训练赛5题解

October 28, 2023

count

- 对于带两侧碰撞壁的随机游走问题，我们考虑枚举上下边界反射次数以及左右边界反射次数，则对于固定次数而言，最终答案为从s到t这样反射若干次之后坐标的方案数。根据容斥原理，我们大致需要求得从(s_x, s_y)到$(t'_x + k_1(4n+2), t'_y + k_2(4n+2))$对于所有$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$的路径方案总数。
- 将坐标轴旋转45度，将问题转化为两个独立的游走问题（每一步中x加减1且y加减1）。
- 通过一些组合数运算以及求和交换，最终转化为求解$\sum_{0\le k\le t \text{ and } k \mod (4n+2)=r} \binom{t}{k}$形式的问题，这可以通过求解$(1+x)^t \mod (x^{4n+2}-1)$的每项系数得到。这个是一个标准的$FFT$。

exchange

- 不妨假设A的multiset等于B的multiset。
- 我们首先分析A是排列的情形：
  - 当$n(n-1)/2$为奇数时，此时A和B的逆序对个数之和一定是奇数。否则一定为偶数。（这一点是由于一次交换改变逆序对的奇偶性所决定）
  - 如果满足上述条件，我们可以进行归纳构造。
  - 当A序列不等于B序列时，我们可以找到不相同的那个元素（假设是第一个元素），通过$n-1$次$\mathrm{swap}(1,i)$可以将目标值换到第一个位置，同时用光第一个位置上的所有交换次数，规约到规模为$n-1$的问题。
  - 否则，此时$A=B$，可以构造出用光前四个元素的所有交换，使得前四个元素位置保持不变的方案。问题规约到$n-4$的情形。
- 对于非排列的情形：我们将元素映射到$1-n$的整数即可（若不满足奇偶性条件，交换A中原本一对相同数上的元素则满足条件）。

disjoint

- 根据LGV引理，我们只需求解矩阵$M = (e_{i,j})$的行列式即可，其中$e_{i,j} = \binom{a_i+j}{j}$。
- 通过初等行列变换，可以将M化简称为范德蒙行列式的形式，最终瓶颈在于计算$\prod_{1\le i<j\le n} a_i - a_j$的值。
- 注意到$1 \le a_i \le 10^6$，我们考虑FFT计算出$k = a_i - a_j$的出现次数即可。