Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего образования
**«Северо-Осетинский государственный университет
имени Коста Левановича Хетагурова»**

Курсовая работа

«Транспортная задача. Методы решенияю.»

Выполнил:
Студент 3 курса направления:
«Прикладная математика и информатика»
Гамосов Станислав Станиславович

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Тотиева Жанна Дмитриевна

«Работа допустима к защите»
Заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук
Кусраев. А.Г. ____________

Владикавказ 2021

Содержание

1 Введение

Транспортная задача – это спектр задач с единой математической моделью, классическая формулировка, которой звучит: *«Задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов производства в пункты потребления»*. Такая форма встречается чаще всего в линейном программирование, а если точнее в его практических приложениях.

Линейное программирование является одним из разделов математического программирования – области математики, разрабатывающей теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Проблема была впервые формализована французским математиком *Гаспаром Монжем* в 1781 году. Прогресс в решении проблемы был достигнут во время Великой Отечественной войны советским математиком и экономистом *Леонидом Канторовичем.* Поэтому иногда эта проблема называется **транспортной задачей Монжа — Канторовича**.

Если вернуться к самой задачи огромное количество возможных вариантов перевозок затрудняет получение достаточно экономного плана эмпирическим или экспертным путем. Применение математических методов и вычислительных в планировании перевозок дает большой экономический эффект. Транспортные задачи могут быть решены **симплексным методом** однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Они, как и **симплексный метод**, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его получить оптимальный результат. Транспортная задача может также решаться с ограничениями и без ограничений.

В зависимости от способа представления условий транспортной задачи она может быть представлена в **графовой** или **матричной** форме.

2 Постановка задачи

Задача эта возникает, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителям. В этом случае для каждого потребителя безразлично, откуда, из каких пунктов производства будет поступать этот продукт, лишь бы он поступал в нужном объеме. Однако от того, насколько рациональным будет прикрепление пунктов потребления к пунктам производства, существенно зависит объем транспортной работы. В связи с этим естественно возникает вопрос о наиболее эффективном прикреплении, правильном направлении перевозок груза, при котором потребности удовлетворяются, а затраты на транспортировку минимальны. Более точно задача формулируется так.

Пусть имеются пункты производства $(A_1, A_2, ..., A_n)$ с объемами производства в единицу времени, равными соответственно $(a_1, a_2, ..., a_n)$, и пункты потребления $(B_1, B_2, ..., B_m)$ с объемами потребления, равными $(b_1, b_2, ..., b_m)$ соответственно. Будем предполагать, что производство и потребление сбалансированы — сумма объемов производства равна сумме объемов потребления. Такой вид транспортной задачи называется **закрытым**.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \tag{1}$$

В дальнейшем будем рассматривать только такой тип задачи. Однако любую **открытую** транспортную задачу $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq \sum\limits_{j=1}^{m} b_j)$ легко закрыть. Нужно ввести дополнительный пункт производства (пункт потребления) с недостающим объемом производства (объемом потребления) и с нулевыми стоимостями перевозок.

Предполагается, что известны величины c_{ij} — затраты по перевозке единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Они могут быть выражены в стоимостной (денежной) форме или в натуральной (километрах). Требуется найти такой план перевозок, при котором были бы удовлетворены потребности в пунктах $(B_1, B_2, ..., B_m)$ и при этом суммарные затраты на перевозку были бы минимальны. Обозначая через x_{ij} количество продукта, перевозимое из i-го пункта производства в j-го пункт потребления, приходим к следующей математической формулировке задачи:

Найти минимум целевой функции:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \tag{2}$$

Так же для корректности задачи необходимо соблюдать три условия:

$$\textbf{H1.}\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j; \quad (j = \overline{1,m})$$

$$\textbf{H2.}\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i; \quad (i = \overline{1,n})$$

$$\textbf{H3.}\ x_{ij} \geqslant 0; \quad (i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m})$$

Получается суммарные затраты на транспортировку в каждый пункт потребления завозится требуемое количество продукта, а так же из каждого пункта производства полностью вывозится произведенный продукт.

Всякий набор величин $x_{ij}(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$, удовлетворяющих условиям $(H1{-}H3)$, мы будем называть допустимым планом перевозок. План, для которого суммарные затраты (2) достигают минимума, называется оптимальным.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Условия транспортной задачи удобно представить в виде матрицы, которая имеет название **матрица перевозок**. В первой строке указаны величины потребностей, в первом столбце - значения запасов. В клетках внутренней матрицы ($m \times n$ штук) записывают стоимости перевозок и сами перевозки. Нумеровать будем только строки и столбцы внутренней матрицы.

Поставщики	Потребители						Запасы поставщика
	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	m	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1j} x_{1j}	$\cdots$	c_{1m} x_{1m}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2j} x_{2j}	$\cdots$	c_{2m} x_{2m}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\cdots$	c_{ij} x_{ij}	$\cdots$	c_{im} x_{im}	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	$\cdots$	c_{nj} x_{nj}	$\cdots$	c_{nm} x_{nm}	a_n
Спрос потребителя	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_m	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j$

Рассмотрим теорему о разрешимости транспортной задачи:

Теорема 1. *Транспортная задача имеет решение, если суммарный запас груза в пунктах отправления равен суммарному спросу в пунктах назначения, т.е. если выполняется равенство (1).*

Доказательство. В случае превышения запаса над потребностью $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ как уже было обговорено выше, вводится фиктивный $(m+1)$-ый пункт назначения с потребностью $b_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$

Соответствующие тарифы считаются равными нулю:

$$c_{im+1} = 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

После этих преобразований получим закрытую модель транспортной задачи.

Аналогично, при $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i < \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ вводится фиктивный $(n+1)$ пункт отправления с грузом, $a_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ а тарифы полагаются равными нулю:

$$c_{n+1j} = 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

После этих преобразований получим закрытую модель транспортной задачи.

Теперь если в любом случаи мы можем свести задачу к виду $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j = A$ можем получить такие величины

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}; \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}$$

Исходя из выше полученного имеем решение:

$$x_{ij} \geqslant 0$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j = A$ получаем:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum\limits_{j=1}^{m} b_j}{A} = a_i \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{A} = b_j \tag{4}$$

Следовательно, система величин x_{ij}, удовлетворяя всем условиям транспортной задачи, является ее решением. □

Так же стоит доказать еще одну теорему связанную с тем что все базисы транспортной задачи треугольные. То есть система уравнений полученная содержит по крайне мере одно уравнение с единственным неизвестным, и даже если его исключить, то опять найдется по крайней мере одно уравнение с единственной неизвестной.

Теорема 2. *Все базисы в транспортной задаче задаются треугольной системой уравнений.*

Доказательство. Рассмотрим ячейки матрицы перевозок и пока покажем, что по крайней мере одна строка или по крайней мере один столбец содержит лишь одну базисную переменную и после удаления этой строки или этого столбца оставшийся массив сохранит это свойство.

Прежде всего каждая строка и каждый столбец содержит по крайней мере одну базисную переменную. В противном случае не выполняется условие отличия от 0 суммы по строке или по столбцу.

Для массива размерностью $n \times m$, если каждая строка содержит по крайней мере две базисные переменные, то количество базисных переменных не меньше $2n$; если каждый столбец содержит по крайней мере две базисные переменные, то количество базисных переменных не меньше $2m$. Таким образом, общее количество базисных переменных не меньше $m+n$, но это невозможно, поскольку имеется всего $n+m-1$ базисных переменных. Поэтому хотя бы одна строка или хотя бы один столбец содержат лишь одну базисную переменную.

Если вычеркнуть эту строку или этот столбец, рассуждение можно повторить, а значит, описанное выше свойство выполняется для оставшегося массива, что и требовалось доказать. □

Так же стоить заметить, что если все a_i или b_j - целые, значения базисных переменных в допустимом базисном решении тоже целые. Поскольку это задача линейного программирования, оптимальное решение является базисным допустимым решением и, следовательно, целым. Это очень важно. Ведь тогда гарантируется, что в задачах не будет получено абсурдное решение.

С учетом выше представленного задача принимает вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i; \quad i=\overline{1,n} \\ \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j=\overline{1,m} \\ x_{ij} \geqslant 0; \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,m} \end{cases} \tag{5}$$

Пример:

Составить математическую модель транспортной задачи перевоза груза из 3 складов в 5 магазинов. Матрица перевозок будет выглядеть так:

Пункты	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	2	7	3	6	2	30
A2	9	4	5	7	3	70
A3	5	7	6	2	4	50
Потребность	10	40	20	60	20	

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 30 + 70 + 50 = 150 \qquad \sum_{j=1}^{5} b_j = 10 + 40 + 20 + 60 + 20 = 150$$

В качестве примера открытой модели давайте заменим потребность $B4$, которая равняется 60 на 40. В таком случаи нужно было бы ввести еще одного потребителя с потребностью $B6 = 20$ и с нулевыми стоимостями $c_{16} = c_{26} = c_{36} = 0$. Матрица перевозок тогда станет следующей:

Пункты	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Запасы
A1	2	7	3	6	2	0	30
A2	9	4	5	7	3	0	70
A3	5	7	6	2	4	0	50
Потребность	10	40	20	40	20	20	

3 Методы построения опорного плана

3.1 Метод северо-западного угла

Теорема 3. *Существует план, содержащее не более чем $(m + n - 1)$ положительных перевозок x_{ij}. При этом система векторов соответствующая таким перевозкам x_{ij}, линейно независима.*

Доказательство. Конструктивным доказательством теоремы может послужить процесс получения первого опорного плана, предложенный Данцигом и названный Чарнесом и Купером **«правилом северо-западного угла»**. Применим это правило к следующей таблице:

$$\begin{array}{cccc|c}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & a_1 \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & a_2 \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & a_3 \\
\hline
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 &
\end{array}$$

Определим сначала значение переменной x_{11}, стоящей в верхнем левом углу. Пусть $x_{11} = \min(a_1, b_1)$; если $a_1 \leqslant b_1$, то $x_{11} = a_1$ и все $x_{1j} = 0$ для $j = 2,\ 3,\ 4$. Если $a_1 \geqslant b_1$, то $x_{11} = b_1$, и все $x_{i1} = 0$ для $i = 2,\ 3,\ 4$. Для определенности допустим, что справедливо первое предположение; тогда таблица преобразуется, как показано ниже в шаге 1. Здесь общее количество продукта, вывозимого из первого пункта отправления, уменьшается до нуля, а общее количество, которое необходимо подвезти к первому пункту назначения, равно $b_1 - a_1$.

Шаг 1: Пример $b_1 > a_1$

$$\begin{array}{cccc|c}
x_{11} = a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & a_2 \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & a_3 \\
\hline
b_1 - a_1 & b_2 & b_3 & b_4 &
\end{array}$$

После этого определяем значение первой переменной во второй строке. Пусть $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$. Если допустить, что $a_2 > b_1 - a_1$, $x_{21} = b_1, _{-1}$, и $_{31} = 0$. Это показано в шаге 2. Количество продукта, которое осталось перевезти из пункта отправления 2, теперь равно $a_2 - b_1 + a_1$. В свою очередь потребность первого пункта назначения полностью удовлетворена.

Шаг 2: Допустим, что $a_2 > b_1 - a_1$.

$$\begin{array}{cccc|c}
x_{11} = a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{21} = b_1 - a_1 & x_{22} & x_{23} & x_{24} & a_2 - b_1 + a_1 \\
0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} & a_3 \\
\hline
0 & b_2 & b_3 & b_4 &
\end{array}$$

Подобным же образом в зависимости от допущений, указанных далее, получаем следующие шаги. В каждом из них определяется значение переменной x_i, и сводится к нулю либо запас i-го пункта отправления, либо потребность j-го пункта назначения, или и то и другое вместе.

Шаг 3: Положим $a_2 - b_1 + a_1 > b_2$.

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_{11} = a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{21} = b_1 - a_1 & x_{22} = b_2 & x_{23} & x_{24} & a_2 - b_1 + a_1 - b_2 \\
0 & 0 & x_{33} & x_{34} & a_3 \\
\hline
0 & 0 & b_3 & b_4 &
\end{array}
$$

Шаг 4: Пусть $a_2 - b_1 + a_1 - b_2 < b_3$.

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_{11} = a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{21} = b_1 - a_1 & x_{22} = b_2 & x_{23} = a_2 - b_1 + a_1 - b_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{33} & x_{34} & a_3 \\
\hline
0 & 0 & b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2 & b_4 &
\end{array}
$$

Из шага 4 видно, что $x_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_2 + b_2$ и $x_{34} = b_4$. Следует отметить, что каждая из перевозок x_i была получена прибавлением и вычитанием различных комбинаций a_i и b_j. Поэтому если a_i и b_j были первоначально неотрицательными целыми числами, то и решение, получаемое в результате описанного выше процесса, будет состоять из неотрицательных целых чисел. Нетрудно видеть, что этот план может содержать самое большее $n + m - 1$ положительных перевозок. При наших предположениях относительно величин a_i и b_j, и допущениях, сделанных при построении плана в рассмотренном примере с тремя пунктами отправления и четырьмя пунктами назначения, положительными перевозками являются:

$$
\begin{gathered}
x_{11} = a_1; \quad x_{21} = b_1 - a_1; \\
x_{22} = b_2; \quad x_{23} = a_2 - b_1 + a_1 - b_2; \\
x_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2; \quad x_{34} = b_4;
\end{gathered}
$$

Используя приведенный алгоритм построения решения, можно доказать линейную независимость системы векторов, отвечающих выписанным положительным перевозкам. Тем самым будет установлено, что построенный план является опорным решением. □

Пример:

Имеется транспортная таблица с исходными данными.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	5	3	1	10
A2	3	2	4	20
A3	4	1	2	30
Потребность	15	20	25	

Внесем в верхнюю левую клетку максимально возможного объема перевозки.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	**10**	0	0	0
	5	3	1	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	5	20	25	

Запасы на складе $A1$ закончились, поэтому в оставшиеся ячейки данной строки ставим прочерки. Затем переходим к следующей строке и заполняем ее ячейки слева направо.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	**10**	0	0	0
	5	3	1	
A2	**5**			15
	3	2	4	
A3	0			30
	4	1	2	
Потребность	0	20	25	

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	**10**	0	0	0
	5	3	1	
A2	**5**	**15**	0	0
	3	2	4	
A3	0			30
	4	1	2	
Потребность	0	5	25	

Переходим к третьей строке и тоже заполняем ее слева направо.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	**10**	0	0	0
	5	3	1	
A2	**5**	**15**	0	0
	3	2	4	
A3	0	**5**		25
	4	1	2	
Потребность	0	0	25	

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	**10**	0	0	0
	5	3	1	
A2	**5**	**15**	0	0
	3	2	4	
A3	0	**5**	**25**	0
	4	1	2	
Потребность	0	0	0	

Получено опорное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 0 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

3.2 Метод наименьшего элемента

Ключевая идея заключается в следующем: в таблице из всех значений стоимостей выбираем наименьшее и в клетку (i, j) с наименьшей стоимостью записываем меньшее из чисел a_i, b_j. Исключаем из рассмотрения строку i, если запас a_i, вывезен полностью; или столбец j, если спрос b_j, удовлетворен полностью; или и строку и столбец, если $a_i = b_j$. Среди остальных стоимостей снова выбираем наименьшую и заполняем соответствующую клетку таблицы. Таким же образом продолжаем заполнять клетки таблицы, пока не будет найдено опорное решение.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1				10
	5	3	1	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	15	20	25	

Объемы запасов и потребностей уменьшаются на величину груза. Если запасы склада исчерпаны, то полностью вычеркиваем эту строку таблицы. Если потребности завода полностью удовлетворены — полностью вычеркиваем этот столбец таблицы.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	**1**	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	15	20	25	

Продолжаем в том же духе до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности удовлетворены.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	1	
A2		0		20
	3	2	4	
A3		20		10
	4	**1**	2	
Потребность	15	0	25	

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	1	
A2		0		20
	3	2	4	
A3	0	20	10	0
	4	1	**2**	
Потребность	15	0	5	

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	1	
A2	15	0		5
	3	2	4	
A3	0	20	10	0
	4	1	2	
Потребность	0	0	5	

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	1	
A2	15	0	5	0
	3	2	**4**	
A3	0	20	10	0
	4	1	2	
Потребность	0	0	0	

В итоге мы получим опорный план перевозок для транспортной задачи.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

4 Вырожденность опорного плана

Вырожденность в транспортной задаче возникает, если одна или более базисных переменных обращаются в 0. Вырожденное решение может быть получено, если частичные суммы по столбцам равны частичным суммам по строкам. Проблему можно решить без особых трудностей. На каждом шаге следует различать базисные переменные, которые равны 0 и стоят в соответствующих ячейках, и небазисные переменные.

При построении опорного решения могут возникнуть трудности, если суммы и по строкам, и по столбцам равны между собой и обратились в 0. В этом случае из дальнейших рассмотрений следует исключить только одну из них. Другая сумма будет ликвидирована при присвоении базисной переменной значения 0. Поскольку на каждом шаге, кроме последнего, удаляется только одна строка или только один столбец, то в результате получается $n+m-1$ базисных переменных и столько заполненных клеток, сколько требуется (даже если некоторые базисные переменные обратились в 0).

Трудности могут возникнуть и при улучшении базисного допустимого решения. Применение правил может обратить в 0 более одной базисной переменной. В этом случае важно помнить, что только одна из них должна стать небазисной; остальные следует сохранить базисными, но с нулевыми значениями.

5 Методы решения

5.1 Метод потенциалов

Рассмотрим теорему об оптимальности решения транспортной задачи методом потенциалов.

$$u_i + v_j = c_{ij} : \quad \forall x_{ij} > 0 \tag{6}$$

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} : \quad \forall x_{ij} = 0 \tag{7}$$

$$i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}$$

Немного перепишем исходную задачу и введем пару новых понятий

$u_i \;\; (i = \overline{1,n})$ - оценка единицы запаса (потенциал поставщика)
$v_j \;\; (j = \overline{1,m})$ - оценка единицы спроса (потенциал потребителя)

Тогда задача примет вид:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} \quad (i = \overline{1,n}) \quad (j = \overline{1,m})$$

$u_i(i = \overline{1,n}); \quad v_j(j = \overline{1,m})$ - произвольного знака

Алгоритм решения

1. Находится первый опорный план по одному из рассмотренных методов.

2. Проверяется найденный опорный план на оптимальность, для чего:

   2.1. Находятся потенциалы поставщиков $u_i(i = \overline{1,n})$ и потребителей $v_j(j = \overline{1,m})$ по формуле (6).

   Примечание*: Так как в опорном плане заполнено $n + m - 1$ клеток таблицы транспортной задачи, то для нахождения потенциалов по данному плану можно составить систему из $n + m - 1$ линейно независимых уравнений с $n + m$ неизвестными. Такая система является неопределенной, и поэтому одной неизвестной (обычно u_1) придают нулевое значение, а остальные находятся однозначно по формуле (6).*

   2.2. Проверяется, выполнено ли условие (7) или, что то же самое, условие $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geqslant 0$, где s_{ij}, - характеристика каждой свободной ячейки матрицы. Если для всех свободных 7ячеек матрицы условие (7) выполнено, т.е. $s_{ij} \geqslant 0$, то опорный план транспортной задачи является оптимальным (решение задачи завершено). Если же для некоторых свободных клеток таблицы $s_{ij} < 0$, то клетка с наименьшим значением s_{ij}, является перспективной, и выполняется следующий пункт алгоритма.

2.3. К перспективной ячейке строится цикл, расставляются знаки по циклу, при этом в перспективную ячейку ставится плюс, а остальные знаки в вершинах цикла чередуются, и определяется величина перераспределения груза по формуле $Q = \min x_{ij}$, где x_{ij} - объем перевозки груза, записанный в клетках (вершинах) цикла таблицы, отмеченных знаком минус.

2.4. Осуществляется перераспределение груза по циклу на величину Q. В результате выполнения этого пункта будет получен новый опорный план, который проверяется на оптимальность, т.е. производится переход к пункту 2.1 алгоритма.

5.2 Решение с помощью теории графов

Список литературы

[1] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования; Москва: Советское радио, 1969 - 736с.

[2] Канторович Л.В., Горстко А.Б. Математическое оптимальное программирование в экономике; Москва: Знание, 1968 - 96с.

[3] Палий И.А., Линейное программирование. Учебное пособие; Москва: Эксмо, 2008 - 256с.

[4] Костевич Л.С. Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений; Минск: Новое знание, 2003 - 424с.

[5] Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах; Санкт-Петербург: Лань, 2011 - 352с.

[6] Данциг Д. Линейное программирование, его обобщения и применения; Москва: Прогресс, 1966 - 602с.

[7] Гасс С. Линейное программирование; Москва: Физматгиз, 1961 - 303с.