

# 训练赛5题解

November 10, 2023

# game

---

- 结论：只有当存在顶点 $u$ 满足 $f(u) = K$ 或者某个子树内只有一个位置为 $-1$ ，填上某个数后 $f(u) = K$ ，则Alice获胜，否则Bob获胜。（思路：Bob可以往“重要”位置填 $K$ 阻断所有 $mex = K$ 的可能）
- $O(n)$ 时间检查：找到所有“最接近”根节点的顶点，满足子树内 $-1$ 的个数不超过1，检查所有这种节点是否满足条件即可。

# count

---

- 问题等价于统计带权路径和。
- $O(n^2)$ 做法：动态规划即可。
- $O(n \log^2 n)$ 做法：考虑cdq分治FFT。令 $solve(v, n)$ 为如下过程
  - 输入 $v$ 为长度 $2n$ 的向量，表示从 $i(0 \leq i < 2n)$ 点出发的权重；
  - 输出是长度为 $4n$ 的向量，表示到达 $i(0 \leq i < 4n)$ 点的路径权重和。
  - 假设 $n$ 为偶数。注意到，从 $n \leq i < 2n$ 出发的路径，由于每次最多下两步，因此 $n/2$ 步内仍然大于等于0，因此我们可以利用FFT快速转移此段权重，只需要与 $solve(v[0 : n - 1], n/2)$ 部分合并即可得到经过 $n/2$ 步后的权重向量 $v'$ 。再利用同样的argument可以得到走完 $n$ 步的权重向量。
  - 时间复杂度 $T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log^2 n)$ 。

# geometry

---

- 删点一定是删除一系列连续顶点。
- 二分答案，判定是否存在某个点，无论如何删 $k$ 个点都包含在剩余 $n - k$ 个点的凸包中。
- 将凸包的每条边视为半平面限制，转化为半平面交问题。