图论一

二分图及其判定、欧拉回路等

郑欣

2024 年 7 月 25 日

1. 二分图
   - 二分图判定
   - 二分图匹配
2. 欧拉回路

定义:

- 图：$G=(V,E)$，其中 V 为点集，$E \subseteq V \times V$ 为边集。未特别说明时用 n 表示点集 V 的大小，m 表示边集 E 的大小。
- 二分图（Bipartite Graph）：$G=(U \cup V,E)$，其中 $U \cap V=\varnothing$，$E \subseteq U \times V$。即一个图是二分图，若这个图的点集可以被划分为两个集合，且两个集合内部没有边。

性质:

- G 是二分图，当且仅当可以对 G 的点集黑白染色，使得所有边的两个顶点颜色互不相同。
- G 是二分图，当且仅当 G 没有长度为奇数的环。

观察：对于二分图一个连通块，如果确定了某个点的染色，则该连通块的染色方案唯一。

Code

```
bool dfs(int u, int c) {
    // G[u]: u 的邻居列表
    // color: 染色，0 表示染成白色，1 表示染成黑色，初始值 -1 表示没被访问
    color[u] = c;
    for (auto v: G[u]) {
        // 如果邻居被染色了且颜色相同，说明无法二分图染色
        if (color[v] == c) return false;
        // 否则如果邻居没有被染色，则染上相反的颜色
        else if (color[v] == -1) {
            if (!dfs(v, c ^ 1)) return false;
        }
    }
    return true;
}

int main() {
    for (int u = 1; u <= n; ++u) {
        if (color[u] != -1) continue;
        if (!dfs(u, 0)) // 不是二分图
    }
}
```

例题 1

Luogu P1330　封锁阳光大学

给一个无向简单图，要求选择尽可能少的点，使得每条边的两个端点中有且仅有一个点被选择（可能无解）。

范围：$n \leq 10^4, m \leq 10^5$

每个连通块的答案独立，因此可以分别处理每个连通块最后叠加答案。

对于每个点：选择 $=$ 染成黑色；不选 $=$ 染成白色。

每条边的两个端点恰好选择一个 $\Rightarrow$ 两个端点颜色不同。

问题等价于对二分图黑白染色，使得黑色点数量最少（不是二分图则无解）。

二分图中的每个连通块有且仅有两种染色方案，因此答案为 $\min\{$黑色, 白色$\}$。

例题 2

NOIP2010　关押罪犯

给一个无向带权图，要求将所有点划分为两个集合，最小化两个集合内部的边权最大值。

范围：$n \le 2 \cdot 10^4, m \le 10^5$

考虑二分答案：判断是否存在一种划分方案，使得集合内部边权最大值不超过 x，即集合内不存在 $> x$ 的边。

对于确定的 x，我们可以无视 $\le x$ 的边。则问题变为将每条 $> x$ 的边的两个端点划分入不同集合，因此只需判断 $> x$ 的边构成的子图是否为二分图即可。复杂度 $O(m \log m)$。

事实上这题也可以不用二分。可以将边从大到小排序一条条插入到图中，动态维护这个图是不是二分图，直到插入某条边时图不是二分图，答案即为这条边的边权。

种类并查集

操作：

- 加入一条边；
- 判断当前图是否为二分图。

并查集维护染色方案：

- 将每个点 $v \in V$ 拆成 v_0 和 v_1 两个点，分别表示染色成白色和黑色；
- 若加入边 (u, v)，则合并 u_0, v_1 与 u_1, v_0，表示 u, v 的颜色不同；
- 若合并后 u_0 和 u_1 在同一个连通块，则这个图不是二分图。

例题 3

Luogu P1285　队员分组

给一个有向图，要求将这个图的点集划分为 A, B 两个集合，使得 A 和 B 的生成子图均为完全图（即对于任意 $u, v \in A$ 或 $u, v \in B$，均存在 (u, v) 和 (v, u) 两条边），且 A 和 B 的大小相差最小（可能无解）。

范围：$n \le 100, m \le n(n-1)$

观察 1：只有当边 (u, v) 和 (v, u) 同时存在时 (u, v) 才是有用的，否则如果只有 (u, v)，u 和 v 无法被分到同一个集合。因此可以将有向图只保留双向边变为无向图。

观察 2：当且仅当补图不是二分图时无解。

考虑补图。问题变为将二分图的点集分为 A, B 两部分使得集合内部没有边且 $\big||A| - |B|\big|$ 最小，即 $|A|$ 尽可能接近 $n/2$。

连通块之间独立，且每个连通块黑白染色后只能把所有黑点或所有白点加入 A。用 01 背包即可求出 $|A|$ 的所有可能值。时间复杂度 $O(n^2)$。

例题 4

Luogu P6185　序列

有两个长为 n 的序列 a, b 以及 m 种可选操作，每个操作可以用三元组 (t, u, v) 描述（u, v 可能相等）：

- 若 $t = 1$，则令 $a_u \leftarrow a_u \pm 1$，$a_v \leftarrow a_v \mp 1$；
- 若 $t = 2$，则令 $a_u \leftarrow a_u \pm 1$，$a_v \leftarrow a_v \pm 1$。

问是否能够执行任意多次操作将 a 变成 b。

范围：$n, m \leq 10^5$

例题 4

Luogu P6185　序列

- 操作 1：$a_u \leftarrow a_u \pm 1$，$a_v \leftarrow a_v \mp 1$；
- 操作 2：$a_u \leftarrow a_u \pm 1$，$a_v \leftarrow a_v \pm 1$。

对序列 a 建图：n 个点，第 v 个点的点权为 a_v，对每个操作 (u, v) 连一条边。

操作 1：同一个连通块内 a 可以变成 b 当且仅当点权和相等。

因此可以把操作 1 形成的连通块缩点。

操作 2：对于一个连通块，如果不是二分图只要点权和奇偶性相同就可以，否则需要二分图两边点权和的差相等。

二分图匹配

- 二分图匹配：边集的子集，满足任意两条边没有公共顶点。
- 二分图最大匹配：二分图中包含的边数最多的匹配。
- 二分图最大权匹配：带权二分图中边权总和最大的匹配。
- 二分图完美匹配：能覆盖图中所有点的匹配。

匈牙利算法

- 给二分图定向，假设所有边都是从 L 指向 R。
- 从 L 中的一个未匹配点 u 开始 DFS，找到 R 中的一个未匹配点 v，并将所有经过的边反向。这样的路径称为增广路。
- 当无法找到增广路，此时所有反向边构成一个最大匹配。

时间复杂度 $O(nm)$。

Code

```
bool dfs(int u, int tag) {
    // 左侧的点标号为 1 ∼ n，右侧的点标号为 1 ∼ m
    // G[u] (1 ≤ u ≤ n): u 相连的右侧点编号列表
    // match[v] (1 ≤ v ≤ m): 与右侧点 v 匹配的左侧点编号，(v, match(v)) 是一条反向边
    // vis[u] (1 ≤ u ≤ n): 左侧点 u 是否被访问过
    if (vis[u] == tag) return false;
    vis[u] = tag;
    for (auto v: G[u]) {
        if (!match[v] || dfs(match[v], tag)) {  // 找到右侧的未匹配点，即 match(v) = 0
            match[v] = u;
            return true;
        }
    }
    return false;
};

int main() {
    int ans = 0;    // 最大匹配大小
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        if (dfs(i, i)) ans++;
    }
}
```

例题 5

ZJOI2007　矩阵游戏

给定一个 $n \times n$ 的 01 矩阵，每次能交换任意两行或任意两列，问是否能够将矩阵的主对角线（左上到右下的对角线）全变成 1。

范围：$n \leq 200$

主对角线能全变成 1 当且仅当存在一个排列 π，满足 (i, π_i) 上全是 1。

将行作为左侧节点，列作为右侧节点，i 到 j 连边当且仅当第 i 行 j 列为 1，判断是否有完美匹配即可。复杂度 $O(n^3)$。

NOI2009　变换序列

给一个长为 n 的序列 a，求一个字典序最小的 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ 的排列 π，使得对于所有 $0 \le i < n$ 有 $\min\{|\pi_i - i|, n - |\pi_i - i|\} = a_i$。

范围：$n \le 10^4$

对于每个 i，有且仅有两个满足条件的 π_i，即 $(i \pm a_i) \bmod n$。

考虑建二分图：左右侧节点都是 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$，左侧 i 连右侧 j 当且仅当 $j = (i \pm a_i) \bmod n$，表示令 $\pi_i = j$，找一个完美匹配即可。由于图中共 $2n$ 条边，复杂度 $O(n^2)$。

题目要求输出字典序最小的解，需要以 $n-1$ 到 0 贪心匹配较小的点。

一些定理

- Hall 定理：对于二分图 $G = (U \cup V, E)$，用 $|N(S)|$ $(S \subseteq U)$ 表示 V 中与 S 有边相连的点数。

  G 有完美匹配当且仅当对所有 $S \subseteq U$，有 $|N(S)| \geq |S|$。

- König 定理：二分图最大匹配 = 最小点覆盖。

  最小点覆盖：最少需要选多少点，使得每条边至少有一个顶点被选。

  方案：从左边所有非匹配点开始 BFS。左边所有没被访问的点和右边所有访问了的点构成一组最小点覆盖。

欧拉回路

- 欧拉回路（Euler Cycle）：经过图中每条边恰好一次的回路。
- 欧拉路径（Euler Path）：经过图中每条边恰好一次的路径。
- 欧拉图（Euler Graph）：有欧拉回路的图。

性质

连通的无向图：

- 欧拉回路：所有点的度数都是偶数
- 欧拉路径：度数是奇数的点不超过 2 个

弱连通的有向图：

- 欧拉回路：所有点的入度都等于出度
- 欧拉路径：
  - 至多 2 个点的有 $|\text{入度} - \text{出度}| = 1$
  - 其余所有点入度等于出度

证明

欧拉图的充要条件

无向连通图 G 是欧拉图当且仅当对所有顶点 $v \in V$ 都有 $2 \mid \deg(v)$。

$\Rightarrow$：欧拉回路每经过一个点，会为这个点贡献两条相邻的边。

$\Leftarrow$：给定度数全为偶数的无向连通图，构造一条欧拉回路：Fleury 算法，Hierholzer 算法

观察：在遍历欧拉回路的过程中，删除已经走过的边，剩下的图仍然连通。

Fleury 算法

从任意一点出发，每次走一条非桥边，除非连接这个点的全是桥，然后将这条边从图中删除，直到所有边被删完。最后返回走过的路径。（桥：删掉这条边会使得图不连通的边）

复杂度：$O(m^2)$，因为每次删边都要重新计算桥。

观察：欧拉回路是若干边不相交的环的并。

Hierholzer 算法

任选一个点作为初始欧拉回路。每次从当前回路 C 中选一个非孤立点 v，从这个点出发在剩下的图中找到一个回路 C'，将 C 中的点 v 替换为新找到的回路 C'，并将 C' 从图中删除。

Code (有向图欧拉回路，邻接矩阵)

```
void dfs(int u) {
    // G[u][v]: 有向边 u → v 的重数
    for (int v = 1; v <= n; ++v) {
        if (!G[u][v]) continue;
        --G[u][v];
        dfs(v);
    }
    ans.push_back(u);
}
```

复杂度：$O(nm)$

Hierholzer 算法

Code (有向图欧拉回路，邻接表)

```
void dfs(int u) {
    // G[u]: u 的邻居列表
    // pos[u]: 该位置之前的 u 的邻居已经访问过 (初始值为 0)
    while (pos[u] < G[u].size()) {
        int v = G[u][pos[u]];
        ++pos[u];
        dfs(v);
    }
    ans.push_back(u);
}
```

复杂度：$O(n+m)$

- 无向图欧拉回路：删除正向边的同时也删除反向边
- 字典序最小的欧拉回路：对 $G[u]$ 排序
- 无向图最少需要几笔画：$\max\{\text{奇数度的点数}/2, 1\}$（新建一个点，连接所有奇数度的点）

例题 1

Luogu P1333　瑞瑞的木棍

给 n 根木棍，每根木棍两端各有一种颜色。你需要将所有木棍首尾相接拼成一条线，使得相邻两根木棍首尾颜色相同。

范围：$n \leq 2.5 \cdot 10^5$

点 = 颜色；边 = 木棍

将颜色相同的木棍首尾相接 = 找到一条路径

找一条欧拉路径即可，注意处理图不连通的情况

例题 2

HDU 2894　DeBruijin

构造一个长为 2^n 的由 01 组成的环，使得环上长为 n 的子串可以遍历所有长为 n 的 01 串。

范围：$n \leq 15$

样例：当 $n = 3$ 时输出 00010111，包含的子串从左到右依次为

$$000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100$$

边 $=$ 长为 n 的子串；两条边共顶点当且仅当两个子串能放在相邻位置。

以长度为 $n-1$ 的 01 串为顶点，在 a 和 b 之间连一条边若 $a[2:n-1] = b[1:n-2]$。求欧拉回路即可。

例题 3

CF 723E　One-Way Reform

给定一个无向图，要求对边定向，使得尽可能多的点满足入度等于出度。

范围：$n \leq 200, m \leq \binom{n}{2}$

考虑所有点度数均为偶数的情况。对每个连通块求一个欧拉回路，按照欧拉回路的顺序给边定向，此时所有点都满足入度 $=$ 出度。

若存在度数为奇数的点，显然答案不超过偶数度的点数。新建一个点连接所有奇数度的点跑欧拉回路，则所有偶数度的点均能满足要求。

例题 4

CF 527E　Data Center Drama

给定一个无向图，要求加入尽可能少的边（允许重边或自环），然后对所有边定向，使得所有点入度和出度都是偶数。

范围：$n \leq 10^5, m \leq 2 \cdot 10^5$

定向后入度出度都是偶数 $\Rightarrow$ 无向图中每个点的度数、总边数是偶数

首先把所有奇数度的点两两连起来变成偶数度，如果总边数是奇数再随便加一个自环。

考虑如何定向：求一条欧拉回路，按照回路的顺序 $\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow \ldots \rightarrow\leftarrow$ 这样定向。

例题 5

CF 1634E　Fair Share

给定 m 个可重集合 A_i，所有 A_i 大小为偶数。要求将每个 A_i 分为的 L_i 和 R_i 两个部分，使得 $|L_i| = |R_i|$，且 $\bigcup_i L_i = \bigcup_i R_i$。

范围：$m \le 10^5, \sum_i |A_i| \le 2 \cdot 10^5$

构造一个二分图 $G = (X \cup Y, E)$（有重边），X 表示每个元素，Y 表示每个集合。若 x 在 A_i 中出现 c 次，则在 $x \in X$ 和 $i \in Y$ 间连 c 条边。

$|A_i|$ 为偶数 $\Rightarrow 2 \mid \deg(i)$

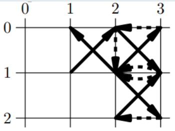
目标：选出一些边作为集合 L，剩下的边作为 R，使得每个点相邻的 L 边和 R 边数量相等。

对每个连通块找一条欧拉回路，从 X 到 Y 的边加入 L，从 Y 到 X 的边加入 R。

例题 6

ICPC NERRC 2019　Cross-Stitch

给定一个 8-连通图案，求出一个最短的十字绣方案。

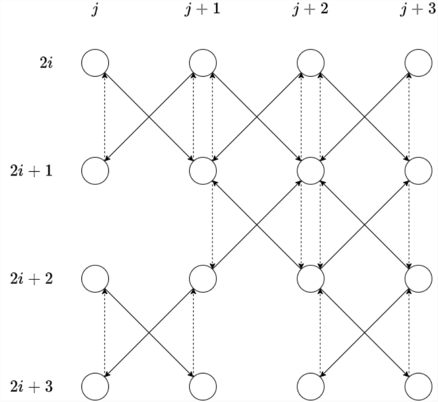


例题 6

假设有 n 个 “X”，则正面需要 $2n$ 段，因此反面至少要 $(2n-1)$ 段，总长度至少

$$2n\cdot\sqrt{2}+(2n-1)\cdot 1.$$

拿 n 个 “$\bowtie$” 图案拼起来可以得到一个欧拉回路，任意去掉一段反面的线即可满足最优解。但直接找欧拉回路有可能不满足正反交替的限制，因此需要对欧拉回路定向。一种合法的定向方案如下：



例题 7

联合省选 2020 B　丁香之路

给定一个无向完全图，i 到 j 的边权为 $|i-j|$。给定起点 s 和 m 条边，对于每个 $1 \le i \le n$，求从 s 到 i 必须经过这 m 条边至少一次的最短路。

范围：$n \le 2500, m \le \binom{n}{2}$

从 s 走到 i 且经过给定的 m 条边，即找到尽可能短的包含这 m 条边的边集，使得存在 s 到 i 的欧拉路径。为简便起见，加入边 (i,s) 将欧拉路径改为欧拉回路。

新添加的边只需包含 $(i,i+1)$，否则如果加入 (u,v) $(v>u+1)$，可以拆成

$$(u,u+1),(u+1,u+2),\ldots,(v-1,v).$$

并且新加的边重数不会超过 2，否则删除 2 条重边后剩下的图仍有欧拉回路。

例题 7

任意一个加边方案中，新加的边可以分为不重叠的两类：

- 重数为 1 的边：作用是改变必经边顶点的奇偶性，使得所有点度数均为偶数。注意到这类边的添加方案是唯一的；
- 重数为 2 的边：作用是保证图的连通性。

因此我们可以得到下面的算法：

- 对于所有奇数度的点 $v_1, \dots, v_k$，依次连接 $v_1 - v_2$，$v_3 - v_4, \dots,$ $v_{k-1} - v_k$；
- 添加尽可能少的 2 重边使得整个图连通（最小生成树）。

时间复杂度 $n^2 \log n + m$。

Thanks