

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего образования
**«Северо-Осетинский государственный университет
имени Коста Левановича Хетагурова»**

Курсовая работа
Транспортная задача. Методы решения.

Выполнил:
Студент 3 курса направления:
«Прикладная математика и информатика»
Гамосов Станислав Станиславович _____

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Тотиева Жанна Дмитриевна _____

«Работа допустима к защите»
Заведующий кафедрой алгебры и анализа,
кандидат физико-математических наук
Джусоева Нонна Анатольевна _____

Владикавказ 2021

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи	3
3	Методы построения опорного плана	8
3.1	Метод северо-западного угла	8
3.2	Метод наименьшего элемента	11
4	Вырожденность опорного плана	13
5	Метод потенциалов	15
6	Решение с помощью теории графов	18
6.1	Транспортные сети и потоки	18
6.2	Остаточные сети	19
6.3	Увеличивающие пути	21
6.4	Разрезы транспортной сети	21
6.5	Транспортная сеть с несколькими истоками и стоками	23
6.6	Метод Форда-Фалкерсона	24
6.7	Поток минимальной стоимости	24
6.8	Решение с помощью теории потоков	25
7	Заключение	27
	Список литературы	28

1 Введение

Транспортная задача (задача Монжа — Канторовича) – это спектр задач с единой математической моделью, классическая формулировка, которой звучит: *«Задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов производства в пункты потребления»*. Такая форма встречается чаще всего в линейном программировании, а если точнее в его практических приложениях.

Линейное программирование является одним из разделов математического программирования – области математики, разрабатывающей теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Проблема была впервые формализована французским математиком *Гаспаром Монжем* в 1781 году. Прогресс в решении проблемы был достигнут во время Великой Отечественной войны советским математиком и экономистом *Леонидом Канторовичем*. Поэтому иногда эта проблема называется **транспортной задачей Монжа — Канторовича**.

Если вернуться к самой задаче огромное количество возможных вариантов перевозок затрудняет получение достаточно экономного плана эмпирическим или экспертным путем. Применение математических методов и вычислительных в планировании перевозок дает большой экономический эффект. Транспортные задачи могут быть решены **симплексным методом** однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Они, как и **симплексный метод**, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его получить оптимальный результат. Транспортная задача может также решаться с ограничениями и без ограничений.

В зависимости от способа представления условий транспортной задачи она может быть представлена в **графовой** или **матричной** форме.

2 Постановка задачи

Задача эта возникает, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителям. В этом случае для каждого потребителя безразлично, откуда, из каких пунктов производства будет поступать этот продукт, лишь бы он поступал в нужном объеме. Однако от того, насколько рациональным будет прикрепление пунктов потребления к пунктам производства, существенно зависит объем транспортной работы. В связи с этим естественно возникает вопрос о наиболее эффективном прикреплении, правильном направлении перевозок груза, при котором потребности удовлетворяются, а затраты на транспортировку минимальны. Более точно задача формулируется так.

Пусть имеются пункты производства (A_1, A_2, \dots, A_n) с объемами производства в единицу времени, равными соответственно (a_1, a_2, \dots, a_n) , и пункты потребления (B_1, B_2, \dots, B_m) с объемами потребления, равными (b_1, b_2, \dots, b_m) соответственно. Будем предполагать, что производство и потребление сбалансированы — сумма объемов производства равна сумме объемов потребления. Такой вид транспортной задачи называется **закрытым**.

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j \quad (1)$$

В дальнейшем будем рассматривать только такой тип задачи. Однако любую **открытую** транспортную задачу $(\sum_{i=1}^n a_i \neq \sum_{j=1}^m b_j)$ легко закрыть. Нужно ввести дополнительный пункт производства (пункт потребления) с недостающим объемом производства (объемом потребления) и с нулевыми стоимостями перевозок.

Предполагается, что известны величины w_{ij} — затраты по перевозке единицы продукта из i -го пункта производства в j -й пункт потребления. Они могут быть выражены в стоимостной (денежной) форме или в натуральной (километрах). Требуется найти такой план перевозок, при котором были бы удовлетворены потребности в пунктах (B_1, B_2, \dots, B_m) и при этом суммарные затраты на перевозку были бы минимальны. Обозначая через x_{ij} количество продукта, перевозимое из i -го пункта производства в j -го пункт потребления, приходим к следующей математической формулировке задачи:

Найти минимум целевой функции:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \quad (2)$$

Так же для корректности задачи необходимо соблюдать три условия:

$$\text{Н1. } \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j; \quad (j = \overline{1, m})$$

$$\text{Н2. } \sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i; \quad (i = \overline{1, n})$$

$$\text{Н3. } x_{ij} \geq 0; \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m})$$

Получается суммарные затраты на транспортировку в каждый пункт потребления завозится требуемое количество продукта, а так же из каждого пункта производства полностью вывозится произведенный продукт.

Всякий набор величин $x_{ij} (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m})$, удовлетворяющих условиям (Н1–Н3), мы будем называть допустимым планом перевозок. План, для которого суммарные затраты (2) достигают минимума, называется оптимальным.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Условия транспортной задачи удобно представить в виде матрицы, которая имеет название **матрица перевозок**. В первой строке указаны величины потребностей, в первом столбце - значения запасов. В клетках внутренней матрицы $(m \times n)$ записывают стоимости перевозок и сами перевозки. Нумеровать будем только строки и столбцы внутренней матрицы.

Рассмотрим теорему о разрешимости транспортной задачи:

Теорема 1. *Транспортная задача имеет решение, если суммарный запас груза в пунктах отправления равен суммарному спросу в пунктах назначения, т.е. если выполняется равенство (1).*

Доказательство. В случае превышения запаса над потребностью $\sum_{i=1}^n a_i > \sum_{j=1}^m b_j$

как уже было обговорено выше, вводится фиктивный $(m+1)$ -ый пункт назначения с потребностью $b_{m+1} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j$

Соответствующие тарифы считаются равными нулю:

$$w_{im+1} = 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

После этих преобразований получим закрытую модель транспортной задачи.

Аналогично, при $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{j=1}^m b_j$ вводится фиктивный $(n+1)$ пункт отправления с грузом, $a_{n+1} = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n a_i$ а тарифы полагаются равными нулю:

$$w_{n+1j} = 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

После этих преобразований получим закрытую модель транспортной задачи.

Теперь если в любом случае мы можем свести задачу к виду $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j = A$ можем получить такие величины

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}; \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}$$

Исходя из выше полученного имеем решение:

$$x_{ij} \geq 0$$

Так как $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j = A$ получаем:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^m \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^m b_j}{A} = a_i \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^n a_i}{A} = b_j \quad (4)$$

Следовательно, система величин x_{ij} , удовлетворяя всем условиям транспортной задачи, является ее решением. \square

Так же стоит доказать еще одну теорему связанную с тем что все базисы транспортной задачи треугольные. То есть система уравнений полученная содержит по крайней мере одно уравнение с единственным неизвестным, и даже если его исключить, то опять найдется по крайней мере одно уравнение с единственной неизвестной.

Теорема 2. *Все базисы в транспортной задаче задаются треугольной системой уравнений.*

Доказательство. Рассмотрим ячейки матрицы перевозок и пока покажем, что по крайней мере одна строка или по крайней мере один столбец содержит лишь одну базисную переменную и после удаления этой строки или этого столбца оставшийся массив сохранит это свойство.

Прежде всего каждая строка и каждый столбец содержит по крайней мере одну базисную переменную. В противном случае не выполняется условие отличия от 0 суммы по строке или по столбцу.

Для массива размерностью $n \times m$, если каждая строка содержит по крайней мере две базисные переменные, то количество базисных переменных не меньше $2n$; если каждый столбец содержит по крайней мере две базисные переменные, то количество базисных переменных не меньше $2m$. Таким образом, общее количество базисных переменных не меньше $m + n$, но это невозможно, поскольку имеется всего $n + m - 1$ базисных переменных. Поэтому хотя бы одна строка или хотя бы один столбец содержат лишь одну базисную переменную.

Если вычеркнуть эту строку или этот столбец, рассуждение можно повторить, а значит, описанное выше свойство выполняется для оставшегося массива, что и требовалось доказать. \square

Так же стоит заметить, что если все a_i или b_j - целые, значения базисных переменных в допустимом базисном решении тоже целые. Поскольку это задача линейного программирования, оптимальное решение является базисным допустимым решением и, следовательно, целым. Это очень важно. Ведь тогда гарантируется, что в задачах не будет получено абсурдное решение.

С учетом выше представленного задача принимает вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i; \quad i = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = b_j; \quad j = \overline{1, m} \\ x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m} \end{cases} \quad (5)$$

Пример:

Составить математическую модель транспортной задачи перевоза груза из 3 складов в 5 магазинов. Матрица перевозок будет выглядеть так:

Пункты	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1						30
	2	7	3	6	2	
A2						70
	9	4	5	7	3	
A3						50
	5	7	6	2	4	
Потребность	10	40	20	60	20	

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 30 + 70 + 50 = 150 \quad \sum_{j=1}^5 b_j = 10 + 40 + 20 + 60 + 20 = 150$$

В качестве примера открытой модели давайте заменим потребность $B4$, которая равняется 60 на 40. В таком случае нужно было бы ввести еще одного потребителя с потребностью $B6 = 20$ и с нулевыми стоимостями $w_{16} = w_{26} = w_{36} = 0$. Матрица перевозок тогда станет следующей:

Пункты	B1		B2		B3		B4		B5		B6		Запасы
A1													30
		2		7		3		6		2		0	
A2													70
		9		4		5		7		3		0	
A3													50
		5		7		6		2		4		0	
Потребность	10		40		20		40		20		20		

3 Методы построения опорного плана

3.1 Метод северо-западного угла

Теорема 3. *Существует план, содержащее не более чем $(m + n - 1)$ положительных перевозок x_{ij} . При этом система векторов соответствующая таким перевозкам x_{ij} , линейно независима.*

Доказательство. Конструктивным доказательством теоремы может послужить процесс получения первого опорного плана, предложенный Данцигом и названный Чарнесом и Купером «**правилом северо-западного угла**». Применим это правило к следующей таблице:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	a_1
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	a_2
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	a_3
b_1	b_2	b_3	b_4	

Определим сначала значение переменной x_{11} , стоящей в верхнем левом углу. Пусть $x_{11} = \min(a_1, b_1)$; если $a_1 \leq b_1$, то $x_{11} = a_1$ и все $x_{1j} = 0$ для $j = 2, 3, 4$. Если $a_1 \geq b_1$, то $x_{11} = b_1$, и все $x_{i1} = 0$ для $i = 2, 3, 4$. Для определенности допустим, что справедливо первое предположение; тогда таблица преобразуется, как показано ниже в шаге 1. Здесь общее количество продукта, вывозимого из первого пункта отправления, уменьшается до нуля, а общее количество, которое необходимо подвезти к первому пункту назначения, равно $b_1 - a_1$.

Шаг 1: Пример $b_1 > a_1$

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	a_2
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	a_3
$b_1 - a_1$	b_2	b_3	b_4	

После этого определяем значение первой переменной во второй строке. Пусть $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$. Если допустить, что $a_2 > b_1 - a_1$, $x_{21} = b_1 - a_1$, и $x_{31} = 0$. Это показано в шаге 2. Количество продукта, которое осталось перевезти из пункта отправления 2, теперь равно $a_2 - b_1 + a_1$. В свою очередь потребность первого пункта назначения полностью удовлетворена.

Шаг 2: Допустим, что $a_2 > b_1 - a_1$.

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$a_2 - b_1 + a_1$
0	x_{32}	x_{33}	x_{34}	a_3
0	b_2	b_3	b_4	

Подобным же образом в зависимости от допущений, указанных далее, получаем следующие шаги. В каждом из них определяется значение переменной x_i ,

и сводится к нулю либо запас i -го пункта отправления, либо потребность j -го пункта назначения, или и то и другое вместе.

Шаг 3: Положим $a_2 - b_1 + a_1 > b_2$.

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	$x_{22} = b_2$	x_{23}	x_{24}	$a_2 - b_1 + a_1 - b_2$
0	0	x_{33}	x_{34}	a_3
0	0	b_3	b_4	

Шаг 4: Пусть $a_2 - b_1 + a_1 - b_2 < b_3$.

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	$x_{22} = b_2$	$x_{23} = a_2 - b_1 + a_1 - b_2$	0	0
0	0	x_{33}	x_{34}	a_3
0	0	$b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$	b_4	

Из шага 4 видно, что $x_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$ и $x_{34} = b_4$. Следует отметить, что каждая из перевозок x_i была получена прибавлением и вычитанием различных комбинаций a_i и b_j . Поэтому если a_i и b_j были первоначально неотрицательными целыми числами, то и решение, получаемое в результате описанного выше процесса, будет состоять из неотрицательных целых чисел. Нетрудно видеть, что этот план может содержать самое большее $n + m - 1$ положительных перевозок. При наших предположениях относительно величин a_i и b_j , и допущениях, сделанных при построении плана в рассмотренном примере с тремя пунктами отправления и четырьмя пунктами назначения, положительными перевозками являются:

$$\begin{aligned} x_{11} &= a_1; & x_{21} &= b_1 - a_1; \\ x_{22} &= b_2; & x_{23} &= a_2 - b_1 + a_1 - b_2; \\ x_{33} &= b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2; & x_{34} &= b_4; \end{aligned}$$

Используя приведенный алгоритм построения решения, можно доказать линейную независимость системы векторов, отвечающих выписанным положительным перевозкам. Тем самым будет установлено, что построенный план является опорным решением. \square

Пример:

Имеется транспортная таблица с исходными данными.

Пункты	В1	В2	В3	Запасы
А1				10
	5	3	1	
А2				20
	3	2	4	
А3				30
	4	1	2	
Потребность	15	20	25	

Внесем в верхнюю левую клетку максимально возможного объема перевозки.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	10	0	0	0
	5	3	1	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	5	20	25	

Запасы на складе A1 закончились, поэтому в оставшиеся ячейки данной строки ставим прочерки. Затем переходим к следующей строке и заполняем ее ячейки слева направо.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	10	0	0	0
	5	3	1	
A2	5			15
	3	2	4	
A3	0			30
	4	1	2	
Потребность	0	20	25	

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	10	0	0	0
	5	3	1	
A2	5	15	0	0
	3	2	4	
A3	0			30
	4	1	2	
Потребность	0	5	25	

Переходим к третьей строке и тоже заполняем ее слева направо.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	10	0	0	0
	5	3	1	
A2	5	15	0	0
	3	2	4	
A3	0	5		25
	4	1	2	
Потребность	0	0	25	

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	10	0	0	0
	5	3	1	
A2	5	15	0	0
	3	2	4	
A3	0	5	25	0
	4	1	2	
Потребность	0	0	0	

Получено опорное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 0 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

3.2 Метод наименьшего элемента

Ключевая идея заключается в следующем: в таблице из всех значений стоимостей выбираем наименьшее и в клетку (i, j) с наименьшей стоимостью записываем меньшее из чисел a_i, b_j . Исключаем из рассмотрения строку i , если запас a_i , вывезен полностью; или столбец j , если спрос b_j , удовлетворен полностью; или и строку и столбец, если $a_i = b_j$. Среди остальных стоимостей снова выбираем наименьшую и заполняем соответствующую клетку таблицы. Таким же образом продолжаем заполнять клетки таблицы, пока не будет найдено опорное решение.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1				10
	5	3	1	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	15	20	25	

Объемы запасов и потребностей уменьшаются на величину груза. Если запасы склада исчерпаны, то полностью вычеркиваем эту строку таблицы. Если потребности завода полностью удовлетворены — полностью вычеркиваем этот столбец таблицы.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	1	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	15	20	25	

Продолжаем в том же духе до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности удовлетворены.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	1	
A2		0		20
	3	2	4	
A3		20		10
	4	1	2	
Потребность	15	0	25	

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	1	
A2		0		20
	3	2	4	
A3	0	20	10	0
	4	1	2	
Потребность	15	0	5	

Пункты	В1	В2	В3	Запасы
А1	0	0	10	0
	5	3	1	
А2	15	0		5
	3	2	4	
А3	0	20	10	0
	4	1	2	
Потребность	0	0	5	

Пункты	В1	В2	В3	Запасы
А1	0	0	10	0
	5	3	1	
А2	15	0	5	0
	3	2	4	
А3	0	20	10	0
	4	1	2	
Потребность	0	0	0	

В итоге мы получим опорный план перевозок для транспортной задачи.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

4 Вырожденность опорного плана

Вырожденность в транспортной задаче возникает, если одна или более базисных переменных обращаются в 0. Вырожденное решение может быть получено, если частичные суммы по столбцам равны частичным суммам по строкам. Проблему можно решить без особых трудностей. На каждом шаге следует различать базисные переменные, которые равны 0 и стоят в соответствующих ячейках, и небазисные переменные.

При построении опорного решения могут возникнуть трудности, если суммы и по строкам, и по столбцам равны между собой и обратились в 0. В этом случае из дальнейших рассмотрений следует исключить только одну из них. Другая сумма будет ликвидирована при присвоении базисной переменной значения 0. Поскольку на каждом шаге, кроме последнего, удаляется только одна строка или только один столбец, то в результате получается $n + m - 1$ базисных переменных и столько заполненных клеток, сколько требуется (даже если некоторые базисные переменные обратились в 0).

Трудности могут возникнуть и при улучшении базисного допустимого решения. Применение правил может обратить в 0 более одной базисной переменной. В этом случае важно помнить, что только одна из них должна стать небазисной; остальные следует сохранить базисными, но с нулевыми значениями.

Пример:

Построить первоначальный план для следующей ситуации:

Пункты	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1					60
A2					30
A3					40
Потребность	40	50	10	30	

$60 + 30 + 40 = 40 + 50 + 10 + 30$ — спрос равен предложению — задача закрытая. Методом северо — западного угла получим опорный план. Начинаем с самой верхней левой ячейки.

Пункты	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	40				60
A2	0				30
A3	0				40
Потребность	40	50	10	30	

Потребности первого магазина выполнены полностью, но на складе еще остался груз. Заполняем дальше. Остатки груза с первого склада $60 - 40 = 20$ перевозим в магазин второй. При этом, первый склад опустел, но потребности магазина не выполнены полностью.

Пункты	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	40	20	0	0	60
A2	0				30
A3	0				40
Потребность	40	50	10	30	

Переходим ко второму складу. Все 30 единиц груза переносим в магазин второй, потребности которого совпали с предложением склада $50 - 20 = 30$.

При данном распределении склад опустошается и потребности второго магазина выполняются полностью. Происходит потеря базисной клетки.

Пункты	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	40	20	0	0	60
A2	0	30	0	0	30
A3	0	0			40
Потребность	40	50	10	30	

В данном случае необходимо к базисным клеткам добавить клетку с нулевым значением, расположенную рядом с только что заполненной, которая обусловила потерю.

С третьего склада направим 10 единиц груза в магазин 4 для полного выполнения его потребностей. На 3-м складе остается $40 - 10 = 30$ единиц груза, которые перенесем в последний магазин.

Пункты	B1		B2		B3		B4		Запасы
A1	40		20		0		0		60
A2	0		30		0		0		30
A3	0		0		10		30		40
Потребность	40		50		10		30		

Опорный план составлен. Количество базисных ячеек равно $6 = 3 + 4 - 1$. Условие невырожденности выполнено.

5 Метод потенциалов

Рассмотрим теорему об оптимальности решения транспортной задачи методом потенциалов.

$$u_i + v_j = c_{ij} : \quad \forall x_{ij} > 0 \quad (6)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} : \quad \forall x_{ij} = 0 \quad (7)$$
$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}$$

Немного перепишем исходную задачу и введем пару новых понятий

u_i ($i = \overline{1, n}$) - оценка единицы запаса (потенциал поставщика)
 v_j ($j = \overline{1, m}$) - оценка единицы спроса (потенциал потребителя)

Тогда задача примет вид:

$$X = \sum_{i=1}^n a_i u_i + \sum_{j=1}^m b_j v_j \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (j = \overline{1, m})$$

$u_i (i = \overline{1, n}); \quad v_j (j = \overline{1, m})$ - произвольного знака

Алгоритм решения

1. Находится первый опорный план по одному из рассмотренных методов.
2. Проверяется найденный опорный план на оптимальность, для чего:
 - 2.1. Находятся потенциалы поставщиков $u_i (i = \overline{1, n})$ и потребителей $v_j (j = \overline{1, m})$ по формуле (6).

Примечание: Так как в опорном плане заполнено $n + m - 1$ клеток таблицы транспортной задачи, то для нахождения потенциалов по данному плану можно составить систему из $n + m - 1$ линейно независимых уравнений с $n + m$ неизвестными. Такая система является неопределенной, и поэтому одной неизвестной (обычно u_1) придают нулевое значение, а остальные находятся однозначно по формуле (6).
 - 2.2. Проверяется, выполнено ли условие (7) или, что то же самое, условие $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$, где s_{ij} , - характеристика каждой свободной ячейки матрицы. Если для всех свободных ячеек матрицы условие (7) выполнено, т.е. $s_{ij} \geq 0$, то опорный план транспортной задачи является оптимальным (решение задачи завершено). Если же для некоторых свободных клеток таблицы $s_{ij} < 0$, то клетка с наименьшим значением s_{ij} , является перспективной, и выполняется следующий пункт алгоритма.

2.3. К перспективной ячейке строится цикл, расставляются знаки по циклу, при этом в перспективную ячейку ставится плюс, а остальные знаки в вершинах цикла чередуются, и определяется величина перераспределения груза по формуле $Q = \min x_{ij}$, где x_{ij} - объем перевозки груза, записанный в клетках (вершинах) цикла таблицы, отмеченных знаком минус.

2.4. Осуществляется перераспределение груза по циклу на величину Q . В результате выполнения этого пункта будет получен новый опорный план, который проверяется на оптимальность, т.е. производится переход к пункту 2.1 алгоритма.

Пример:

Три завода производят однородную продукцию в количестве 650, 850 и 700 единиц соответственно. Эта продукция требуется четырем потребителям в количествах 500, 800, 300 и 600 единиц каждому. Затраты на перевозку единицы продукции (тыс. руб.) от каждого завода к каждому потребителю заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 30 & 50 & 62 & 10 \\ 40 & 50 & 80 & 20 \\ 50 & 10 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

Требуется спланировать перевозку груза так, чтобы суммарные транспортные затраты были минимальными.

Занесем данные транспортной задачи и найдем опорный план перевозок продукции методом минимальной стоимости. Найденный план является невырожденным, так как в таблице заполнено ровно $m+n-1=3+4-1=6$ клеток. Затраты на перевозку продукции для данного плана равны:

$$X = 1\,500 + 6\,000 + 18\,000 + 5\,000 + 24\,000 + 7\,000 = 61\,500$$

Применяя далее алгоритм решения задачи, находим потенциалы поставщиков и потребителей. Полагая $u_1 = 0$, определяем, что $v_1 = 30$, так как $u_1 + v_1 = 30$, и из соотношения $u_1 + v_4 = 10$ находим $v_4 = 10$. Аналогично найдены все другие потенциалы.

Пункты	B1	B2	B3	B4	Запасы	u_i
A1	30	50	62	10	650	0
	50					
A2	40	50	80	20	850	10
	450	⊕ 100	⊖ 300			
A3	50	10	30	30	700	-30
		⊖ 700	⊕			
Потребность	500	800	300	600	2200 2200	
v_j	30	40	70	10		

Найдем характеристики свободных клеток таблицы транспортной задачи по формуле

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

$$s_{12} = 50 - (0 + 40) = 10, \quad s_{13} = 62 - (0 + 70) = -8,$$

$$s_{24} = 20 - (10 + 10) = 0, \quad s_{31} = 50 - (30 - 30) = 50,$$

$$s_{33} = 30 - (-30 + 70) = -10, \quad s_{34} = 30 - (-30 + 10) = 50.$$

Так как $s_{13} < 0$ и $s_{33} < 0$, то план неоптимальный, и перспективной ячейкой в ней будет ячейка (3, 3) с наименьшей характеристикой $s_{33} = -10$.

Строим цикл к перспективной клетке и находим величину перераспределения груза $Q = \min(300, 700) = 300$.

Осуществляем перераспределение груза по циклу, добавляя величину $Q = 300$ в клетках со знаком $+$ и вычитая - в клетках со знаком $-$. В результате получаем новый опорный план.

Применяя правило пункта 2 алгоритма к полученному плану транспортной задачи, убеждаемся, что он оптимальный, так как для всех свободных клеток таблицы $s_{ij} \geq 0$. Суммарные минимальные затраты на перевозку продукции:

$$Z_{\min} = 61\,500 - 10 \cdot 300 = 58\,500$$

Пункты	B1	B2	B3	B4	Запасы	u_i
A1	30	50	62	10	650	0
	50			600		
A2	40	50	80	20	850	10
	450	400				
A3	50	10	30	30	700	-30
		400	300			
Потребность	500	800	300	600	2200 2200	
v_j	30	40	70	10		

Эти минимальные затраты достигаются при следующих объемах:

$$x_{11} = 50, \quad x_{14} = 600, \quad x_{21} = 450,$$

$$x_{22} = 400, \quad x_{32} = 400, \quad x_{33} = 300.$$

Остальные неизвестные оставляем равны нулю.

6 Решение с помощью теории графов

В этом разделе рассмотрен алгоритм решения транспортной задачи при помощи теории графов и потоков. Методы представленные ниже подходят для решения гораздо большего класса задач, однако они эффективно справляются и с ранее поставленной проблемой. Прежде чем переходить на прямую к алгоритму, который решает транспортную задачу стоит рассмотреть пару дополнительных определений и теорем.

6.1 Транспортные сети и потоки

Транспортная сеть $G = (V, E)$ представляет собой ориентированный граф, в котором каждое ребро $(u, v) \in E$ имеет неотрицательную **пропускную способность** $c(u, v) \geq 0$. Далее мы потребуем, чтобы в случае, если содержит ребро (u, v) , обратного ребра (v, u) не было (вскоре мы увидим, как обойти это ограничение). Если $(u, v) \notin E$, то для удобства определим $c(u, v) = 0$, а также запретим петли. В транспортной сети выделяются две вершины: **исток** s и **сток** t . Для удобства предполагается, что каждая вершина лежит на некоем пути от истока к стоку, т.е. для любой вершины $v \in V$ транспортная сеть содержит путь $s \rightarrow v \rightarrow t$. Таким образом, граф является связным и, поскольку каждая вершина, отличная от s , содержит как минимум одно входящее ребро, $|E| > |V| - 1$. Рис. 1 показан пример транспортной сети.

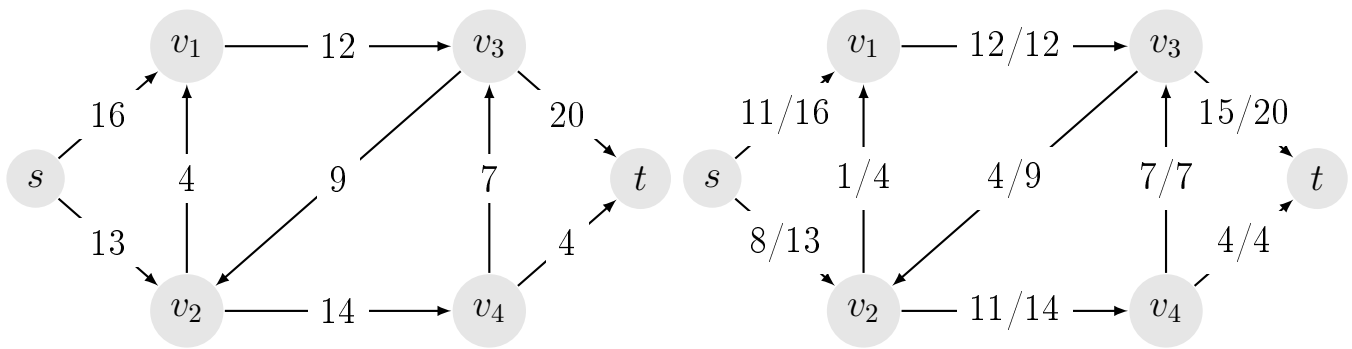


Рис. 1: Транспортная сеть и Поток в транспортной сети

Транспортная сеть $G = (V, E)$ для задачи о грузовых перевозках компании. Истоком s является фабрика откуда груз поступает, а стоком t - склад, куда груз направляется. Продукты доставляются через промежуточные пункты, но за день из города u в город v можно отправить только (u, v) товара. На рисунке указана пропускная способность каждого ребра сети.

Поток f в транспортной сети G со значением $|f| = 19$. Каждое ребро (u, v) имеет метку $f(u, v)/c(u, v)$ (косая черта используется только для того, чтобы отделить поток от пропускной способности, и не обозначает деление).

Теперь можно дать более формальное определение потоков. Пусть $G = (V, E)$ - транспортная сеть с функцией пропускной способности c . Пусть s является исто-

ком, а t - стоком. **Потоком** в G является действительная функция $f : V \times V \rightarrow R$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

Ограничение пропускной способности.

$$\forall u, v \in V: 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$$

Сохранение потока.

$$\forall u \in V - \{s, t\}: \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$$

Когда $(u, v) \notin E$, поток из u в v быть не может, так что $f(u, v) = 0$.

Неотрицательную величину $f(u, v)$ мы называем потоком из вершины u в вершину v . **Величина** $|f|$ потока f определяется как:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) \quad (8)$$

т.е. как суммарный поток, выходящий из истока, минус входящий в него. (Здесь запись $|\cdot|$ означает величину потока, а не абсолютное значение или мощность. Обычно транспортная сеть не имеет ребер, входящих в исток, и поток в исток, задаваемый суммой $f(v, s)$, равен 0. Однако мы включаем его, поскольку позже в этой главе при рассмотрении остаточных сетей потоки в исток станут важными. В задаче о **максимальном потоке** дана некоторая транспортная сеть G с истоком s и стоком t , и необходимо найти поток максимальной величины.

6.2 Остаточные сети

Интуитивно понятно, что если заданы некоторая транспортная сеть G и поток f , то **остаточная сеть** G_f - это сеть, состоящая из ребер с пропускными способностями, указывающими, как могут меняться потоки через ребра G . Ребро транспортной сети может пропустить дополнительный поток, равный пропускной способности ребра минус поток, проходящий через это ребро. Если это значение положительно, мы помещаем такое ребро в G_f с **остаточной пропускной способностью** $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.

Дополнительный поток могут пропустить только те ребра в G , которые входят в G_f ; ребра (u, v) , поток через которые равен их пропускной способности, имеют $c_f(u, v) = 0$ и не входят в G_f .

Однако остаточная сеть G_f может также включать ребра, не входящие в G . Когда алгоритм работает с потоком с целью его увеличения, ему может потребоваться уменьшить поток в некотором конкретном ребре. Чтобы представить возможное уменьшение положительного потока $f(u, v)$ в ребре в G , мы помещаем ребро (v, u) в G_f с остаточной пропускной способностью $c_f(v, u) = f(u, v)$, т.е. ребро, которое может пропустить поток в направлении, обратном к (u, v) , не больше

потока, идущего по ребру (u, v) . Эти обратные ребра в остаточной сети позволяют алгоритму пересылать обратно поток, уже переданный по ребру. Пересылка в обратном направлении эквивалентна уменьшению потока в ребре, которое во многих алгоритмах является необходимой операцией.

Остаточной пропускной способностью ребра (u, v) называется величина дополнительного потока, который мы можем направить из u в v , не превысив пропускную способность $c(u, v)$. Иными словами:

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{если } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{если } (v, u) \in E \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (9)$$

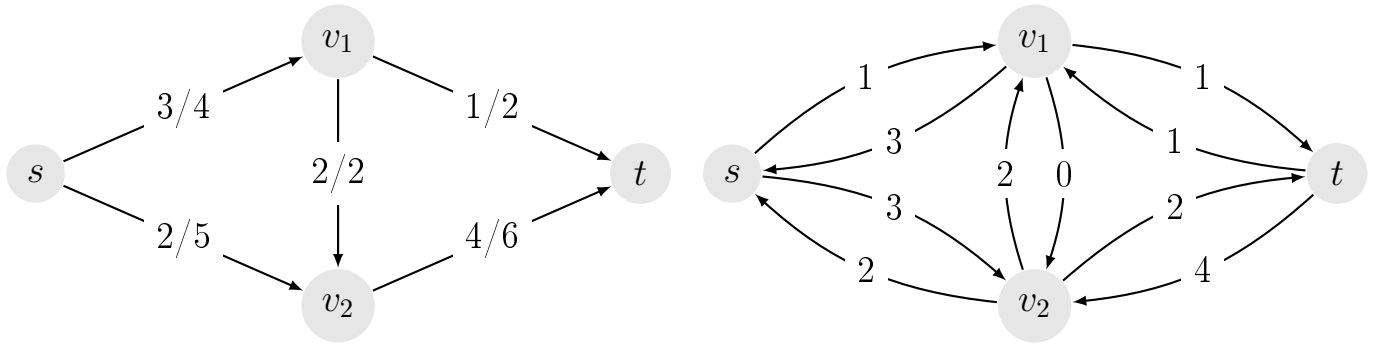


Рис. 2: Граф с некоторым потоком и Остаточная сеть этого графа

Для транспортной сети $G = (V, E)$ и потока f **остаточная сеть** G , порожденная потоком f , представляет собой граф $G_f = (V, E_f)$, где

$$E = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\} \quad (10)$$

Иначе говоря, как и отмечалось выше, по каждому ребру остаточной сети, или остаточному ребру, можно направить поток, больший 0.

Заметим, что остаточная сеть G_f подобна транспортной сети с пропускными способностями, задаваемыми f . Поток в такой сети предоставляет указания по добавлению потока к исходной транспортной сети G .

Если f представляет собой поток в G , а f' представляет собой поток в соответствующей остаточной сети G_f определим **увеличение** $f \nearrow f'$ потока f на f' как функцию, отображающую $V \times V$ на \mathbb{R} определенную следующим образом:

$$f \nearrow f'(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) & \text{если } (u, v) \in E \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (11)$$

Интуитивно понятно, что это определение следует из определения остаточной сети. Мы увеличиваем поток в ребро (u, v) на $f'(u, v)$, но уменьшаем его на $f'(v, u)$, поскольку пропускание потока по обратным ребрам в остаточной сети означает уменьшение потока в исходной сети. Пропускание потока по обратному

ребру в остаточной сети известно также как **сокращение**. Например, если мы пересылаем 5 ящиков с хоккейными шайбами из u в v , а 2 ящика - из v в u , то это эквивалентно (конечно, с точки зрения окончательного результата, а не оплаты перевозок) пересылке 3 ящиков из u в v , и ничего - из v в u . Сокращения такого вида являются ключевым моментом любого алгоритма максимального потока.

6.3 Увеличивающие пути

Для заданных транспортной сети $G = (V, E)$ и потока f **увеличивающим путем** является простой путь из s в t в остаточной сети G_f . Согласно определению остаточной сети мы можем увеличить поток в ребре (u, v) увеличивающего пути до $c_f(u, v)$ без нарушения ограничения пропускной способности соответствующего ребра в исходной сети.

Максимальная величина, на которую можно увеличить поток в каждом ребре увеличивающего пути p , называется остаточной пропускной способностью пути и задается формулой

$$c_f(p) = \min \{c_f(u, v) : (u, v) \text{ принадлежит } p\} \quad (12)$$

6.4 Разрезы транспортной сети

В методе Форда-Фалкерсона проводится многократное увеличение потока вдоль увеличивающих путей до тех пор, пока не будет найден максимальный поток. Откуда нам известно, что по завершении алгоритма мы действительно найдем максимальный поток?

В теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе, которую вскоре докажем, утверждается, что поток является максимальным тогда и только тогда, когда его остаточная сеть не содержит увеличивающих путей. Однако для доказательства данной теоремы необходимо ввести понятие разреза транспортной сети.

Разрезом (S, T) транспортной сети $G = (V, E)$ называется разбиение множества вершин V на множества S и $T = V \setminus S$, такие, что $s \in S$, $t \in T$.

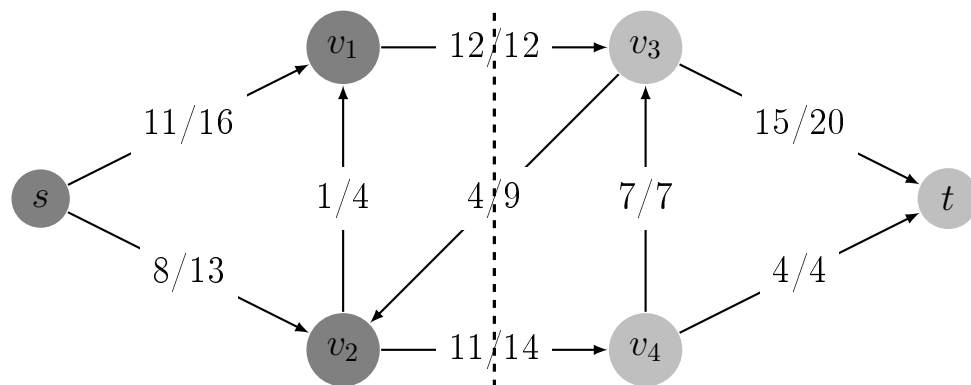


Рис. 3: Темные вершины относятся к множеству S , а светлые к множеству T

Пропускной способностью разреза (S, T) обозначается $c(S, T)$ и вычисляется по формуле:

$$c(S, T) = \sum_{u \in V, v \in T} c(u, v) \quad (12)$$

Минимальным разрезом сети является разрез, пропускная способность которого среди всех разрезов сети минимальна.

Теорема 4. *Величина любого потока f в транспортной сети G ограничена сверху пропускной способностью произвольного разреза G :*

$$\forall (S, T) : f(S, T) \leq c(S, T)$$

Доказательство. Пусть (S, T) представляет собой произвольный разрез G и пусть f является произвольным потоком:

$$c(S, T) - f(S, T) = \sum_{u \in V, v \in T} c(u, v) - \sum_{u \in V, v \in T} f(u, v) = \sum_{u \in V, v \in T} (c(u, v) - f(u, v)) \geq 0$$

За счет ограничений пропускных способностей следует $f(u, v) \leq c(u, v)$ □

Теорема 5. (О максимальном потоке и минимальном разрезе)

Поток f в G - максимален \Leftrightarrow В остаточной сети G_f не существует увеличивающих путей из s в t .

$$f(S, T) = c(S, T) : f \rightarrow \max \quad u \quad (S, T) \rightarrow \min$$

Доказательство.

(\Leftarrow) Пойдем от противного, пусть существует увеличивающий путь в сети G_f , то по определению в доль этого пути можно увеличить текущий поток на значение (12). Изначально f - максимальный поток, однако есть возможность его увеличить, следовательно получается противоречие.

(\Rightarrow)

Если не существует увеличивающего пути из s в t , то разделим множество V на два:

$$S = \{v \in V : G_f \text{ есть путь из } s \text{ в } v\}$$

$$T = V \setminus S$$

Получим разрез (S, T) , т.к. пути из s в t не существует, то $u \in S$ и $v \in T$ $c_f(u, v) = 0$, а такое может быть только в том случае, когда $f(u, v) = c(u, v)$.

Если для всех $u \in S$ и $v \in T$ справедливо, что $f(u, v) = c(u, v)$, то по Теореме 4 любой поток ограничен пропускной способностью разреза. Следовательно единственный случай, когда $f(u, v) = c(u, v)$, это когда поток f - максимальный, а пропускная способность разреза c - минимальный. □

6.5 Транспортная сеть с несколькими истоками и стоками

В задаче о максимальном потоке может быть несколько истоков и стоков. Например, у компании может быть m фабрик $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ и n складов $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, как показано ниже, где приведен пример транспортной сети с пятью истоками и тремя стоками. Эта задача не сложнее, чем обычная задача о максимальном потоке.

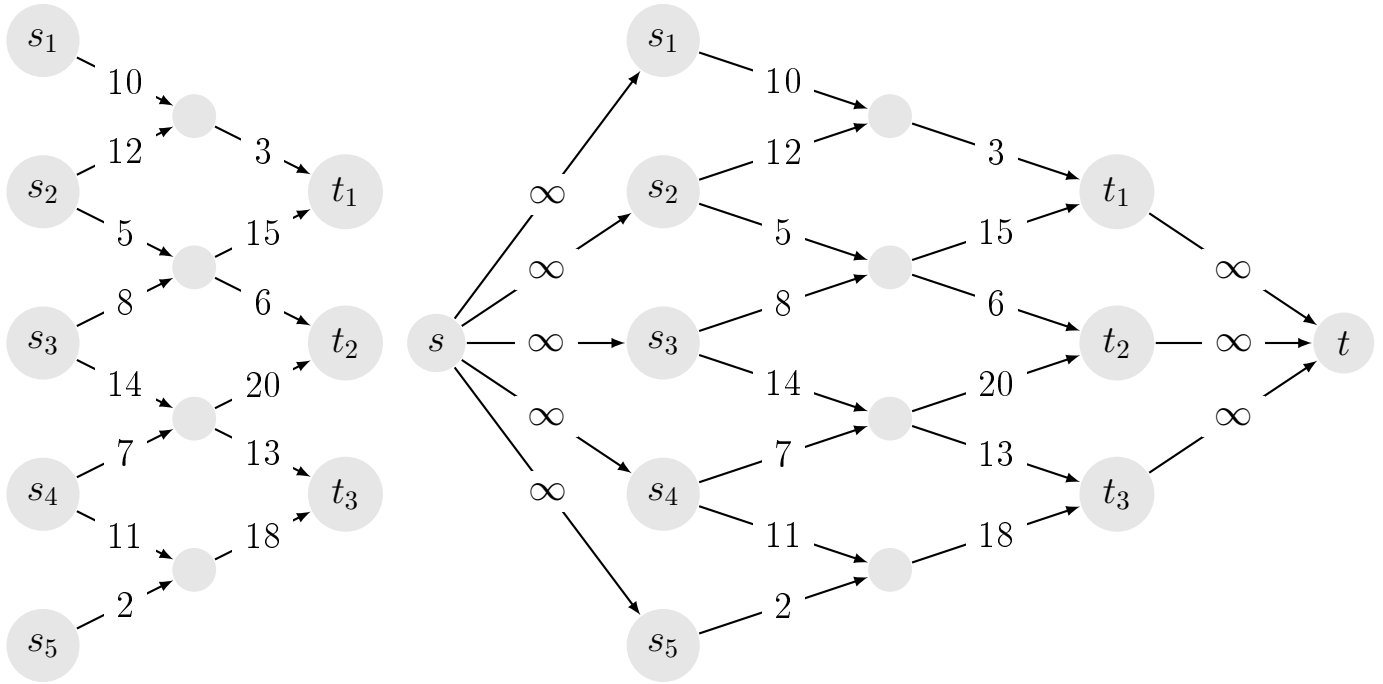


Рис. 4: Добавление фиктивных вершин

Преобразование задачи о максимальном потоке с несколькими истоками и стоками в задачу с одним истоком и одним стоком. Слева транспортная сеть с пятью истоками $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ и тремя стоками $T = \{t_1, t_2, t_3\}$. Справа эквивалентная сеть с одним истоком и одним стоком. Добавляем фиктивный исток s и ребра с бесконечной пропускной способностью от до каждого из исходных истоков. Кроме того, добавляем фиктивный сток t и ребра с бесконечной пропускной способностью из каждого из исходных истоков в t .

Задача сведена к обычной задаче о максимальном потоке. Для этого в сеть добавляются **фиктивный исток** s и ориентированные ребра (s, s_i) с пропускной способностью $(s, s_i) = \infty$ для каждого $i = \overline{1, m}$. Точно так же создается **фиктивный сток** t и добавляются ориентированные ребра (t_i, t) с $c(t_i, t) = \infty$ для каждого $i = \overline{1, n}$.

Любой поток в сети слева соответствует потоку в сети справа, и наоборот. Единственный исток s просто обеспечивает поток любой требуемой величины к истокам s_i , а единственный сток t аналогичным образом потребляет поток любой желаемой величины от множественных стоков t_i .

6.6 Метод Форда-Фалкерсона

Метод Форда-Фалкерсона итеративно увеличивает значение потока. Вначале поток обнуляется: $f(u, v) = 0: \forall u, v \in V$. На каждой итерации величина потока в G увеличивается посредством поиска **увеличивающего пути** в связанной **остаточной сети** G_f . Зная ребра увеличивающего пути в G_f , мы можем легко идентифицировать конкретные ребра в G , для которых можно изменить поток таким образом, что его величина увеличится.

Величина потока итеративно увеличивается посредством поиска увеличивающего пути (путь от источника s к стоку t , вдоль которого можно послать ненулевой поток), однако поток через конкретное ребро G может возрастать или уменьшаться. Уменьшение потока через некоторые ребра может быть необходимым для того, чтобы позволить алгоритму переслать больший поток от истока к стоку. Алгоритм помогающий с поиском увеличивающих путей реализуется с помощью обхода в глубину (DFS). Многократно увеличиваем поток до тех пор, пока остаточная сеть не будет иметь ни одного увеличивающего пути.

Исходя из Теореме 5 (О максимальном потоке и минимальном разрезе) следует, что по завершении данного процесса получается максимальный поток.

6.7 Поток минимальной стоимости

Пусть дана сеть $G(V, E)$ $s, t \in V$ — источник и сток. Ребра $(u, v) \in E$ имеют пропускную способность $c(u, v)$, поток $f(u, v)$ и цену за единицу потока $w(u, v)$. Тогда **общая стоимость потока** из s в t :

$$p(u, v) = \sum_{u, v \in V, f(u, v) > 0} a(u, v) \cdot f(u, v)$$

Задача:

Дана сеть $G(V, E)$. $S, T \in V$ — источник и сток. Ребра $(u, v) \in E$ имеют пропускную способность $c(u, v)$, поток $f(u, v)$ — и цену за единицу потока $w(u, v)$. Требуется найти максимальный поток, суммарная стоимость которого минимальна.

Алгоритм решения

1. Определим для каждого прямого ребра (u, v) обратное ребро (v, u) . Определим его характеристики: $c(v, u) = 0$, $f(v, u) = -f(u, v)$, $w(v, u) = -w(u, v)$.
2. Для каждого ребра зададим поток равный 0.
3. Найдем произвольный максимальный поток (любым алгоритмом нахождения максимального потока), построим для него остаточную сеть, где каждому ребру будет соответствовать величина $w(u, v) \cdot (c(u, v) - f(u, v))$.

4. При помощи **алгоритма Форда-Беллмана или Левита** найдем отрицательный цикл в построенной сети (отрицательный цикл ищется по стоимости ребра, т.е. ребра имеют вес $w(u, v)$). Если отрицательный цикл не найден — перейдем к **шагу 6**.
5. Избавимся от отрицательного цикла, для этого пустим по нему максимально возможный поток. Величина потока равна минимальной остаточной пропускной способности в цикле. Перейдем к **шагу 4**.
6. Отрицательных циклов в остаточной сети нет, значит, максимальный поток минимальной стоимости найден.

6.8 Решение с помощью теории потоков

Для того чтобы свести транспортную задачу к потокам необходимо рассмотреть двудольный граф, в котором пункты производства находятся в левой доле, а пункты потребления — в правой. Пункты производства и потребления попарно соединяются рёбрами бесконечной пропускной способности и цены за единицу потока w_{ij} . Полученный граф так же является транспортной сетью и все свойства, рассмотренные выше справедливы и для него.

Однако количество истоков и стоков больше одного, поэтому необходимо применить метод, который был рассмотрен в пункте о "**транспортной сети с несколькими истоками и стоками**". Однако пропускная способность рёбер из истока в каждый пункт производства равна запасу продукта $a(ij)$ в этом пункте. Цена же за единицу потока у этих рёбер равна 0.

Аналогично поступаем со стоком. Пропускная способность рёбер из каждого пункта потребления в сток равна b_{ij} потребности в продукте в этом пункте. Цена за единицу потока у этих рёбер так же равна 0.

Дальше решается задача о нахождении **максимального потока минимальной стоимости**. Полученный ответ будет и являться оптимальным решением поставленной задачи.

При решении несбалансированной транспортной задачи нужно ввести фиктивные пункты назначения или отправления, чтобы сохранялись свойства транспортных сетей и условия самой задачи. Это необходимо для того, чтобы иметь возможность применить алгоритм решения, построенный на использовании транспортных путей.

7 Заключение

В работе изложены основные подходы и методы решения транспортной задачи, являющейся одной из наиболее распространенных задач линейного программирования.

Решение данной задачи позволяет разработать наиболее рациональные пути и способы транспортирования товаров, устранить чрезмерно дальние, встречные, повторные перевозки. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий и фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д.

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза. В этом случае величины тарифов c_{ij} имеют различный смысл в зависимости от конкретной экономической задачи. К таким задачам относятся следующие: оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них c_{ij} является таким экономическим показателем, как производительность. Задача позволяет определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей. Так как транспортная задача требует нахождения минимума, то значения c_{ij} берутся с отрицательным знаком; оптимальные назначения, или проблема выбора. Уменьшение порожнего пробега сократит количество автомобилей для перевозок, увеличив их производительность; решение задач с помощью метода запрещения перевозок. Используется в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть отправлен одному из потребителей. Данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости, тем самым в эту клетку не будут производиться перевозки.

Таким образом, важность решения данной задачи несомненна.

Список литературы

- [1] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования; Москва: Советское радио, 1969 - 736с.
- [2] Канторович Л.В., Горстко А.Б. Математическое оптимальное программирование в экономике; Москва: Знание, 1968 - 96с.
- [3] Палий И.А., Линейное программирование. Учебное пособие; Москва: Эксмо, 2008 - 256с.
- [4] Костевич Л.С. Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений; Минск: Новое знание, 2003 - 424с.
- [5] Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах; Санкт-Петербург: Лань, 2011 - 352с.
- [6] Данциг Д. Линейное программирование, его обобщения и применения; Москва: Прогресс, 1966 - 602с.
- [7] Гасс С. Линейное программирование; Москва: Физматгиз, 1961 - 303с.
- [8] Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е издание; Москва: «Вильямс», 2013. - 1328 с.