

CSP-J 2023 全国挑战赛 03

彭博

10.14.2023

吃土豆

题解

我们直接模拟吃土豆的过程，这样的话吃 S 次一定会结束，所以时间复杂度为 $\Theta(S)$ 。

XOR 就是 ADD

题解

对于 $n \leq 20$ 可以进行搜索，对于 $n \leq 1000$ ，可以使用二分图匹配或者贪心算法。

根据 $p_i + i = 2 \cdot (p_i \& i) + (p_i \oplus i)$ ，可以转化为 $p_i \& i = 0$ 。

考虑 $n-1$ 的最高位。假设为 k ，那么我们可以将所有满足 $x \geq 2^k$ 的 x 与 $y = 2^{k+1} - 1 - x$ 配对，即 $p_x = y, p_y = x$ 。

然后问题的规模就被缩小为 $n' = 2^{k+1} - n$ ，并且边界情况为 $n = 1$ 或 $n = 0$ ，都是平凡的。

时间复杂度为 $\Theta(n)$ 。

挑战数学题

题解

对于比较小的数据范围，可以使用搜索解决。

我们注意到可以看作在 k 进制下，每次可以从 n 的末尾添加一位，代价为 a ，或者删除一位，代价为 b 。那么我们一定是先删除若干位再添加若干位。我们可以建立一个大小为 m 个点的图，从 x 向 $(kx + b) \bmod m$ 连边，这样枚举删除多少位之后，假设当前剩下的数对 m 取模为 r ，就是要求从 r 到 0 的最短路，这样可以预处理出最短路就可以快速回答询问。

注意到我们如果对 n 进行 z 次添加操作，那么 n 的取值范围为 $[n, n + k^z - 1]$ ，那么进行 $\Theta(\log m)$ 次操作一定可以满足条件，所以我们枚举进行多少次删除操作之后，再枚举进行多少次添加操作，并且维护可能的区间，满足条件之后直接退出即可。时间复杂度为 $\Theta(\log_k n + \log_k m)$ 。

简单题

题解

对于 n 较小的数据范围，我们可以搜索。

我们设 $f_{i,j}$ 为考虑前 i 个数， $\text{mod } m = j$ 的方案数有多少，这样可以枚举是否选 i 进行转移。具体为 $f_{i-1,j} \rightarrow f_{i,j}$, $f_{i-1,j} \rightarrow f_{i,j \cdot a_i \bmod m}$ 。时间复杂度 $\Theta(nm)$ 。

设 $f_{i,j}$ 为考虑了前 i 个数，乘积为 s ，并且 $\text{gcd}(s, m) = j$ 的方案数。这样最后答案为 $f_{n,m}$ ，转移为 $f_{i-1,j} \rightarrow f_{i,j}$, $f_{i-1,j} \rightarrow f_{i, \text{gcd}(j \cdot a_i, m)}$ ，并且状态的数量只有 $\Theta(d(m))$ 个，其中 $d(m)$ 为 m 的约数个数，时间复杂度 $\Theta(nd(m))$ 。

谢谢!