,j-1) \le s(i,j)$ 。

那我们假设 $s(i,j-1)=x$, 所以 $\forall\ y \le x \le j-1 < j$ 有

$$f(y,j-1)+f(x,j) \le f(y,j)+f(x,j-1)$$

在两边加上 $w(i,j-1)+w(i,j)+f(i,y-1)+f(i,x-1)$ 然后组合起来就有

$$f(i,j-1)^y - f(i,j-1)^x \le f(i,j)^y - f(i,j)^x$$

显然左边是非负数，即 $f(i,j-1)^x < f(i,j-1)^y$ 所以右边也是非负数，所以 $s(i,j)$ 至少为 x 。

四边形不等式

既然如此：

$$\sum_{1\le l\le r\le n} s(l+1,r)-s(l,r-1)=\sum_{i=1}^{n} s(i,n)-s(1,i)\le n^2$$

所以时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^2)$。

石子合并

Problem

环形操场上有 n 堆石子，每次选相邻两堆合并，并将新的一堆的石子数，记为该次合并的得分。求最后合并成一堆的最小得分。

$n \leq 1000$

决策单调性

一个 dp 满足决策单调性的充要条件是对于两个决策点 $x < y$ 若在 i 点 y 更优，则在 $[i+1, n]$ y 都比 x 优。

引理

对于：

$$dp_i = \min\{dp_j + w_{i,j}\}$$

若 w 满足四边形不等式，则 dp 满足决策单调性。

证明

令 $x < y < i < j$ 其中 y 为 i 最优决策点，则有

$$dp_y + w(y,i) \le dp_x + w(x,i)$$

因为 $w(x,i) + w(y,j) \le w(x,j) + w(y,i)$ ，所以

$$dp_y + w(y,j) \le dp_x + w(x,j)$$

决策单调性

一维决策单调性一般用二分队列来解决。

P1912

给定 n 个字符串和一个常数 L，试将这些字符串分成若干组，使得：令 $len(i)$ 为第 i 个字符串的长度，则每组字符串的 $|\sum len(i) - L|$ 的 P 次方和之和最小。

$n \leq 10^5, L \leq 3 \times 10^6$，每个字符串的长度不超过 30。

好吧，其实既然都放在这里了，肯定满足决策单调性了。

一维决策单调性

维护二分队列主要是弹出队首、弹出队尾和加入当前元素三部分。

首先，弹出转移范围不包括之后部分的元素。

然后，假设队尾的元素是 p，它的转移范围是 $[l, r]$，当前位置是 i。如果用 i 转移 l 比用 p 转移 l 更优，所以此后的转移 i 一定优于 p，故弹出 p.

接下来考虑 i 的转移范围。因为方程满足决策单调性，所以可以用二分求出用 i 转移比用队首 h 转移更优的第一个位置 x，那么 i 的转移范围是 $[x, n]$

知道转移范围之后将 i 加入队尾即可。

决策单调性

多阶段的决策单调性一般用分治来解决，
具体的，假设当前计算区间为 $[l,r]$ ，决策区间为 $[L,R]$
找到 $mid=\frac{l+r}{2}$ 的决策点 p ，递归 $solve(l,mid-1,L,p)$ 和 $solve(mid+1,r,p,R)$。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\log n)$

Problem

给定一个序列 a，要把它分成 k 个子段。每个子段的费用是其中相同元素的对数。求所有子段的费用之和的最小值。
$n \le 10^5, k \le 20$

首先有暴力 $f(i,k) = \min\{f(j-1,k-1) + calc(j,i)\}$。

看看这个函数，怎么都优化不了了，不妨猜他满足四边形不等式。

LOJ6039

Problem

n 个物品，第 i 个体积 c_i，价值 v_i，对于体积为 $1 \le i \le K$ 的背包求出最大价值。
$n \le 10^6$，$K \le 5 \times 10^4$，$1 \le c_i \le 300$，$0 \le v_i \le 10^9$

最暴力的，是不是 $f(i,j)$ 表示前 i 个物品，体积为 j 的最大价值。时间复杂度 $\mathcal{O}(nK)$

Hint：假设 c_i 相同?

斜率优化

Problem

若将一个序列分成 k 段，代价为每段的平方和加上 $k*c$ ，求最小代价。

显然对于暴力有

$$dp_i = \min_{j<i}\{dp_j + (s_i - s_j)^2\} + c$$

化到最后会发现若 j 比 k 更优 ($j<k$)，则要满足

$$\frac{(dp_j + s_j^2) - (dp_k + s_k^2)}{s_j - s_k} > 2 * s_i$$

把 $(s_i, dp_i + s_i^2)$ 看成一个点，则有效点构成凸包。

向量判断

$a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$

$t = a \times b = x_1 y_2 - x_2 y_1$

若 $t > 0$ 则 b 在 a 逆时针方向

P3648

Problem

给定序列 a_i，执行以下操作 k 次：

- 每次选择一个块，将其分成两个非空的块，得分将增加两个新产生的块的元素和的乘积。

初始只有一块，即整个序列，最大化得分。

$n \le 10^5, k \le 200$。

Hint：分割顺序无关。

CF1175G

Problem

给定数组 a_i ，将其划分成 k 段，每段的权值为长度乘上最大值，整个划分权值为每段权值之和。求最小划分权值。

$n \le 2 \times 10^4, k \le 100$。

「CEOI2017」Building Bridges

Problem

n 个柱子依次排列，各有高度 h_i。若在 i,j 两柱之间建桥花费 $(h_i-h_j)^2$。没有建桥的柱子全部要拆除，花费 w_i（可能为负）。求使得 1 号和 n 号柱子连通的最小花费。桥之间只能在端点处相交。

$n \le 10^5$。

Problem

把一个序列恰好分成 k 段，最小化每段平方和。

$$f(i,j)=\min_k(f_{k,j-1}+(s_i-s_k)^2)$$

而 wqs 二分就是用来求出有限制地恰好选 k 个的最优答案。

这类问题用 wqs 二分有一个前提，设 $f(k)$ 为恰好选 k 个的答案，则 $f(k)$ 关于 k 的图像一定得是一个凸函数（即斜率单调）。

P4383

Problem

给你一棵树，割掉恰好 k 条边然后重新接上恰好 k 条 0 权边，然后要求最大化新树的直径。

$n, k \leq 3 \times 10^5$

CF321E

Problem

把 $1 \sim n$ 划分为 k 段，一段 $[l, r]$ 的代价是 $\sum_{l \le i,j \le r} a_{i,j}$，满足 $a_{i,j} = a_{j,i} \ge 0, a_{i,i} = 0$，求最小总代价。
$n \le 4000$，$k \le 800$，$0 \le a_{i,j} \le 9$。

暴力：$f(i,k) = \min\{f(j-1,k-1) + calc(j,i)\}$ 表示前 i 个分为 k 段。

看到这样子，先想想 $calc$ 满不满足四边形不等式。

满足，所以做 k 遍决策单调性，时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2 + nk\log n)$。

CF321E

Problem

把 $1 \sim n$ 划分为 k 段，一段 $[l, r]$ 的代价是 $\sum_{l \le i,j \le r} a_{i,j}$，满足 $a_{i,j} = a_{j,i} \ge 0, a_{i,i} = 0$，求最小总代价。
$n \le 4000$，$k \le 800$，$0 \le a_{i,j} \le 9$。

$k \le n$ 怎么办?

答案关于 k 是凸的，采用 wqs 二分然后 n^2 DP。
时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2 \log V)$。

还是过不去!!!

两个拼起来，时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2 + n \log V \log n)$。

ABC305H

Problem

一个问题可以由二元组 (A, B) 描述其难度。对于一个问题的集合 S，解决它所需要花费的精力，是任意重排内部顺序后，令 $x = 0$，依次执行 $x \leftarrow Ax + B$ 得到的最终的 x。
给定长度为 n 的问题序列，你需要将其划分为若干子段，并把每段作为独立的问题集合来解决，总精力消耗是每一段的精力消耗之和，你希望这个值不超过 X，求最少需要划分的段数 K，以及在划分成 K 段的情况下最少总精力消耗。
$n \le 2 \times 10^5$，$1 \le B_i \le \sum B_i \le X \le 10^8$，$1 \le A_i \le 10^5$

Hint1：先把 $A_i = 1$ 的去掉。
Hint2：假设分好了怎么算贡献?

关于凸性：根据 2023 集训队论文《浅谈函数的凸性在 OI 中的应用》，权值矩阵满足四边形不等式的序列划分问题关于段数 m 是凸的。

序列 dp 的转移代价函数满足其是连续的分段线性凸函数时，可以记录分段函数的最右一段以及分段点集合 L 来快速维护这个代价函数。

例如：

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & (x < -1) \\ 0 & (-1 \le x < 1) \\ 2x-2 & (x \ge 1) \end{cases}$$

记录最左线段斜率 $f_l = -1$ 和一个分段点集合 $L_f = \{-1, 1, 1\}$ 就可以表示这个函数 f 了。一个分段点 i 的含义是，函数的斜率在 i 增加了 1 。

若 $F(x), G(x)$ 都是凸函数，那么 $H(x) = F(x) + G(x)$ 也是凸函数，且 $H_l = F_l + G_l, L_H = L_L + L_G$。

Probelm

给定序列 $a_{1\cdots n}$，每次操作可以把任意元素加一或减一，求最少操作次数使其严格递增。
$n \le 3000$，$a_i \le 10^9$。

ABC217H

Probelm

给定一条数轴，初始 0 时刻你在 0 位置，每个时刻你可以移动 $\{-1, 0, 1\}$ 中任意一个，接下来有 n 个事件，每个事件用 t_i, d_i, x_i 描述，表示 t_i 时刻发生事件 i，假设你现在在点 p，那么：

- 若 $d_i = 0$，你受到 $\max\{0, x_i - p\}$ 点伤害。
- 若 $d_i = 1$，你受到 $\max\{0, p - x_i\}$ 点伤害。

求最终你最少一共受到多少伤害。

$n \le 2 \times 10^5$，$|x_i| \le 10^9$，$1 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n \le 10^9$。

[APIO2016] 烟火表演

Probelm

给定一棵有根树，边有边权，将某条边的边权改变 1 需要花费 1 的代价，但边权必须为非负整数。请求出使所有叶子到根路径上的边权和相同需要花费的最小代价。

$n \leq 3 \times 10^5$