引入

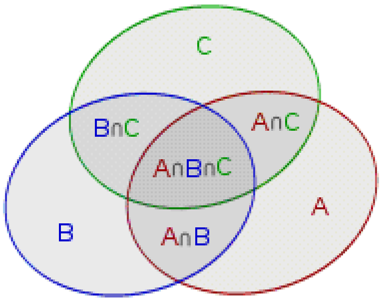
"入门例题"

　假设班里有 10 个学生喜欢数学，15 个学生喜欢语文，21 个学生喜欢编程，班里至少喜欢一门学科的有多少个学生呢?

是 $10+15+21=46$ 个吗? 不是的，因为有些学生可能同时喜欢数学和语文，或者语文和编程，甚至还有可能三者都喜欢。

为了叙述方便，我们把喜欢语文、数学、编程的学生集合分别用 A, B, C 表示，则学生总数等于 $|A \cup B \cup C|$。刚才已经讲过，如果把这三个集合的元素个数 $|A|, |B|, |C|$ 直接加起来，会有一些元素重复统计了，因此需要扣掉 $|A \cap B|, |B \cap C|, |C \cap A|$，但这样一来，又有一小部分多扣了，需要加回来，即 $|A \cap B \cap C|$。即

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$



把上述问题推广到一般情况，就是我们熟知的容斥原理。

定义

设 U 中元素有 n 种不同的属性，而第 i 种属性称为 P_i，拥有属性 P_i 的元素构成集合 S_i，那么

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = &\sum_{i} |S_i| - \sum_{i<j} |S_i \cap S_j| + \sum_{i<j<k} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \cdots \\ &+ (-1)^{m-1} \sum_{a_i<a_{i+1}} \left|\bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i}\right| + \cdots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap \cdots \cap S_n|\end{aligned}$$

即

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{a_i<a_{i+1}} \left|\bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i}\right|$$

证明

对于每个元素使用二项式定理计算其出现的次数。对于元素 x，假设它出现在 $T_1, T_2, \cdots, T_m$ 的集合中，那么它的出现次数为

$$
\begin{aligned}
Cnt =&|\{T_i\}| - |\{T_i \cap T_j | i < j\}| + \cdots + (-1)^{k-1} \left| \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} T_{a_i} | a_i < a_{i+1} \right\} \right| \\
&+ \cdots + (-1)^{m-1} |\{T_1 \cap \cdots \cap T_m\}| \\
=&\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} \\
=&\binom{m}{0} - \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \\
=&1 - (1-1)^m = 1
\end{aligned}
$$

于是每个元素出现的次数为 1，那么合并起来就是并集。证毕。

补集

对于全集 U 下的 **集合的并** 可以使用容斥原理计算，而集合的交则用全集减去 **补集的并集** 求得：

$$
\left|\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} \overline{S_i}\right|
$$

右边使用容斥即可。

可能接触过容斥的读者都清楚上述内容，而更关心的是容斥的应用

那么接下来我们给出 3 个层次不同的例题来为大家展示容斥原理的应用。

不定方程非负整数解计数

???+ note "不定方程非负整数解计数"
    给出不定方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$ 和 n 个限制条件 $x_i \leq b_i$，其中 $m, b_i \in \mathbb{N}$. 求方程的非负整数解的个数。

没有限制时

如果没有 $x_i < b_i$ 的限制，那么不定方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$ 的非负整数解的数目为 $\binom{m+n-1}{n-1}$.

略证：插板法。

相当于你有 m 个球要分给 n 个盒子，允许某个盒子是空的。这个问题不能直接用组合数解决。

于是我们再加入 $n-1$ 个球，于是问题就变成了在一个长度为 $m+n-1$ 的球序列中选择 $n-1$ 个球，然后这个 $n-1$ 个球把这个序列隔成了 n 份，恰好可以一一对应放到 n 个盒子中。那么在 $m+n-1$ 个球中选择 $n-1$ 个球的方案数就是 $\binom{m+n-1}{n-1}$。

容斥模型

接着我们尝试抽象出容斥原理的模型：

1. 全集 U：不定方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$ 的非负整数解
2. 元素：变量 x_i.
3. 属性：x_i 的属性即 x_i 满足的条件，即 $x_i \leq b_i$ 的条件

目标：所有变量满足对应属性时集合的大小，即 $|\bigcap_{i=1}^{n} S_i|$.

这个东西可以用 $\left|\bigcap_{i=1}^{n}S_i\right|=|U|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}\overline{S_i}\right|$ 求解。$|U|$ 可以用组合数计算，后半部分自然使用容斥原理展开。

那么问题变成，对于一些 $\overline{S_{a_i}}$ 的交集求大小。考虑 $\overline{S_{a_i}}$ 的含义，表示 $x_{a_i}\geq b_{a_i}+1$ 的解的数目。而交集表示同时满足这些条件。因此这个交集对应的不定方程中，有些变量有 **下界限制**，而有些则没有限制。

能否消除这些下界限制呢？既然要求的是非负整数解，而有些变量的下界又大于 0，那么我们直接 **把这个下界减掉**，就可以使得这些变量的下界变成 0，即没有下界啦。因此对于

$$\left|\bigcap_{a_i<a_{i+1}}^{1\leq i\leq k}S_{a_i}\right|$$

的不定方程形式为

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=m-\sum_{i=1}^{k}(b_{a_i}+1)$$

于是这个也可以组合数计算啦。这个长度为 k 的 a 数组相当于在枚举子集。

HAOI2008 硬币购物

???+ note "HAOI2008 硬币购物"
    4 种面值的硬币，第 i 种的面值是 C_i。n 次询问，每次询问给出每种硬币的数量 D_i 和一个价格 S，问付款方式。

```
$n\leq 10^3,S\leq 10^5$.
```

如果用背包做的话复杂度是 $O(4nS)$，无法承受。这道题最明显的特点就是硬币一共只有四种。抽象模型，其实就是让我们求方程 $\sum_{i=1}^4 C_ix_i=S,x_i\leq D_i$ 的非负整数解的个数。

采用同样的容斥方式，x_i 的属性为 $x_i\leq D_i$. 套用容斥原理的公式，最后我们要求解

$$\sum_{i=1}^{4}C_ix_i=S-\sum_{i=1}^{k}C_{a_i}(D_{a_i}+1)$$

也就是无限背包问题。这个问题可以预处理，算上询问，总复杂度 $O(4S+2^4n)$。

??? note "代码实现"
    `cpp`
`    --8<-- "docs/math/code/inclusion-exclusion-principle/inclusion-exclusion-principle_1.cpp"`

完全图子图染色问题

前面的三道题都是容斥原理的正向运用，这道题则需要用到容斥原理逆向分析。

???+ note "完全图子图染色问题"
    A 和 B 喜欢对图（不一定连通）进行染色，而他们的规则是，相邻的结点必须染同一种颜色。今天 A 和 B 玩游戏，对于 n 阶 **完全图** $G=(V,E)$。他们定义一个估价函数 $F(S)$，其中 S 是边集，$S\subseteq E$. $F(S)$ 的值是对图 $G'=(V,S)$ 用 m 种颜色染色的总方案数。他们的另一个规则是，如果 $|S|$ 是奇数，那么 A 的得分增加 $F(S)$，否则 B 的得分增加 $F(S)$. 问 A 和 B 的得分差值。

数学形式

一看这道题的算法趋向并不明显，因此对于棘手的题目首先抽象出数学形式。得分差即为奇偶对称差，可以用 -1 的幂次来作为系数。我们求的是

$$Ans=\sum_{S\subseteq E}(-1)^{|S|-1}F(S)$$

容斥模型

相邻结点染同一种颜色，我们把它当作属性。在这里我们先不遵守染色的规则，假定我们用 m 种颜色直接对图染色。对于图 $G'=(V,S)$，我们把它当作 **元素**。**属性** $x_i=x_j$ 的含义是结点 i,j 染同色（注意，并未要求 i,j 之间有连边）。

而属性 $x_i=x_j$ 对应的 **集合** 定义为 $Q_{i,j}$，其含义是所有满足该属性的图 G' 的染色方案，集合的大小就是满足该属性的染色方案数，集合内的元素相当于所有满足该属性的图 G' 的染色图。

回到题目，「相邻的结点必须染同一种颜色」，可以理解为若干个 Q 集合的交集。因此可以写出

$$F(S)=\left|\bigcap_{(i,j)\in S}Q_{i,j}\right|$$

上述式子右边的含义就是说对于 S 内的每一条边 (i,j) 都满足 $x_i=x_j$ 的染色方案数，也就是 $F(S)$.

是不是很有容斥的味道了？由于容斥原理本身没有二元组的形式，因此我们把 **所有** 的边 (i,j) 映射到 $T=\frac{n(n+1)}{2}$ 个整数上，假设将 (i,j) 映射为 $k,1\le k\le T$，同时 $Q_{i,j}$ 映射为 Q_k. 那么属性 $x_i=x_j$ 则定义为 P_k.

同时 S 可以表示为若干个 k 组成的集合，即 $S\iff K=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$.（也就是说我们在边集与数集间建立了等价关系）。

而 E 对应集合 $M=\left\{1,2,\cdots,\frac{n(n+1)}{2}\right\}$. 于是乎

$$F(S)\iff F(\{k_i\})=\left|\bigcap_{k_i}Q_{k_i}\right|$$

逆向分析

那么要求的式子展开

$$\begin{aligned}Ans&=\sum_{K\subseteq M}(-1)^{|K|-1}\left|\bigcap_{k_i\in K}Q_{k_i}\right|\\&=\sum_i|Q_i|-\sum_{i<j}|Q_i\cap Q_j|+\sum_{i<j<k}|Q_i\cap Q_j\cap Q_k|-\cdots+(-1)^{T-1}\left|\bigcap_{i=1}^{T}Q_i\right|\end{aligned}$$

于是就出现了容斥原理的展开形式，因此对这个式子逆向推导

$$Ans=\left|\bigcup_{i=1}^{T}Q_i\right|$$

再考虑等式右边的含义，只要满足 $1\sim T$ 任一条件即可，也就是存在两个点同色（不一定相邻）的染色方案数！而我们知道染色方案的全集是 U，显然 $|U|=m^n$. 而转化为补集，就是求两两异色的染色方案数，即 $A_m^n=\frac{m!}{n!}$. 因此

$$Ans = m^n - A_m^n$$

解决这道题，我们首先抽象出题目数学形式，然后从题目中信息量最大的条件，$F(S)$ 函数的定义入手，将其转化为集合的交并补。然后将式子转化为容斥原理的形式，并 **逆向推导** 出最终的结果。这道题体现的正是容斥原理的逆用。

数论中的容斥

使用容斥原理能够巧妙地求解一些数论问题。

容斥原理求最大公约数为 k 的数对个数

考虑下面的问题：

???+ note " 求最大公约数为 k 的数对个数 "
  设 $1 \le x, y \le N$，$f(k)$ 表示最大公约数为 k 的有序数对 (x, y) 的个数，求 $f(1)$ 到 $f(N)$ 的值。

这道题固然可以用欧拉函数或莫比乌斯反演的方法来做，但是都不如用容斥原理来的简单。

由容斥原理可以得知，先找到所有以 k 为 **公约数** 的数对，再从中剔除所有以 k 的倍数为 **公约数** 的数对，余下的数对就是以 k 为 **最大公约数** 的数对。即 $f(k) =$ 以 k 为 **公约数** 的数对个数 $-$ 以 k 的倍数为 **公约数** 的数对个数。

进一步可发现，以 k 的倍数为 **公约数** 的数对个数等于所有以 k 的倍数为 **最大公约数** 的数对个数之和。于是，可以写出如下表达式：

$$f(k) = \lfloor (N/k) \rfloor^2 - \sum_{i=2}^{i*k \le N} f(i*k)$$

由于当 $k > N/2$ 时，我们可以直接算出 $f(k) = \lfloor (N/k) \rfloor^2$，因此我们可以倒过来，从 $f(N)$ 算到 $f(1)$ 就可以了。于是，我们使用容斥原理完成了本题。

```
for (long long k = N; k >= 1; k--) {
  f[k] = (N / k) * (N / k);
  for (long long i = k + k; i <= N; i += k) f[k] -= f[i];
}
```

上述方法的时间复杂度为 $O(\sum_{i=1}^{N} N/i) = O(N \sum_{i=1}^{N} 1/i) = O(N \log N)$。

附赠三倍经验供大家练手。

- [Luogu P2398 GCD SUM](https://www.luogu.com.cn/problem/P2398)
- [Luogu P2158[SDOI2008] 仪仗队](https://www.luogu.com.cn/problem/P2158)
- [Luogu P1447[NOI2010] 能量采集](https://www.luogu.com.cn/problem/P1447)

容斥原理推导欧拉函数

考虑下面的问题：

???+ note "欧拉函数公式"
  求欧拉函数 $\varphi(n)$。其中 $\varphi(n) = |\{1 \le x \le n | \gcd(x, n) = 1\}|$。

直接计算是 $O(n \log n)$ 的，用线性筛是 $O(n)$ 的，杜教筛是 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 的（话说一道数论入门题用容斥做为什么还要扯到杜教筛上），接下来考虑用容斥推出欧拉函数的公式

判断两个数是否互质，首先分解质因数

$$n = \prod_{i=1}^{k} {p_i}^{c_i}$$

那么就要求对于任意 p_i，x 都不是 p_i 的倍数，即 $p_i \nmid x$. 把它当作属性，对应的集合为 S_i，因此有

$$\varphi(n) = \left|\bigcap_{i=1}^{k} S_i\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} \overline{S_i}\right|$$

全集大小 $|U| = n$，而 $\overline{S_i}$ 表示的是 $p_i \mid x$ 构成的集合，显然 $|\overline{S_i}| = \frac{n}{p_i}$，并由此推出

$$\left|\bigcap_{a_i < a_{i+1}} S_{a_i}\right| = \frac{n}{\prod p_{a_i}}$$

因此可得

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_n} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\
&= n\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)
\end{aligned}$$

这就是欧拉函数的数学表示啦

容斥原理一般化

容斥原理常用于集合的计数问题，而对于两个集合的函数 $f(S), g(S)$，若

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T)$$

那么就有

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T)$$

证明

接下来我们简单证明一下。我们从等式的右边开始推：

$$\begin{aligned}
&\sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T) \\
=& \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} \sum_{Q \subseteq T} g(Q) \\
=& \sum_{Q} g(Q) \sum_{Q \subseteq T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|}
\end{aligned}$$

我们发现后半部分的求和与 Q 无关，因此把后半部分的 Q 剔除：

$$= \sum_{Q} g(Q) \sum_{T \subseteq (S \setminus Q)} (-1)^{|S \setminus Q|-|T|}$$

记关于集合 P 的函数 $F(P) = \sum_{T \subseteq P} (-1)^{|P|-|T|}$，并化简这个函数：

$$
\begin{aligned}
F(P) &= \sum_{T\subseteq P}(-1)^{|P|-|T|}\\
&= \sum_{i=0}^{|P|}\binom{|P|}{i}(-1)^{|P|-i} = \sum_{i=0}^{|P|}\binom{|P|}{i}1^i(-1)^{|P|-i}\\
&= (1-1)^{|P|} = 0^{|P|}
\end{aligned}
$$

因此原来的式子的值是

$$\sum_Q g(Q)\sum_{T\subseteq(S\setminus Q)}(-1)^{|S\setminus Q|-|T|} = \sum_Q g(Q)F(S\setminus Q) = \sum_Q g(Q)\cdot 0^{|S\setminus Q|}$$

分析发现，仅当 $|S\setminus Q| = 0$ 时有 $0^0 = 1$，这时 $Q = S$，对答案的贡献就是 $g(S)$，其他时候 $0^{|S\setminus Q|} = 0$，则对答案无贡献。于是得到

$$\sum_Q g(Q)\cdot 0^{|S\setminus Q|} = g(S)$$

综上所述，得证。

推论

该形式还有这样一个推论。在全集 U 下，对于函数 $f(S), g(S)$，如果

$$f(S) = \sum_{S\subseteq T} g(T)$$

那么

$$g(S) = \sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T|-|S|}f(T)$$

这个推论其实就是补集形式，证法类似。

DAG 计数

???+ note "DAG 计数"
    对 n 个点带标号的有向无环图进行计数，对 10^9+7 取模。$n \le 5\times 10^3$。

直接 DP

考虑 DP，定义 $f[i,j]$ 表示 i 个点的 DAG，有 j 点个入度为 0 的图的个数。假设去掉这 j 个点后，有 k 个点入度为 0，那么在去掉前这 k 个点至少与这 j 个点中的某几个有连边，即 2^j-1 种情况；而这 j 个点除了与 k 个点连边，还可以与剩下的点任意连边，有 2^{i-j-k} 种情况。因此方程如下：

$$f[i,j] = \binom{i}{j}\sum_{k=1}^{i-j}(2^j-1)^k 2^{(i-j-k)j} f[i-j,k]$$

计算上式的复杂度是 $O(n^3)$ 的。

放宽限制

上述 DP 的定义是恰好 j 个点入度为 0, 太过于严格，可以放宽为至少 j 个点入度为 0。直接定义 $f[i]$ 表示 i 个点的 DAG 个数。可以直接容斥。考虑选出的 j 个点，这 j 个点可以和剩下的 $i-j$ 个点有任意的连边，即 $\left(2^{i-j}\right)^j = 2^{(i-j)j}$ 种情况：

$$
f[i]=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j-1}\binom{i}{j}2^{(i-j)j}f[i-j]
$$

计算上式的复杂度是 $O(n^2)$ 的。

Min-max 容斥

对于满足全序关系并且其中元素满足可加减性的序列 $\{x_i\}$，设其长度为 n，并设 $S=\{1,2,3,\cdots,n\}$，则有：

$$
\begin{aligned}
\max_{i\in S}x_i=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min_{j\in T}x_j\\
\min_{i\in S}x_i=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\max_{j\in T}x_j
\end{aligned}
$$

??? note "全序关系"
  对于集合 X，若 X 满足全序关系，则下列陈述对于任意 $a,b,c\in X$ 都成立：

```
-   反对称性：若 $a\le b$ 且 $b\le a$，则 $a=b$;
-   传递性：若 $a\le b$ 且 $b\le c$，则 $a\le c$;
-   完全性：$a\le b$ 或者 $b\le a$。
```

证明： 考虑做一个到一般容斥原理的映射。对于 $x\in S$，假设 x 是第 k 大的元素。那么我们定义一个映射 $f:x\mapsto\{1,2,\cdots,k\}$。显然这是一个双射。

那么容易发现，对于 $x,y\in S$，$f(\min(x,y))=f(x)\cap f(y)$，$f(\max(x,y))=f(x)\cup f(y)$。因此我们得到：

$$
\begin{aligned}
\left|f\left(\max_{i\in S}x_i\right)\right|&=\left|\bigcup_{i\in S}f(x_i)\right|\\
&=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\left|\bigcap_{j\in T}f(x_j)\right|\\
&=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\left|f\left(\min_{j\in T}x_j\right)\right|
\end{aligned}
$$

然后再把 $\left|f\left(\max_{i\in S}x_i\right)\right|$ 映射回 $\max_{i\in S}x_i$，而 $\min$ 是类似的。

证毕

但是你可能觉得这个式子非常蠢，最大值明明可以直接求。之所以 min-max 容斥这么重要，是因为它在期望上也是成立的，即：

$$
\begin{aligned}
E\left(\max_{i\in S}x_i\right)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E\left(\min_{j\in T}x_j\right)\\
E\left(\min_{i\in S}x_i\right)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E\left(\max_{j\in T}x_j\right)
\end{aligned}
$$

证明： 我们考虑计算期望的一种方法：

$$
E\left(\max_{i\in S}x_i\right)=\sum_{y}P(y=x)\max_{j\in S}y_j
$$

其中 y 是一个长度为 n 的序列。

我们对后面的 $\max$ 使用之前的式子：

$$\begin{aligned}E\left(\max_{i\in S} x_i\right) &= \sum_y P(y=x)\max_{j\in S} y_j\\&= \sum_y P(y=x)\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min_{j\in T} y_j\end{aligned}$$

调换求和顺序：

$$\begin{aligned}E\left(\max_{i\in S} x_i\right) &= \sum_y P(y=x)\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min_{j\in T} y_j\\&= \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\sum_y P(y=x)\min_{j\in T} y_j\\&= \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E\left(\min_{j\in T} y_j\right)\end{aligned}$$

$\min$ 是类似的。

证毕

还有更强的：

$$\mathop{\mathrm{kthmax}}_{i\in S} x_i = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\min_{j\in T} x_j$$

$$\mathop{\mathrm{kthmin}}_{i\in S} x_i = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\max_{j\in T} x_j$$

$$E\left(\mathop{\mathrm{kthmax}}_{i\in S} x_i\right) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}E\left(\min_{j\in T} x_j\right)$$

$$E\left(\mathop{\mathrm{kthmin}}_{i\in S} x_i\right) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}E\left(\max_{j\in T} x_j\right)$$

规定若 $n<m$，则 $\dbinom{n}{m}=0$。

证明： 不妨设 $\forall 1\le i<n, x_i\le x_{i+1}$。则有：

$$\begin{aligned}\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\min_{j\in T} x_j &= \sum_{i\in S} x_i\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\left[x_i=\min_{j\in T} x_j\right]\\&= \sum_{i\in S} x_i\sum_{j=k}^{n}\binom{n-i}{j-1}\binom{j-1}{k-1}(-1)^{j-k}\end{aligned}$$

又因为有组合恒等式：$\dbinom{a}{b}\dbinom{b}{c}=\dbinom{a}{c}\dbinom{a-c}{b-c}$，所以有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\min_{j\in T} x_j &= \sum_{i\in S}x_i\sum_{j=k}^{n}\binom{n-i}{j-1}\binom{j-1}{k-1}(-1)^{j-k}\\
&= \sum_{i\in S}x_i\sum_{j=k}^{n}\binom{n-i}{k-1}\binom{n-i-k+1}{j-k}(-1)^{j-k}\\
&= \sum_{i\in S}\binom{n-i}{k-1}x_i\sum_{j=k}^{n}\binom{n-i-k+1}{j-k}(-1)^{j-k}\\
&= \sum_{i\in S}\binom{n-i}{k-1}x_i\sum_{j=0}^{n-i-k+1}\binom{n-i-k+1}{j}(-1)^{j}
\end{aligned}
$$

当 $i=n-k+1$ 时：

$$
\binom{n-i}{k-1}\sum_{j=0}^{n-i-k+1}\binom{n-i-k+1}{j}(-1)^j=1
$$

否则：

$$
\binom{n-i}{k-1}\sum_{j=0}^{n-i-k+1}\binom{n-i-k+1}{j}(-1)^j=0
$$

所以：

$$
\sum_{i\in S}\binom{n-i}{k-1}x_i\sum_{j=0}^{n-i-k+1}\binom{n-i-k+1}{j}(-1)^j=\operatorname*{kthmax}_{i\in S} x_i
$$

剩下三个是类似的。

证毕

根据 min-max 容斥，我们还可以得到下面的式子：

$$
\operatorname*{lcm}_{i\in S} x_i=\prod_{T\subseteq S}\left(\gcd_{j\in T} x_j\right)^{(-1)^{|T|-1}}
$$

因为 $\operatorname{lcm},\gcd,a^1,a^{-1}$ 分别相当于 $\max,\min,+,-$，就是说相当于对于指数做了一个 min-max 容斥，自然就是对的了

PKUWC2018 随机游走

???+ note "PKUWC2018 随机游走"
  给定一棵 n 个点的树，你从 x 出发，每次等概率随机选择一条与所在点相邻的边走过去。

```
有 $Q$ 次询问。每次询问给出一个集合 $S$，求如果从 $x$ 出发一直随机游走，直到点集 $S$ 中的点都至少经过一次的话，期望游走几步。

特别地，点 $x$（即起点）视为一开始就被经过了一次。

对 $998244353$ 取模。

$1\le n\le 18,1\le Q\le 5000,1\le |S|\le n$。
```

期望游走的步数也就是游走的时间。那么设随机变量 x_i 表示第一次走到结点 i 的时间。那么我们要求的就是

$$E\left(\max_{i\in S} x_i\right)$$

使用 min-max 容斥可以得到

$$E\left(\max_{i\in S} x_i\right) = E\left(\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min_{i\in T} x_i\right) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E\left(\min_{i\in T} x_i\right)$$

对于一个集合 $T \in [n]$，考虑求出 $F(T) = E(\min_{i\in T} x_i)$。

考虑 $E(\min_{i\in T} x_i)$ 的含义，是第一次走到 T 中某一个点的期望时间。不妨设 $f(i)$ 表示从结点 i 出发，第一次走到 T 中某个结点的期望时间。

- 对于 $i \in T$，有 $f(i) = 0$。
- 对于 $i \notin T$，有 $f(i) = 1 + \frac{1}{\deg(i)}\sum_{(i,j)\in E} f(j)$。

如果直接高斯消元，复杂度 $O(n^3)$。那么我们对每个 T 都计算 $F(T)$ 的总复杂度就是 $O(2^n n^3)$，不能接受。我们使用树上消元的技巧。

不妨设根结点是 1，结点 u 的父亲是 p_u。对于叶子结点 i，$f(i)$ 只会和 i 的父亲有关（也可能 $f(i) = 0$，那样更好）。因此我们可以把 $f(i)$ 表示成 $f(i) = A_i + B_i f(p_i)$ 的形式，其中 A_i, B_i 可以快速计算。

对于非叶结点 i，考虑它的儿子序列 $j_1, \cdots, j_k$。由于 $f(j_e) = A_{j_e} + B_{j_e} f(i)$。因此可以得到

$$f(i) = 1 + \frac{1}{\deg(i)}\sum_{e=1}^{k}(A_{j_e} + B_{j_e} f(i)) + \frac{f(p_i)}{\deg(i)}$$

那么变换一下可以得到

$$f(i) = \frac{\deg(i) + \sum_{e=1}^{k} A_{j_e}}{\deg(i) - \sum_{e=1}^{k} B_{j_e}} + \frac{f(p_i)}{\deg(i) - \sum_{e=1}^{k} B_{j_e}}$$

于是我们把 $f(i)$ 也写成了 $A_i + B_i f(p_i)$ 的形式。这样可以一直倒推到根结点。而根结点没有父亲。也就是说

$$f(1) = \frac{\deg(1) + \sum_{e=1}^{k} A_{j_e}}{\deg(1) - \sum_{e=1}^{k} B_{j_e}}$$

解一下这个方程我们就得到了 $f(1)$，再从上往下推一次就得到了每个点的 $f(i)$。那么 $F(T) = f(x)$。时间复杂度 $O(n)$。

这样，我们可以对于每一个 T 计算出 $F(T)$，时间复杂度 $O(2^n n)$。

回到容斥的部分，我们知道 $E(\max_{i\in S} x_i) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}F(T)$。

不妨设 $F'(T) = (-1)^{|T|-1}F(T)$，那么进一步得到 $E(\max_{i\in S} x_i) = \sum_{T\subseteq S} F'(T)$。因此可以使用 FMT（也叫子集前缀和，或者 FWT 或变换）在 $O(2^n n)$ 的时间内对每个 S 计算出 $E(\max_{i\in S} x_i)$，这样就可以 $O(1)$ 回答询问了。

参考文献

王迪《容斥原理》，2013 年信息学奥林匹克中国国家队候选队员论文集

Cyhlnj《有标号的 DAG 计数系列问题》

Wikipedia - 全序关系