

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
Высшего образования  
**«Северо-Осетинский государственный университет  
имени Коста Левановича Хетагурова»**

Курсовая работа  
**«Транспортная задача. Методы решения.»**

**Выполнил:**

Студент 3 курса направления:  
«Прикладная математика и информатика»  
*Гамосов Станислав Станиславович*

**Научный руководитель:**

кандидат физико-математических наук  
*Тотиева Жанна Дмитриевна*

**«Работа допустима к защите»**

Заведующий кафедрой  
доктор физико-математических наук  
*Кусраев. А.Г. \_\_\_\_\_*

Владикавказ 2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Методы построения опорного плана</b>	<b>6</b>
3.1	Метод северо-западного угла . . . . .	6
3.2	Метод наименьшего элемента . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Проверка опорного плана на вырожденность</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Методы решения</b>	<b>13</b>
5.1	Метод северо-западного угла . . . . .	13
5.2	Метод наименьшего элемента . . . . .	14
5.3	Метод потенциалов . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Решение с помощью теории графов</b>	<b>16</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>17</b>

# 1 Введение

**Транспортная задача** – это спектр задач с единой математической моделью, классическая формулировка, которой звучит: *«Задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов производства в пункты потребления»*. Такая форма встречается чаще всего в линейном программировании, а если точнее в его практических приложениях.

**Линейное программирование** является одним из разделов математического программирования – области математики, разрабатывающей теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Проблема была впервые формализована французским математиком *Гаспаром Монжем* в 1781 году. Прогресс в решении проблемы был достигнут во время Великой Отечественной войны советским математиком и экономистом *Леонидом Канторовичем*. Поэтому иногда эта проблема называется **транспортной задачей Монжа — Канторовича**.

Если вернуться к самой задаче огромное количество возможных вариантов перевозок затрудняет получение достаточно экономного плана эмпирическим или экспертным путем. Применение математических методов и вычислительных в планировании перевозок дает большой экономический эффект. Транспортные задачи могут быть решены **симплексным методом** однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Они, как и **симплексный метод**, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его получить оптимальный результат. Транспортная задача может также решаться с ограничениями и без ограничений.

В зависимости от способа представления условий транспортной задачи она может быть представлена в **графовой** или **матричной** форме.

## 2 Постановка задачи

Задача эта возникает, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителям. В этом случае для каждого потребителя безразлично, откуда, из каких пунктов производства будет поступать этот продукт, лишь бы он поступал в нужном объеме. Однако от того, насколько рациональным будет прикрепление пунктов потребления к пунктам производства, существенно зависит объем транспортной работы. В связи с этим естественно возникает вопрос о наиболее эффективном прикреплении, правильном направлении перевозок груза, при котором потребности удовлетворяются, а затраты на транспортировку минимальны. Более точно задача формулируется так.

Пусть имеются пункты производства  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  с объемами производства в единицу времени, равными соответственно  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , и пункты потребления  $(B_1, B_2, \dots, B_m)$  с объемами потребления, равными  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$  соответственно. Будем предполагать, что производство и потребление сбалансированы — сумма объемов производства равна сумме объемов потребления. Такой вид транспортной задачи называется **закрытым**.

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j \quad (1)$$

В дальнейшем будем рассматривать только такой тип задачи. Однако любую **открытую** транспортную задачу  $(\sum_{i=1}^n a_i \neq \sum_{j=1}^m b_j)$  легко закрыть. Нужно ввести дополнительный пункт производства (пункт потребления) с недостающим объемом производства (объемом потребления) и с нулевыми стоимостями перевозок.

Предполагается, что известны величины  $c_{ij}$  — затраты по перевозке единицы продукта из  $i$ -го пункта производства в  $j$ -й пункт потребления. Они могут быть выражены в стоимостной (денежной) форме или в натуральной (километрах). Требуется найти такой план перевозок, при котором были бы удовлетворены потребности в пунктах  $(B_1, B_2, \dots, B_m)$  и при этом суммарные затраты на перевозку были бы минимальны. Обозначая через  $x_{ij}$  количество продукта, перевозимое из  $i$ -го пункта производства в  $j$ -го пункт потребления, приходим к следующей математической формулировке задачи:

**Найти минимум целевой функции:**

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \quad (2)$$

Так же для корректности задачи необходимо соблюдать три условия:

$$1. \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j; \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$2. \sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$3. x_{ij} \geq 0; \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

Получается суммарные затраты на транспортировку в каждый пункт потребления завозится требуемое количество продукта, а так же из каждого пункта производства полностью вывозится произведенный продукт.

Всякий набор величин  $x_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ , удовлетворяющих условиям (1 – 3), мы будем называть допустимым планом перевозок. План, для которого суммарные затраты (2) достигают минимума, называется оптимальным.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Таблица 2.1

Поставщики	Потребители						Запасы поставщика
	1	2	...	$j$	...	$m$	
1	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	...	$c_{1j}$ $x_{1j}$	...	$c_{1m}$ $x_{1m}$	$a_1$
2	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	...	$c_{2j}$ $x_{2j}$	...	$c_{2m}$ $x_{2m}$	$a_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$i$	$c_{i1}$ $x_{i1}$	$c_{i2}$ $x_{i2}$	...	$c_{ij}$ $x_{ij}$	...	$c_{im}$ $x_{im}$	$a_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$c_{n1}$ $x_{n1}$	$c_{n2}$ $x_{n2}$	...	$c_{nj}$ $x_{nj}$	...	$c_{nm}$ $x_{nm}$	$a_n$
Спрос потребителя	$b_1$	$b_2$	...	$b_j$	...	$b_m$	$\sum_{i=1}^n a_i$ $\sum_{j=1}^m b_j$

Рассмотрим теорему о разрешимости транспортной задачи:

**Теорема 1.** *Транспортная задача имеет решение, если суммарный запас груза в пунктах отправления равен суммарному спросу в пунктах назначения, т.е. если выполняется равенство (1).*

*Доказательство.* В случае превышения запаса над потребностью  $\sum_{i=1}^n a_i > \sum_{j=1}^m b_j$  как уже было обговорено выше, вводится фиктивный  $(m+1)$ -ый пункт назначения с потребностью  $b_{m+1} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j$

Соответствующие тарифы считаются равными нулю:

$$c_{im+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

После этих преобразований получим закрытую модель транспортной задачи.

Аналогично, при  $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{j=1}^m b_j$  вводится фиктивный  $(n+1)$  пункт отправления с грузом,  $a_{n+1} = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n a_i$  а тарифы полагаются равными нулю:

$$c_{n+1j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

После этих преобразований получим закрытую модель транспортной задачи.

Теперь если в любом случае мы можем свести задачу к виду  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j = A$  можем получить такие величины

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Исходя из выше полученного имеем решение:

$$x_{ij} \geq 0$$

Так как  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j = A$  получаем:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^m \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^m b_j}{A} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^n a_i}{A} = b_j$$

Следовательно, система величин  $x_{ij}$ , удовлетворяя всем условиям транспортной задачи, является ее решением.  $\square$

Условия транспортной задачи удобно представить в виде матрицы, которая имеет название **матрица перевозок**. В первой строке указаны величины потребностей, в первом столбце - значения запасов. В клетках внутренней матрицы ( $m \times n$  штук) записывают стоимости перевозок и сами перевозки. Нумеровать будем только строки и столбцы внутренней матрицы.

### Пример:

Составить математическую модель транспортной задачи перевоза груза из 3 складов в 5 магазинов. Матрица перевозок будет выглядеть так:

Таблица 2.2

Пункты	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1						30
	2	7	3	6	2	
A2						70
	9	4	5	7	3	
A3						50
	5	7	6	2	4	
Потребность	10	40	20	60	20	

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 30 + 70 + 50 = 150 \quad \sum_{j=1}^5 b_j = 10 + 40 + 20 + 60 + 20 = 150$$

В качестве примера открытой модели давайте заменим потребность  $B4$ , которая равняется 60 на 40. В таком случае нужно было бы ввести еще одного потребителя с потребностью  $B6 = 20$  и с нулевыми стоимостями  $c_{16} = c_{26} = c_{36} = 0$ . Матрица перевозок тогда станет следующей:

Таблица 2.3

Пункты	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Запасы
A1							30
	2	7	3	6	2	0	
A2							70
	9	4	5	7	3	0	
A3							50
	5	7	6	2	4	0	
Потребность	10	40	20	40	20	20	

## 3 Методы построения опорного плана

### 3.1 Метод северо-западного угла

**Теорема 2.** *Существует план, содержащее не более чем  $(m + n - 1)$  положительных перевозок  $x_{ij}$ . При этом система векторов соответствующая таким перевозкам  $x_{ij}$ , линейно независима.*

*Доказательство.* Конструктивным доказательством теоремы может послужить процесс получения первого опорного плана, предложенный Данцигом и названный Чарнесом и Купером «**правилом северо-западного угла**». Применим это правило к следующей таблице:

$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$a_1$
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$a_2$
$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	

Определим сначала значение переменной  $x_{11}$ , стоящей в верхнем левом углу. Пусть  $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ ; если  $a_1 \leq b_1$ , то  $x_{11} = a_1$  и все  $x_{1j} = 0$  для  $j = 2, 3, 4$ . Если  $a_1 \geq b_1$ , то  $x_{11} = b_1$ , и все  $x_{i1} = 0$  для  $i = 2, 3, 4$ . Для определенности допустим, что справедливо первое предположение; тогда таблица преобразуется, как показано ниже в шаге 1. Здесь общее количество продукта, вывозимого из первого пункта отправления, уменьшается до нуля, а общее количество, которое необходимо подвезти к первому пункту назначения, равно  $b_1 - a_1$ .

*Шаг 1:* Пример  $b_1 > a_1$

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$a_2$
$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
$b_1 - a_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	

После этого определяем значение первой переменной во второй строке. Пусть  $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$ . Если допустить, что  $a_2 > b_1 - a_1$ ,  $x_{21} = b_1 - a_1$ , и  $x_{31} = 0$ . Это показано в шаге 2. Количество продукта, которое осталось перевезти из пункта отправления 2, теперь равно  $a_2 - b_1 + a_1$ . В свою очередь потребность первого пункта назначения полностью удовлетворена.

*Шаг 2:* Допустим, что  $a_2 > b_1 - a_1$ .

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$a_2 - b_1 + a_1$
0	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
0	$b_2$	$b_3$	$b_4$	

Подобным же образом в зависимости от допущений, указанных далее, получаем следующие шаги. В каждом из них определяется значение переменной  $x_i$ ,



и сводится к нулю либо запас  $i$ -го пункта отправления, либо потребность  $j$ -го пункта назначения, или и то и другое вместе.

*Шаг 3:* Положим  $a_2 - b_1 + a_1 > b_2$ .

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	$x_{22} = b_2$	$x_{23}$	$x_{24}$	$a_2 - b_1 + a_1 - b_2$
0	0	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
0	0	$b_3$	$b_4$	

*Шаг 4:* Пусть  $a_2 - b_1 + a_1 - b_2 < b_3$ .

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	$x_{22} = b_2$	$x_{23} = a_2 - b_1 + a_1 - b_2$	0	0
0	0	$x_{33}$	$x_{34}$	$a_3$
0	0	$b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$	$b_4$	

Из шага 4 видно, что  $x_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$  и  $x_{34} = b_4$ . Следует отметить, что каждая из перевозок  $x_i$  была получена прибавлением и вычитанием различных комбинаций  $a_i$  и  $b_j$ . Поэтому если  $a_i$  и  $b_j$  были первоначально неотрицательными целыми числами, то и решение, получаемое в результате описанного выше процесса, будет состоять из неотрицательных целых чисел. Нетрудно видеть, что этот план может содержать самое большее  $n + m - 1$  положительных перевозок. При наших предположениях относительно величин  $a_i$  и  $b_j$ , и допущениях, сделанных при построении плана в рассмотренном примере с тремя пунктами отправления и четырьмя пунктами назначения, положительными перевозками являются:

$$\begin{aligned} x_{11} &= a_1; & x_{21} &= b_1 - a_1; \\ x_{22} &= b_2; & x_{23} &= a_2 - b_1 + a_1 - b_2; \\ x_{33} &= b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2; & x_{34} &= b_4; \end{aligned}$$

Используя приведенный алгоритм построения решения, можно доказать линейную независимость системы векторов, отвечающих выписанным положительным перевозкам. Тем самым будет установлено, что построенный план является опорным решением.  $\square$

### Пример:

Имеется транспортная таблица с исходными данными.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1				10
	5	3	1	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	15	20	25	

Внесем в верхнюю левую клетку максимально возможного объема перевозки.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	<b>10</b>	0	0	0
	5	3	1	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	5	20	25	

Запасы на складе A1 закончились, поэтому в оставшиеся ячейки данной строки ставим прочерки. Затем переходим к следующей строке и заполняем ее ячейки слева направо.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	<b>10</b>	0	0	0
	5	3	1	
A2	<b>5</b>			15
	3	2	4	
A3	0			30
	4	1	2	
Потребность	0	20	25	

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	<b>10</b>	0	0	0
	5	3	1	
A2	<b>5</b>	<b>15</b>	0	0
	3	2	4	
A3	0			30
	4	1	2	
Потребность	0	5	25	

Переходим к третьей строке и тоже заполняем ее слева направо.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	<b>10</b>	0	0	0
	5	3	1	
A2	<b>5</b>	<b>15</b>	0	0
	3	2	4	
A3	0	<b>5</b>		25
	4	1	2	
Потребность	0	0	25	

Пункты	В1	В2	В3	Запасы
А1	<b>10</b>	0	0	0
	5	3	1	
А2	<b>5</b>	<b>15</b>	0	0
	3	2	4	
А3	0	<b>5</b>	<b>25</b>	0
	4	1	2	
Потребность	0	0	0	

Получено опорное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 0 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

## 3.2 Метод наименьшего элемента

Ключевая идея заключается в следующем: определяем ячейку транспортной таблицы с наименьшим значением тарифа на перевозку груза (если окажется, что есть несколько ячеек с одинаковыми и минимальными тарифами — выбираем любую из них).

В эту ячейку выписываем максимально возможный объем груза, который можно доставить с соответствующего этой ячейке склада на соответствующий завод.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1				10
	5	3	1	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	15	20	25	

Объемы запасов и потребностей уменьшаются на величину груза. Если запасы склада исчерпаны, то полностью вычеркиваем эту строку таблицы. Если потребности завода полностью удовлетворены — полностью вычеркиваем этот столбец таблицы.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	1	
A2				20
	3	2	4	
A3				30
	4	1	2	
Потребность	15	20	25	

Продолжаем в том же духе до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности удовлетворены.

Пункты	B1	B2	B3	Запасы
A1	0	0	10	0
	5	3	1	
A2		0		20
	3	2	4	
A3		20		10
	4	1	2	
Потребность	15	0	25	

Пункты	В1	В2	В3	Запасы
А1	0	0	10	0
	5	3	1	
А2		0		20
	3	2	4	
А3	0	20	10	0
	4	1	<b>2</b>	
Потребность	15	0	5	

Пункты	В1	В2	В3	Запасы
А1	0	0	10	0
	5	3	1	
А2	15	0		5
	<b>3</b>	2	4	
А3	0	20	10	0
	4	1	2	
Потребность	0	0	5	

Пункты	В1	В2	В3	Запасы
А1	0	0	10	0
	5	3	1	
А2	15	0	5	0
	3	2	<b>4</b>	
А3	0	20	10	0
	4	1	2	
Потребность	0	0	0	

В итоге мы получим опорный план перевозок для транспортной задачи.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

## 4 Проверка опорного плана на вырожденность

Как известно, транспортная задача бывает открытая и закрытая. Однако на практике чаще всего попадаетесь открытый тип транспортной задачи. Способ борьбы с этим уже был рассмотрен.

Так же известны и другие виды задачи - вырожденной и невырожденной.

Вырожденной является такая задача, в которой количество клеток в плане меньше  $m+n-1$ . Способ борьбы с ним довольно много: от случайно размещаемых нулевых клеток в плане до перебора по очереди всех пустых клеток. Однако такой путь не дает гарантий в том, что вновь размещенная клетка не образует **цикл** с имеющимися клетками.

## 5 Методы решения

### 5.1 Метод северо-западного угла

## 5.2 Метод наименьшего элемента



### 5.3 Метод потенциалов

Метод состоит из конечного числа итераций, с помощью которых по некоторому исходному плану задачи строится ее оптимальное решение. Каждая итерация разбивается на 2 этапа. На 1-ом этапе план, полученный в результате предыдущей итерации, проверяется на оптимальность. Если план оказывается решением, процесс заканчивается. Если же это не так, осуществляется переход к этапу 2. На 2-ом этапе строится новый план, приводящий к меньшим (по сравнению с предыдущим планом) транспортным издержкам. Перед тем, как начать детальное рассмотрение метода, введем несколько необходимых понятий.

## 6 Решение с помощью теории графов

## Список литературы

- [1] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования; Москва: Советское радио, 1969 - 736с.
- [2] Канторович Л.В., Горстко А.Б. Математическое оптимальное программирование в экономике; Москва: Знание, 1968 - 96с.
- [3] Палий И.А., Линейное программирование. Учебное пособие; Москва: Эксмо, 2008 - 256с.
- [4] Костевич Л.С. Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений; Минск: Новое знание, 2003 - 424с.
- [5] Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах; Санкт-Петербург: Лань, 2011 - 352с.
- [6] Данциг Д. Линейное программирование, его обобщения и применения; Москва: Прогресс, 1966 - 602с.
- [7] Гасс С. Линейное программирование; Москва: Физматгиз, 1961 - 303с.