Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего образования
**«Северо-Осетинский государственный университет
имени Коста Левановича Хетагурова»**

Курсовая работа

«Транспортная задача. Методы решенияю.»

Выполнил:
Студент 3 курса направления:
«Прикладная математика и информатика»
Гамосов Станислав Станиславович

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Тотиева Жанна Дмитриевна

«Работа допустима к защите»
Заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук
Кусраев. А.Г. _____________

Владикавказ 2021

Содержание

1 Введение

Транспортная задача – это спектр задач с единой математической моделью, классическая формулировка, которой звучит: *«Задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов производства в пункты потребления»*. Такая форма встречается чаще всего в линейном программирование, а если точнее в его практических приложениях.

Линейное программирование является одним из разделов математического программирования – области математики, разрабатывающей теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Проблема была впервые формализована французским математиком *Гаспаром Монжем* в 1781 году. Прогресс в решении проблемы был достигнут во время Великой Отечественной войны советским математиком и экономистом *Леонидом Канторовичем*. Поэтому иногда эта проблема называется **транспортной задачей Монжа — Канторовича**.

Если вернуться к самой задачи огромное количество возможных вариантов перевозок затрудняет получение достаточно экономного плана эмпирическим или экспертным путем. Применение математических методов и вычислительных в планировании перевозок дает большой экономический эффект. Транспортные задачи могут быть решены **симплексным методом** однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Они, как и **симплексный метод**, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его получить оптимальный результат. Транспортная задача может также решаться с ограничениями и без ограничений.

В зависимости от способа представления условий транспортной задачи она может быть представлена в **графовой** или **матричной** форме.

2 Постановка задачи

Задача эта возникает, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителям. В этом случае для каждого потребителя безразлично, откуда, из каких пунктов производства будет поступать этот продукт, лишь бы он поступал в нужном объеме. Однако от того, насколько рациональным будет прикрепление пунктов потребления к пунктам производства, существенно зависит объем транспортной работы. В связи с этим естественно возникает вопрос о наиболее эффективном прикреплении, правильном направлении перевозок груза, при котором потребности удовлетворяются, а затраты на транспортировку минимальны. Более точно задача формулируется так.

Пусть имеются пункты производства $(A_1, A_2, ..., A_n)$ с объемами производства в единицу времени, равными соответственно $(a_1, a_2, ..., a_n)$, и пункты потребления $(B_1, B_2, ..., B_m)$ с объемами потребления, равными $(b_1, b_2, ..., b_m)$ соответственно. Будем предполагать, что производство и потребление сбалансированы — сумма объемов производства равна сумме объемов потребления. Такой вид транспортной задачи называется **закрытым**.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \tag{1}$$

В дальнейшем будем рассматривать только такой тип задачи. Однако любую **открытую** транспортную задачу $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq \sum\limits_{j=1}^{m} b_j)$ легко закрыть. Нужно ввести дополнительный пункт производства (пункт потребления) с недостающим объемом производства (объемом потребления) и с нулевыми стоимостями перевозок.

Предполагается, что известны величины c_{ij} — затраты по перевозке единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Они могут быть выражены в стоимостной (денежной) форме или в натуральной (километрах). Требуется найти такой план перевозок, при котором были бы удовлетворены потребности в пунктах $(B_1, B_2, ..., B_m)$ и при этом суммарные затраты на перевозку были бы минимальны. Обозначая через x_{ij} количество продукта, перевозимое из i-го пункта производства в j-го пункт потребления, приходим к следующей математической формулировке задачи:

Найти минимум целевой функции:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \tag{2}$$

Так же для корректности задачи необходимо соблюдать три условия:

$$\mathbf{1.} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j; (j = 1, 2, ..., m)$$

$$\mathbf{2.} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i; (i = 1, 2, ..., n)$$

$$\mathbf{3.} x_{ij} \geqslant 0; (i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m)$$

Получается суммарные затраты на транспортировку в каждый пункт потребления завозится требуемое количество продукта, а так же из каждого пункта производства полностью вывозится произведенный продукт.

Всякий набор величин $x_{ij}(i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m)$, удовлетворяющих условиям $(1 - 3)$, мы будем называть допустимым планом перевозок. План, для которого суммарные затраты (2) достигают минимума, называется оптимальным.

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

Таблица 2.1

Поставщики	Потребители						Запасы поставщика
	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	m	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1j} x_{1j}	$\cdots$	c_{1m} x_{1m}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2j} x_{2j}	$\cdots$	c_{2m} x_{2m}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\cdots$	c_{ij} x_{ij}	$\cdots$	c_{im} x_{im}	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	$\cdots$	c_{nj} x_{nj}	$\cdots$	c_{nm} x_{nm}	a_n
Спрос потребителя	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i$ $\sum_{j=1}^{m} b_j$

Рассмотрим теорему о разрешимости транспортной задачи:

Теорема 1. *Транспортная задача имеет решение, если суммарный запас груза в пунктах отправления равен суммарному спросу в пунктах назначения, т.е. если выполняется равенство (1).*

Доказательство. В случае превышения запаса над потребностью $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ как уже было обговорено выше, вводится фиктивный $(m+1)$-ый пункт назначения с потребностью $b_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$

Соответствующие тарифы считаются равными нулю:

$$c_{im+1} = 0(i = 1, \cdots, m)$$

После этих преобразований получим закрытую модель транспортной задачи.

Аналогично, при $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i < \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ вводится фиктивный $(n+1)$ пункт отправления с грузом, $a_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ а тарифы полагаются равными нулю:

$$c_{n+1j} = 0(j = 1, \cdots, n)$$

После этих преобразований получим закрытую модель транспортной задачи. □

Полученные условия транспортной задачи удобно представить в виде матрицы, которая имеет название **матрица перевозок**. В первой строке указаны величины потребностей, в первом столбце - значения запасов. В клетках внутренней матрицы ($m \times n$ штук) записывают стоимости перевозок и сами перевозки. Нумеровать будем только строки и столбцы внутренней матрицы.

Пример:

Составить математическую модель транспортной задачи перевоза груза из 3 складов в 5 магазинов. Матрица перевозок будет выглядеть так:

Таблица 2.2

	b_j	10	40	20	60	20
a_i						
30		2	7	3	6	2
70		9	4	5	7	3
50		5	7	6	2	4

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 30 + 70 + 50 = 150 \qquad \sum_{j=1}^{5} b_j = 10 + 40 + 20 + 60 + 20 = 150$$

В качестве примера открытой модели давайте заменим потребность b_4, которая равняется 60 на 40. В таком случаи нужно было бы ввести еще одного потребителя с потребностью $b_6 = 20$ и с нулевыми стоимостями $c_{16} = c_{26} = c_{36} = 0$. Матрица перевозок тогда станет следующей:

Таблица 2.3

	b_j	10	40	20	40	20	20
a_i							
30		2	7	3	6	2	0
70		9	4	5	7	3	0
50		5	7	6	2	4	0

Запишем пример закрытой модели в полном виде:

$$\begin{cases} Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 70 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 60 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 20 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ \forall (i, j) : x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

3 Методы построения опорного решения

Прежде чем исследовать методы нахождения опорного решения транспортной задачи, рассмотрим теорему о ранге матрицы из коэффициентов при неизвестных системы ее ограничений.

Теорема 2. *Ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных системы ограничений транспортной задачи равен* $(m+n-1)$, *где* m *и* n *- количество поставщиков и потребителей соответственно.*

Каждую неизвестную запишем в свой столбец и получим такую систему:

$$\left\{\begin{array}{cccc}
x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1m} & & & =a_1 \\
 & x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2m} & & =a_2 \\
\dots & \dots & \dots & \\
 & & x_{n1}+x_{n2}+\dots+x_{nm} & =a_n \\
\hline
x_{11} & +x_{21} & +x_{n1} & =b_1 \\
x_{12} & +x_{22} & +x_{n2} & =b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \\
x_{1n} & +x_{2n} & +x_{nm} & =b_m
\end{array}\right\}$$

Матрица A их коэффициентов при неизвестных системы ограничений имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix}
11\dots1 & 00\dots0 & 00\dots0 \\
00\dots0 & 11\dots1 & 00\dots0 \\
\dots & \dots & \dots \\
00\dots0 & 00\dots0 & 11\dots1 \\
10\dots0 & 10\dots0 & 10\dots0 \\
01\dots0 & 01\dots0 & 01\dots0 \\
\dots & \dots & \dots \\
00\dots1 & 00\dots1 & 00\dots1
\end{bmatrix}$$

Нетрудно видеть, что любую строку матрицы можно выразить в виде линейной комбинации остальных ее строк. Сложив коэффициенты первых n строк матрицы A, а потом коэффициенты последующих $m-1$ строк и вычтя из первой суммы вторую, получим элементы последней строки матрицы. Отсюда заключаем, что ранг матрицы не будет изменяться при вычеркивании одной какой-нибудь ее строки.

Вычеркнем последнюю строку матрицы A и вычислим минор M_{n+m-1} , образованный из $(n+m-1)$ столбцов коэффициентов при следующих неизвестных: $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{mn}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1,m-1}$

$$M_{n+m-1} = \begin{bmatrix} 10\ldots0 & 11\ldots1 \\ 01\ldots0 & 00\ldots0 \\ \ldots & \ldots \\ 00\ldots1 & 00\ldots0 \\ 10\ldots0 & 10\ldots0 \\ 01\ldots0 & 01\ldots0 \\ \ldots & \ldots \\ 00\ldots0 & 00\ldots1 \end{bmatrix} = 1$$

Так как минор не равен нулю, то количество линейно независимых строк в матрице A будет $n+m-1$, т.е. ранг матрицы A равен $n+m-1$.

Из рассмотренной теоремы следует, что опорное решение транспортной задачи должно содержать $n+m-1$ базисных неизвестных и $nm-(n+m-1)$ небазисных, равных нулю неизвестных.

Циклом, или замкнутым контуром, называется последовательность клеток (i,j) транспортной задачи, в которой каждые две рядом стоящие клетки находятся в одной строке или одном столбце, при этом первая и последняя клетки совпадают.

Например, $\nu = [(1,2);(1,4);(3,4);(3,2);(1,2)]$ есть цикл.

j i	1	2	3	4
1		$\odot$	—	$\odot$
2		$\vert$		$\vert$
3		$\odot$	—	$\odot$

Список литературы

[1] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования; Москва: Советское радио, 1969. - 736с.

[2] Канторович Л.В., Горстко А.Б. Математическое оптимальное программирование в экономике; Москва: Знание, 1968. - 96с.

[3] Палий И.А., Линейное программирование. Учебное пособие; Москва: Эксмо, 2008. - 256с.

[4] Костевич Л.С. Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений; Минск: Новое знание, 2003. - 424с.

[5] Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах; Санкт-Петербург: Лань, 2011 - 352с.

[6] Данциг Д. Линейное программирование, его обобщения и применения; Москва: Прогресс, 1966 - 602с.

[7]