提高算法班

题目选讲

Mas

#2902、外星人

题目描述

艾利欧在她的被子上发现了一个数字 N ,他觉得只要找出最小的 x 使得

$$\varphi^x(N)=1$$

根据这个 x 她就能找到曾经绑架她的外星人的线索了

当然她不会算,请你帮助她算出最小的 x

输入格式

第一行一个正整数 T

接下来 T 组数据每组数据第一行一个正整数 m

接下来 m 行每行两个正整数 p_i,q_i

其中 $\prod_{i=1}^{m} p_i^{q_i}$ 为 N 的标准分解形式

输出格式

输出 T 行,每行一个整数,表示答案

欧拉函数可写为如下形式

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{m} p_i^{q_i}\right)=\prod_{i=1}^{m}\left((p_i-1)\times p_i^{q_i-1}\right)$$

观察 $8=2^3$

$$\varphi(8)=(2-1)\times 2^2=4$$

$$\varphi(4)=(2-1)\times 2^1=2$$

$$\varphi(2)=1$$

若 $N = 2^k$ 显然答案为 k

数据规模

对于全部的数据 $1\le T\le 50,1\le m\le 2000,p_i\le 10^5,1\le q_i\le 10^9$

#2902、外星人

再观察 $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$

$$\varphi(30) = (2-1) \times 2^0 \times (3-1) \times 3^0 \times (5-1) \times 5^0 = 8$$

$$\varphi(8) = (2-1) \times 2^2 = 4$$

$$\varphi(4) = (2-1) \times 2^1 = 2$$

$$\varphi(2) = 1$$

对于每次求解欧拉函数若存在因子 2 都 **仅** 会将一个 2 消去，可能产生若干个新的因子 2

考虑求出每个质因子在该过程中产生都少个 2 即可

若已知 p 产生数量为 x 那么 p^q 的数量即为 $x \times q$

设 $dp[i]$ 为 i 能够产生的 2 的数量，显然 $dp[2] = 1$

- 当 i 为质数时 i 会变为$i-1$

  所以有 $\mathrm{dp}[i] = \mathrm{dp}[i-1]$

#2902、外星人

- 当 i 不为质数时

  i 可被表示为合数 x 与最小值因子 y 的乘积

  所以有 $\mathrm{dp}[i]=\mathrm{dp}[x]+\mathrm{dp}[y]$

上述过程可在欧拉筛中转移，时间复杂度 $O(\max(p_i))$

对于每一个质因子 p_i 会进行 q_i 次操作，所以每个质因子产生 2 的数量为 $dp[p_i]\times q_i$

$$\sum_{i=1}^{m}(\mathrm{dp}[p_i]\times q_i)$$

考虑不存在质因子 2 时，需要先进性一次操作才能才生 2

所以不存在质因子 2 时，答案加一

时间复杂度 $O(\max(p_i)+m\mathrm{T})$

#3372、火车运行

题目描述

一辆火车在 A 和 B 两地之间往返

它在 0 时刻时从 A 出发,并按顺序循环重复以下四个操作:

- 从 A 地开往 B 地,耗时 X 单位时间,例如第一次从A开往B时间区间为 $[0, X)$
- 在 B 地停留 Y 单位时间,例如第一次在 B 停留时间区间为 $[X, X+Y)$
- 从 B 地开往 A 地,耗时 X 单位时间,例如第一次从 B 开往 A 时间区间为 $[X+Y, 2X+Y)$
- 在 A 地停留 Y 单位时间,例如第一次在 A 停留时间区间为 $[2X+Y, 2X+2Y)$

Mas 在 0 时刻从 A 地搭乘火车去往 B 地
并按顺序循环重复以下两个操作:

- 睡觉,并持续 P 单位时间,例如第一次睡觉时间区间为 $[0, P)$
- 醒来,并持续 Q 单位时间,例如第一次醒来时间区间为 $[P, P+Q)$

如果在某个时刻 Mas 醒着,并且火车在 B 地那么 Mas 就会立刻下车

你需要算出 Mas 会在什么时刻下车?如果 Mas 永远不会下车,输出 -1 .

输入格式

输入第一行包含一个整数 T ,表示数据的组数

对于每组数据,输入为一行,包含 4 个整数 X, Y, P, Q

输入格式

对于每组数据,在一行中输出一个整数,表示答案

数据规模

对于 8% 的数据, $1 \le X, Y, P, Q \le 500$

对于 40% 的数据, $1 \le X, P \le 10^9, 1 \le Y, Q \le 500$

对于 100% 的数据, $1 \le X, P \le 10^9, 1 \le Y, Q \le 10^5, 1 \le T \le 10$

#3372、火车运行

要求解满足如下条件的最小正整数 T

$$\begin{cases} T \bmod (2X+2Y) & \in [X, X+Y) \\ T \bmod (P+Q) & \in [P, P+Q) \end{cases}$$

40 pts

不妨直接枚举 $a \in [X, X+Y), b \in [P, P+Q)$

扩展中国剩余定理求解即可，一组询问时间复杂度 $O(YQ\log(X+Y+P+Q))$

100 pts

不难想到最早情况必然为

- 刚到 B 地且已醒来
- 刚醒来且已到 B 地

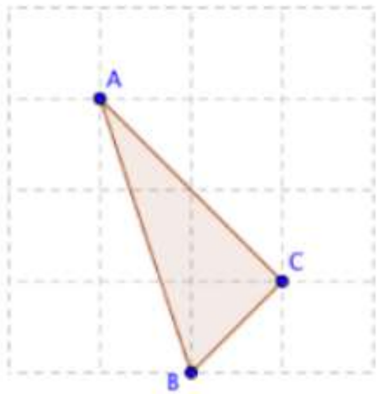
仅需枚举 $Y+Q$ 种情况，一组询问时间复杂度 $O\big((Y+Q)\log(X+Y+P+Q)\big)$

#2879、数三角形

题目描述

给定一个 $n \times m$ 的网格,请计算三点都在格点上的三角形共有多少个

下图为 4×4 的网格上的一个三角形



注意：三角形的三点不能共线

输入格式

输入一行，包含两个空格分隔的正整数 m, n

输出格式

输出一个正整数,为所求三角形数量

数据范围

对于全部的数据 $1 \leq m, n \leq 1000$

$n \times m$ 的方格格点数量为 $(n+1) \times (m+1)$

从中选出三个点的方案数为

$$\binom{(n+1) \times (m+1)}{3}$$

考虑求出不合法的方案数

- 三点共线斜率为 0 时

  共有 $(n+1) \times \binom{m+1}{3}$ 种方案

  斜率为 0 说明三点纵坐标相同，任选一行从中任取三点即可

#2879、数三角形

- 三点共线斜率为 $+\infty$ 时

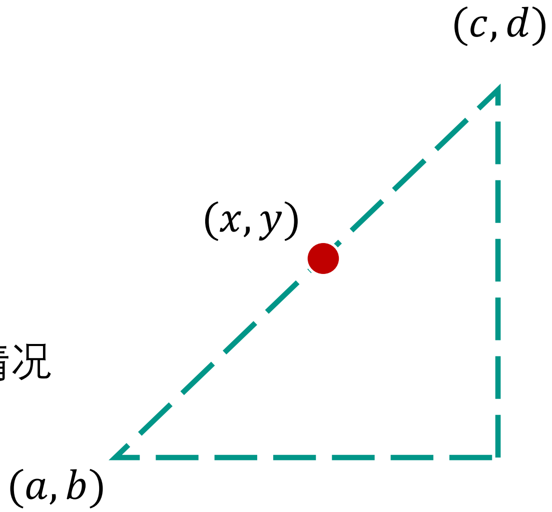
  共有 $(n+1)\times\binom{m+1}{3}$ 种方案

  斜率为 ∞ 说明三点横坐标相同，任选一列从中任取三点即可

- 三点共线斜率为正数时

  考虑枚举直角边长度分别为 i, j 的情况，在方格中共有 $(n-i+1)\times(m-j+1)$ 种情况

  设 $a \le x \le c, b \le y \le d$，记 $P=(c-a, d-b)$ 有



$$\frac{y-b}{x-a}=\frac{d-b}{c-a}$$

即

$$y=\frac{(d-b)}{(c-a)}\times(x-a)+b=\frac{\frac{(d-b)}{P}}{\frac{(c-a)}{P}}\times(x-a)+b=\frac{(d-b)}{P}\times\frac{(x-a)}{\frac{(c-a)}{P}}+b$$

#2879、数三角形

由于 $y \in \mathbb{Z}^+$ 所以必须使得

$$\frac{(c-a)}{P} \mid (x-a) \Rightarrow x = \frac{(c-a)}{P} \times k + a$$

即

$$a \ \le \ \frac{(c-a)}{P} \times k + a \ \le \ c$$

$$\Rightarrow 0 \le k \le P$$

所以对于两条直角边长度为 $c-a$ 和 $d-a$ 斜边上整数点个数为 $P+1$

方案数为 $\big((i,j)-1\big) \times (n-i+1) \times (m-j+1)$

- 三点共线斜率为负数时,数量与斜率为正时相同

枚举直角三角形的两条直角边长度即可，时间复杂度 $O(nm)$

#3184、刷题得分

题目描述

Mas 有 Q 个朋友在一起刷题

其中第 i 个人的能力值为 $\mathrm{k_i}$ ，解题速度为 $\mathrm{m_i}$

题单中有 N 道题其中第 i 道题的分值为 $\mathrm{d_i}$

> *题目编号* $0 \sim \mathrm{n}-1$

第 j 个人满足下列条件

$$\mathrm{m_j} \oplus \mathrm{i} \leq \mathrm{k_j}$$

将能解出第 i 道题并获得 $\mathrm{d_i}$ 的分数

$\oplus$ 表示按位异或，即将操作数在二进制数位下考虑

异或规则如下

$$1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$$
$$1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$$

如 $5 \oplus 7 = (101)_2 \oplus (111)_2 = (10)_2 = 2$

请你求出每个朋友能解出的题目中的最大分值

输入格式

第一行输入两个整数 $\mathrm{N, Q}$

第二行输出 N 个整数表示 $\mathrm{d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}}$

接下来 Q 行,每行两个整数 $\mathrm{m_i, k_i}$

输出格式

输出 Q 行,第 i 行输出第 i 个人能解出的题目中的最大分值

数据规模

对于 20% 的数据 $1 \leq \mathrm{N, Q} \leq 1000$

对于 45% 的数据 $1 \leq \mathrm{N, Q} \leq 10^5$

对于 100% 的数据
$1 \leq \mathrm{N, d_i, k_i} \leq 10^6, 1 \leq \mathrm{m_i} < \mathrm{N}, 1 \leq \mathrm{Q} \leq 5 \times 10^5$

#3184、刷题得分

对于每个 i 从高到低逐二进制位加入 $01-\mathrm{Trie}$ 中维护

令 val_p 表示与 $01-\mathrm{Trie}$ 中 p 节点拥有公共前缀的 d_i 最大值

对于每一组 m_i 和 k_i 在 $01-\mathrm{Trie}$ 中考虑

记 c_1 为 m_i 当前二进制位 , c_2 为 k_i 当前二进制位 , 当前节点为 p

- 若 $c_2 = 0$

  为使结果不超过 k_i 那么只能令 $p \longleftarrow \delta(p, c_1)$

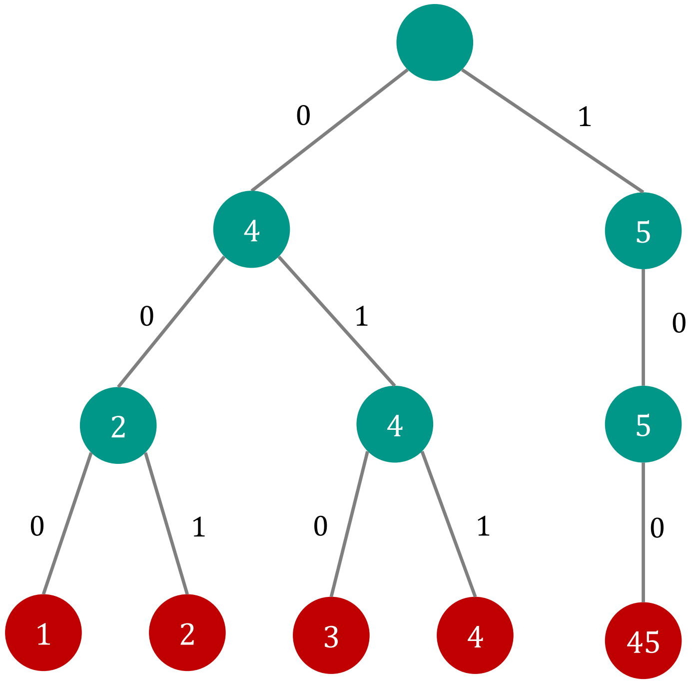
- 若 $c_2 = 1$

  可选 c_1 对应分支可取 $\mathrm{val}_{\delta(p,c_1)}$ 更新最大值

  也可取 $c_1 \oplus 1$ 对应分支即令 $p \longleftarrow \delta(p, c_1 \oplus 1)$

若对应分支为空则直接返回最大值

时间复杂度 $O(n \log n)$



$\mathrm{M} = 001$
$\mathrm{K} = 011$

#805、GT 考试

题目描述

阿申准备报名参加 GT 考试，准考证号为 n 位数 $X_1X_2\cdots X_n$

他不希望准考证号上出现不吉利的数字

他的不吉利数字 $A_1A_2\cdots A_m$ 有 m 位

其中 $0 \le X_i, A_i \le 9$

不出现是指 $X_1X_2\cdots X_n$ 中没有恰好一段等于 $A_1A_2\cdots A_m$

> A_1 和 X_1 可以为 0.

输入格式

第一行输入 n, m, K

下来一行输入 m 位的数

输出格式

阿申想知道不出现不吉利数字的号码有多少种

输出模 K 取余的结果

设 $dp[i][j]$ 为 X 考虑到第 i 个数位与 A 匹配了 j 个数位的方案数

记 $cnt[i][j]$ 为已匹配 $A_{1\sim i}$ 再增加一位匹配长度变为 j 的方案数

其中 $dp[0][0] = 1$

答案为

$$\sum_{i=0}^{m-1} dp[n][i]$$

有

$$dp[i][j] = \sum_{k=0}^{m-1} (\, dp[i-1][k] \times cnt[k][j])$$

数据范围

对于全部数据 $1 \le n \le 10^9, 1 \le m \le 20, 2 \le K \le 1000$

#805、GT 考试

可使用 KMP 求解 $\mathrm{cnt}[i][j]$

枚举 i 再枚举一个数位 d

计算当前 $A_{1\sim i}+d$ 与 X 的最大匹配长度

时间复杂度 $O(m^2)$

上述做法时间复杂度 $O(nm^2)$

令 $\mathrm{F}_{i-1} = [\,\mathrm{dp}[i-1][0] \quad \mathrm{dp}[i-1][1] \quad \cdots \quad \mathrm{dp}[i-1][m-1]\,]$

A 为 cnt 数组，有

$$\mathrm{F}_{i-1}\mathrm{A} = \mathrm{F}_i$$

矩阵快速幂求出 A^n 即可

时间复杂度 $O(m^3 \log n)$

#3302、禁止通行

题目描述

S 国有 n 个城市编号 $1 \sim \mathrm{N}$ ，其中第 i 个城市的坐标为 $(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_i})$.

城市 i 与 城市 j 间的距离为

$$\sqrt{(\mathrm{x_i} - \mathrm{x_j})^2 + (\mathrm{y_i} - \mathrm{y_j})^2}$$

Mas 位于城市 1 ，他需要去城市 N 完成任务

由于某些原因有 M 条线路无法通行，每条线路由 k 个城市编号组成

如某条禁止的线路为 $2 \to 3 \to 4$

那么 $2 \to 3 \to 4$ 不能完整的出现在 Mas 的路线中

如
$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$ 非法，$1 \to 2 \to 3 \to 5$ 合法

同时规定 Mas 的移动路径 p 需满足 $\mathrm{p_i} < \mathrm{p_{i+1}}$

请你计算 Mas 完成任务移动的最小距离

数据规模

对于 15% 的数据 $1 \le \mathrm{N} \le 10, 1 \le \mathrm{M} \le 2$

对于全部的数据
$1 \le \mathrm{T}, \mathrm{K} \le 5, 1 \le \mathrm{N} \le 50, 1 \le \mathrm{M} \le 100, 1 \le \mathrm{x_i}, \mathrm{y_i} \le 10^9$

输入格式

第一行输入一个正整数 T ，表示 T 组询问

每组询问第一行输入两个整数 N, M

接下来 N 行每行输入两个整数 $\mathrm{x_i}, \mathrm{y_i}$

再接下来 M 行，首先输入一个整数 k ，之后输入 k 个整数表示一条禁止的线路

输出格式

每组询问输出一行

若无法到达输出 `-1` ,否则输出最小距离(保留两位小数)

#3302、禁止通行

将禁止通行的路径 (点序列) 构建 AC 自动机

对于 Trie 上的叶子节点 (禁止路径的末尾节点) 进行标记

即令 st_p 表示 trie 上对应节点 p 为非法节点

在构建 AC 自动机的 fail 指针时

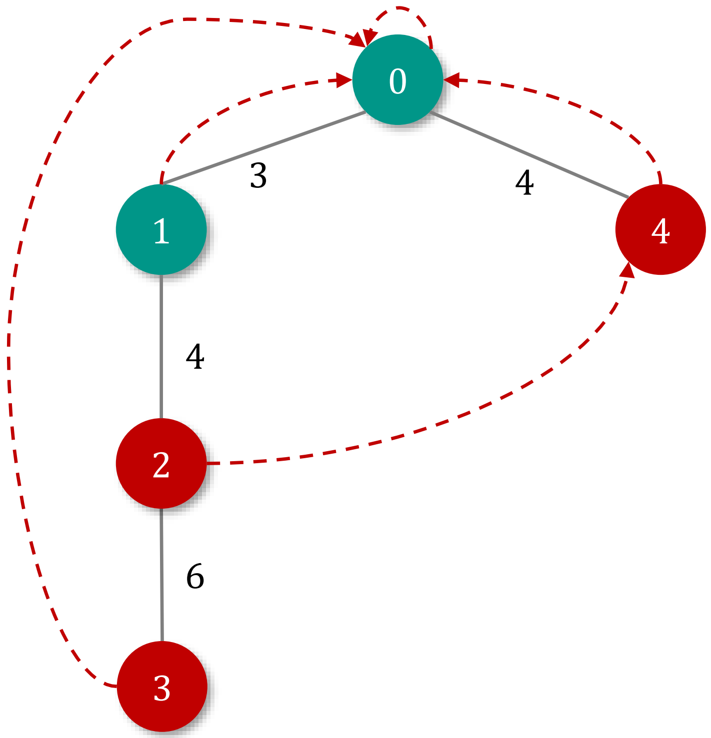
$$\mathrm{st}_p \longleftarrow \mathrm{st}_p \ \textbf{or}\ \mathrm{st}_{\mathrm{fail}_p}$$

设 $\mathrm{dp}[i][j]$ 表示走到点 i 状态对应 AC 自动机上节点 j 时的最短路径长度

$$\mathrm{dp}[k][\delta(j,k)] = \min_{i<k\le n} \left(\mathrm{dp}[i][j] + \mathrm{dis}_{i\to k} \right)$$

AC 自动机上节点数量至多为 KMN

时间复杂度 $O(\mathrm{TKMN}^3)$



$3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$

#2903、烹饪

实验舱 青少年编程 走近科学 走进名校

题目描述

Mas 希望能在 T 时间内做出最美味的食物

但是这些食物美味程度的计算方式比较奇葩,于是 Mas 只好求助于你

Mas 一共有 n 件食材,每件食材有三个属性 a_i, b_i, c_i .

如果在 x 时刻烹饪完第 i 样食材则得到 $a_i - x \times b_i$ 的美味指数
用第 i 件食材做饭要花去 c_i 的时间

Mas 需要你设计烹调方案使得美味指数最大

输入格式

第一行是两个正整数 T 和 n ,表示时间和食材个数

第二行 n 个整数 a_i

第三行 n 个整数 b_i

第四行 n 个整数 c_i

输出格式

输出最大美味指数

可将食材的耗时作为重量，美味值作为价值

由于安排的顺序不同每种物品的价值不一

数据范围

对于 20% 的数据 $1 \le n \le 10$

对于 100% 的数据 $1 \le n \le 1000, 0 \le a_i, b_i, c_i, T \le 100000$

#2903、烹饪

在朴素 01 背包中，第 i 件物品的最优解从前 $i-1$ 件的最优解递推得到

不同的选取策略将导致前一阶段并非最优解

考虑能否安排一种最优选取策略

设当前时间为 t，考虑两个相邻的物品 x,y

若先考虑 x 再考虑 y 有

$$a_x-(t+c_x)\times b_x+a_y-\left(t+c_x+c_y\right)\times b_y \tag{1}$$

若先考虑 y 再考虑 x 有

$$a_y-\left(t+c_y\right)\times b_y+a_x-\left(t+c_x+c_y\right)\times b_x \tag{2}$$

当 $(1)>(2)$ 时 x 安排在 y 前策略更优，即 $c_y\times b_x>\ c_x\times b_y$

对所有物品排序,再进行 01 背包

时间复杂度$O(n\log n+nT)$

#2870、潜入行动

题目描述

外星人又双叒叕要攻打地球了,外星母舰已经向地球航行！这一次, JYY 已经联系好了黄金舰队,打算联合所有 OIer 抵御外星人的进攻

在黄金舰队就位之前, JYY 打算事先了解外星人的进攻计划。现在,携带了监听设备的特工已经秘密潜入了外星人的母舰,准备对外星人的通信实施监听

外星人的母舰可以看成是一棵 n 个节点、 $n-1$ 条边的***无向树***,树上的节点用 $1 \sim n$ 编号

JYY 的特工已经装备了隐形模块,可以在外星人母舰中不受限制地活动,可以神不知鬼不觉地在节点上安装监听设备

如果在节点 u 上安装监听设备,则 JYY 能够监听与 u ***直接相邻***所有的节点的通信
换言之,如果在节点 u 安装监听设备,则对于树中每一条边 (u,v) ,节点 v 都会被监听

特别注意***放置在节点*** u ***的监听设备并不监听*** u ***本身的通信***,这是 JYY 特别为了防止外星人察觉部署的战术

JYY 的特工一共携带了 k 个监听设备,现在 JYY 想知道,有多少种不同的放置监听设备的方法,能够使得母舰上***所有节点***的通信都被监听?
为了避免浪费,***每个节点至多只能安装一个监听设备,且监听设备必须被用完***

输入格式

输入第一行包含两个整数 n,k ,表示母舰节点的数量 n 和监听设备的数量 k
接下来 $n-1$ 行,每行两个整数 $u,v(1 \leq u,v \leq n)$,表示树中的一条边

输出格式

输出一行,表示满足条件的方案数
答案可能很大,你只需要输出答案模 10^9+7 的余数即可

数据范围与提示

存在 10% 的数据, $1 \leq n \leq 20$

存在另外 10% 的数据, $1 \leq n \leq 100$

存在另外 10% 的数据, $1 \leq k \leq 10$

存在另外 10% 的数据,输入的树保证是一条链

对于所有数据, $1 \leq n \leq 10^5$, $1 \leq k \leq \min\{n,100\}$

#2870、潜入行动

设 $\mathrm{dp}[u][i][0][0]$ 表示以 u 为根的子树放 i 个监听器 u 未放 u 未被监听的方案数

$\mathrm{dp}[u][i][1][0]$ 表示以 u 为根的子树放 i 个监听器 u 放置监听器 u 未被监听的方案数

$\mathrm{dp}[u][i][0][1]$ 表示以 u 为根的子树放 i 个监听器 u 未放监听器 u 被监听的方案数

$\mathrm{dp}[u][i][1][1]$ 表示以 u 为根的子树放 i 个监听器 u放置监听器 u 已被监听的方案数

答案为

$$\mathrm{dp}[1][k][1][1] + \mathrm{dp}[1][k][0][1]$$

- 若 u 未放监听器且未被监听

  那么 u 的状态只能是 $\mathrm{dp}[u][i][0][0]$ v 不能放置监听器且必须被监听

$$\mathrm{dp}[u][i+j][0][0] = \sum_{v \in \mathrm{son}_u} (\mathrm{dp}[u][i][0][0] \times \mathrm{dp}[v][j][0][1])$$

#2870、潜入行动

- 若 u 放监听器且未被监听

  那么 u 的状态只能是 $\mathrm{dp}[u][i][1][0]$ v 不能放置监听器可被监听也可不被监听

$$\mathrm{dp}[u][i+j][1][0] = \sum_{v \in \mathrm{son}_u} \left(\begin{array}{c} \mathrm{dp}[u][i][1][0] \\ \times (\mathrm{dp}[v][j][0][1] + \mathrm{dp}[v][j][0][0]) \end{array} \right)$$

- 若 u 未放置监听器且被监听
  - 若 u 的状态是 $\mathrm{dp}[u][i][0][0]$, 那么 u 只能被 v 监听 , 即 v 必须放置监听器且 v 必须被监听
  - 若 u 的状态是 $\mathrm{dp}[u][i][0][1]$, 那么 v 的监听器可放可不放但 v 必须被监听

$$\mathrm{dp}[u][i+j][0][1] = \sum_{v \in \mathrm{son}_u} (\mathrm{dp}[u][i][0][0] \times \mathrm{dp}[v][j][1][1]) + \sum_{v \in \mathrm{son}_u} \left(\begin{array}{c} \mathrm{dp}[u][i][0][1] \\ \times (\mathrm{dp}[v][j][0][1] + \mathrm{dp}[v][j][1][1]) \end{array} \right)$$

#2870、潜入行动

- 若 u 放置监听器且被监听
  - 若 u 的状态是 $\mathrm{dp}[u][i][1][0]$，那么 v 必须放置监听器可被监听也可不被监听
  - 若 u 的状态是 $\mathrm{dp}[u][i][1][1]$，那么 v 的监听器可放可不放可被监听也可不被监听

$$\mathrm{dp}[u][i+j][1][1] = \sum_{v \in \mathrm{son}_u} \left(\begin{array}{c} \mathrm{dp}[u][i][1][0] \\ \times (\mathrm{dp}[v][j][1][0] + dp[v][j][1][1]) \end{array} \right)$$

$$+ \sum_{v \in \mathrm{son}_u} \left(\begin{array}{c} \mathrm{dp}[u][i][1][1] \\ \times (\mathrm{dp}[v][j][0][0] + \mathrm{dp}[v][j][0][1] + \mathrm{dp}[v][j][1][0] + \mathrm{dp}[v][j][1][1]) \end{array} \right)$$

值得注意的是每次转移时依赖的是未考虑 v 这颗子树时的状态，且依赖关系交错

可考虑滚动数组优化

若直接转移时间复杂度 $O(nk^2)$，可上下界优化至 $O(nk)$

#2836、又双叒叕叕是最长上升子序列

题目描述

给定长度为 n 的整数数列 A

数列 A 可能有多个最长上升子序列

等概率地取出一个最长上升子序列

求每个数被选中的概率

对 998244353 取模

输入格式

第一行输入一个正整数 n

第二行输入一个 n 个正整数 A_i ,表示数列

输出格式

输出 n 个整数,表示每个数被选中的概率

> *不难看出概率是个形如 $\frac{p}{q}$ 分数,你需要求出这个分数在模意义下的整数*

数据规模

对于 10% 的数据 $1 \le n \le 10$

对于 40% 的数据 $1 \le n \le 10000$

对于 100% 的数据 $1 \le n \le 2 \times 10^5, -10^9 \le A_i \le 10^9$

令 $\mathrm{dp1}[i]$ 表示以 i 结尾的 LIS 长度

$\mathrm{dp2}[i]$ 表示以 i 开头的 LIS 长度

L 为 LIS 长度 , T 为 LIS 数量

上述值不难以 $O(n\log n)$ 代价得到

令 $\mathrm{cnt1}[i]$ 表示以 i 结尾的 LIS 数量

$\mathrm{cnt2}[i]$ 表示以 i 开头的 LIS 数量

若有 $\mathrm{dp1}[i] + \mathrm{dp2}[i] = \mathrm{L} + 1$ 那么 i 的概率为

$$\frac{\mathrm{cnt1}[i] \times \mathrm{cnt2}[i]}{\mathrm{T}}$$

#2836、又双叒叕叕是最长上升子序列

考虑求出 $cnt1[i]$ 与 $cnt2[i]$

$$cnt1[i]=\sum_{\substack{j<i\\ A_j<A_i \wedge dp1[j]+1=dp1[i]}} cnt1[j]$$

$$cnt2[i]=\sum_{\substack{j>i\\ A_j>A_i \wedge dp1[j]=dp1[i]+1}} cnt1[j]$$

若直接求解时间复杂度 $O(N^2)$

思路 1

将 A_i 离散化，在树状数组中维护满足条件的 dp1 最大值及其数量

每个节点以 $\{val, cnt\}$ 的形式维护管辖区间内下列信息

- val：dp 的最大值
- cnt：以 val 为长度的方案数

#2836、又双叒叕叕是最长上升子序列

查询或更新时

- 若 val 相同则合并 cnt 信息
- 若 val 较小则直接替换较小二元组

将 dp1 的信息以 $1 \to n$ 的顺序加入树状数组，在 $-\infty \sim \mathrm{A}_i - 1$ 范围内查询即可

同理可处理出 $\mathrm{cnt2}[i]$，时间复杂度 $O(n \log n)$

思路 2

从前往后考虑将所有 LIS 相同的结尾元素进行分组

容易发现对于相同长度的 LIS 其末尾元素单调非升

对于每个 A_i 可在 $\mathrm{dp1}[i] - 1$ 对应组内进行二分找到第一个小于 A_i 的位置

将这些位置的 cnt1 求和即为 $\mathrm{cnt1}[i]$

求和可用前缀和优化，时间复杂度 $O(n \log n)$

#2864、换教室

实验舱 青少年编程 LAB 走近科学 走进名校

题目描述

对于刚上大学的牛牛来说,他面临的第一个问题是如何根据实际情况申请合适的课程。

在可以选择的课程中,有 $2n$ 节课程安排在 n 个时间段上。在第 i ($1 \le i \le n$)个时间段上,两节内容相同的课程同时在不同的地点进行。其中,牛牛预先被安排在教室 c_i 上课,而另一节课程在教室 d_i 进行。

在不提交任何申请的情况下,学生们需要按时间段的顺序依次完成所有的 n 节安排好的课程。如果学生想更换第 i 节课程的教室,则需要提出申请。若申请通过,学生就可以在第 i 个时间段去教室 d_i 上课,否则仍然在教室 c_i 上课。

由于更换教室的需求太多,申请不一定能获得通过。通过计算,牛牛发现申请更换第 i 节课程的教室时,申请被通过的概率是一个已知的实数 k_i ,并且对于不同课程的申请,被通过的概率是互相独立的。

学校规定,所有的申请只能在学期开始前一次性提交,并且每个人只能选择至多 m 节课程进行申请。这意味着牛牛必须一次性决定是否申请更换每节课的教室,而不能根据某些课程的申请结果来决定其他课程是否申请;牛牛可以申请自己最希望更换教室的 m 门课程,也可以不用完这 m 个申请的机会,甚至可以一门课程都不申请。

因为不同的课程可能会被安排在不同的教室进行,所以牛牛需要利用课间时间从一间教室赶到另一间教室。

牛牛所在的大学有 v 个教室,有 e 条道路。每条道路连接两间教室,并且是可以双向通行的。由于道路的长度和拥堵程度不同,通过不同的道路耗费的体力可能会有所不同。

当第 i ($1 \le i \le n-1$)节课结束后,牛牛就会从这节课的教室出发,选择一条耗费体力最少的路径前往下一节课的教室。

现在牛牛想知道,申请哪几门课程可以使他因在教室间移动耗费的体力值的总和的期望值最小,请你帮他求出这个最小值。

保证 $1 \le n \le 2000$, $0 \le m \le 2000$, $1 \le v \le 300$, $0 \le e \le 90000$

保证通过学校里的道路,从任何一间教室出发,都能到达其他所有的教室

保证输入的实数最多包含 3 位小数

#2864、换教室

设 $dp[i][j][0]$ 为考虑前 i 个教室换了 j 次第 i 个教室不换的最小期望

$dp[i][j][1]$ 为考虑前 i 个教室换了 j 次第 i 个教室换的最小期望

显然 $dp[1][0][0]=dp[1][1][1]=0$，答案为 $\min\limits_{0\le i\le m}\{dp[n][i][0],dp[n][i][1]\}$

floyd 求出任意两个教室的最少体力 $dis[i][j]$

若一个教室交换，有交换成功和不成功两种情况，记第 i 间教室交换失败的概率为 q_i

若第 i 个教室没有交换

- 第 $i-1$ 个教室不换即 $dp[i-1][j][0]$，贡献期望为 $dis[c_{i-1}][c_i]$
- 第 $i-1$ 个教室交换即 $dp[i-1][j][1]$ ，成功时贡献 $dis[d_{i-1}][c_i]\times p_{i-1}$ 不成功时贡献 $dis[c_{i-1}][c_i]\times q_{i-1}$

$$dp[i][j][0]=\min_{0\le j\le m}\begin{cases} dp[i-1][j][0]+dis[c_{i-1}][c_i], \\ dp[i-1][j][1]+dis[d_{i-1}][c_i]\times p_{i-1}+dis[c_{i-1}][c_i]\times q_{i-1} \end{cases}$$

#2864、换教室

若第 i 个教室交换

- 第$i-1$个教室不换即 $\mathrm{dp}[i-1][j-1][0]$, 成功时贡献期望 $\mathrm{dis}[c_{i-1}][d_i]\times p_i$ 不成功时贡献期望 $\mathrm{dis}[c_{i-1}][c_i]\times q_i$
- 第 $i-1$ 个教室交换 $\mathrm{dp}[i-1][j-1][1]$
  - 第 $i-1$ 个教室交换成功第 i 个教室交换成功贡献期望 $\mathrm{dis}[d_{i-1}][d_i]\times p_{i-1}\times p_i$
  - 第 $i-1$ 个教室交换成功第 i 个教室交换不成功贡献期望 $\mathrm{dis}[d_{i-1}][c_i]\times p_{i-1}\times q_i$
  - 第 $i-1$ 个教室交换不成功第 i 个教室交换成功贡献期望 $\mathrm{dis}[c_{i-1}][d_i]\times q_{i-1}\times p_i$
  - 第 $i-1$ 个教室交换不成功第 i 个教室交换不成功贡献期望 $\mathrm{dis}[c_{i-1}][c_i]\times q_{i-1}\times q_i$

$$\mathrm{dp}[i][j][1]=\min_{0<i\le m}\left\{\begin{array}{c}\mathrm{dp}[i-1][j-1][0]+\mathrm{dis}[c_{i-1}][d_i]\times p_i+\mathrm{dis}[c_{i-1}][c_i]\times q_i,\\ \mathrm{dp}[i-1][j-1][1]+\mathrm{dis}[d_{i-1}][d_i]\times p_{i-1}\times p_i+\mathrm{dis}[d_{i-1}][c_i]\times p_{i-1}\times q_i\\ +\mathrm{dis}[c_{i-1}][d_i]\times q_{i-1}\times p_i+\mathrm{dis}[c_{i-1}][c_i]\times q_{i-1}\times q_i\end{array}\right\}$$

时间复杂度 $O(n^3+nm)$

#3348、又是组合数问题

题目描述

给定整数 n, m, P

求有多少对 (i, j) 满足 $1 \le i \le n, 0 \le j \le \min(i, m)$ 且

$$\binom{i}{j} \equiv 0 \pmod P$$

其中 P 是质数

其中 $\binom{i}{j}$ 是组合数,表示从 i 个不同的数中选出 j 个组成一个集合的方案数

输入格式

第一行两个数 T, P ,其中 T 表示 T 组询问

接下来 T 行每行两个整数 n, m 表示一组询问

输出格式

输出 T 行,每行一个整数表示对应的答案

结果可能很大输出 $\mod 1000000007$ 后的结果

数据规模

对于测试点 1 满足 $T = 1, 1 \le n, m \le 2000$

对于测试点 $2 \sim 3$ 满足 $T \le 10^5, 1 \le n, m \le 2000$

对于测试点 $4 \sim 15$ 满足 $T \le 100, 1 \le n, m \le 10^{18}, P \le 100$

对于 100% 的数据 $1 \le T \le 10^5, 1 \le n, m \le 10^{18}, 1 \le P \le 10^8$ 且 P 是质数

#3348、又是组合数问题

60 pts

根据 Lucas 定理

若 p 为质数

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k \qquad m = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_k p^k$$

有

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{a_i}{b_i} \pmod p$$

记第 i 个数位枚举数码分别为 x_i , y_i

若存在 $\binom{x_i}{y_i} = 0$ 则结果为 0 即 $y_i > x_i$

$x_i, y_i \in [0, p-1]$ 枚举 , 数位 DP 求解即可

时间复杂度 $O(\mathrm{T}p^2 \log_p n)$

#3348、又是组合数问题

100 pts

不妨求出所有数位均满足 $x_i \geq y_i$ 时得方案数，从高到底考虑到各数位，设 n, m 有 Q 个 p 进制数位

令 dp[i][0][0] 表示考虑到第 i个数位 x_i 未紧贴上界 y_i 未紧贴上界时方案数

令 dp[i][0][1] 表示考虑到第 i个数位 x_i 紧贴上界 y_i 未紧贴上界时方案数2

令 dp[i][1][0] 表示考虑到第 i个数位 x_i 未紧贴上界 y_i 紧贴上界时方案数

令 dp[i][1][1] 表示考虑到第 i个数位 x_i 紧贴上界y_i 紧贴上界时方案数

令

$$\mathrm{g1}(x,y)=\sum_{i=0}^{x}\sum_{j=0}^{y}[i \leq j] \qquad \mathrm{g2}(x,y)=\sum_{i=0}^{x}[i \leq y] \qquad \mathrm{g3}(x,y)=\sum_{i=0}^{y}[i \leq x]$$

对于 $\mathrm{g1}(x,y)$ $\mathrm{g2}(x,y)$ $\mathrm{g3}(x,y)$ 不难 $O(1)$ 求出

考虑转移

#3348、又是组合数问题

若要让 x_i , y_i 未紧贴上界可 x_{i+1} , y_{i+1} 均未贴紧上界转移即 $\mathrm{g1}(p-1,p-1)\times \mathrm{dp}[i+1][0][0]$

也可从 x_{i+1} 紧贴上界 y_{i+1} 未紧贴上界转移 $\mathrm{g1}(p-1,a_i-1)\times \mathrm{dp}[i+1][0][1]$ (若 x_i 取 a_i 则变为紧贴上界)

也可从 x_{i+1} 未紧贴上界 y_{i+1} 紧贴上界转移 $\mathrm{g1}(b_i-1,p-1)\times \mathrm{dp}[i+1][1][0]$

也可从 x_{i+1} 紧贴上界 y_{i+1} 紧贴上界转移 $\mathrm{g1}(b_i-1,a_i-1)\times \mathrm{dp}[i+1][1][0]$

$$\mathrm{dp}[i][0][0]=\mathrm{g1}(p-1,p-1)\times \mathrm{dp}[i+1][0][0]+\mathrm{g1}(p-1,a_i-1)\times \mathrm{dp}[i+1][0][1]$$

$$+\mathrm{g1}(b_i-1,p-1)\times \mathrm{dp}[i+1][1][0]+\mathrm{g1}(b_i-1,a_i-1)\times \mathrm{dp}[i+1][1][1]$$

若要让 x_i 紧贴上界 y_i 未紧贴上界可从 x_{i+1} 紧贴上界 y_{i+1} 未紧贴上界转移

即 $\mathrm{g2}(p-1,a_i)\times \mathrm{dp}[i+1][0][1]$ (x_i 只能取 a_i 否则无法紧贴上界)

也可从 x_{i+1} 紧贴上界 y_{i+1} 也紧贴上界转移

即 $\mathrm{g2}(b_i-1,a_i)\times \mathrm{dp}[i+1][1][1]$ (y_i 只能取 $0\sim b_i-1$ 否则变为紧贴上界)

$$\mathrm{dp}[i][0][1]=\mathrm{g2}(p-1,a_i)\times \mathrm{dp}[i+1][0][1]+\mathrm{g2}(b_i-1,a_i)\times \mathrm{dp}[i+1][1][1]$$

#3348、又是组合数问题

若要让 y_i 紧贴上界 x_i 未紧贴上界可从 y_{i+1} 紧贴上界 x_{i+1} 未紧贴上界转移

即 $\mathrm{g3}(b_i,p-1)\times \mathrm{dp}[i+1][1][0]$ (y_i 只能取 a_i 否则无法紧贴上界)

也可从 x_{i+1} 紧贴上界 y_{i+1} 也紧贴上界转移

即 $\mathrm{g3}(b_i,a_i-1)\times \mathrm{dp}[i+1][1][1]$ (x_i 只能取 $0\sim a_i-1$ 否则变为紧贴上界)

$$\mathrm{dp}[i][1][0]=\mathrm{g3}(b_i,p-1)\times \mathrm{dp}[i+1][1][0]+\mathrm{g3}(b_i,a_i-1)\times \mathrm{dp}[i+1][1][1]$$

若要让 x_i 紧贴上界 y_i 紧贴上界仅可从 x_{i+1} 紧贴上界 y_{i+1} 紧贴上界转移

且 x_i 只能取 a_i , y_i 只能取 b_i

$$\mathrm{dp}[i][1][1]=\mathrm{dp}[i+1][1][1]\ \textbf{and}\ a_i\geq b_i$$

初始时 $\mathrm{dp}[Q+1][1][1]=1$, 需 n->1 递推求解 $\mathrm{dp}[i][*][*]$

最终答案为

$$\mathrm{g1}(m,n)\ -\ \mathrm{dp}[1][0][0]\ -\ \mathrm{dp}[1][0][1]\ -\ \mathrm{dp}[1][1][0]\ -\ \mathrm{dp}[1][1][1]$$

时间复杂度 $O(\mathrm{T}\log_p n)$

#3371、逆序对

题目描述

定义序列 A 的一个逆序对为 (i,j) 满足

$$i < j \wedge A_i > A_j$$

给出一个长度为 n 且由 $1 \sim k$ 的整数组成的序列 P

Mas 不小心把墨水洒到了序列中的一些元素上，这导致序列中的一些元素消失了

请你求出序列 P 原来最多有多少逆序对

输入格式

第一行两个数 n 和 k

接下来 n 行每行一个正整数,其中第 i 行表示 p_i

$p_i = 0$ 表示这个元素消失了

输出格式

一行一个整数

表示把序列中的 0 替换为 $1 \sim k$ 中的整数后最多能得到多少逆序对

填入的数必然单调非升

正确性不难用反证法证明

数据规模

测试点 $1 \sim 2$ 满足 $1 \leq n,k \leq 8$

测试点 $3 \sim 4$ 保证序列 p 不包含 0

测试点 $5 \sim 7$ 保证序列 p 只包含 0

测试点 $8 \sim 15$ 满足 $1 \leq n \leq 1000, 1 \leq k \leq 50$

测试点 $16 \sim 25$ 满足 $1 \leq n \leq 10^5, k \leq 100$

#3371、逆序对

令 $w[i][j]$ 表示前 i 个空缺全部填入 j 时原数组对其产生的逆序对数量

$w[i][j]$ 不难用树状数组以 $O(n\log n)$ 的代价得到

不妨将所有空缺位置拿出考虑最后加上原数组间产生的逆序对数量，记 m 为空缺位置数量

设 $dp[i][j]$ 为考虑前 j 个空缺且填入的数不小于 i 时的最大逆序对数量

不妨枚举前一个空缺位置 x 将 $x+1\sim j$ 将这些位置全部填入 i

那么有

$$\mathrm{dp}[i][j]=\max_{0\le x<i}\left(\mathrm{dp}[i+1][x]+w[j][i]-w[x][i]+(j-x)\times(m-j)\right)$$

其中 $\mathrm{dp}[i+1][x]$ 为第 $x+1$ 个空缺前原数组对当前填入的 i 产生的逆序对贡献

$w[j][i]-w[x][i]$ 为空缺 $x+1\sim j$ 中原数组对当前填入的 i 产生的逆序对贡献

$(j-x)\times(m-j)$ 为空缺 $j+1\sim m$ 空缺当前填入的 i 产生的逆序对贡献

直接转移时间复杂度 $O(n^2k)$

#3371、逆序对

将原式整理得

$$-jx + \mathrm{dp}[i][j] - w[j][i] + j^2 - jm = \mathrm{dp}[i+1][x] - w[x][i] - xm$$

对于直线 $\mathrm{Y} = \mathrm{KX} + \mathrm{B}$，不妨令

$$\mathrm{Y} = \mathrm{dp}[i+1][x] - w[x][i] - xm$$

$$\mathrm{K} = -j$$

$$\mathrm{X} = x$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{dp}[i][j] - w[j][i] + j^2 - jm$$

要令截距最大应当维护上凸壳

显然斜率单调递减，单调队列维护即可

时间复杂度 $O(nk)$

#3359、项目规划

实验舱 青少年编程 LAB 走近科学 走进名校

题目描述

SYC 总部正在完成一个机密工程，这个工程一共有 S 个子项目

为了尽快完成这个工程 saM 调集了 B 个分支机构作为子项目的承包商

他希望将这 B 个承包商划分成 S 个小组，每个小组完成一个独立无不干扰的项目

同一小组内的分支机构需要向**组内**其它分支机构同步项目进度信息

为了尽可能保密，每个分支机构都有信息加密的密钥，而总部拥有所有机构的密钥

以下为 i 向 j 同步信息的过程($i \neq j$)

- i 使用密钥 k_i 将信息加密
- i 将加密信息发往 SYC 总部
- SYC 总部接收信息后使用 k_i 进行解密，再使用 k_j 对解密后的信息加密
- SYC 总部将加密信息发往 j .
- j 接收信息后使用 k_j 进行解密

数据规模

对于全部的数据 $2 \leq N \leq 5000, 1 \leq S \leq B \leq N-1, 1 \leq M \leq 50000, 1 \leq w \leq 10000$

信息可以通过提前架设的内部网络线路进行传输，但每条线路会产生一定的传输开销

网络包含 B 个分支机构、SYC 总部 以及一些冗余节点

共计 N 个节点，M 条单向网络线路

已知 $1 \sim B$ 为分支机构编号，$B+1$ 为 SYC 总部

> *网络保证这 n 个节点间连通，且每条线路的两个端点不重复(无重边)*

请你计算如何分配这些分支结构，使得每次传输的开销最小

输入格式

第一行输入四个整数 N, B, S, M

接下来 M 行每行三个整数 u, v, w

表示一条 $u \rightarrow v$ 的传输线路，传输开销为 w

输出格式

输出最小传输开销

#3359、项目规划

不难在正反图上求出 $\mathrm{dis}_{i\to \mathrm{B+1}}$ 与 $\mathrm{dis}_{\mathrm{B+1}\to i}$

记 $d_i = \mathrm{dis}_{i\to B+1} + \mathrm{dis}_{B+1\to i}$

对于某个分组 T 其贡献开销为

$$(|\mathrm{T}| - 1) \times \sum_{i\in \mathrm{T}} d_i$$

记录 g_i 表示 i 所属组大小，若 $d_i < d_j$ 且有 $\mathrm{g}_i < \mathrm{g}_j$ 将 i,j 交换能够更优解

将 d_i 从小到大排序再分组，可将划分转为线性 DP

设 $\mathrm{dp}[i][j]$ 为考虑到前 i 个机构分为 j 组的最小开销

$$\mathrm{dp}[i][j] = \min_{0\le k<i}\left(\mathrm{dp}[k][j-1] + (i-k-1) \times \sum_{k+1}^{i} d_i\right)$$

转移的代价为 $O(\mathrm{SB}^2)$

#3359、项目规划

~~打表发现 $dp[i][j]$ 满足决策单调性~~

证明

记 $p[i][j]$ 为 $\mathrm{dp}[i][j]$ 最优决策点

设 $\mathrm{dp}[i-1][j]$ 的最优决策点为 x , $\mathrm{dp}[i][j]$ 的最优决策点为 y 且有 $y < x \le i$

记 sum_i 为 d_i 前缀和有

$$\mathrm{dp}[y][j-1] + (i-y-1) \times \left(\mathrm{sum}_i - \mathrm{sum}_{y-1}\right) \le \mathrm{dp}[x][j-1] + (i-x-1) \times (\mathrm{sum}_{i-1} - \mathrm{sum}_{x-1})$$

又有

$$\mathrm{dp}[x][j-1] + (i-x-2) \times (\mathrm{sum}_{i-1} - \mathrm{sum}_{x-1}) \le \mathrm{dp}[y][j-1] + (i-y-2) \times \left(\mathrm{sum}_{i-1} - \mathrm{sum}_{y-1}\right)$$

其中 $\mathrm{sum}_i = \mathrm{sum}_{i-1} + d_i$ 两式相加可得

$$(i-y-1) \times \left(\mathrm{sum}_{i-1} + d_i - \mathrm{sum}_{y-1}\right) + (i-x-2) \times (\mathrm{sum}_{i-1} - \mathrm{sum}_{x-1})$$

$$\le (i-x-1) \times (\mathrm{sum}_{i-1} + d_i - \mathrm{sum}_{x-1}) + (i-y-2) \times \left(\mathrm{sum}_{i-1} - \mathrm{sum}_{y-1}\right)$$

#3359、项目规划

整理得

$$0 \le (y-x)d_i + \mathrm{sum}_{y-1} - \mathrm{sum}_{x-1}$$

与事实矛盾

所以有 $p[i-1][j] \le p[i][j]$

由于 d_i 单调非降不难得出 $p[i][j-1] \le p[i][j]$

综上有

$$p[i][j-1] \le p[i][j] \le p[i+1][j]$$

对于状态 $\mathrm{dp}[i][j]$

不妨先枚举分组数量 j 再逆序枚举 i 可保证 $p[i][j-1]$ 和 $p[i+1][j]$ 已求出

时间复杂度 $O(\mathrm{M}\log\mathrm{M}+\mathrm{SB})$

实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

谢谢观看