Calculation For Hamiltonians

-Hadamard Gate Realization

1. $U_H = a_x X + a_y Y + a_z Z + a_0 I$

2. $a_x = \frac{1}{2} Tr[X U_H] = \frac{1}{2\sqrt{2}} Tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$

3. $= \frac{1}{2\sqrt{2}} Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. $a_y = \frac{1}{2} Tr[Y U_H] = \frac{i}{2\sqrt{2}} Tr\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$

5. $= \frac{i}{2\sqrt{2}} Tr\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$

6. $a_z = \frac{1}{2} Tr[Z U_H] = \frac{1}{2\sqrt{2}} Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$

7. $= \frac{1}{2\sqrt{2}} Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. $a_0 = \frac{1}{2} Tr[U_H] = \frac{1}{2\sqrt{2}} Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = 0$

9. $= \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z)$

10. $= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$

11. $U_H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$

Calculations For Hamiltonians

- Hadamard Gate Hamiltonian

1. $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$

2. $H_H = -\frac{b}{2}\sigma$

3. $H_H = \frac{-b}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Calculations for Hamiltonian
- Hadamard Gate realization
for 2 qubit system

1. $U_{H_{12}} \equiv U_H \otimes U_H$

2. $= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & -1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

4. $= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Calculations For Hamiltonians

- Hadamard Gate Hamiltonian For 2 qubit system

1. $U_{H_{12}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $H_{12} = -\frac{b}{2} U_{H_{12}}$

3. $H_{12} = -\frac{b}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Calculations For Hamiltonians

- Z Gate Hamiltonian

$$H_Z = \frac{b}{2} Z$$

- Z Gate Hamiltonian for 2 qubit system in which second qubit is targeted

1. $Z_2 = I \otimes Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. $= \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

3. $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. $H_{Z_2} = \frac{b}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

1. Initial state $|\psi(0)\rangle = |00\rangle$

2. $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Unitary Operator $U(t)$

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

Generic Form

4. $\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{+}(t)$

5. $$= e^{-iHt/\hbar} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{iHt/\hbar}$$

6. Form when Hadamard Gate is applied

7. $\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{+}(t)$

8. $$= e^{-iH_{12}t/\hbar} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{iH_{12}t/\hbar}$$

9. $$= e^{-iU_H bt/4\hbar} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{iU_H bt/4\hbar}$$

10. t value corresponding to a π rotation around $(\hat{x}+\hat{z})/2$ axis

11. $\frac{bt}{4\hbar} = \frac{\pi}{4}$

12. $t = \frac{4\pi\hbar}{4b} = \frac{\pi\hbar}{b}$

13. Form when Z Gate is applied

14. $\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{+}(t)$

15. $= e^{-iH_{z2}t/\hbar}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{iH_{z2}t/\hbar}$

16. $= e^{-iZ_2bt/2\hbar}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{iZ_2bt/2\hbar}$

17. t value corresponding to a π rotation around z-axis

18. $\frac{bt}{2\hbar} = \frac{\pi}{2}$

19. $t = \frac{2\pi\hbar}{2b} = \frac{\pi\hbar}{b}$

Calculations For T_1 Noise

1. Redefine σ_+ to target second qubit

2. $\sigma_{+_2} \equiv I \otimes \sigma_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $= \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Redefine σ_- to target second qubit

5. $\sigma_{-_2} \equiv I \otimes \sigma_- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $= \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. Solve $\sigma_{+_1} \rho \sigma_{-_1}$

8. $\sigma_{+_2} \rho \sigma_{-_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-iHt/\hbar} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{iHt/\hbar} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. $= e^{-iHt/\hbar} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} e^{iHt/\hbar}$

10. $= e^{-iHt/\hbar} \begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} e^{iHt/\hbar}$

11. $= 0$

12. solve $\sigma_{-2}\sigma_{+2}\rho$

13. $\sigma_{-2}\sigma_{+2}\rho =$
$e^{-iHt/\hbar} \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} e^{iHt/\hbar}$

14. $= e^{-iHt/\hbar} \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} e^{iHt/\hbar}$

15. $= 0$

16. $\rho\sigma_{-2}\sigma_{+2} =$
$e^{-iHt/\hbar} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} e^{iHt/\hbar}$

17. $= e^{-iHt/\hbar} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} e^{iHt/\hbar}$

18. $= 0$

19. Add up terms for T_1 Noise

20. $\frac{d\rho}{dt} = \gamma_+ \left[0 - \frac{1}{2}(0+0) \right]$

21. $= 0$

Calculations For T_1 Noise

1. Initial State $|01\rangle$

2. $\rho(0) = |01\rangle\langle 01|$

3. $$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. $$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Unitary operator $U(t)$ - Generic Form

6. $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$

7. Form when Hadamard Gate is applied

8. $\rho(t) = U(t)\,\rho(0)\,U^{\dagger}(t)$

9. $$= e^{-iH_{12}t/\hbar} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{iH_{12}t/\hbar}$$

10. $$= e^{-iU_H bt/4\hbar} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{iU_H bt/4\hbar}$$

11. solve $\sigma_{+2}\rho\sigma_{-2}$

12. $\sigma_{+2}\rho\sigma_{-2} =$

$$e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}$$

13. $=$

$$e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}$$

14. $=$

$$e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}$$

15. solve $\sigma_{-2}\sigma_{+2}\rho$

16. $\sigma_{-2}\sigma_{+2}\rho =$

$$e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}$$

17. $=$

$$e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}$$

18. $=$

$$e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}$$

19. solve $\rho_{\sigma_{-2}\sigma_{+2}}$

20. $\rho_{\sigma_{-2}\sigma_{+2}} =$

$$e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}$$

21. $=$

$$e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}$$

22. $=$

$$e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}$$

23. Add terms to find T_1 Noise

24. $\frac{d\rho}{dt} =$

$$\gamma_+\left[e^{-iHt/\hbar}\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)\right)\cdot e^{iHt/\hbar}\right]$$

25. $=$

$$\gamma_+\left[e^{-iHt/\hbar}\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)\right)e^{iHt/\hbar}\right]$$

26. $=$

$$\gamma_+\left[e^{-iHt/\hbar}\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)e^{iHt/\hbar}\right]$$

27. $=$

$$\gamma_+\left[e^{-iHt/\hbar}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}e^{iHt/\hbar}\right]$$