**宏观结构**:

* 高数主要是用极限思想来研究函数。我们通过求极限得到函数的连续性、其导数（微分）还有积分。所以我们要先介绍集合从而引入函数这一研究对象，然后通过数列的极限来引入极限概念。因为主要研究方法是求极限，所以我们通过两种准则判断是否有极限，通过四则运算法则和复合运算法则求极限。
* 在使用极限研究了函数的连续性之后，给出了连续函数在闭区间上的性质（有界性、最值定理和介值定理）

**核心观念**：

* 初等数学研究的是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量。
* 函数关系是变量之间的依赖关系，而极限方法则是研究变量的一种基本方法。
* **极限和无穷小的关系是一个承上启下的纽带，而复合函数求导法则和微分的四则运算法则是核心。特别注意一致连续性的应用。**
* 极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的。
* 夹逼准则是判断是否收敛的神器，包括用于反常积分和无穷级数的审敛。
* 定积分仅与积分区间和被积函数有关，和积分变量无关。

**个人总结：**

* 拐点定义要求函数在区间上连续，而极值点仅要求有定义即可。
* 在计算积分时，代数手段不可或缺且往往是首先采用的。同时，积分的几何意义有助于快速计算定积分。
* 定积分的应用核心在于元素法。
* 无穷级数的核心在于部分和的极限。
* 椭圆的面积为Πab。

**重要定理**：

* 连续函数在闭区间上具有最值定理和介值定理。
* 微分具有一重要性质：一阶微分线性不变性。
* 罗尔定理将函数和其导函数联系了起来。
* 洛必达法则对于求解积分相关问题至关重要。

**生僻易错**：

* 。
* 若f(x)的导数在(a, b)上有界，则f(x)在(a, b)上有界。
* 若g(x)在x=a处可导，导数为A，f(x)在x=a处连续而不可导，则g(x)f(x)在x=a处：若g(a)不等于0，则不可导；若g(a)=0，可导且导数为Af(x)。
* 注意对数求导法的应用。
* 若f(x)在a的空心邻域内可导且f(x)在x=a处连续，若f(x)的导函数趋于A（x→a），则f(x)在a点的导函数等于A。
* 若点x=x0是f(x)的极小（大）值点，不一定存在点x=x0的某邻域(x0-δ, x0+δ)使得f(x)在（x0-δ，x0]单调递减（递增），在[x0, x0+δ)单调递增（递减）。
* 连续函数一定具有原函数。
* 若f(x) 在区间[a, b]上有第一类间断点，则f(x)在[a, b]上不存在原函数。
* 当f(x)为奇函数时，f(x)在[-a, a]的全体原函数均为偶函数；当f(x)为偶函数时，f(x)在[-a, a]只有唯一原函数为奇函数，即。
* 可导的周期函数其导函数仍是周期函数（反之不一定）。
* 设f(x)在区间[a, b]上有界，且只有有限个间断点，则f(x)在[a, b]上可积。
* 若f(x)在(a, b)上存在原函数F(x)，则在(a, b)上，F(x)必连续而f(x)未必连续，且f(x)和F(x)都不一定是初等函数。
* 若f(x)在[a, b]上有界且有有限个间断点，则f(x)可积。
* 函数f(x)在[a, b]上的平均值为。
* 二元函数的偏导数均不存在其方向导数仍可能存在。
* **常用反例：狄利克雷函数、、z=|x|+|y|。**

**笔记**：

* 集合是指具有某种特定性质的事物的总体。对于集合，我们主要关注集合中的关系和集合间的运算。集合中的关系主要有等于、包含、属于等；集合间的运算包括并、交、差、笛卡儿乘等。和集合相关的概念主要是区间和邻域。
* 区间是特殊的数集，而邻域是特殊的开区间。
* 数0是自然数。
* 对于两个非空集合X和Y，若存在一个法则f，使得对于集合X中的任何一个元素x，在集合Y中都有唯一确定的元素y与之对应，则称f为从X到Y的映射，记作f：X→Y；在此定义中有几个相关概念，定义域，陪域，原像，像，值域也可以得出。映射中还可以区分出满射，单射和双射的概念。除此之外，映射间还可以又逆映射和复合映射。
* 函数是一种特殊的映射，其特殊性在于对映射定义中的集合X为数集，集合Y为实数集。与此定义相关的有自变量、因变量和函数值等概念。函数具有有界性、单调性、奇偶性和周期性。除此之外，函数之间可以进行加减乘除、反函数和复合函数等运算。
* 存在一些特殊的函数，如绝对值函数，符号函数，取整函数，另外还有五种基本初等函数，即幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数。还有以基本初等函数为基础构造的初等函数。除此之外还有和三角函数相似的双曲函数。
* 按照某种对应法则，使得对于每一个n∈N+，都有一个实数xn与之对应，将这些实数按下标n排成一列就叫做数列。对于数列，我们可以判断它的收敛性，若数列收敛，它还应具有极限的唯一性，有界性，保号性和子数列的一致性。这些性质可以判断数列是否发散。另，从数列可以得到子数列。**我们常根据数列极限的存在的必要条件（如子数列极限应当一致）来反证数列极限不存在**。
* 函数极限由数列极限扩展而来。对于函数极限，至少有五种性质。极限的唯一性，局部有界性，局部保号性，与单侧极限的一致性和与数列极限的关系。这些函数极限的必要条件有助于判断函数是否是发散的。**特别注意，要区分极限为无穷大和不存在的情形**。
* 无穷小实际上是一个特殊的极限，但是当它与函数极限产生联系之后，在证明函数极限运算法则时就变得重要起来，因为无穷小的存在使证明过程简单化了一些。关于无穷小的性质有不少，主要就是有限个无穷小的和仍然是无穷小还有局部有界函数与无穷小的乘积还是无穷小。
* 在应用无穷小的运算法则后，可以得到函数极限的四则运算法则和复合函数极限的运算法则。在使用时要注意条件。特别是除法法则时，除数的极限不能是0，复合函数的极限运算法则中嵌套的函数不能在某个邻域内恒等于其极限。.
* 极限的运算法则并不能判断极限的存在。判断极限存在有两个重要的法则，一个是夹逼准则，另一个就是单调有界。这两个是除了极限定义外判断极限存在的重要依据。
* 有关无穷小，还有几个简单的概念，即高阶无穷小，同阶无穷小还有等价无穷小等，我们还需记得这些概念的符号表示。对于等价无穷小，还有一个应用，就是等价无穷小替换进行极限的计算。
* 函数连续性的定义有两个，这里不再赘述。对于两个连续性的函数，由极限的运算法则知，它们在加减乘除和复合之后，在自然定义域内仍然是连续的。此外，反函数的连续性与原函数一样。应用函数连续性的定义，我们可以一个函数在某一区间内是不是连续函数，当然，这时在区间端点要定义左连续和右连续。另外，和函数连续性相关的还有间断点的概念。
* 有三种情况会产生间断点，一是函数在该点无定义，二是函数在该点无极限，最后就是函数在该点的极限和该点的定义不一致。对于间断点，我们有第一类间断点和第二类间断点。第一类间断点就是在该点有左右极限的情况。其余为第二类间断点。
* 将函数的连续性和极限的运算法则结合，我们得到初等函数在定义域内都是连续的这一重要结论。**这是我们以后求极限时一个强大的工具，几乎和复合函数的极限运算法则一样重要。**
* 和函数的连续性相关的还有几大定理。一个是有界性与最大值、最小值定理，一个是零点定理，还有就是介值定理与一致连续性定理。
* 导数的定义有其物理学和几何学的背景，从中进行抽象可以得到一般的导数计算法则。我们可以应用导数的计算求解出曲线的斜率还有瞬时速度之类的东西。
* 在求解复杂函数的导数值的时候，就需要用到导数的运算法则了。其中有四则运算法则，反函数法则和复合函数法则。
* 在解决了一般函数的导数求法后，可以继续处理隐函数的导数求法，即应用复合函数求导法则后。由此还引申出了对数求导法，可以反过来解决一些一般函数的求导问题。**在此之后还有参数方程的求导法，是建立在反函数求导法则和复合函数求导法则之上的。**
* 高阶导数在物理问题中经常用到。在求解高阶导数时，最重要的是了解常用的初等函数的高阶导数函数和莱布尼兹公式（往往用于解决两函数相乘后的高阶函数求导问题）。
* 在解决增量近似值的时候出现了微分的概念。微分的本质在于将函数近似表示为因变量的线性函数。根据可微的定义，可微和可导是等价的。线性函数的斜率为导数值。微分的一个重要性质是一阶微分线性不变性。我们经常用微分求近似值或者进行误差估计。**导数又被称为微商。**
* 导数和原函数之间是不是有些关系呢？通过拉格朗日中值定理，也就是微分中值定理，可以建立这种联系。拉格朗日中值定理可以通过罗尔定理证明，罗尔定理可以通过费马引理证明。另外还有个柯西中值定理，是很实用的证明方法。**柯西中值定理可以视为拉格朗日中值定理的参数方程形式。微分中值定理是研究函数性态的重要工具，如单调性、凹凸性和渐近线。**
* 在应用柯西中值定理后，我们得到了一个很有用的求极限方法，洛必达法则。可以用来求不定式的极限，当然，混合其他求极限方法（尤其是等价无穷小和变量代换）求解效果更好。
* 有没有什么方法能让我们近似的用多项式来描述一些较为复杂难算的函数呢？这就要用到泰勒中值定理了。泰勒中值定理也是使用柯西中值定理证明的，由此可以柯西中值定理的价值了。泰勒公式具有唯一性，这一定理可以帮助我们逆向求解导数。另外，泰勒公式可求解极限以及证明不等式。
* 导数既然有原函数而来，那么必然和原函数有着千丝万缕的联系。在函数的单调性方面，我们用到了一阶导数，而在凹凸性方面，则是使用到了二阶导数。在此得提个和凹凸性相关的小概念，即拐点。也就是函数凹凸性改变的分界点。
* 我们还经常应用导数知识求解极值和最值问题。在求解极值问题时，我们要首先用一阶导数求出驻点以及导数不存在的点，然后可以用二阶导数或者一阶导数的符号特征找出极值点，最后求出极值。而对于最值则要简单一些了，并不需要判断出极值点。不过因最值问题往往在闭区间上求解，所以要将端点值考虑进去。
* 应用导数描绘函数图象。一是判断函数区间和奇偶性、周期性等，二是求出一阶导数和二阶导数，得出驻点，拐点等，并判断各区间段的单调性和凹凸性，最后将以上点及一些特殊点给出再根据相关特性连接平滑即可。
* 曲率问题求解。曲率的定义是单位弧度切线转过的角度。这样我们就要先求出弧微分，继而可以得到曲率的计算公式。一个更深入的问题是曲率中心问题。这里又引入了曲率半径的概念，并导出了渐屈线的概念。在曲率的基础上再加上基本的几何知识即可解决，并已有最终公式。
* 求解高阶方程近视解。首先要判断出根的隔离区间，然后可以应用相关方法进一步减小误差（这里主要有二分法和切线法）。
* 在解决完微分问题之后，再来讨论微积分中另一个重要问题，定积分。对于定积分问题，我们首先要判断所给函数是否具有原函数。有相应的定理表明，如果函数在区间上连续，则必定具有原函数。那么如何求原函数呢？除了利用基本初等函数等常见函数的原函数外，还可以运用换元法和分部积分法。这两种方法都是根据相应的微分公式逆推得到。另外还有有理函数原函数的求法，这是有些另类的解法了。我们可以将某些特殊的函数利用换元法转换为有理函数。在换元法中，往往利用sin，cos，tan，sec和导数进行变换，其中tan可能是最重要的。在分部积分中，又可以分为三种，一种是形成递推或者恒等式，另一种是将复杂函数微分得到简单函数，最后是将简单函数作为积分变量。在有理函数方法中，往往使用tan（x/2）或者t对三角函数和根式进行替换。最后，在求解不定积分之前，一定要注意定义域。
* 定积分是积分学的另一大重要问题。这个问题同样是从几何和物理问题导出的。在给出定积分的定义后，可以通过两个定理判断所给的被积函数是否具有定积分。根据定积分的极限表示，我们可以推出定积分的加法法则，常数乘法法则等。最重要的是定积分中值定理，揭示了定积分和函数值的关系。
* 在了解了定积分的一些简单性质后，我们希望可以使用比定义法更好用简单的方式来求解定积分。通过积分上限函数，我们看到了所给函数的原函数正是积分上限函数。利用这一性质，我们得到了牛顿-莱布尼兹公式，也就是**微积分基本公式**。
* 在得到了微积分基本公式之后，我们就可以利用求不定积分的方法类似得到求定积分的换元法和分部积分法。用这些方法可以解决很多复杂的被积函数问题。
* 除了一般的定积分之外，我们还有反常积分。又可以细分为无穷限的反常积分和无界函数的反常积分。**这提醒我们在定积分中同样要注意定义域。**对于反常积分，我们可以将微积分基本公式和求极限结合起来求解。
* 对于反常积分，我们只需要判断其收敛性。但是这个任务有时并不像听起来那么容易，因为有些被积函数可能很复杂。这时我们可以用相关定理进行证明。最原始的定理应该是类似于单调有界函数必有极限。然后我们导出了比较审敛定理，只是最基础的方法了。但是确定比较关系往往不容易，所以我们可以使用**极限审敛法**，这是最常用的方法了，且往往和比较审敛法混合使用。
* 有一中特殊的反常积分，即Г（s），它是收敛的，可以证明之。我们常用到的性质是**Г（s+1）=sГ(s)**,及余元公式。
* 在应用积分解决现实问题时，我们往往采用**元素法**，而且可以将元素法推广到极坐标中。我们可以用元素法得到面积元素、体积元素、弧元素等。
* **平面解析几何和一元微积分息息相关，而为了研究多元微积分，让我们先来建立空间解析几何的相关理论。**在建立空间坐标系之前，我们必须要认识到**建立点到数映射的基础是向量。**
* 向量是一类既有大小也有方向的量。其大小称为向量的模。我们可以用有向线段来表示它。向量间有相等关系，也有平行关系。对于向量，可以进行加减运算，也可以进行数乘运算。向量的加减运算满足交换律和结合律，数乘运算满足结合律和分配律。正是在数乘的基础上，我们通过定理将向量和数对应起来了，并可以通过定义单位向量来建立坐标系。
* 建立空间坐标系的理论基础依旧是向量的平行定理。对于三个坐标轴，满足右手定则。分隔出的八个区域成为挂限。**通过建立点和向量（向径）的一一映射，向量和数的一一映射，我们将数和点联系到了一块。**同时由于建立了向量和数的映射，我们可以将向量间的运算转化为数的运算，极大的便利了我们对向量的使用。
* AB的λ分点M定义为向量AM等于向量BM和λ的数乘。
* 向量间除了基本的加减和数乘运算之外，还有其他运算，比如向量积、数量积和混合积。这时要用到向量模和向量间的夹角的概念。向量模也就是向量的长度，通过勾股定理，可以很容易的用坐标表示出来。向量间的夹角是当两向量的起点重合时所构成的角度，其范围在0到∏之间。同时我们还有投影的概念，某向量在另一向量上的投影可以定义为模值和夹角余弦的乘积。投影运算具有可加性和数乘可分解性。向量间的数量积运算定义为向量模的乘积在乘以夹角的余弦。之所以定义为数量积，是因为结果是一个数。数量积和投影之间相关性很大。利用投影的特性，我们可知数量积运算具有交换律、分配律和数乘结合性。同时可以给出向量积的坐标表达式。向量间的向量积的结果是向量，其模为向量模乘积再乘以夹角的正弦值。方向用右手定则确定。向量积运算满足分配律和数乘结合性，但是交换之后结果相反，不满足交换律。根据以上定律，可以得到向量积的坐标表达式，用三阶行列式表达最好。此外混合积则是两个向量的向量积在与第三个向量求数量积，根据向量积和数量积的坐标表达式，可以得到混合积的表达式，同样用三阶行列式表示最好记。混合积的几何意义是平行六面体的体积。
* 向量在**空间几何**中有极为重要的应用。下面我们看一下空间几何。**空间几何的核心问题有二：一是曲面的方程，二是方程的图形。**前者要确保曲面的点都满足方程同时满足方程的点都在曲面上。而对于方程的图形，我们可以用截痕法或者伸缩法来研究。常见的空间曲面有九种，包括圆锥曲面、椭球体、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆曲面、双曲抛物面、椭圆柱面、双曲柱面和抛物柱面。其中柱面是个较为重要的概念，有母线和准线等相关观念。
* 空间曲线可以将两个空间曲面方程联立得到。关于空间曲线，一个重要的问题就是投影，不过一般较易解决。
* 下面看看特殊的空间曲面，即空间平面。空间平面的方程有一般方程、点法式和截距式等。关于空间平面重要的是法线向量，即与平面垂直的非零向量。我们可以用法线向量研究两平面的夹角和点到平面的距离。
* 再看看特殊的空间曲线，即空间直线。对于空间直线，我们有一般方程、对称方程（点向式）、参数方程等。关于空间直线，相关的向量是方向向量。对此，在参数方程和对称方程中可以直接看出，而在一般方程中可以用平面的法线向量的向量积求得。我们可以用方向向量研究两空间直线的夹角，直线和平面的夹角。除此之外，关于空间直线还有一个平面束，可以有效解决投影问题。
* 在研究了一元函数的微积分后，我们已经可以看更高级些的问题，即多元函数微积分。让我们顺着一元函数的步骤来看看多元函数微积分。首先是定义域，这里定义域已经不再是区间了，而是成为了点集。点和点集之间的关系有内点、外点和边界点三种。还有一种特殊的称为聚点。而根据点集内点的性质又可以将点集分为区域、连通集、闭区域等。当然，点集也有其他的性质和分法，比如有界集、无界集等。在有了定义域后，我们就可以定义多元函数，同样也可以定义多元函数的极限了。然后就是连续性了，同样根据连续性可以得到最值和介值定理。
* 在有了极限和连续的概念之后，按照一元微积分的过程，应该就是导数和微分了。因为多元函数的自变量有多个，所以导数就成了偏导数。同样，微分也就成了全微分。虽然导数的求法和一元函数并没有实质上的差别，但是记法和表示的意义都变了。全微分和偏导数之间的关系有两个定理分别表明充分条件和必要条件。
* 在可以求简单函数的偏导数后，我们要看看复合函数求导的方法了。复合函数求导的基础是增量的微分表示法，再结合一元函数的导数法则就可以了。这里要特别提一下全微分的形式不变性。
* 在知道如何求解简单函数的偏导数之后，我们再看看如何求解隐函数的偏导数。其实隐函数偏导数的求法的基础是复合函数求导，只是其存在定理不知是如何证明的。
* 我们曾看过用一元微积分来解决一些几何问题，现在我们同样可以用多元函数的微分知识来解决一些空间几何的问题。如曲线的切线问题、法平面问题还有曲面的切平面和法线问题。**这些问题的关键还是如何求解方向向量和法向量。**
* 现在我们仅仅求了函数沿坐标轴方向的变化率，也就是偏导数。但是在实际生活中，我们却需要知道函数沿某个特定方向的变化率。这就要用到方向导数。在求**方向导数**的过程中，还是要用到全增量的表示。即可将方向导数和偏导数联系起来。另外还介绍了梯度的概念，也就是向量场。并阐述了梯度和方向导数的关系。**方向导数实质上是一元函数的导数。**
* 在求多元函数的过程中，其实和一元函数是类似的。都是先求驻点，然后判断。这里介绍了极值存在的必要条件和充分条件，只是充分条件的证明在后面才介绍。另外还有条件极值的计算。也就是拉格朗日数乘法，不过奇怪地是其用法是证明的推广式。
* **多元函数微分学在求条件极值和空间曲线切向量、空间曲面法向量的应用值得注意。**
* 二元函数的泰勒公式是以一元函数泰勒公式和复合函数的导数为基础证明的。**用它可以证明多元函数极值的充分条件。**
* 在多元函数的微分之后，我们来看看多元函数的积分。首先从数学和物理的实际问题中引出二重积分的定义，并根据定义推出二重积分的一些基本性质。这点和定积分还是很像的。除此之外还给出了二重积分存在的充分条件和计算方法。二重积分的计算方法思想来自于定积分中体积的计算，将二重积分转化为两次一重积分。仅仅有了这些还有些不足，因为有时我们可能会使用极坐标，这就需要给出极坐标下的面积元素。这是唯一的难点了。**最后给出了二重积分换元法的公式，而极坐标的情况仅仅是特例罢了。**
* 在二重积分后，我们还关注了三重积分。三重积分的有关内容和二重积分极为类似。只是多了柱面坐标和球面坐标。**坐标系的选择主要是为了能够较简单的表示出积分区域。**这时要注意体积元素的改变。
* 重积分的在数学和物理学上的应用其实与定积分的应用在实质上都是一样的，其本质都是元素法，只是计算方法有些不同罢了。
* 对于两类曲线积分，其实可以将其视为元素法和广义换元法的应用。而格林公式则提供了将二重积分转换为一重积分的手段，不失为一种解题手段。当然了，格林公式还提供了全微分求原函数等方式。
* 对于两类面积积分，依旧是遵循着将将面积元素转换为二重积分的思路。高斯公式提供了空间闭区域上三重积分和气边界曲面上的曲面积分的关系。另外提出了通量和散度的概念。
* 斯托克斯公式是对格林公式的推广，说白了，就是一个是二维的，另一个是三维的。斯托克斯公式把曲面的面积积分和其边界曲线的曲线积分联系起来了。与格林公式类似，其应用可以用来求三元函数的全微分。另外还提出了环流量和旋度的概念。
* **要从向量微分算子▽把握散度和环流量从而把握高斯公式和斯托克斯公式。**
* **多元积分的基本公式都是有向的。**
* 对于无穷级数，我们一般将其分为常数项级数和函数项级数。其中常数项级数又有正项级数、交错级数等特殊级数。函数项级数主要研究幂级数和傅立叶级数。
* 对于常数项级数，我们研究问题集中在其是否收敛。对于正项级数，我们有比较审敛法、比值审敛法、根值审敛法和极限审敛法；（比值审敛、根值审敛和极限审敛均为特殊形式的比较审敛法。我们可以从等比级数出发理解比值审敛和根值审敛，从p-级数出发理解极限审敛）对于交错级数，我们有莱布尼兹定理；而对于一般级数，我们可以判断其是否绝对收敛，当然，可能它是条件收敛的。
* 对于幂级数，我们考虑其收敛域还有如何将函数展开为幂级数问题。对于收敛域问题，我们有定理可以直接解决；而对于展开问题，我们有直接法——使用泰勒公式，和间接法，利用幂级数的性质转换函数。
* 对于傅立叶级数，我们一般考虑函数展开问题，同样有公式可以直接解决。
* 最后提一下一致收敛问题，注意，幂级数是一致收敛的。
* 对于微分方程，其求解一般有固定类型。这里我们将微分方程分为一阶微分方程和高阶微分方程。一阶微分方程的求解形式主要有可分离变量型、齐次型、线性、伯努力方程和全微分方程。而高阶微分方程的求解形式主要是可降阶和常系数齐次线性微分方程。

启发：

* 将数列视为自变量为正整数的特殊函数从而由数列的极限过渡到函数的极限。
* 将函数极限视为数列极限的推广，则单侧极限就是子数列的特殊情况。
* 运用之妙，存乎一心。任何时候记忆都不是终结。
* 连续性是比极限存在更强的条件。
* 抽丝剥茧，由简到繁，是解决问题的利器。
* 基础是必要的，可是应用却是在基础之上的。
* 在坐标系中用向量来研究距离和夹角等是好的选择。