match题解

1 性质

首先，如果一条边(x,y)有$|x-y|$为偶数，那么这条边一定不能被选择，否则，它将图划分成两个都是奇数个点的图，这两个图都不能全部匹配。因此，我们只需要考虑$|x-y|$为奇数的边。

接着，如果选出了若干条输入的边，那么将这些边的两个端点全部删去后，形成的图能全部匹配当且仅当分出来的若干条链点数都是偶数。

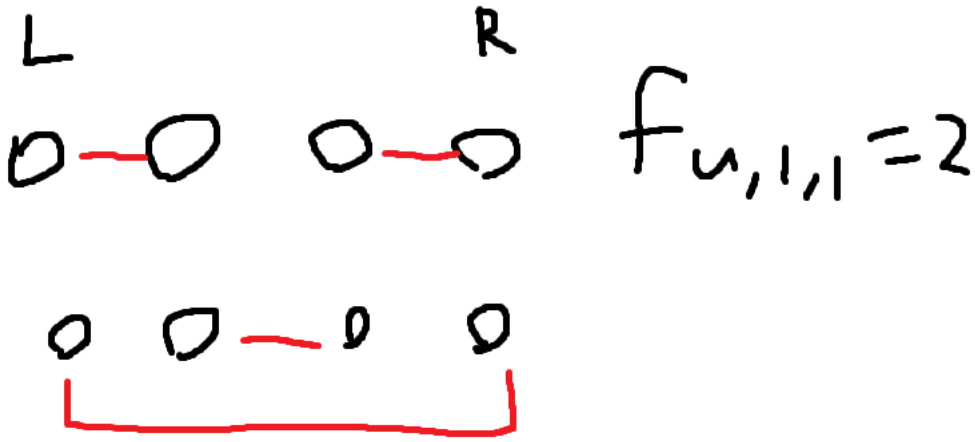
而所有输入的边没有交叉的关系，因此我们可以从某一个点开始按顺时针方向编号，然后将所有的边看成是一个区间。

2 朴素的dp

为方便起见，加入一个区间[0,n+1]，然后按照包含关系建出一棵树。一个想法是，令$f_{u,0/1,0/1}$表示对于u这个区间，最后的匹配为最左边没选/选，最右边没选/选的方案数。

如果u是一个叶子，那么若它代表的区间为[l,r]，则：

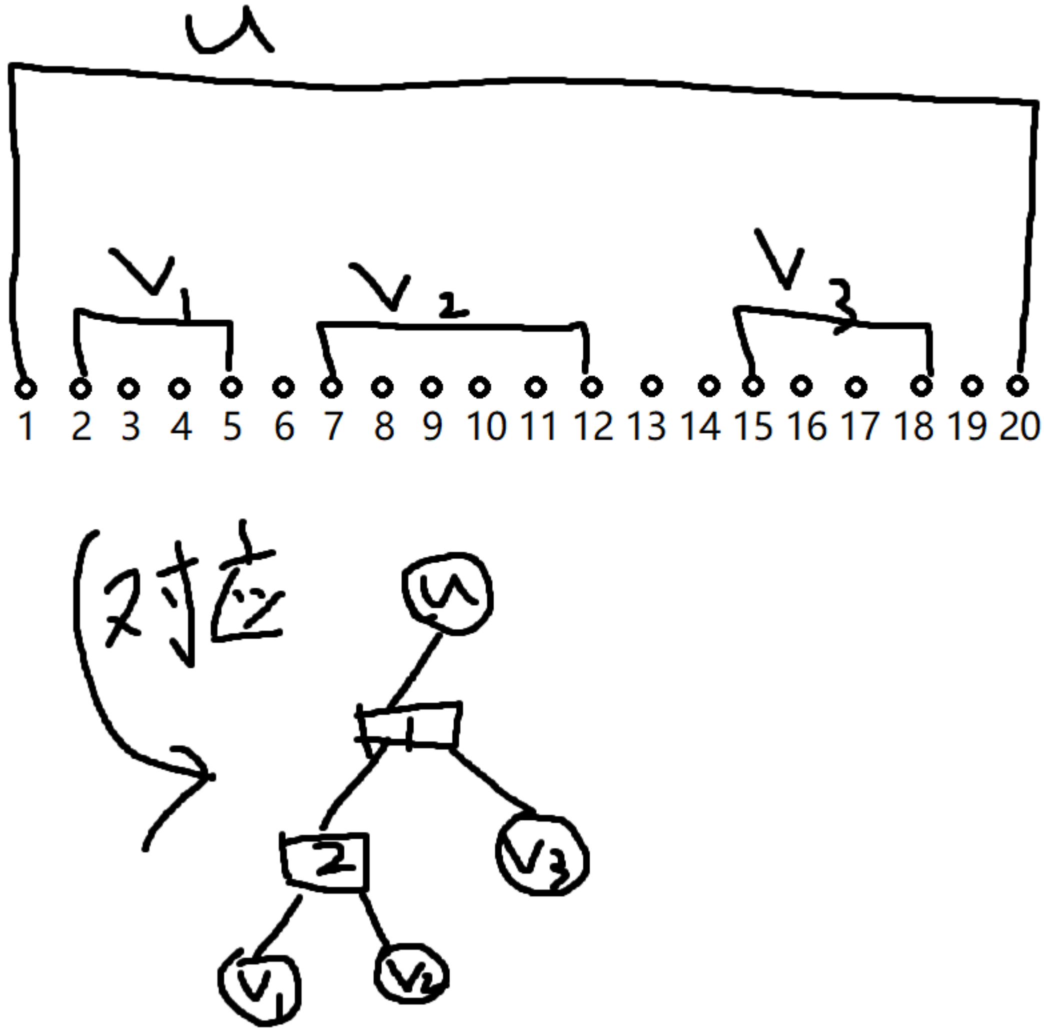
$$f_{u,0,0}=1, f_{u,1,1}=2, f_{u,0,1}=f_{u,1,0}=0$$



但麻烦的是，如果有多个孩子，合并就有顺序，而且两个区间之间的距离也有关系。

因此若节点u有k个儿子，则在u下面挂一颗节点数为k-1的完全二叉树，并且**按从左至右的顺序**将儿子挂在完全二叉树的叶子节点上。

例如，节点u代表区间[1,20](这也体现出了一开始加入的区间[0,n+1]的方便性！)，u下面有三个节点v1(代表[2,5]),v2(代表[7,12]),v3(代表[15,18])，那我们应该建出如图所示的树：



同时，我们的dp方程含义也有改变。即:

若u为原本就存在的节点，则$f_{u,0/1,0/1}$含义不便。

否则，u为一个完全二叉树中的节点，则$f_{u,0/1,0/1}$含义为在最后的匹配中，u的子树中所有可能的区间中最左边的那个点没选/选，最右边的那个点没选/选的方案数。例如上图，方块2节点对应了区间[2,12]，方块3节点对应了区间[2,18]。

这么做的好处在于，所有的方块节点只需要将左右两边合并，所有原本就有的节点只需要将有包含关系的区间合并(相当于只有一个孩子的转移！)，这样大大减少了讨论情况。

于是，若u(代表$[l_u, r_u]$)只有孩子v(代表$[l_v, r_v]$)，那么：

若l_u-l_v为偶数，r_u-r_v为偶数，则

$$\begin{aligned}
f_{u,0,0}&=f_{v,0,0}\\
f_{u,0,1}&=f_{v,0,1}\\
f_{u,1,0}&=f_{v,1,0}\\
f_{u,1,1}&=f_{v,0,0}+f_{v,1,1}
\end{aligned}$$

若l_u-l_v为偶数，r_u-r_v为奇数，则

$$\begin{aligned}
f_{u,0,0}&=f_{v,0,1}\\
f_{u,0,1}&=f_{v,0,0}\\
f_{u,1,0}&=f_{v,1,1}\\
f_{u,1,1}&=f_{v,0,1}+f_{v,1,0}
\end{aligned}$$

若l_u-l_v为奇数，r_u-r_v为偶数，则

$$\begin{aligned}
f_{u,0,0}&=f_{v,1,0}\\
f_{u,0,1}&=f_{v,1,1}\\
f_{u,1,0}&=f_{v,0,0}\\
f_{u,1,1}&=f_{v,1,0}+f_{v,0,1}
\end{aligned}$$

若l_u-l_v为奇数，r_u-r_v为奇数，则

$$\begin{aligned}
f_{u,0,0}&=f_{v,1,1}\\
f_{u,0,1}&=f_{v,1,0}\\
f_{u,1,0}&=f_{v,0,1}\\
f_{u,1,1}&=f_{v,1,1}+f_{v,0,0}
\end{aligned}$$

这看起来有很多讨论，但实际上某种情况中的下标实际上只是在第一种情况下的基础上全部异或了0或1。

若u为一个方块节点，其左侧为点v1(代表$[l_1,r_1]$)，右侧为点v2(代表$[l_2,r_2]$)，那么：

若l_2-r_1为奇数，则

$$\begin{aligned}
f_{u,0,0} &= f_{v_1,0,0} * f_{v_2,0,0} + f_{v_1,0,1} * f_{v_2,1,0} \\
f_{u,0,1} &= f_{v_1,0,0} * f_{v_2,0,1} + f_{v_1,0,1} * f_{v_2,1,1} \\
f_{u,1,0} &= f_{v_1,1,0} * f_{v_2,0,0} + f_{v_1,1,1} * f_{v_2,1,0} \\
f_{u,1,1} &= f_{v_1,1,0} * f_{v_2,0,1} + f_{v_1,1,1} * f_{v_2,1,1}
\end{aligned}$$

若l_2-r_1为偶数，则

$$\begin{aligned}
f_{u,0,0} &= f_{v_1,0,0} * f_{v_2,1,0} + f_{v_1,0,1} * f_{v_2,0,0} \\
f_{u,0,1} &= f_{v_1,0,0} * f_{v_2,1,1} + f_{v_1,0,1} * f_{v_2,0,1} \\
f_{u,1,0} &= f_{v_1,1,0} * f_{v_2,1,0} + f_{v_1,1,1} * f_{v_2,0,0} \\
f_{u,1,1} &= f_{v_1,1,0} * f_{v_2,1,1} + f_{v_1,1,1} * f_{v_2,0,1}
\end{aligned}$$

直接按上式dp可以做到$O(m^2)$。

3 优化

首先，先离线建出树形态，然后依次加点。

由于每次只会修改一个节点，因此可以按照ddp的方式来优化转移过程。而它的矩阵与上面的结构几乎是一致的。

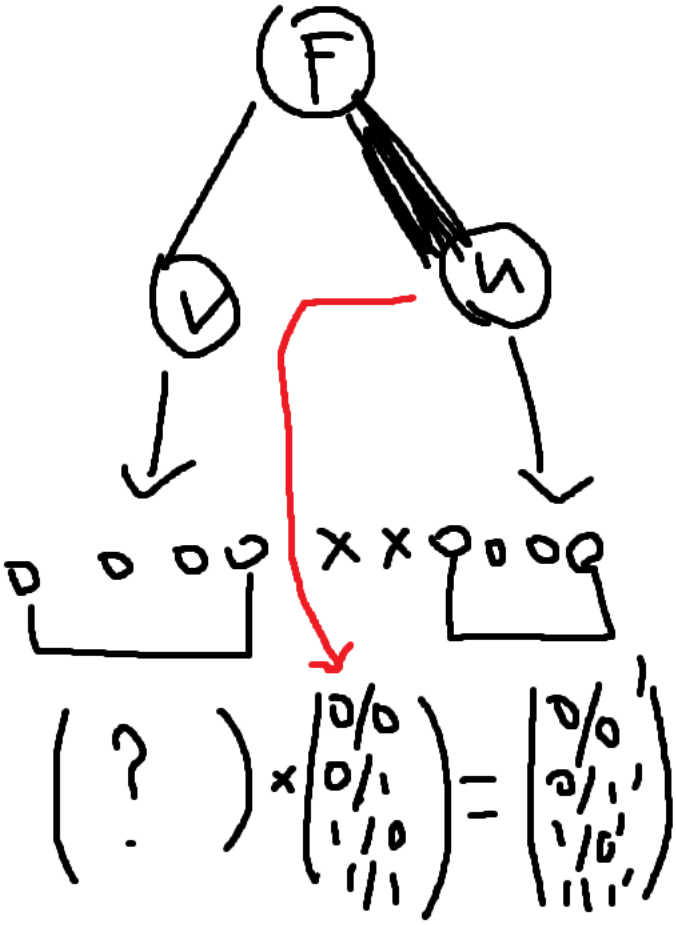
不过需要注意的是，在这题中，节点之间的顺序很重要！因此在修改时，需要对节点在父亲的哪一边分类。

在修改时，轻儿子v的父亲F一定是一个方块节点。设F的另一个节点为u，那么：

若v为F的左节点，且l_u-r_v为奇数，则F的矩阵修改为：

$$\begin{pmatrix}
0/0 & 0 & 0/1 & 0 \\
0 & 0/0 & 0 & 0/1 \\
1/0 & 0 & 1/1 & 0 \\
0 & 1/0 & 0 & 1/1
\end{pmatrix}$$

其中矩阵中(不是图里向量中)的$x/y=f_{v,x,y}$，下同。



若v为F的左节点，且$l_u - r_v$为偶数，则F的矩阵修改为：

$$\begin{pmatrix} 0/1 & 0 & 0/0 & 0 \\ 0 & 0/1 & 0 & 0/0 \\ 1/1 & 0 & 1/0 & 0 \\ 0 & 1/1 & 0 & 1/0 \end{pmatrix}$$

若v为F的右节点，且$l_u - r_v$为奇数，则F的矩阵修改为：

$$\begin{pmatrix} 0/0 & 1/0 & 0 & 0 \\ 0/1 & 1/1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0/0 & 1/0 \\ 0 & 0 & 0/1 & 1/1 \end{pmatrix}$$

若v为F的右节点，且$l_u - r_v$为偶数，则F的矩阵修改为：

$$\begin{pmatrix} 1/0 & 0/0 & 0 & 0 \\ 1/1 & 0/1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/0 & 0/0 \\ 0 & 0 & 1/1 & 0/1 \end{pmatrix}$$

运用朴素的树链剖分ddp，即可做到$O(nlog^2n)$(虽然常数很大，但并没有卡)，或者用实现更为精细的做法(例如，全局平衡二叉树)做到$O(nlogn)$。