第二版前言：

加入 2010 年试题。并将有把握的 2009 年的试题答案予以补充。2010 年答案由于不能确保正确性，故不予给出。

学习离散数学，正如冷城学长所言，入门容易，深入难。希望大家在学习的过程中，能够静下心来，耐住性子认真复习。对于一些特别复杂，刁钻的问题就不要深究了。掌握好基础概念、基本的证明是最关键的。

特别感谢冷城学长提供原始文档。希望大家能够南大 CS 金榜题名！

Zyszys3

2010 年 8 月 19 日

前言

本文收集了 1997、1998 年和 2001 年到 2007 年和 2009 年南京大学研究生入学考试科目《离散数学》的试卷以及相应试卷答案。2008 年试题未找到，1997 年到 2007 年试题给出本人所做的答案，因为离散数学难度大，很多答案问过原来教我们离散数学的老师，老师也只能给出部分答案，所以不能保证全部答案的正确性，2009 年试题答案未与同学核对，同样不能确保答案正确性，故不在此给出。部分答案有更优解，需要同学们自己开发。

南京大学从 2005 年开始把《离散数学》作为复试科目，满分为 80 分，与《编译原理》同为笔试项目，总分 150 分。主要考试部分为数理逻辑、集合论、代数结构和图论。推荐复习时候以南大课件为主，课件在网上可以查到，有宋方敏和陈道旭两种版本。通过真题发现，很多题目都是课件上证明题的原题，而且考试重点与课件也吻合。

离散数学特点就是难度大，上手容易深入难。代数系统和图论两章难度非常大，所以复习好离散数学要有一定的耐心和钻研精神。

相信天下无难事，只怕有心人。祝愿所有有志考南大 CS 的同学金榜提名。

冷城

2009 年 7 月

1996 年

一．试证：　a.自然数集为无限集中势最小者。

　　　　　b.不存在最大的势。

二．任给无向图 G，其联结矩阵为 $A=[a_{ij}]$，（即若存在边(vi,vj)则 $a_{ij}=1$ 否则 $a_{ij}=0$）试定义矩阵运算并给出关于 A 的矩阵的表达式，B=E(A)，使得矩阵 $B=[b_{ij}]$满足：对于 G 中的任意两结点 v_i,vj 若其间存在通路则 $b_{ij}=1$ 否则 $b_{ij}=0$。

三．任给无向图 G，　对 G 中的边赋予方向得图 G'，试证：存在 G 满足对任意两点 v1,v2∈G'，不论从哪点为始终端均有有向通路到达另一点的充分条件是原图 G 连通且不存在割边。

四．试分别用永真推理过程和假设推理过程证明：

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$$

五．试给出下式的析合范式和合析范式：

$$(p \to q) \to (p \to r)$$

六．试用谓词演算公式来描述一个代数系统(A,*)为一个群。

七．任给一个集合 S，S 到自身的一一对应的映射成为 S 上的置换，试证：S 上置换的全体关于置换的复合运算构成群。

1996 年答案

一．证明：

a. ∀无限集 A，将 A 中元素按照某种次序（任意规则）排序，以 0,1,2,……,n 来表示 A 中某元素排列的位置，所以存在自然数集 N 到集合 A 的单射，$\therefore \mathrm{N} \leq \mathrm{A}$。得证。

b. ∀无限集 A，∃元素$\alpha \notin \mathrm{A}$，设$\mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \{\alpha\}$，则 A 到 B 有单射关系"="，$\therefore \alpha \notin \mathrm{A}$，$\therefore \mathrm{A} \neq \mathrm{B}$。$\therefore \mathrm{A} < \mathrm{B}$，∴ ∃比 A 势更大的集合。因为对任一集合均有比其更大的势的集合。得证。

二．$B = E(A^n)$，其中 $A^n = \begin{cases} A & n = 1\text{ 时} \\ A^{n-1} \circ A & n > 1\text{ 时} \end{cases}$ 运算定义为：两矩阵相乘

E 为 A^n 运算收敛后若元素不为 0，则将其置为 1

三．证明：

1. 对于 G 中任一条边，先证其必在一个圈中：

设存在边 e，e 不在一个圈中，e 的两个断点记为 u，v。若去掉边 e，∵u, v 不在一个圈中，∴u，v 间无通路，即 $P(G - e) > P(G)$。∴e 为桥，与题设矛盾。得证。

2. 再证不存在桥的连通图 G 赋予边以方向后，G’为强连通图。

设不存在这样的圈，则存在对两个顶点 u, v 没有经过它们的圈。∴ G是连通的，∴u 到 v 有通路，设通路上的点为 u, v_1, v_2, ……, v_n，v 对于与 u, v 相关联边，必有圈，v_1, v_2 间必有圈，则可将两圈合并，得到必有 u 到 v_2 的圈，同理可得 u 到 v_3 的圈，以此类推可得到 u 到 v 的圈，与假设不成立。∴必存在将所有顶点连接的圈，将其以逆时针赋予方向后得经过每个点至少一次的回路，∴G 为强连通图。

得证。

四．证明：

永真推理：$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$

$\Leftrightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma)$

$\Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma)$

$\Leftrightarrow 1$

假设推理：

前提引入 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$

结论 $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$

结论否定引入 $\neg((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \wedge \neg((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$

$\Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma)$

$\Leftrightarrow 0$

五．$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee r)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)$

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \vee \neg p \vee r$

$\Leftrightarrow ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$

$\Leftrightarrow M_6$

$\Leftrightarrow \quad m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

六．群的定义：(1)、(A, *)是代数系统；(2)、*为二元运算；(3)、存在关于*的单位元；

(4)、$\forall a \in A$，$\exists a^{-1} \in A$。

P(x, y)：x 与 y 构成代数系统；　　H(x, y)：x∈y；

F(x)：x 是二元运算；　　I(x, y)：x 是 y 的逆；

R(x, y)：x 是关系 y 的单位元。

$P(A,*) \wedge F(*) \wedge \exists e\, R(e, *) \wedge \forall a\,(H(a, A) \rightarrow \exists b\,(I(b, a) \wedge H(b, A)))$

七．证明：

【置换群问题，答案略】

1997 年

一．R_1、R_2 分别是集合 S、T 上的关系，定义 S×T 上的关系 R_3：$<s_1,t_1>R_3<s_2,t_2>$当且仅当 $s_1R_1s_2$，$t_1R_2t_2$。

证明：　(1)若 R_1、R_2 为等价关系，则 R_3 为等价关系。

(2)若 R_1、R_2 为偏序，则 R_3 也是偏序。

二．证明：S 是无限集当且仅当存在 S 的真子集 S'：满足 S 与 S'等势。

三．图 $G=(V_G,E_G)$，R_1 是定点集 V_G 上的相邻关系，即对任意 $u,v\in V_G$，uR_1v 当且仅当 $u,v\in E_G$。R_2 是 V_G 上的可达关系，即 uR_2v 当且仅当在 G 中存在 vu-通路。

证明 R2 是 R1 的传递闭包。

四．(1)T 是树，e 是 T 中任意一条边，证明：T'=T-{e}是连通分支数为 2 的森林。

(2)图 $G=(V_G,E_G)$，$|V_G|=n$，$|E_G|=m$，G 连通且恰好含一个回路的充分必要条件是下列三项中的任意两项成立。

(i)G 连通，(ii)G 恰好含一个回路，(iii)m=n。

五．(1)若 G 是奇数阶有限群，证明对任意 $a\in G$，方程 $x^2=a$ 有解。

(2)若在有限群 G 中，对任意 a，$x^2=a$ 有唯一解，则|G|必为奇数。

六. Zm、Zn 分别是 m、n 阶剩余加群。定义代数系统(Zm×Zn,*)：对任意 $x1,x2\in Zm$，$y1,y2\in Zn$，(x1,y1)*(x2,y2)=(x1+mx2,y1+ny2)。

证明：若 m、n 互质，Zm×Zn 是循环群，生成元为(1,1)。

证明：（1）封闭性

（2）可结合性

（3）幺元　（0, 0）

（4）逆元　显然，对于任意（a,b）$\in Z_m\times Z_n$, 有（a^{-1}, b^{-1}）

综上所述，对于任意的 m、n，（$Z_m\times Z_n$, *）都是群。

显然，若 m 与 n 互质，　Zm×Zn 是循环群，生成元为(1,1)。

七．试讨论在一给定公理系统的公理系统集合中添加或删除元素，对系统的性质可能产生什么影响。（提示：在添加元素的情况下，要考虑所加公式在原系统中是否可证。）

八．给下列命题：

(1)参加展览的人中，每个 N 大学的男生都背 K 牌书包。

(2)参观展览的人中，每个背 K 牌书宝的都是来自 N 大学的男生。

(3)每个背 K 牌书包的 N 大学男生都参观了该展览。

写出相关的谓词逻辑表达式，证明：(1)(2)不能推出(3)。

1997 年答案

一．证明：

1. ① ∵ R_1 与 R_2 都是等价关系，∴ $\forall S1 \in S$ ∴ $\forall t1 \in T$，有 $S_1R_1S_1$ 与 $t_1R_1t_1$。∴ $\forall <S_1, t_1> \in S \times t$。有 $< S_1, t_1> R_3 < S_1, t_1>$，∴ R_3 满足自反性。

② 对于 $\forall$ $S_1R_1S_2$，必有 $S_2R_1S_1$，同样 $\forall$ $t_1R_2t_2$ 必有 $t_2R_2t_1$。

∴ $< S_1, t_1> R_3 < S_2, t_2> \Rightarrow S_1R_1S_2 \wedge t_1R_2t_2 \Rightarrow S_2R_1S_1 \wedge t_2R_2t_1 \Rightarrow < S_2, t_2> R_3 < S_1, t_1>$

∴ R_3 满足对称性。

③ $\forall < S_1, t_1> R_3 < S_2, t_2> \wedge < S_2, t_2> R_3 < S_3, t_3>$

$\Leftrightarrow (S_1R_1S_2 \wedge t_1R_2t_2) \wedge (S_2R_1S_3 \wedge t_2R_2t_3)$

$\Leftrightarrow (S_1R_1S_2 \wedge S_2R_1S_3) \wedge (t_1R_2t_2 \wedge t_2R_2t_3)$

$\Leftrightarrow S_1R_1S_3 \wedge t_1R_2t_2$

$\Leftrightarrow < S_1, t_1> R_3 < S_3, t_3>$

∴ R_3 满足传递性。

2. 自反性与传递性同 1。

证明反对称性： $\forall < S_1, t_1> R_3 < S_2, t_2> \wedge < S_1, t_1> \neq < S_2, t_2>$

$\Longrightarrow (S_1R_1S_2) \wedge (t_1R_2t_2) \wedge S_1 \neq S_2 \wedge t_1 \neq t_2$

$\Longrightarrow (S_2 \not{R}_1 S_1) \wedge (t_2 \not{R}_2 t_1) \wedge S_1 \neq S_2 \wedge t_1 \neq t_2$

$\Longrightarrow < S_2 , t_2> \not{R}_3 <S_1 , t_1 > \wedge <S_1, t_1> \neq <S_2, t_2>$

∴R_3 满足反对称性，∴R_3 也是偏序关系。

二．证明：

1. 充分性：S ≈ S，将 S 中去掉一个元素 x，并将 S→S 的映射从元素 x 开始指向原来的下一个元素。∵S 是无限集，S’也是无限集，∴S 到 S’仍然存在双射，∴ $\exists S \subset S \wedge S \approx S$ 。

2. 必要性：∴ $S \subset S \wedge S \approx S$ 若 S 不是无限集，则 S’中必比 S 中少元素，则不可能有 S’→S 的单射，这与$S \approx S$ 矛盾，∴S 必是无限集。

三．证明：

1. 对于任意$< u,v >,< v,r > \subset R'$，u 到 v 有通路，
v 到 r 有通路，则 u 到 r 必有通路，∴$< u,v > \in R$ ，∴ R 是传递的。

2. $\forall u, v \in Ea$，则 u 到 v 必有通路，∴$< u,v > \in R$ ，∴ $R \subseteq R$ 。

3. 对$\forall < u,v > \in R$ ，u 与 v 必是 n 条边关联的通路，即有$< u,n1 > \in R$、$< u,n2 > \in R$……$< ni,v > \in R$，∴对于包含 R 的传递关系 R’’，必有$< u,v > \in R$ ，∴ $R \subseteq R$ 。

四．证明：

1. ∵树中每条边都是桥，∴去掉一条边后连通分支数加 1，∴$T' = T - \{e\}$为连通分支数为 2 的森林。

2. (i)，(ii)成立，则结果显然成立。

(i)，(iii)成立，则对于 G 中的某一生成树，$n = m + 1$，∵$n = m$，∴对于这个生成树任加一条边，根据树的性质可得生成的图仅含一个回路，得证。

(ii)，(iii)成立，∵G 中恰含一条回路，则去掉回路一条边得 G 中无回路，此时 $n = m + 1$。对于 G 各个连通分量，均有 $v_i = e_i + 1$，∴$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_{n'} = e_1 + e_2 + \ldots + e_n + n' = e + n'$。∵ $n = m + 1$， ∴ $n' = 1$。 ∴G 中只有一个连通分量，即 G 是连通的。

五．1. 证明：

因为 G 的阶为奇数，

故无偶数因子，

所以任意一个元素 a 的阶也是奇数，不妨设为 2k+1。即有：

$a^{2k+1}=e$（幺元）

而且　$a^{j}\neq e$.

因此方程 $x^2=a$ 有解如下：

$x=a^{k+1}$

事实上

$(a^{k+1})^2=a^{2k+1}a=ea=a$

2. 证明：

$\forall x$，$x^2=a$ 有唯一解，有 $e\circ e=e$。

$\therefore a\in G$ 且 $a\neq e$，有 $a\circ a^{-1}=e$ 且 $a\neq a^{-1}$。

$\therefore a$ 与 a^{-1} 成对出现。

$\therefore$非 e 元素有偶数个，$\therefore$元素数为奇，即$|G|$必为奇数。

六． 证明：

1. ∵代数系统$<Z_m\times Z_n,*>$中$*$是二元运算关系，$\forall x_1,x_2,x_3\in Z_m$，$y_1,y_2,y_3\in Z_n$。

$<x_1,y_1>*<x_2,y_2>*<x_3,y_3>=<x_1+_m x_2+_m x_3,y_1+_m y_2+_m y_3>=<x_1,y_1>*(<x_2,y_2>*<x_3,y_3>)$

满足结合律。∵ $<x,y>*<0,0>=<x,y>$，　$<0,0>*<x,y>=<x,y>$，∴存在幺元$<0,0>$。

$\therefore$ $Z_m\times Z_n$ 是群。

2. 设$<x,y>=<1,1>^t$证明$<x+1,y>=<1,1>^{t1}$，$<x,y+1>=<1,1>^{t2}$(t,t^1,t^2 为整数)。

根据一次同余方程定理，∵ $\gcd(n,m)\mid 1$，∴ $\exists\alpha$使 $n\alpha\equiv m$ (α为整数)。

$\therefore\exists t_1=t+n\alpha$，∴ $<1,1>^{t+n\alpha}=<x+1,y>$。

同理可得$<1,1>^{t+m\alpha}=<x,y+1>$

$\therefore\forall<x,y>\in Z_m\times Z_n$ 均有$<x,y>=<1,1>^t$存在，即 $Z_m\times Z_n=<<1,1>>$，$<1,1>$是生成元。

七.【略】

八. 设　F(x)，x 参观了展览。　(1) $\forall x(F(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\to K(x))$

N(x)，x 来自 N 大学。　(2) $\forall x(F(x)\wedge K(x)\to N(x)\wedge M(x))$

M(x)，x 是男生。　(3) $\forall x(K(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\to F(x))$

K(x)，x 背 k 牌书包。

前提：$\forall x(F(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\to K(x))$；$\forall x(F(x)\wedge K(x)\to N(x)\wedge M(x))$

结论：$\forall x(K(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\to F(x))$

$\forall x(F(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\to K(x))$　　前提引入

$\forall x(\neg F(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee K(x))$　　①

$\forall x(F(x)\wedge K(x)\to N(x)\wedge M(x))$　　前提引入

$\forall x(\neg F(x)\vee\neg K(x)\vee(N(x)\wedge M(x)))$　　②

$\forall x(\neg F(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee K(x))\wedge\forall x(\neg F(x)\vee\neg K(x)\vee(N(x)\wedge M(x)))$①与②交

$\Rightarrow$ $\forall x(\left(\neg F(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee K(x)\right)\wedge\left(\neg F(x)\vee\neg K(x)\vee\left(N(x)\wedge M(x)\right)\right))$

$\Rightarrow$ $\forall x((\neg F(x)\vee K(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x))\wedge N(x)\wedge M(x)$

$\Rightarrow$ $\forall x(\neg F(x)\vee K(x))$

$\forall x(\neg F(x)\vee K(x))\to\forall x(K(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\to F(x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\neg(F(x)\vee K(x))\to(K(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\to F(x))$

$\Rightarrow$ $\forall x((F(x)\vee\neg K(x))\vee\neg K(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee F(x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\neg K(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee F(x))$不一定为真，

∴ 上述结论不一定成立。

1998 年

一．(1)在下列谓词演算公式中，哪些变元可以换名：

$(a)\exists xF(x) \equiv G(x)$　　　$(b)\forall z\exists y(A(z) \wedge B(y) \rightarrow C(x,y))$

(2)写出命题演算公式$(p \rightarrow q) \wedge ((q \wedge r) \rightarrow \neg(p \wedge r))$的析合、合析范式。

二．利用谓词演算描述下列推理的过程：

前提：(i)所有的狗都不吃鱼。(ii)没有一个猫不吃鱼。

结论：没有一只狗是猫。

三．设 N 是正整数集，定义关系 R⊆N×N 如下：对任意的 x,y∈N，xRy 当且仅当：存在 z∈N，使得 xz=y。(即 x|y).

(1)证明：R 是偏序。

(2)偏序集<N,R>是否有极小、极大、最小、最大元？

(3)描述偏序集<N,R>中一个链的一般形式。（偏序集<A,R>中的一个链是 A 的一个子集 B，满足$<B, R \cap B \times B>$是偏序集。）

(4)描述偏序集<N,R>中一个反链的一般形式。（偏序集<A,R>中的一个反链是 A 的一个子集 B，满足对 B 中任意元素 x,y，若 x≠y，则 xRy 和 yRx 均部成立。）

四．人给一个有限的正整数序列，序列中元素各不相等。

(1)证明：以不同元素结尾的最大递增或最大递减子序列长度不会相等。（例如，在序列（2，15，8，7，6，4，21）中，以 6 结尾的最大递增子序列是（2，6），最大递减子序列是（15，8，7，6）。而以 4 结尾的最大递增子序列是（2，4），最大递减子序列是（15，8，7，6，4）。）

(2)利用鸽巢原理证明：在由 n2+1 个不同的正整数构成的序列中，至少有一个递增或递减子序列的长度大于 n。

五．若干足球队参加比赛，每队之间赛一场，没有平局，而且对任意三个队 A、B 和 C，若 A 胜 B 且 B 胜 C，则必有 C 胜 A。试建立一个描述此问题的图模型，并讨论满足上述条件的参赛队伍的个数是否有上限，若有是多少？

六．简单连通图 G 恰好含 2K（K 是不小于 1 的整数）个奇次顶点。证明：G 可以分为 K 各边互不相交的简单通路。

七．代数系统$(S = \{a, b, c, d\}, +, \times)$中的运算均满足交换率，证明：结合 S 上所有保持$(a \times b) + (c \times d)$的值不变的一一对应的映射（置换）构成对称群 S4（即 S 上所有置换的集合与映射符合运算所构成的群）的子群。

八．代数系统 S，满足以下 4 条公理：

(i)封闭性；　　　(ii)对任意的 a,b∈S,a(bc)=(ba)c；

(iii)有单位元；　　　(iv)每个元素都有逆元素。

证明：S 是可交换群。

1998 年答案

一．1. a. G(x)中 x 不在∃x辖域内，可换名。b. G(x, y)中 x，y 不在∀z∃y辖域内，可换元。

2. $(p \to q) \land ((q \land r) \to \neg(p \land r))$

$\Rightarrow (p \to q) \land (\neg q \lor \neg r \lor \neg(p \land r))$

$\Rightarrow (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor \neg r \lor \neg p)$

$\Rightarrow (\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r \land (\neg q \lor \neg r \lor \neg p))$

$\Rightarrow M_4 \land M_5 \land M_7$

$\Rightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3 \lor m_6$

二．F(x)：x 是狗；

G(x)：x 是猫；

R(x)：x 吃鱼。

前提：$\forall x(F(x) \to \neg R(x))$，$\neg\exists x(G(x) \land \neg R(x))$

结论：$\neg\exists x(F(x) \land G(x))$

(1) $\forall x(F(x) \to \neg R(x))$ 前提引入

(2) $\forall x(\neg F(x) \lor \neg R(x))$

(3) $\neg\exists x(G(x) \land \neg R(x))$ 前提引入

(4) $\forall x(\neg G(x) \lor R(x))$

(5) $\forall x(\neg F(x) \lor \neg R(x)) \lor \forall x(\neg G(x) \lor R(x))$ (2)(4)合并

(6) $\forall x((\neg F(x) \lor \neg R(x)) \lor (\neg G(x) \lor R(x)))$

(7) $\forall x(\neg F(x) \lor \neg G(x))$

(8) $\forall x \neg(F(x) \land G(x))$

(9) $\neg\exists x(F(x) \land G(x))$ 得证

三．1. 证明：自反性：$\forall x \in N$，有 x|x 成立，所以 xRx，$\therefore <x, x> \in R$。$\therefore$ R满足自反律。

反对称性：$\forall x, y \in N$且$x \neq y$有 x|y 成立，则 y|x 必不成立，

即$<x, y> \in R \Rightarrow <y, x> \notin R$。$\therefore R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。$\therefore$ R满足反对称性。

传递性：$\forall <x, y> \in R \land <x, y> \in R$，则 x|y，y|z，则 x|z，即$<x, z> \in R$，

$\therefore$R 满足传递性。

2. 有极小元与最小元 1，无极大元和最大元。

3. < B, R >，B 是集合$\{2^k \mid k \geq 0\}$。

4. < B, R >，B 是素数。

四．【答案略】

五．【颜色填充问题，答案略】

六．对 k 用数学归纳法证明

1. k = 1，图 G 是一个只含俩个节点 u 和 v 的连通图，所以图 G 存在一条欧拉通路，$E(P_1)$，且 $E(G) = E(P_1) = (u, v)$。

2. 归纳假设，$k \leq i$ (i≥1)时结论成立，即 G 中存在各边不重复的 i 条简单路 P_1，P_2，…，P_i，使得 $E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_i)$

3. k = i + 1 时，任选两个奇节点，不妨设为 v_1 和 u_1。

因为图 G 是连通的，所以为 v_1 和 u_1 间必存在一条简单路径（边部重复的路径）P，不妨设为为 $v_1 v_2 \dots v_p u_1$。从 G 中删去路径 P，节点 v_2 ，…，v_p 奇数的奇偶性不变，而 v_1 和 u_1 变为偶度数结点。

设图 G 删去路径 P 后变为 G'，如果 G'中某节点 v'的度数为 0，则再删去 v'，显然 G'的奇

度数结点变为 2i 个。

在 G’的任意连通分支中，对于只含有偶度数结点的连通分支 O_n，O_n 是欧拉图，所以 O_n 存在欧拉回路。

因为图 G 是连通的，所以 O_n 中必存在一个节点 v_0 在 v_1 和 u_1 间的简单路径 P 上。

把这个欧拉回路 v_0 加入路径 P 得 P’。同理，可以采用这种方法消除致函偶度数结点的连通分支。

对于含有奇度数结点的连通分支 W_m，根据握手定理，则一定包含偶数个奇度数结点。

不妨设连通分支 W_m 中含有 2x (m = 2x)个奇度数结点，并且 $x_m \le i$，在根据归纳假设（2），W_m 中存在各边不重复的 x(m)条简单路 P_1，P_2，…，$P_{x(m)}$，使得

$$E(W_m) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \ldots \cup E(P_{x(m)})$$

综上所述，G 中存在各边不重复的 k 条简单路 P_1，P_2，…，P_k，使得

$$E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \ldots \cup E(P_k)$$

七.【置换群、对称群问题，答案略】

八. 证明：

由(i)(ii)(iii)可推出 S 是群，只需证明交换群。

$\forall a, b, c \in S$， $a(bc) = (ab)c$。

$\because$ $a(bc) = (ba)c$

$\therefore$ $(ab)c = (ba)c$

$\because$群满足消去律，

$\therefore$ $\forall a, b \in S$，有 $ab = ba$，

$\therefore$ S 为 Abel 群。

2001 年

一．设(H,*)是群(G,*)的子群，对于 $a\in G$，令 $HaH=\{h*a*j|h,j\in H\}$

证明：$(\forall a,b\in G)(HaH\cap HbH=\emptyset\vee HaH=HbH)$

二．设 P、Q 为一元谓词，在一阶谓词演算中证明

a) $\vdash\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))$成立

b) $\vdash(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))$不成立

三．问题：考试日程安排问题。

每个学生选若干课。要求安排能保证每个学生不会有两门或两门以上所选课程考试时间重叠。假设每门课的考试时间一样长，以一门考试为单位时间段。求所需的最短时间段数。

2001 年答案

一．证明：

$\forall a, b\ \in G$，若 a = b，对于$\forall h_{ij} \in H$在代数系统内有$h * a * j \in HaH$。

$\because a = b$

$\therefore h * a * j = h * b * j \in HbH$

$\therefore HaH \subseteq HbH$

同理可证$HbH \subseteq HaH$

$\therefore HaH = HbH$

若$a \neq b$，对于$\forall h, j \in H$，若 h*a*j = h*b*j，则更具消去率 a = b 与题设矛盾。

$\therefore h * a * j\ \neq\ h * b * j;$，$\therefore h * a * j\ \in HaH\ \Rightarrow h * a * j \notin HbH$，

同理$\forall h * b * j \in HbH \Rightarrow h * b * j \notin HaH$，

$\therefore HaH \cap HbH = \phi$

$\therefore (\forall a, b \in G)(HaH \cap HbH = \phi \vee HaH = HbH)$

二．证明：

a) $\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x))$

$\Rightarrow\quad \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)\,) \rightarrow (\,\neg \forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$

$\Rightarrow\quad \neg\, \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)\,) \vee \neg \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)\,) \vee \exists x \neg P(x) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x((P(x) \wedge \neg Q(x)\,) \vee \neg P(x)) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x((P(x) \vee \neg P(x)\,) \wedge (\,\neg Q(x) \vee \neg P(x))) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x((P(x) \vee \neg P(x)\,) \wedge (\,\neg Q(x) \vee \neg P(x))) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x(\neg Q(x) \vee \neg P(x)) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x \neg Q(x) \vee \exists x \neg P(x) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \neg \forall xQ(x) \vee \neg \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad 1$ $\qquad\qquad$ ∴原命题成立

b） $\big(\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)\big) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ $\qquad$ //从一开始使用归谬法更简单

$\Rightarrow\quad (\,\neg \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)\,) \rightarrow \forall x(\,\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad (\forall xP(x) \wedge \neg \forall xQ(x)\,) \vee \forall x(\,\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad (\forall xP(x) \vee \forall x(\,\neg P(x) \vee Q(x))) \wedge \neg \forall xQ(x) \vee \forall x(\,\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad (\forall xP(x) \vee \neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg \forall xQ(x) \vee \forall x(\,\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad \neg \forall xQ(x) \vee \forall x(\,\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

使用归谬法

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \wedge \neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \wedge \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \wedge \exists x \neg Q(x) \wedge \exists xP(x)$

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \wedge \neg \forall xQ(x) \wedge \exists xP(x)$

$\Rightarrow\quad \exists xP(x)$

$\nRightarrow\quad 0$ $\qquad\qquad$ ∴原命题未必成立

三．【颜色填充问题，答案略】

2002 年

一．H 为无限循环群，G 为任意阶循环群，证明存在从 H 到 G 的满同态。

二．设α, β, γ为命题演算中任意命题，$\neg$和 $\supset$分别表示否定和蕴含联结词，仅仅用一下公理 A1，A2，A3 和规律 R1，R2，R3 证明$(\neg\neg\alpha) \supset \alpha$。

公理： $A1: \alpha \supset (\beta \supset \alpha)$ $A2: \big(\alpha \supset (\alpha \supset \beta)\big) \supset (\alpha \supset \beta)$ $A3: (\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset (\beta \supset \alpha)$

规则： $R1: \alpha \supset \beta$，$\alpha \vdash \beta$ $R2: \alpha \supset \beta \vdash (\gamma \supset \alpha) \supset (\gamma \supset \beta)$ $R3: \alpha \supset \beta$，$\beta \supset \gamma \vdash \alpha \supset \gamma$

三．设 G 为无向简单图，e 为 G 的边数，v 为 G 的点数，证明：若$e \geq (v^2 - 3v + 6)/2$，则 G 含有 Hamilton 回路。

2002 年答案

一．证明：

1. 若 G 为无限群，则$(G *) \cong (Z+)$，而$(H *) \cong (Z+)$，$\therefore (G *) \cong (H *) \cong (Z+)$，$\therefore \exists H \to G$的漫射。

2. 若 G 为有限群，|a| = n，则$(G *) \cong (Z_n \oplus_n)$，而$(H *)$存在到$(Z_n \oplus_n)$的满射，$\therefore \exists H \to G$的满射。

得证。

二．证明：

①	$\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$	公理 A1
②	$(\neg\neg\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)$	公理 A3
③	$(\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$	公理 A3
④	$(\neg\neg\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$	规则 R3
⑤	$\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$	规则 R3
⑥	$(\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$	公理 A2
⑦	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	规则 R1（⑤成立）

三．证明：

$\because\ e \le \frac{v(v-1)}{2}$

$\therefore\ \frac{v(v-1)}{2} \ge e \ge \frac{v^2-3v+6}{2}$

$\therefore\ v^2 - 3v + 6 \le 2e \le v^2 - v$

$\therefore\ v \ge 3$

2e 即为 G 的每个顶点度数之和，设为 d

$\therefore\ v^2 - 3v + 6 \le d \le v^2 - v$

任取两个不相邻的顶点 v_1，v_2 度数为 d_1，d_2

$\therefore d = d_{v-2} + d_1 + d_2$

对于剩下 v – 2 个顶点，其内部（即不与 v_1，v_2 相关联边上的度）度数最大为

$(v-2)(v-3) = v^2 - 5v + 6$，而与 v_1，v_2 相关联边上的度$d \le d_1 + d_2$

$\therefore d \le v^2 - 5v + 6 + 2(d_1 + d_2)$

$\therefore\ v^2 - 3v + 6 \le v^2 - 5v + 6 + 2(d_1 + d_2)$

$\therefore\ 2v \le 2(d_1 + d_2)$

$\therefore\ v \le d_1 + d_2$

根据定理 G 为阶 n 大于 3 的无向图人两个不相邻顶点均有$d_1 + d_2 \ge n$，则 G 中存在哈密尔顿图。

得证。

2003 年

一．证明 $\cup\ A\cup B = \cup A\ \cup(\cup B)$。

二．设 N 为全体自然数的集合，证明：若 $S\subseteq N\times N$ 且对于 S 的任何两个元素(x1,y1)和(x2,y2)既无 $x1\le x2\wedge y1\le y2$ 又无 $(x2\le x1\wedge y2\le y1)$,则 S 有穷.

三．设 G 为简单连通图，证明：G 为一条非回路的基本通路 G 中有两点的度为 1 且其余点的度为 2.

四．设<G,*>为偶数阶有限群，<H,*>为<G,*>的子群，且 $H=\frac{1}{2}G$，证明<H,*>是<G,*>的正规子群，这里 H 为 G 的正规子群是指$(a\in G)(aH=Ha)$。

五．在命题演算中证明

$$\vdash(\alpha\to\beta)\to(\gamma\to\neg\beta)\to((\gamma\vee\tau)\to((\tau\to\neg\beta)\to\neg\alpha))$$（本题有误）

2003 年答案

一．证明：

$\forall$集合 a 且$a \in A \cup B$，则$a \in A$ 或 $a \in B$

$\forall x \quad x \in \cup A \cup B$，则必有一个集合$a \in A \cup B$使得$x \in a$

若$a \in A \qquad$ 则$x \in \cup A$

若$a \in B \qquad$ 则$x \in \cup B$

$\therefore \ x \in \cup A \cup (\cup B)$

$\therefore \ \cup A \cup B \subseteq \cup A \cup (\cup B)$

$\forall x \in \cup A \cup (\cup B)$，必存在某集合$a \in A$ 或 $a \in B$，使得$x \in a$

$\therefore \ x \in a \subseteq A \cup B$

$\therefore \ x \in \cup(A \cup B)$

$\therefore$ 有$\cup A \cup (\cup B) \subseteq \cup(A \cup B)$

$\therefore \cup A \cup (\cup B) = \cup A \cup (\cup B)$

二．证明：

设$\exists$元素$< x, y > \in S$，若 S 中存在$< x_i, y_i >$且$x_i = x$，若$y_i \geq y$，则有$x_i \geq x, y_i \geq y$，若$y_i \leq y$亦然，$\therefore x_i \neq x$

则对于 S 中其他元素可分为两类， ① $< x_i, y_i >$且$x_i > x$，则$y_i < y$

① $< x_i, y_i >$且$x_j < x$

$\because \ x_i, x, x_j \in N$，$y_i, y, y_j \in N$

$\therefore \ y_i \geq 0, x_j \geq 0$ （可证$y_i = 0, x_j = 0$不成立）

$\therefore$ 对于①，有$0 < y_i < y$，则①为有穷集合；

对于②，有$0 < x_j < x$，则②为有穷集合。

$\therefore$ S 为①$\cup$②$\cup\{< x, y >\}$ $\therefore$ S 为有穷。

三．证明：

设开始节点度数为 d_1，有 n 个节点，最后一个节点度数为 d_n。

$\because$ G 是一个初级通路，$\therefore$ 边数 $e = n - 1$；

$\therefore \ d_1 + d_2 + \ldots + d_i + \ldots + d_n = 2(n - 1) = 2n - 2 \qquad (*)$

对于 G 中各节点，$d_1 \geq 1$，$d_n \geq 1$，$d_i \geq 2$

则 $d_1 + d_2 + \ldots + d_i + \ldots + d_n \geq 1 + 2 \times (n - 2) + 1 = 2n - 2$

$\therefore$ 若$d_i > 1$ 或$d_n > 1$则 $d_1 + d_2 + \ldots + d_i + \ldots + d_n > 1 + 2 \times (n - 2) + 1 = 2n - 2$与$(*)$矛盾

$\therefore \ d_1 = d_n = 1$

若$d_i > 2$ 则 $d_1 + d_2 + \ldots + d_i + \ldots + d_n > 1 + 2 \times (n - 3) + 2 + 1 = 2n - 2$与$(*)$矛盾

$\therefore \ d_i = 2$

$\therefore$ G 中有两点度数为 1，其余点度数为 2。

四．证明：

$\because |H| = \frac{1}{2}|G| \qquad |G| = |H| \cdot [G:H]$

$\therefore [G:H] = 2$

$\forall g \in G$，设$g \in G - N$

$\because gN \neq N$，$Ng \neq N$

$\therefore$ G的两个右陪集为 N 与 Ng，两个左陪集为 N，gN

$\because$ $N \cup gN = \phi$，$N \cap gN = \phi$

$\therefore$ $gN = Ng$

五．$(\alpha \to \beta) \to \left(\gamma \to \neg\beta\right) \to ((\gamma \vee \zeta) \to ((\zeta \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$

$\Rightarrow\quad \neg\left(\neg\alpha \vee \beta\right) \vee \neg\gamma \vee \neg\beta \to (\neg(\gamma \vee \zeta) \vee \neg(\neg\zeta \vee \neg\beta) \vee \neg\alpha)$

$\Rightarrow\quad (\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\beta \vee \neg\gamma \to (\neg(\gamma \vee \zeta) \vee (\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha)$

$\Rightarrow\quad \neg\gamma \to (\neg\gamma \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha$

$\Rightarrow\quad \gamma \vee (\neg\gamma \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha$

$\Rightarrow\quad \gamma \vee \neg\zeta \vee (\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha$

$\Rightarrow\quad \gamma \vee (\neg\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha$

$\nRightarrow\quad 1$ 当$\alpha = 1$，$\beta = 0$，$\gamma = 0$，$\zeta = 1$

故原题有误。

2004 年

一．设 S 是实数集，定义 S×S 上的关系 R 如下：对任意的<s,t>,<s,t>∈S×S，<s,t>R<u,v>当且仅当 $((st=uv=0)\vee(st\neq 0\wedge uv\neq 0\wedge su>0\wedge tv>0))$

(1)证明：R 是等价关系。

(2)描述 S×S 关于 R 的商集。

(3)假如将上述定义式改为

$((s=u=0)\vee(t=v=0)\vee(st\neq 0\wedge uv\neq 0\wedge su>0\wedge tv>0))$，R 是否仍然是等价关系，为什么？

二．设(G,°)是可交换群，定义映射$\phi: G\rightarrow G$，对任意$x\in G, \phi(x)=x\circ x$

(1)证明$\phi: G\rightarrow G$是同态映射。

(2)在什么条件下，$\phi: G\rightarrow G$有可能是同构映射，举例说明。

三．给定简单无向图 $G=(V_G,E_G)$，其顶点数$|V_G|\geq 11$。证明：G 与 G^C（即 G 的补图）二者中至少有一个是非平面图。

四. 假设$(X, <)$是全序关系，证明：一定可以在 X 上定义两个相应的运算∧和∨，使得$(X, \wedge, \vee)$构成格，且这个格导出的偏序关系就是<。

五．利用命题演算判断下列推理正确与否，如果正确，给出推理过程，反之给出反例。

前提：如果所有成员事先得到通知，且到场者达到法定人数，会议就能够举行，如果至少有 15 人到场就算是达到法定人数了，并且如果邮局没有罢工通知就会提前送到。

结论：假如会议被取消了，不是到场的人不到 15 人，就是邮局罢工了。

2004 年答案

一.

1. 证明：

自反性： 设$\forall < s,t > \in S\times S$，满足$(\mathrm{st}=\mathrm{st}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{ss}>0\wedge tt>0)$

$\therefore < s,t > R < t,s >$ $\therefore$ R 具有自反性

对称性： 设$\forall < s,t >, < u,v > \in S\times S$

$\forall < s,t > R < u,v >$

$\Rightarrow \quad ((\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0))$

$\Rightarrow \quad ((\mathrm{uv}=\mathrm{st}=0)\vee(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{us}>0\wedge vt>0))$

$\Rightarrow \ < u,v > R < s,t >$ $\therefore$ R 具有对称性

传递性：设$\forall < s,t >, < u,v >, < m,n > \in S\times S$

$\forall < s,t > R < u,v > \wedge < u,v > R < m,n >$

$\Rightarrow \quad \big((\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0)\big)$

$\wedge \big((\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0)\big)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0)\wedge((\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0))\vee \\ ((\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0)\wedge((\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0))\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} ((\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0\wedge \mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\underbrace{\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0}_{=0}))\vee \\ ((\underbrace{\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0)\wedge(\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0}_{=0}))\vee \\ ((\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0)\wedge(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0))\end{matrix}$$

$\Rightarrow \quad (\mathrm{st}=\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0)$

$\because \mathrm{su}>0, um>0 \therefore s\mathrm{v}^2\mathrm{m}>0 \ \therefore sm>0 \quad \because tu>0, un>0 \therefore t\mathrm{u}^2\mathrm{n}>0 \therefore tn>0$

$\Rightarrow \quad (\mathrm{st}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{sm}>0\wedge tn>0)$

$\Rightarrow \ < s,t > R < m,n >$ $\therefore$ R 具有传递性

$\therefore$ R 是等价关系

2. $\mathrm{S}\times\mathrm{S}/\mathrm{R}=\{< u,v > |\forall < s,t > \in S\times S \wedge < s,t > R < u,v >\}$

用右图坐标系表示分为第一象限，第二象限，第三象限和第四象限

$\mathrm{S}\times\mathrm{S}/\mathrm{R}=\{\{< x,y > |\mathrm{x}=0\vee \mathrm{y}=0\},\{< x,y > |\mathrm{x}>0\wedge y>0\},\{< x,y > |\mathrm{x}<0\wedge y<0\},$

$\{< x,y > |\mathrm{x}>0\wedge y<0\},\{\mathrm{x},\mathrm{y}|\mathrm{x}<0\wedge y>0\}\}$

3. 不是等价关系，因为 R 不满足传递性。

反例：$\forall \mathrm{a}\in \mathrm{S}$且$\mathrm{a}\neq 0$ $\forall \mathrm{b}\in \mathrm{S}$，且$\mathrm{b}\neq 0$，由上述定义式可知$< 0, \mathrm{a} > \mathrm{R} < 0, 0 >$且$< 0, 0 > \mathrm{R} < \mathrm{b}, 0 >$，但$< 0, \mathrm{a} >$与$< \mathrm{b}, 0 >$不满足 R 的关系，即：

$< 0,a > R < 0,0 > \wedge < 0,0 > R < b,0 > \wedge(\mathrm{a}\in \mathrm{S},\mathrm{a}\neq 0)\wedge(\mathrm{b}\in \mathrm{S},\mathrm{b}\neq 0) \nRightarrow < 0,a > R < b,0 >$

$\therefore$ R 不具有传递性，R 如此定义则不是等价关系。

二．1. 证明：$\forall \mathrm{x},\mathrm{y}\in \mathrm{G}$， $\because (\mathrm{G}\ \circ)$是 Abel 群，满足交换律。

$\varphi(\mathrm{x}\circ \mathrm{y})=(\mathrm{x}\circ \mathrm{y})\circ(\mathrm{x}\circ \mathrm{y})=\mathrm{x}\circ \mathrm{y}\circ \mathrm{x}\circ \mathrm{y}=\mathrm{x}\circ \mathrm{x}\circ(\mathrm{y}\circ \mathrm{y})=\varphi(\mathrm{x})\circ\varphi(\mathrm{y})$

$\therefore \varphi: \mathrm{G}\rightarrow \mathrm{G}$是同态映射。

2. φ是双射关系时是同构映射，如$\mathrm{x}\circ \mathrm{x}=\mathrm{x}$即 G 满足幂等率。

三．设$|V_G|$=n，设 G 与 G^C 均为平面图，则根据欧拉公式推广，有 G 的边$\mathrm{m}_G\leq 3\mathrm{n}-6$，$G^C$ 的边$\mathrm{m}_c\leq 3\mathrm{n}-6$

$\therefore$G 与 G^C 的完全图的边$\mathrm{m}=\mathrm{m}_a+\mathrm{m}_c\leq 2(3\mathrm{n}-6)$

由完全图中边与顶点关系$\mathrm{m}=\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2}$得

$\frac{n(n-1)}{2} \leq 2(3n-6) \Rightarrow n^2 - n \leq 12n - 24 \Rightarrow n^2 - 13n + 24 \leq 0$

$\therefore \frac{13-\sqrt{73}}{2} \leq n \leq \frac{13+\sqrt{73}}{2} < \frac{13+\sqrt{81}}{2} = 11$与$n \geq 11$相矛盾

$\therefore$ G 与 G^C 二者中至少有一个是非平面图。

四．格的定义：设$< S, \preccurlyeq >$是偏序集，如果$\forall x, y \in S$，$\{x, y\}$都有最小上界和最大下界，则称 S 关于$\preccurlyeq$偏序作成一个格。

证明：

1. 定义运算符$\wedge$和$\vee$：

$\because (x, \prec)$是全序集，$\forall x, y \in X$，x 与 y 可比

$x = y$时　　$x \wedge y = x = y$，　$x \vee y = x = y$

$x \prec y$时　　$x \wedge y = x$，　$x \vee y = y$，$y \wedge x = x$，　$y \vee x = y$

2. 证明$\wedge$和$\vee$满足交换律、结合律、吸收率：

交换律：有定义得$x \wedge y = y \wedge x$，$x \vee y = y \vee x$，满足交换律。

结合律：$(x \wedge y) \wedge z = t$，t 为 x，y，z 中最小者

$x \wedge (y \wedge z) = t$，$\therefore (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$，$\therefore \wedge$满足结合律。

同理　$(x \vee y) \vee z = s$，s 为 x，y，z 中最大者

$x \vee (y \vee z) = s$，$\therefore (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$，$\therefore \vee$满足结合律。

吸收率：$x \vee (x \wedge y)$，若$x \prec y$，则$x \vee (x \wedge y) = x \vee x = x$

若$y \prec x$，则$x \vee (x \wedge y) = x \vee y = x$

$x \wedge (x \vee y)$，若$x \prec y$，则$x \wedge (x \vee y) = x \wedge y = x$

若$y \prec x$，则$x \wedge (x \vee y) = x \vee x = x$　$\therefore$满足吸收率

有定义得$< X, \wedge, \vee >$构成一个格。

3. 有定义得，$\wedge$，$\vee$均是定义在偏序关系$\prec$上的二元运算，$\therefore$其推导出的偏序关系即为$\prec$。

五．设：p：所有成员事先得到通知

q：到场者达到法定人数

r：会议能够举行

s：至少有 15 人到场

t：邮局罢工

前提：$p \wedge q \to r$，$s \to q$，$\neg t \to p$

结论：$\neg r \to (\neg s \vee t)$

(1) $p \wedge q \to r$　　前提引入

(2) $\neg r \to \neg(p \vee q)$

(3) $\neg r$　　附加前提引入

(4) $\neg p \vee \neg q$

(5) $p \to \neg q$

(6) $\neg t \to p$　　前提引入

(7) $\neg t \to \neg q$

(8) $s \to q$　　前提引入

(9) $\neg q \to \neg s$

(10) $\neg t \to \neg s$

(11) $\neg s \vee t$

$\therefore$ 结论正确

2005 年

一．求出命题演算公式$(\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \to ((\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \gamma))$ 的合析范式与析合范式。

二．**Toffoli**函数是一个Boole函数，设$t:\{0,1\}^3 \to \{0,1\}^3$定义为$t(x,y,z)=(x,y,z\oplus(xy))$，这里$\oplus$为模2加法. 令$\pi i:(0,1)^3 \to (0,1)$为$\pi i$ x1,x2,x3 =xi(i=1,2,3) 证明：

1) t之逆函数为t;

2) 利用t, πi(i=1,2,3)构造函数

$$AND(x,y)=\begin{cases}1 & 若x=y=1\\ 0 & others\end{cases}\quad OR(x,y)=\begin{cases}0 & 若x=y=0\\ 1 & others\end{cases}\quad NOT(x,y)=\begin{cases}0 & 若x=1\\ 1 & 若x=0\end{cases}$$

三．证明：若一个群的元素个数≤4，则它必为Abel群。

四．证明：元素呈形$m+n\sqrt{-1}(m,n\epsilon Z)$的加群G与元素成形$2^n3^m(m,n\in Z)$的乘群G’是同构的。

五．证明：若G为具有奇数个顶点的二分图，则G不是Hamilton图。

六．证明：在任一个至少有两个人的人群中，总存在两个人，他们在该人群中的朋友数相等。

2005 年答案

一． $\alpha \to \beta \vee \gamma \to (\beta \wedge \gamma \leftrightarrow \neg\alpha \vee \gamma)$

$\Rightarrow \quad \neg\alpha \vee \beta \vee \gamma \to \left(\left(\neg(\beta \wedge \gamma) \vee \neg\alpha \vee \gamma\right) \wedge \left((\beta \wedge \gamma) \vee \neg(\neg\alpha \wedge \gamma)\right)\right)$

$\Rightarrow \quad \neg\alpha \vee \beta \vee \gamma \to \left(\left(\neg\beta \wedge \neg\gamma \vee \neg\alpha \vee \gamma\right) \wedge \left((\beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma)\right)\right)$

$\Rightarrow \quad \neg(\neg\alpha \vee \beta \vee \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma)$

$\Rightarrow \quad (\alpha \wedge \neg\beta \wedge \neg\gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma)$

$\Rightarrow \quad (\alpha \wedge \neg\gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$

$\Rightarrow \quad (\alpha \wedge \neg\beta \wedge \neg\gamma) \vee (\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \vee (\neg\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$

$\Rightarrow \quad m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$

$\Rightarrow \quad M_0 \vee M_1 \vee M_2 \vee M_5$

二．1. 证明：

$\because t(x,y,z) = (x,y,z \oplus (xy)) \qquad (x,y,z) \in \{0,1\}^3$

$\therefore \ t^{-1}(x,y,z \oplus (xy)) = (x,y,z)$

$\therefore \ t(x,y,z \oplus (xy)) = (x,y,z \oplus (xy) \oplus (xy)) = (x,y,z)$

$\therefore$ t的逆函数即为 t。

2. $\mathrm{AND}(x,y) = \pi_3(t(x,y,0))$

$\mathrm{OR}(x,y) = \pi_3(t(x,y,t(x,1,y)))$

$\mathrm{NOT}(x) = \pi_3(t(x,1,1))$

三．证明：

1. 若元素个数为 1，是平凡群{e}，则是 Abel 群

2. 若元素个数为 2，设为 a，e，则对于 ae = ea，aa = aa，是 Abel 群

3. 若元素个数为 3，设为 a，b，e，若 ab = a，根据消去率得 b = e，$\therefore ab \neq a$ 且 $ab \neq b$，$\therefore ab = e$，即$b = a^{-1}$，$\therefore ab = ba = e$， $\therefore$是 Abel 群

4. 若元素个数为 4，设为 a，b，c，d，e，则$ab \neq a$，$ab \neq b$

设 ab = e，则$b = a^{-1}$，$\therefore ab = ba = e$

设 ab = c，则 aba = ca，若 ba = e，则$b = a^{-1}$，ab = e 不成立，$\therefore ba = c$，$\therefore ab = ba$，同理 ac = ca，bc = cb

得证。

四．证明：

有$f\left(m + n\sqrt{-1}\right) = 2^n 3^m$，$\forall x,y \in G$均可写成$x = m_1 + n_1\sqrt{-1}$和$y = m_2 + n_2\sqrt{-1}$的形式。

$\forall x,y \in G$ 均可写成$x = 2^{n_1}3^{m_1}$和$y = 2^{n_2}3^{m_2}$的形式。

则：$f(x+y) = f\left(m_1 + n_1\sqrt{-1} + m_2 + n_2\sqrt{-1}\right)$

$= f((m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{-1}) = 2^{n_1+n_2}3^{m_1+m_2}$

$= 2^{n_1}3^{m_1} \cdot 2^{n_2}3^{m_2} = f(x) \cdot f(y)$

$\therefore f: G \to G$ 是同态映射。

$\because x,y$ 必可写成 $2^{n_1}3^{m_1}$ 和 $2^{n_2}3^{m_2}$ 形式，$\therefore$有 $m_1 + n_1\sqrt{-1}$，$m_2 + n_2\sqrt{-1} \in G$，使得 $f: \left(m_1 + n_1\sqrt{-1}, m_2 + n_2\sqrt{-1}\right) \to (x,y)$， $\therefore$ f为满射。

设$\exists m_1'$，m_2'，n_1'，n_2'使得 $f: \left(m_1 + n_1\sqrt{-1}, m_2 + n_2\sqrt{-1}\right) \to (x,y)$

则有$2^{n_1'}3^{m_1'} = 2^{n_1}3^{m_1}$，

$2^{n_2'}3^{m_2'} = 2^{n_2}3^{m_2}$，$\because$ 2与 3 互素，$\therefore 2^{n_1}$中必不含因子 3，

$\therefore n_1' = n_1$，$m_1' = m_1$。$n_2' = n_2$，$m_2' = m_2$ $\therefore$ f 是单射，$\therefore$ f 构成双射。

$\therefore$ G 与 G′是同构的。

五．证明：

$\because$ G 为奇数顶点的二分图，设 G 的一个顶点划分v_1有 n 个顶点，另一个顶点划分v_2有 m 个顶点，$\therefore n \neq m$。

设 $n < m$，若 G 为哈密尔顿图，则 $P(G - V_1) = |V_2| = m > |V| = n$

与定理“若 G 是哈密尔顿图，则对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \phi$均有$P(G - V_1) \leq |V_1|$”相矛盾。

$\therefore$ G 不是哈密尔顿图。

六．证明：

设一群人中有朋友的个数为为 n，

若 $n = 0$，$\because$人群中人数大于等于 2，$\therefore$至少有两个朋友数为 0，他们的朋友数相等。

若 $n = 1$，人群中只有 1 人有朋友，且朋友不是自己，则必存在另一人有朋友为他本人。故 $n = 1$ 条件不成立。

若$n \geq 2$，用途表示关系，顶点为人，边连接两个是朋友的人，则一个顶点的度数代表这个人具有的朋友数。度数最大为 $n - 1$，则具有不同朋友数的个数为 1, 2, …, $n - 1$ 共 $n - 1$ 种，而人数为 n，$\therefore$必有两个人有相同的朋友数。

2006 年

一. 【12 分】设二元关系 $R \subseteq (N \times N^{+})^{2}$ 定义如下：

对任何 $a, c \in N$，$b, d \in N^{+}$，$(a, b)\ R\ (c, d)$ 当且仅当 $ad = bc$。

证明：R 为等价关系并求等价类 $[(1, 2)]$，这里 N 为全体自然数的集合($0 \in N$)，$N^{+} = N - \{0\}$。

二.【12 分】令 $U = \{ A \in N^{+} \mid A$ 有穷或 $N^{+} - A$ 有穷 $\}$，

证明：$(U, \cap, \cup, {}^{-1}, \phi, N^{+})$ 为布尔代数。这里 N^{+} 为全体正整数之集，A^{-1} 定义为 $N^{+} - A$。

三.【14 分】设 G 为具有 $n \geq 2$ 个点的平面图，证明：若 G 同构于它的对偶图，则 G 有 $2n-2$ 条边。

四.【14 分】设 T 和 T'为图 G 的不同的两棵生成树，e 为 T 的边但非 T'的边。令图 T_e 由 T 去边 e 而得。证明：存在 T'的边 e'使 T_e 加上 e'后所得图仍为 G 的生成树。

五.【14 分】设 Γ 为谓词演算 PK 的有穷公式序列，且 φ 为 PK 公式，$\Gamma \vdash \varphi$ 指在 PK 中由 Γ 可推导出 φ。

证明：$\Gamma, \varphi \vdash \psi$ 当且仅当 $\Gamma, \psi \vdash \neg\varphi$，这里 φ，ψ 为 PK 公式。

六.【14 分】设 G_1 与 G_2 为 G 的子群，若 G_2 为正规子群且 $|G_1|$ 与 $[G:G_2]$ 互素，则 G_1 为 G_2 的子群。

2006 年答案

一．证明：

自反性：对于$<a,b>$，$a\in N$，$b\in N^+$有 ab = ba。$\therefore <a,b>R<b,a>$， $\therefore$ R满足自反性。

对称性：对于$<a,b>\in(N\times N^+)$　　$<c,d>\in(N\times N^+)$

$<a,b>R<c,d>\Rightarrow ad=bc\Rightarrow cb=da\Rightarrow<c,d>R<a,b>$，$\therefore$ R满足对称性。

传递性：对于$<a,b>\in(N\times N^+)$　　$<c,d>\in(N\times N^+)$　　$<e,f>\in(N\times N^+)$

$(<a,b>R<c,d>)\wedge(<c,d>R<e,f>)$

$\Rightarrow\quad(\mathrm{ad}=\mathrm{bc})\wedge(\mathrm{cf}=\mathrm{de})$

$\Rightarrow\quad(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}})\wedge(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}})$

$\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}$

$\Rightarrow\quad\mathrm{af}=\mathrm{be}$

$\Rightarrow\quad(<a,b>R<e,f>)$　　　　$\therefore$ R 满足传递性

$\therefore$ R 为等价关系

$[<1,2>]=\{<x,y>|y=2x\wedge y\neq0\}$

二．证明：

1. 定义：　有界格$<L,\wedge,\vee,0,1>$：L 是格且存在全下界与全上界

　有补格$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格，$\forall \mathrm{a}\in \mathrm{L}$，在 L 中有 a 补元存在

　布尔代数$<L,\wedge,\vee,',0,1>$：有补分配格。

2. ①定义偏序集$<U,\preccurlyeq>$有$\forall\mathrm{a,b}\in\mathrm{U}$，有　$\mathrm{a}\preccurlyeq\mathrm{b}$则$\mathrm{a}\cup\mathrm{b}=\mathrm{b}$　$\mathrm{a}\cap\mathrm{b}=\mathrm{a}$；

　$\mathrm{b}\preccurlyeq\mathrm{a}$则$\mathrm{a}\cup\mathrm{b}=\mathrm{a}$　$\mathrm{a}\cap\mathrm{b}=\mathrm{b}$。

则对于任意 a，b 均有最小上界和最大下界，$\therefore<U,\preccurlyeq>$关于$\preccurlyeq$作成一个格$<U,\cap,\cup>$

② $\forall\mathrm{x}\in\mathrm{U}$，有$\phi\cap\mathrm{x}=\phi$，即$\phi\preccurlyeq\mathrm{x}$；　$\therefore\ \phi$为全下界。

$\forall\mathrm{x}\in\mathrm{U}$，有$\mathrm{N}^+\cup\mathrm{x}=\mathrm{N}^+$，即$\mathrm{x}\preccurlyeq\mathrm{N}^+$；　$\therefore\ \mathrm{N}^+$为全上界。

$\therefore<U,\cap,\cup,\phi,\mathrm{N}^+>$是有界格。

③对于$\forall\mathrm{x}\in\mathrm{U}$，　$\mathrm{x}\cup(\mathrm{N}^+-\{\mathrm{x}\})=\mathrm{N}^+$

　$\mathrm{x}\cap(\mathrm{N}^+-\{\mathrm{x}\})=\phi$　$\therefore<U,\cap,\cup,\phi,\mathrm{N}^+>$是有补格。

④$<U,\cap,\cup>$中$\cap,\cup$关系满足分配律，$\therefore<U,\cap,\cup,\ ^{-1},\phi,\mathrm{N}^+>$是有补分配格，

$\therefore<U,\cap,\cup,\ ^{-1},\phi,\mathrm{N}^+>$是布尔代数。

三．证明：

设 G 中顶点数、边数、面数分别为 n、m、r；

G*中顶点数、边数、面数分别为 n*、m*、r*；

设 G 的连通分量为 k，

则　n* = r

m* = r

r* = n – k + 1

$\because$ G 与 G*同构

$\therefore$　n = n*　　$\Rightarrow$　　n = r　　$\Rightarrow$　　k = 1

m = m*　　　　r = n – k + 1

r = r*

由欧拉公式：$n-m+r=2$ 得 $n-m+n=2$，$\therefore m=2n-2$。得证。

四．证明：

设 e 的基本割集为 S_e，S_e 将 G 分为两个子图 G_1,G_2。e 将 T 分为两个子图 T_1,T_2。

$\because$ T是 G 的生成树，$\therefore T_1,T_2$ 分别为 G_1,G_2 的生成树，T_1 与 T_2 不连通。

对于生成树 T'，必存在一个不为 e 的边 e'，且$e' \in S_e$，则将$\{e', G_1, G_2\}$看作一个图，则此图连通且 e'为桥。

$\therefore$e'将 T_1 与 T_2 连通。

$\therefore\{e', T_1, T_2\}$是图 G 的生成树，得证。

五．证明：

充分性：	前提$\Gamma \wedge \Psi \to \neg\varphi$	必要性：	前提$\Gamma \wedge \varphi \to \neg\Psi$
	结论$\Gamma \wedge \varphi \to \neg\Psi$		结论$\Gamma \wedge \Psi \to \neg\varphi$
$\Gamma \wedge \Psi \to \neg\varphi$	前提引入	$\Gamma \wedge \varphi \to \neg\Psi$	前提引入
$\varphi \to \neg(\Gamma \wedge \Psi)$		$\Psi \to \neg(\Gamma \wedge \varphi)$	
$\Gamma \wedge \varphi$	附加前提引入	$\Gamma \wedge \Psi$	附加前提引入
φ		Ψ	
$\neg(\Gamma \wedge \Psi)$		$\neg(\Gamma \wedge \varphi)$	
$\neg\Gamma \vee \neg\Psi$		$\neg\Gamma \vee \neg\varphi$	
$\Gamma \to \neg\Psi$		$\Gamma \to \neg\varphi$	
$\neg\Psi$	得证	$\neg\varphi$	得证

$\therefore \Gamma \wedge \Psi \to \neg\varphi \Leftrightarrow \Gamma \wedge \varphi \to \neg\Psi$

六．证明：

因为G_2是 G 的正规子群，所以映射$f: G \to G/G_2$为满同态，$G_2 = \ker(f)$，又因为$G_1 \le G$，所以$f(G_1) \le G/G_2$。由 Lagrauge 定理可知$|f(G_1)|$能整除$|G/G_2|$，从而$|f(G_1)|$能整除$[G:G_2]$，又因为$|f(G_1)|$能整除$|G_1|$，所以$f(G_1)$整除$[G:G_2]$、$|G_1|$的最大公约数。而$\gcd([G:G_2],|G_1|)=1$，从而$|f(G_1)|=1$，故$f(G_1)$恰为幺生成之集，因此$f(G_1)=\{G_2\}$，从而$\forall g \in G_1$，$gG_2 = G_2$。因此$\forall g \in G_1$，有$g \in G_2$因此G_1为 G_2的子集。

2007 年

一．用集合定义有序对的方法有很多种，证明下面这种定义也是可行的（即，证明<a,b>=<c,d>当且仅当 a=c 且 b=d）：定义$<x,y>=\{\{\{x\},\Phi\},\{\{y\}\}\}$。（15 分）

二．证明$< Z^6, \odot >$上有且仅有 6 个自同态，并证明其中有且仅有 2 个自同构。其中$\odot$为模 6 加法运算。（15 分）

三．设 G 为连通图，证明 G 中任意两条最长路径必有公共点。（15 分）

四．对于一阶谓词系统 PK，记 S 为 PK 中的所有公式的集合。在 S 上定义等价关系≈如下：对任意$\alpha, \beta \in S$，令$\alpha \approx \beta$当且仅当$PK \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$。记 $B=\{[\alpha] \mid \alpha \in S$ 上的公式，$[\alpha]$为 S 关于≈的等价类$\}$。在 B 上定义二元关系≼如下，对任意$[\alpha], [\beta] \in B$，令$[\alpha] \preccurlyeq [\beta]$当且仅当 $PK \vdash \alpha \rightarrow \beta$。证明：$< B, \preccurlyeq >$是一个布尔代数。（20 分）

五．有 200 名学生要到一家公司参加面试。面试的流程是，面试者先进入会议室，然后要看一个小时的公司历史展览，然后参加一个小时的面试。会议室于早上 8:00:00 打开，于上午 10:59:59 关闭。面试者必须逐个进入会议室，且只能在每分钟开始的那一个时刻（如 8:00、8:01 等）进入，且当有面试正在举行时，会议室不允许进新成员。只有在会议室关闭后，面试时间才有可能延长。问，这一天最多能有多少学生参加面试。（15 分）

2007 年答案

一．证明：

充分性：$a=c\wedge b=d \Rightarrow <a,b>=<c,d>$

$a=c\Rightarrow \{\{a\},\phi\}=\{\{c\},\phi\}$ $\qquad <a,b>=\{\{\{a\},\phi\},\{\{b\}\}\}$

$b=d\Rightarrow \{\{b\}\}=\{\{d\}\}$ $\qquad <c,d>=\{\{\{c\},\phi\},\{\{d\}\}\}$

$\therefore <a,b>=<c,d>$

必要性：$<a,b>=<c,d>\Rightarrow a=c\wedge b=d$

$\because <a,b>=<c,d>\Rightarrow \{\{\{a\},\phi\},\{\{b\}\}=\{\{\{c\},\phi\},\{\{d\}\}\}$

$\Rightarrow \{\{a\},\phi\}=\{\{c\},\phi\}\wedge\{\{b\}\}=\{\{d\}\}$（两集合相等，则集合中元素个数相等）

$\Rightarrow \{a\}=\{c\}\wedge\{b\}=\{d\}$

$\Rightarrow a=c\wedge b=d$

二．证明：

【见教材 P177】

【附】证明：p 与 n 互素则自同构，否则不是。（此处 n=6）

若 p 与 n 不互素，设最小公约数为 r，则$r\neq 1$

则$\frac{n}{r}*p$一定是 n 的倍数，$\therefore f_p\left(\frac{n}{r}\right)=\left(\frac{n}{r}*p\right)\bmod n=0$

$\therefore f_p\left(\frac{n}{r}\right)=f_p(0)=0$

$\therefore f_p$必不为双射。

若 p 与 n 互素，最小公约数为 1，若$\exists f_p(x_1)=f_p(x_2)$，设$x_2<x_1<n$；

则$x_1p \bmod n=x_2p \bmod n$

$\therefore (x_1p-x_2p)\bmod n=(x_1-x_2)p\bmod n=0$，$x_1-x_2<n$，

和 p 与 n 互素相矛盾。

$\therefore$不存在$f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore f_p$满足单射。

$\because Z^n$与Z^n中元素个数相同，$f_p: Z^n\to Z^n$满足单射，$\therefore f_p$是双射。

$\therefore f_p$是同构。

6 中有 1，5 两个数与 6 互素，$\therefore <Z^6,\ \odot>$有且只有两个自同构。

三．证明：

设存在两条最长路径没有公共点，他们分别是$v_1\to u_1, v_2\to u_2$

因为图 G 是连通的，所以这两条路径上某两点之间必有一条边将这两条路径相连，设这两个点分别为v_1', v_2'；

则这两个点将两条路径分为四条：$v_1\to v_1', v_1'\to u_1, v_2\to v_2', v_2'\to u_2$

且$v_1\to v_1'+v_1'\to u_1$的长度等于$v_2\to v_2'+v_2'\to u_2$的长度，

设$v_1\to v_1'\geq v_2\to v_2'$长度，则$v_1'\to u_1\leq v_2'\to u_2$长度，

$\therefore$存在路径$v_1\to v_1'+v_1'v_2'+v_2'\to u_2$的长度大于$v_1\to u_1$长度，这与$v_1\to u_1$是最长路径相矛盾。

得证。

四．证明：

易见$<B,\preccurlyeq>$是偏序集

$\forall[\alpha],[\beta]\in B$，$\because \alpha\to\alpha\vee\beta$，$\beta\to\alpha\vee\beta$

$\therefore [\alpha]$与$[\beta]$最大下界为$[\alpha \vee \beta] \in \beta$

$\because \alpha \wedge \beta \to \alpha$，$\alpha \wedge \beta \to \beta$

$\therefore [\alpha]$与$[\beta]$最小上界为$[\alpha \wedge \beta] \in \beta$

$\therefore < B, \preccurlyeq >$生成格

$\because \forall[\alpha] \in \beta$　　　$\alpha \to 1$为真　　　$\therefore [\alpha] \preccurlyeq [1] \in B$

　　　　　　　　　$0 \to \alpha$为真　　　$\therefore [0] \preccurlyeq [\alpha] \in B$

∴有最大上界为重言式集，记为[1]；有最小下界为矛盾式集，记为[0]。

$\therefore < B, \wedge, \vee, [0], [1] >$为有界格

$\forall[\alpha] \in \beta$　　　$\alpha \vee \neg\alpha = 1$　即$[\alpha]$与$[\neg\alpha]$最小上界为重言式集；

　　　　　　　　　$\alpha \wedge \neg\alpha = 0$　即$[\alpha]$与$[\neg\alpha]$最大下界为矛盾式集。

$\therefore [\alpha]$与$[\neg\alpha]$互为补元

$\therefore < B, \wedge, \vee, \neg, [0], [1] >$为有补格。

可证满足分配率，

$\therefore < B, \wedge, \vee, \neg, [0], [1] >$为布尔代数。

五．【可能属于组合逻辑问题，答案待研究】

2009 年

一．|A|表示 A 中的元素个数，B={x|x∈P(A)且|x|为奇数}，若|A|=n，求|B|。

二．设 f 为 A 到 A 的映射，

(1)、证明若 A 为有限集，f 为 A 到 A 的单射当且仅当 f 是 A 到 A 的满射。

(2)、若 A 为无限集，举例说明上述结论不成立。

三．设图 G，V={<i,j>|i<=m,j<=n,i,j∈N}，m，n 为大于 1 且 m，n∈N，E={(i,j)与仅当有一个元素相同且另一个元素相差 1 的点相连}。证明：G 为哈密顿图。（有误）

四．(G,#),(H,*)为群，对于所有的∀<a,b>,<c,d>∈G×H 有<a,b>⊕<c,d> = <a#c,b*d>。

(1)、证明：(G× H, ⊕)为群。

(2)、Z_p、Z_q、Z_{pq} 分别为 p、q 和 pq 阶整数加群，证明：$Z_p \oplus Z_q$ 同构于 Z_{pq} 当且仅当 p 与 q 互素。

五．用一阶谓词系统证明：

所有的北极熊都是白色的，没有棕熊是白色的，所以北极熊不是棕熊。

2009 年答案

一．$|B| = 2^{n-1}$

二．（1）提示，反证法

（2）　略

三．若 m、n 都是奇数，V1（i+j 为奇数），v2（i+j 为偶数），有边的定义可知，这是一个二部图，m、n 为奇数，则必有 V1 集合中点点个数不等 V2，设第一个大，p（G-V2）=V1 的个数，这与哈密屯图的必要条件冲突，所以原题有误！

四．(参见 1997 年第 6 题)。

五．(参见 1998 年第 2 题)

2010 年

一.S，T 是定义在集合 A 上的关系，T（X）是 X 的传递闭包

（1）S，T 是 A 上的对称关系，证明 S°T 对称当且仅当 S°T=T°S

（2）S，T 是 A 上的关系，证明 T（SUT）=T（T（S）UT（T））

二.G 是奇数阶的 Abel 群，证明 G 中所有元素之积为单位元

三.H 和 K 是群 G 的正规子群，且 H∩K={e}，证明：h∈ H 且 k∈K，有 hk=kh

四.G 的顶点数大于 3，且 u、v 属于 V，u、v 不相邻，且满足 D（u）+D（v）>=n。

证明 G 为 Hamilton 图当且仅当 G+e 为 Hamilton 图，e 为 u、v 新边

五.用一阶谓词逻辑推导证明(∀xA->B)->(∃xA->B),B 与 X 无关。