

8.3 CT01 题解

crazy_cloud

July 2023

1 桌椅分配

本题是送分题。

首先颜色数目 m 要小于等于桌子数目 n ，不然不可能每种颜色都至少出现一次。

然后每种颜色个数都不能小于 4，不然凑不了一桌。

最后 $\sum_{i=1}^m \lfloor a_i/4 \rfloor$ 求和，必须大于等于桌子数目，不然椅子数量不够。

时间复杂度 $O(m)$ 。

2 整数构造

本题是思维题。

前一轮中每个数如果都减去了 x ，后一轮的减法中，这个共同存在的 $-x$ 会被消掉。

所以最终剩下的数一定是原来集合中某两个数的差。

用 map 判断一下即可。

时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

3 小 W 的入侵计划

本题考察二分和树上贪心。

考虑二分答案，问题变成计算最少需要选多少个城市，能够在 mid 的距离内覆盖所有关键城市。

我们对树进行 DFS，从子树往上贪心，采用尽可能晚地放置关键城市的策略。

对于点 x ，我们处理完所有儿子节点之后，每个儿子节点都记录一个子树内最深的未被覆盖的重要城市，以及最浅的根据地。

首先我们判断所有儿子中最浅的根据地是否可以覆盖掉所有儿子中最深的重要城市。如果可以，那么当前就不存在未被覆盖的重要城市。如果不可以，我们还是希望尽可能晚地选择根据地，具体来说就是只有当 x 与最深重要城市距离已经达到了 mid 的时候（根节点除外，根节点必须放置），我们才选 x 当根据地。

时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

4 小聪的序列

本题考察优雅地暴力。

如何对每个 a_i ，快速寻找数值差最近的 a_j 。

考虑对数值范围开一个标记数组记录已有的数，每次我们从小到大枚举 x ，当发现 $a_i + x$ 或者 $a_i - x$ 被标记过，就退出。

这个看起来是一个 $O(n \times \max a_i)$ 的纯暴力，除了两边同时查找这个小优化以外没啥特别的。其实不然。

我们这样分析它的复杂度，开设一个计数的数组，范围依然是数值范围，初始全是 0。每次我们找到了 a_i 数值上最近的邻居 a_j ，我们就将计数数组从 a_i 到 a_j 这一段全部加上 1。

不难发现，最后时间复杂度就等于计数数组的和。

因为我们是两头同时查找，所以每次一个计数器被加了 1，就意味着它所在的极长的未被标记数值连续段长度要至少减半。因此每个计数器不可能超过 $O(\log \max a_i)$ 。

所以算法的复杂度是 $O(\max a_i \log \max a_i)$ 。