蛟龙五班

组合计数

Mas

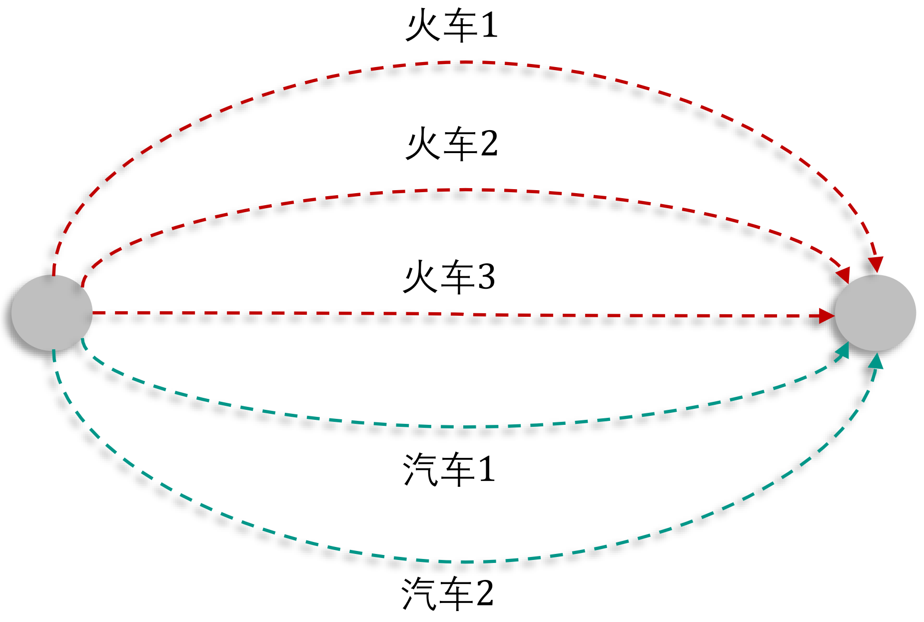
加法 & 乘法原理

完成一个工程可以有 n 类办法,$a_{i(1 \le i \le n)}$ 代表第 i 类方法的数目

完成这件事不同的方案数为

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

甲到乙可以坐火车或汽车,火车有3种班次可选,汽车有2种班次可选

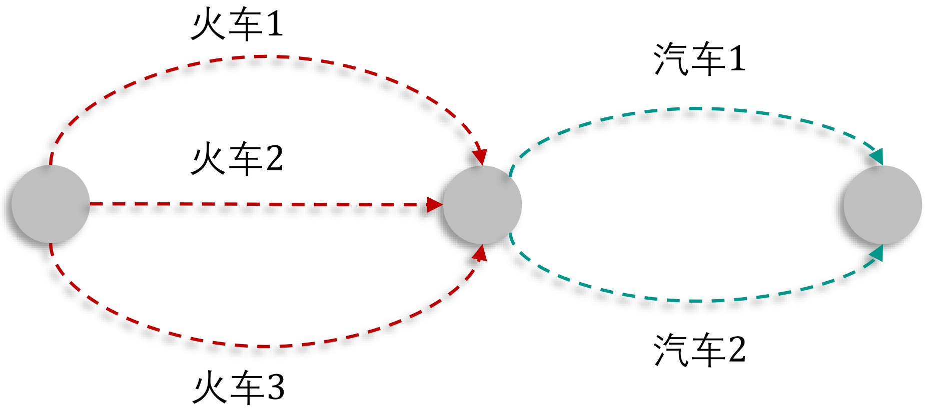


完成一个工程需要分 n 个步骤,$a_{i(1 \le i \le n)}$代表第 i 个步骤的不同方法数目

完成这件事不同的方案数为

$$S = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

甲到乙需要先坐火车再坐汽车,火车有3种班次可选,汽车有2种可选



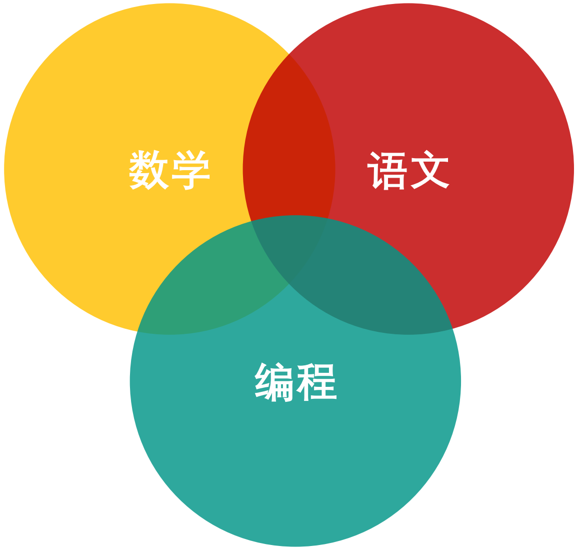
容斥原理

假设班里有 10 个学生喜欢数学,15 个学生喜欢语文,21 个学生喜欢编程,班里至少喜欢一门学科的有多少个学生呢?

把喜欢语文、数学、编程的学生集合分别用 A,B,C 表示,则学生总数等于 $|A\cup B\cup C|$

将三个集合的元素个数 $|A|,|B|,|C|$ 直接累加,有重复统计,需要减去 $|A\cap B|,|B\cap C|,|C\cap A|$,但又重复减去了$|A\cap B\cap C|$

即$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |C\cap A| + |A\cap B\cap C|$



容斥原理

设U中元素有 n 种不同的属性,而第 i 种属性称为 P_i,拥有属性 P_i 的元素构成集合 S_i,那么

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i}|S_i| - \sum_{i<j}|S_i \cap S_j| + \sum_{i<j<k}|S_i \cap S_j \cap s_k| - \cdots + (-1)^{m-1}\sum_{a_i<a_{i+1}}\left|\bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i}\right| + \cdots + (-1)^{n-1}|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|$$

即

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\sum_{a_i<a_{i+1}}\left|\bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i}\right|$$

#1941、好数对

题目描述

一对整数 (a,b) ,其中 a 、 b 是非负整数(可以为 0),如果计算 $a+b$ 的过程中任何一个数位都不需要进位,那么就称这个数对是**好的**

如 $a=11, b=12$ 时, $a+b=23$ 没有发生进位,这个数对就是**好的**
如 $a=13, b=77$ 时, $a+b=90$ 发生了进位,这个数对不是**好的**

现在给出一个正整数 n 请你输出有多少个**好的**数对

输入格式

第一行输入一个非负整数 n

输出格式

输出一个正整数表示**好的**数对的数量,答案可能很大输出 $\bmod 1000000007$ 的结果

输入样例

```
12
```

输出样例

```
6
```

样例解释

一共有 6 对 $(0,12),(1,11),(2,10),(10,2),(11,1),(12,0)$

该题不需要考虑各数位之间相互干扰

令cnt_i表示两数之和为i的方案数

对于n中的每一个数位x累乘cnt_x即可(乘法原理)

时间复杂度$O(|n|)$

数据范围

对于 10% 的数据, $1 \le N \le 100$
对于 30% 的数据, $1 \le N \le 10^4$
对于 100% 的数据, $1 \le N \le 10^{1000}$

#780、越狱

题目描述

监狱有连续编号为 1 到 n 的 n 个房间,每个房间关押一个犯人

有 m 种宗教,每个犯人可能信仰其中一种

如果相邻房间的犯人信仰的宗教相同,就可能发生越狱。求有多少种状态可能发生越狱

输入格式

输入两个整数 m 和 n

输出格式

可能越狱的状态数,对 100003 取余

样例输入

```
2 3
```

样例输出

```
6
```

样例说明

所有可能的 6 种状态为: $\{0,0,0\},\{0,0,1\},\{0,1,1\},\{1,0,0\},\{1,1,0\},\{1,1,1\}$

数据范围

对于全部数据, $1 \le m \le 10^8, 1 \le n \le 10^{12}$

一共有m^n中关押方案

不会发生越狱的方案数为 $m \times (m-1)^{n-1}$

答案为 $m^n - m \times (m-1)^{n-1}$

#2465、两个骑士

题目描述

国际象棋中,骑士能够以 3×2 的日字形进行攻击

如果在 $k \times k$ 的棋盘上放置两个骑士,使得这两个骑士不会相互攻击,有多少种放置方案

输入格式

输入一个正整数 n

输出格式

输出 n 行

第 i 行输出 $i \times i$ 的放置方案

输入样例

```
8
```

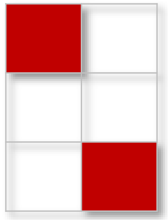
数据规模

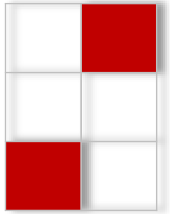
对于全部的数据 $1 \leq n \leq 100000$

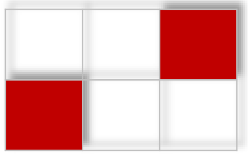
#2465、两个骑士

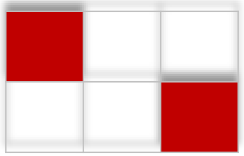
对于$k \times k$的棋盘第一个骑士有k^2种方案,若不考虑冲突第二个骑士有k^2-1种方案

两个骑士是一致的,那么不考虑时一共有$\frac{k^2\times(k^2-1)}{2}$种方案









两个骑士,会在2×3的矩形中产生冲突,且有两种冲突方式

在$k \times k$的棋盘中一共有$(k-1)\times(k-2)$个2×3的矩形,即冲突的方案数为$2\times(k-1)\times(k-2)$

两个骑士,会在3×2的矩形中产生冲突,且有两种冲突方式

在$k \times k$的棋盘中一共有$(k-2)\times(k-1)$个3×2的矩形,即冲突的方案数为$2\times(k-2)\times(k-1)$

所以合法的方案数为

$$\frac{k^2\times(k^2-1)}{2} - 4\times(k-1)\times(k-2)$$

排列数

从n个不同元素中,任取 $m(m \leq n,m,n \in \mathbb{N})$个元素按照**一定的顺序**排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列

从n个不同元素中取出$m(m \leq n)$个元素的所有排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用A_n^m(或 P_n^m)表示

排列数的计算公式

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

全排列：从 n 个不同元素中取出 n个元素的所有排列的个数

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1 = n!$$

全排列是排列数的一个特殊情况

组合数

从 n 个不同元素中,任取 $m(m \leq n)$个元素组成一个集合,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合

从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$个元素的所有组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号C_n^m表示

组合数计算公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

组合数也常用 $\binom{n}{m}$表示,读作$\boldsymbol{n}$**选**$\boldsymbol{m}$,即 $C_n^m = \binom{n}{m}$

组合数的递推式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

组合数也被称为 **二项式系数**

特别地,规定当 $m > n$ 时, $A_n^m = C_n^m = 0$,当 $m = 0$ 时,$A_n^0 = C_n^0 = 1$

组合数恒等式

组合数被称为**二项式系数**,因为二项式n次方展开的系数就是组合数

$$(x+y)^n = C_n^0 x^0 y^n + C_n^1 x^1 y^{n-1} + \cdots + C_n^n x^n y^0$$

根据前后的对称性发现

$$C_n^i = C_n^{n-i} (0 \le i \le n)$$

当固定 n 且 m 从 0 到 n 变化时,正好把 n 个元素取还是不取都给枚举了一遍

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$$

第一个等式取 $x=-1, y=1$,可以得到组合数的交错和,即

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 \ldots + (-1)^n C_n^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = 0$$

#2758、组合数

题目描述

给定 n 组询问，每组询问给定两个整数 a, b，请你输出 $C_a^b \bmod 1000000007$ 的值

输入格式

第一行包含整数 n

接下来 n 行，每行包含一组 a 和 b

输出格式

共 n 行，每行输出一个询问的解

输入样例

```
3
3 1
5 3
2 2
```

输出样例

```
3
10
1
```

数据范围

对于全部的数据 $1 \le n \le 10000, 1 \le b, a \le 10^5$

若采用$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$递推

时间复杂度$O(\max(a) \times \max(b) + \mathrm{T})$

直接使用公式

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

计算

预处理模意义下出 $1 \sim 10^5$的阶乘及其逆元

不相邻的排列

- **求$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的正整数解个数**

  有n 个球,在n 个球中插入$k-1$ 个挡板,将球分成k 组。第i组的大小对应于x_i,可以发现模型和问题等价,方案数为$\binom{n-1}{k-1}$

- **求$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的非负整数解个数**

  每一组先预付一个球,分组完后再删掉。有$n+k$ 个球,在这$n+k$ 个球中插入$k-1$ 个挡板,将球分成k 组。第i 组的大小对

  应于$x_i + 1$,可以发现模型和问题等价,方案数为$\binom{n+k-1}{k-1}$

- **给定非负整数$a_1, a_2, \cdots, a_k$,求$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的非负整数解个数,要求满足$x_1 \ge a_1, x_2 \ge a_2, \cdots, x_k \ge a_k$**

  给每组先减去a_i,当作没有限制的求非负整数解个数问题,最后每组加上对应的a_i,方案数为$\binom{n+k-1-\sum_{i=1}^{k} a_i}{k-1}$

- **求$1 \sim n$ 这 n 个自然数中选 k 个,这 k 个数中任何两个数都不相邻的组合个数**

  设选的数是$m_1, m_2, \cdots, m_k$。令$x_1 = m_1, x_2 = m_2 - m_1, \cdots, x_k = m_k - m_{k-1}, x_{k+1} = n - m_k$。

  于是问题变为求$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的非负整数解个数,要求$x_1 \ge 1, x_2, x_3, \cdots x_k \ge 2$且$x_{k+1} \ge 0$,方案数为 $\binom{n-k+1}{k}$

排列数、组合数

(2017 $NOIP$普及组初赛)甲、乙、丙三位同学选修课程,从4门课程中,甲选修2门,乙、丙各选修3门,则不同的选修方案共有( )种

$A.36$　　$B.48$　　$C.96$　　$D.192$

(2018 $NOIP$普及组初赛)设含有10 个元素的集合的全部子集数为 S,其中由 7 个元素组成的子集数为 T,则$\frac{T}{S}$的值为( )

$A.\frac{5}{32}$　　$B.\frac{15}{128}$　　$C.\frac{1}{8}$　　$D.\frac{21}{128}$

(2018 $NOIP$普及组初赛) 从 1 到 2018 这 2018 个数中,共有________个包含数字 8 的数

2019 $NOIP$普及组初赛) 一副纸牌除掉大小王有52张牌,四种花色,每种花色13张,假设从这52张牌中随机抽取13张纸牌,则至少()张牌的花色一致

$A.4$　　$B.2$　　$C.3$　　$D.5$

排列数、组合数

(2019 $NOIP$普及组初赛)把8个同样的球放在5个同样的袋子里,允许有的袋子空着不放,问共有( )种不同的分法?

提示：如果8个球都放在一个袋子里,无论是哪个袋子,都只算同一种分法

$A.22$　　$B.24$　　$C.18$　　$D.20$

(2020 $CSP-J$初赛) 5个小朋友并排站成一列,其中有两个小朋友是双胞胎,如果要求这两个双胞胎必须相邻,有( )种不同排列方法?

$A.48$　　$B.36$　　$C.24$　　$D.72$

(2020 $CSP-J$初赛) 10 个三好学生名额分配到 7 个班级,每个班级至少有一个名额,一共有( )种不同的分配方案

$A.84$　　$B.72$　　$C.56$　　$D.504$

(2020 $CSP-J$初赛)五副不同颜色的手套(共10只手套,每副左右手各1只),一次性取6只手套,恰好能配成两副手套的不同取法有( )种

$A.120$　　$B.180$　　$C.150$　　$D.30$

(2021 $CSP-J$初赛)6个人,两人一组,总共组成三队,不区分队伍的编号,不同的组队情况有( )种

$A.10$　　$B.15$　　$C.30$　　$D.20$

#2468、解方程

题目描述

给定 n 和 k，请求出方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的非负整数解个数。

答案对 998244353 取模。

输入格式

一行两个整数 n 和 k。

输出格式

一行表示答案。

输入样例

```
7 6
```

输出样例

```
792
```

数据范围

对于 30% 的数据，$1 \le n, k \le 20$。
对于 50% 的数据，$1 \le n, k \le 10^3$。
对于 100% 的数据，$1 \le n, k \le 10^6$。

答案为

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

直接使用公式计算即可,需要算出$(k-1)!^{-1}$和$n!^{-1}$

#2873、异或求和

题目描述

给你一个数组 A ,数组 A 有 n 个正整数

求这些数任取 3 个数异或运算后求和的值，取一共 C_n^3 个三元组,计算这些三元组内部异或之后的和

由于该值可能过大，输出其对 10^9+7 取模的值

输入格式

第一行一个正整数 n

接下来有 n 个正整数 a_i

输出描述

任取三个数、三元组内部位异或后求和对 1000000007 取模的值。

数据规模

对于 10% 的数据 $1\le n\le 100, 1\le A_i\le 100$
对于 40% 的数据 $1\le n\le 10^4, 1\le A_i\le 10^4$
对于 100% 的数据 $1\le n\le 2\times 10^5, 1\le A_i\le 10^{18}$

输入格式

```
4
3 4 5 6
```

输出格式

```
10
```

样例解释

共有 4 个三元组：$\{3,4,5\}$、$\{3,4,6\}$、$\{3,5,6\}$、$\{4,5,6\}$

$$3\bigoplus 4\bigoplus 5=2$$

$$3\bigoplus 4\bigoplus 6=1$$

$$3\bigoplus 5\bigoplus 6=0$$

$$4\bigoplus 5\bigoplus 6=7$$

相加为 10

#2873、异或求和

令$cnt0_i$表示二进制下从低位到高位第i个数位上0的个数, $cnt1_i$表示二进制下从低位到高位第i个数位上1的个数

考虑各个数位对总答案的贡献

根据异或的性质

- 若当前三个数位中3个数位都为1可对总答案产生2^i的贡献一共有$\binom{cnt1_i}{3}$种方案
- 若当前三个数位中1个数位为1,另外两个数位为0可对总答案产生2^i的贡献,一共有$\binom{cnt1_i}{1} \times \binom{cnt0_i}{2}$种方案

逐个数位考虑累加贡献

时间复杂度$O(nlogn)$

错位排列

n 封不同的信,编号分别是 $1 \sim n$,要把n封信放在编号 $1 \sim n$ 的信封中,要求信封的编号与信的编号不一样。求方案数?

令D_n表示长度为n的全错排方案数,设考虑到第n个信封,暂时把第 n 封信放在第n个信封中,考虑两种情况的递推:

- 前 $n-1$ 个信封全部装错

  因为前 $n-1$ 个已经全部装错了,所以第n封只需要与前面任一一个位置交换,有 $\mathrm{D}_{n-1} \times (n-1)$种情况

- 前 $n-1$ 个信封有一个没有装错其余全部装错

  若前 $n-1$ 个信封中有一个没装错,那么把没装错的与 n 交换,即可得到一个全错位排列。有 $D_{n-2} \times (n-1)$种情况

其他情况,无法通过一次操作来把它变成一个长度为 n 的全错排

错位排列的递推式为

$$D_n = \begin{cases} 0, & \mathrm{n} = 1 \\ 1, & n = 2 \\ (n-1) \times (D_{n-1} + D_{n-2}), & n > 2 \end{cases}$$

#1049、信封问题

题目描述

某人写了 n 封信有 n 个信封,如果所有的信都装错了信封

求所有信都装错信封共有多少种不同情况

输入格式

一个信封数 $n(1 \le n \le 20)$

输出格式

一个整数代表有多少种情况

输入样例1

```
2
```

输入样例2

```
3
```

输出样例1

```
1
```

输出样例2

```
2
```

#2125、集体婚礼

题目描述

国庆期间, S 市刚刚举行了一场盛大的集体婚礼,为了使婚礼进行的丰富一些,司仪临时想出了有一个有意思的节目,叫做**考新郎**,具体的操作是这样的:

- 首先,给每位新娘打扮得几乎一模一样,并盖上大大的红盖头随机坐成一排;
- 然后,让各位新郎寻找自己的新娘.每人只准找一个,并且不允许多人找一个.
- 最后,揭开盖头,如果找错了对象就要当众跪搓衣板...

看来做新郎也不是容易的事情...
假设一共有 N 对新婚夫妇,其中有 M 个新郎找错了新娘,求发生这种情况一共有多少种可能.

输入格式

输入数据的第一行是一个整数 T ,表示测试实例的个数，然后是 T 行数据，每行包含两个整数 N 和 $M(1 < M \le N \le 20)$ 。

输出格式

对于每个测试实例，请输出一共有多少种发生这种情况的可能，每个实例的输出占一行。

输入样例

```
2
2 2
3 2
```

输出样例

```
1
3
```

考虑从n个新娘中选出m个

令这m个新郎全部选错(错排)

答案为

$$\binom{n}{m} \times D_m$$

实验舱
青少年编程
走近科学 走进名校

谢谢观看