2023 基础算法 B 班第二场比赛 2, 3 题题解

B、序列变换

这道题需要去分析所谓的“变换”，很容易得知变换不能对数组首尾进行，那么一此变换究竟会改变什么呢？

设有数组$A=1,4,9,16,25$，我们对 A_3 进行一次变换：

操作前	1	4	9	16	25
操作时	1	4	4+16-9	16	25
操作后	1	4	11	16	25

看似没有任何规律，但是如果我们去取差分数组的话：

操作前差分	1	3	**5**	**7**	9
操作后差分	1	3	**7**	**5**	9

我们能很神奇地发现，差分数组 $diff$ 中 $diff[3]$ 和 $diff[4]$ 互换了！也就是说，如果对 $A[i]$ 进行变换，那么 $diff[i]$ 和 $diff[i+1]$ 将会互换！我们能否证明呢？

在没有操作前，A 的差分数组 $diff$ 应该是这样子的：

	i - 2	i - 1	i	i + 1	i + 2
A	$A[i-2]$	$A[i-1]$	$A[i]$	$A[i+1]$	$A[i+2]$
diff	$A[i-2]$-$A[i-3]$	$A[i-1]$-$A[i-2]$	$A[i]$-$A[i-1]$	$A[i+1]$-$A[i]$	$A[i+2]$-$A[i+1]$

接下来对 $A[i]$ 进行操作：

	i - 2	i - 1	i	i + 1	i + 2
A	$A[i-2]$	$A[i-1]$	$A[i-1]+A[i+1]-A[i]$	$A[i+1]$	$A[i+2]$

差分数组将会发生以下的变化：

	i - 2	i - 1	i	i + 1	i + 2
原来的 diff	$A[i-2]$-$A[i-3]$	$A[i-1]$-$A[i-2]$	$A[i]$-$A[i-1]$	$A[i+1]$-$A[i]$	$A[i+2]$-$A[i+1]$
变化中的 diff	不变	不变	$(A[i+1]+A[i-1]-A[i])-A[i-1]\rightarrow A[i+1]-A[i]\rightarrow diff[i+1]$	$A[i+1]-(A[i+1]+A[i-1]-A[i])\rightarrow A[i]-A[i-1]\rightarrow diff[i]$	不变
最后结果	$diff[i-2]$	$diff[i-1]$	$diff[i+1]$	$diff[i]$	$diff[i+2]$

最终得证：当对 $A[i]$ 进行变换后，差分数组 $diff$ 的第 i 项和第 $i+1$ 项将互换。

所以最终我们得知：无论经过多少次的变换，差分数组中的数位置可能发生变化，但是数值不会发生变化。

但是，我们考虑首尾不同，但是差分数组数值经过移动后完全相同的两个数组，如 $1,4,9$ 和 $5,8,9$ ，因为变换不能在首尾进行，因此首尾的数值永远无法发生变化，所以这种类型的两个数组不能通过变换而变得相同，这种情况需要特判。

C、求和

~~又是一道快乐的推公式题~~

构成一个三元组需要什么条件？

- 1. $color_x = color_z$

- 2. $y-x=z-y \rightarrow$ 只要$z-x$为偶数且不为0，则会有合适的y

三元组如何计算分数？$(x+z)\times(number_x+number_z)$

最终经过我们的一番总结，得知：一个三元组的出现和 y 没有亿点关系。那就只用考虑 x 和 z 啦！

那么如何计算一个数 x 能产生的总分数呢？首先要找到合适的配偶 z。那我们就帮帮它们，假设我们把所有编号分为了好几组，每一组的所有的数互不相同，他们的颜色相等，每一个数的奇偶性相等且均小于等于 n 且大于等于 1，那么在任意一个组里面任意取出两个数，它们绝对是一对 (x,z)。

假设其中一组为数组 A，那么对于一个数组 A，它里面所有的数能产生多少的分数呢？

$$
\begin{gathered}
score(A)=(A_1+A_2)\times(number_{A_1}+number_{A_2})\\
+(A_1+A_3)\times(number_{A_1}+number_{A_3})\\
+(A_1+A_4)\times(number_{A_1}+number_{A_4})\\
+\ldots\\
+(A_1+A_n)\times(number_{A_1}+number_{A_n})\\
+(A_2+A_3)\times(number_{A_2}+number_{A_3})\\
+(A_2+A_4)\times(number_{A_2}+number_{A_4})\\
+\ldots\\
+(A_2+A_n)\times(number_{A_2}+number_{A_n})\\
+\ldots\\
+\ldots\\
+(A_{n-1}+A_n)\times(number_{A_{n-1}}+number_{A_n})\\
=A_1\times number_{A_1}+A_1\times number_{A_2}+A_2\times number_{A_1}+A_2\times number_{A_2}\\
+A_1\times number_{A_1}+A_1\times number_{A_3}+A_3\times number_{A_1}+A_3\times number_{A_3}\\
+A_1\times number_{A_1}+A_1\times number_{A_4}+A_4\times number_{A_1}+A_4\times number_{A_4}\\
+\ldots\\
+A_1\times number_{A_1}+A_1\times number_{A_n}+A_n\times number_{A_1}+A_n\times number_{A_n}\\
+A_2\times number_{A_2}+A_2\times number_{A_3}+A_3\times number_{A_2}+A_3\times number_{A_3}\\
+A_2\times number_{A_2}+A_2\times number_{A_4}+A_4\times number_{A_2}+A_4\times number_{A_4}\\
+\ldots\\
+A_2\times number_{A_2}+A_2\times number_{A_n}+A_n\times number_{A_2}+A_n\times number_{A_n}\\
+\ldots\\
+\ldots\\
+A_{n-1}\times number_{n-1}+A_{n-1}\times number_{A_n}+A_n\times number_{A_{n-1}}+A_n\times number_{A_n}
\end{gathered}
$$

最终我们推导出来数组 A 能产生的分数的和是 ~~114514~~ ~~infinity~~ $2n(n-1)$ 个乘法算式的和。每一个乘法算式的形式都是 $A_{\mathrm{x}}\times number_{A_{\mathrm{y}}}$，如果我们通过每一个乘法算式中的 `x` 值来分类 (参考前面的乘法算式的形式，$A_{114514}\times number_{A_{1919810}}$ 这个算式中的 `x` 值为 `114514`)，将一个分类中的乘法算式的和称为 $A_{所有算式的x值}$ 的贡献分数，例如 A_1 的贡献分数即为所有 `x` 值为 `1` 的乘法算式的和，那么就很有趣了。能容易能看出 A 能产生的分数的和就是 A 的每一项的贡献分数的和。接下来开始推导 A_i 的贡献分数的公式！

$$
\begin{gathered}
score(A_i)=A_i\times number_{A_i}\times(n-1)+\\
\sum_{a=1}^{n}\begin{cases}a=i\rightarrow 0（排除A_i\times number_{A_i}）\\ a\neq i\rightarrow A_i\times number_{A_a}\end{cases}
\end{gathered}
$$

注意 A_i 不能和自己配偶。

看到这个公式之后总是会有点难受，就是因为那个求和不能包括进 $A_i\times number_{A_i}$ (自己不能和自己配偶)，这样子求那个求和符号的时候还需要特别地去减去 $A_i\times number_{A_i}$。有没有什么办法呢？大不了在求和符号哪儿加上 $A_i\times number_{A_i}$，再在 $A_i\times number_{A_i}\times(n-1)+$ 那里减一下，完美！

$$
\begin{gathered}
score(A_i)=A_i\times number_{A_i}\times(n-2)+\\
\sum_{a=1}^{n}A_i\times number_{A_a}
\end{gathered}
$$

最后，$A_i, number_{A_i}$ 都知道了，求和符号那一部分只需要将 $\sum_{a=1}^{n}number_{A_a}$ 求出来就可以了（可以在把所有的编号分类进一组一组的时候顺便求出来）。