



# Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques

Bassem Bhiri

## ► To cite this version:

Bassem Bhiri. Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2017. Français. NNT : 2017LORR0100 . tel-01643958

**HAL Id: tel-01643958**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01643958>**

Submitted on 21 Nov 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Stabilité et Stabilisation en Temps Fini des Systèmes Dynamiques

## Thèse

présentée et soutenue publiquement le 05 Juillet 2017

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine – France

(spécialité automatique)

et

Doctorat de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès – Tunisie

(spécialité génie électrique)

par

**Bassem BHIRI**

### Composition du jury

*Rapporteurs :* MOHAMED CHAABANE Professeur, École Nationale d'Ingénieurs de Sfax  
ELENA PANTELEY Directrice de recherche CNRS, Laboratoire des Signaux et Systèmes

*Examineurs :* KAMEL ABDERRAHIM Professeur, École Nationale d'Ingénieurs de Gabès  
CEDRIC DELATTRE Maître de conférences, Université de Lorraine, Longwy  
MOUFIDA LAHMARI KSOURI Professeur, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis  
MICHEL ZASADZINSKI Professeur, Université de Lorraine, Longwy

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

J'exprime mes profonds remerciements à mes directeurs de thèse, les professeurs Michel ZASADZINSKI et Kamel ABDERRAHIM pour leur aide continue, pour leur patience et leur encouragement pour finir ce travail de recherche.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Cédric DELATTRE qui fut pour moi un co-directeur de thèse attentif et très disponible malgré ses nombreuses charges. Ses compétences scientifiques et ses qualités humaines m'ont beaucoup apporté et appris. Elles resteront des moteurs de mon travail de chercheur.

J'exprime aussi ma gratitude à toute l'équipe de recherche du CRAN de Longwy. Je tiens plus particulièrement à remercier Harouna SOULEY-ALI pour ses soutiens pendant une phase critique des mes travaux de recherche.

Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées par le biais du CRAN, surtout l'équipe de recherche de Longwy, Marouane ALMA, Latifa BOUTAT BADDAS, Mohamed BOUTAYEB, Mohamed DAROUACHD, Christophe FONTE, Hugues RAFARALAHY et Ali ZEMOUCHE, ainsi que tous les thésards et thésardes de cette équipe, sans oublier Michel BORDET, Sebastien MONERET, Joëlle PINELLI et Jocelyne FILIPUZZI.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à mon travail Monsieur Mohamed CHAABANE, professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax, et Madame Elena PANTELEY, Directrice de recherche CNRS au Laboratoire des Signaux et Systèmes. Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

J'exprime tous mes remerciements à Madame Moufida LAHMARI KSOURI, professeur à École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
1 Publications issues de la thèse . . . . .	4

## Chapitre 1

### Stabilité au sens de Lyapunov, stabilité pratique et stabilité en temps fini

1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	8
1.2.1 Préliminaires et définitions . . . . .	8
1.2.2 Théorèmes de stabilité . . . . .	11
1.3 Stabilité de Lyapunov et inégalités matricielles affines . . . . .	14
1.3.1 Analyse convexe et optimisation convexe . . . . .	14
1.3.2 Problèmes d'optimisation LMIs . . . . .	15
1.3.3 Analyse et synthèse de la stabilité de Lyapunov par LMIs . . . . .	16
1.4 Stabilité pratique et stabilité en temps fini . . . . .	18
1.4.1 La stabilité pratique . . . . .	18
1.4.2 La stabilité en temps fini . . . . .	19
1.5 Analyse et synthèse de stabilité en temps fini des systèmes linéaires invariants via des LMIs . . . . .	23
1.6 Conclusion . . . . .	26

## Chapitre 2

### Commande en temps fini des systèmes linéaires invariants

2.1 Introduction . . . . .	28
2.2 Préliminaires sur l'analyse de la stabilité en temps fini . . . . .	29

2.3	Approche descripteur pour la stabilisation en temps fini . . . . .	32
2.3.1	Approche descripteur pour l'analyse de la bornitude en temps fini . . . . .	32
2.3.2	Synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique . . . . .	35
2.3.3	Exemples numériques . . . . .	41
2.4	Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini . . . . .	42
2.4.1	Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini par retour de sortie dynamique : approche classique . . . . .	43
2.4.2	Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini par retour de sortie dynamique : approche descripteur . . . . .	48
2.4.3	Exemple numérique . . . . .	52
2.5	Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini . . . . .	54
2.5.1	Synthèse d'une commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini . . . . .	54
2.5.2	Synthèse d'une commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini sous la contrainte $KD_{yw} = 0$ . . . . .	56
2.5.3	Synthèse d'une commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini sans la contrainte $KD_{yw} = 0$ . . . . .	62
2.5.4	Exemple numérique . . . . .	69
2.6	Conclusion . . . . .	70

### Chapitre 3

#### Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques via des fonctions de Lyapunov quadratiques

3.1	Introduction . . . . .	72
3.2	Préliminaires et définitions . . . . .	72
3.2.1	Représentations des systèmes non linéaires quadratiques . . . . .	72
3.2.1.1	Première représentation . . . . .	72
3.2.1.2	Deuxième représentation . . . . .	72
3.2.1.3	Troisième représentation . . . . .	73
3.2.1.4	Exemples numériques . . . . .	74
3.2.1.4.1	Exemple 1 . . . . .	74
3.2.1.4.2	Exemple 2 . . . . .	75
3.2.1.4.3	Exemple 3 . . . . .	75
3.2.2	Représentations des systèmes non linéaires quadratiques perturbés . . . . .	75
3.2.2.1	Première représentation . . . . .	76
3.2.2.2	Deuxième représentation . . . . .	76
3.2.2.3	Troisième représentation . . . . .	76



---

3.2.3	Définitions de la stabilité en temps fini avec des domaines polytopiques . .	77
3.2.3.1	Représentations d'un polytope . . . . .	77
3.2.3.2	Définitions de la stabilité en temps fini . . . . .	78
3.3	Etude de la stabilité et stabilisation en temps fini par des fonctions de Lyapunov quadratiques . . . . .	79
3.3.1	Conditions de stabilité en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques	79
3.3.2	Conditions de la bornitude en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques . . . . .	82
3.3.3	Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques . . . . .	87
3.3.4	Stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini des systèmes quadratiques . . . . .	90
3.3.5	Exemples numériques . . . . .	94
3.4	Conclusion . . . . .	100

## Chapitre 4

### Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques via des fonctions de Lyapunov polynomiales

4.1	Introduction . . . . .	102
4.2	Fonctions de Lyapunov . . . . .	102
4.3	Etude de la stabilité et de la stabilisation en temps fini par fonction de Lyapunov polynomiale . . . . .	103
4.3.1	Conditions de stabilité en temps fini des systèmes quadratiques . . . . .	103
4.3.1.1	Exemples numériques . . . . .	109
4.3.2	Conditions de bornitude en temps fini des systèmes quadratiques . . . . .	110
4.3.2.1	Exemple numérique . . . . .	113
4.3.3	Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques par retour d'état non linéaire . . . . .	115
4.3.3.1	Stabilisation en temps fini . . . . .	115
4.3.3.2	Stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini . . . . .	119
4.3.4	Exemples numériques . . . . .	121
4.4	Conclusion . . . . .	122

## Conclusion générale et perspectives

## Annexe A

### Compléments mathématiques et Inégalités matricielles linéaires

A.1	Les annulateurs . . . . .	127
-----	---------------------------	-----

A.2	Propriétés des matrices . . . . .	128
A.2.1	Matrices définies et semi-définies . . . . .	128
A.2.2	Norme Euclidienne d'un vecteur . . . . .	128
A.2.3	Lemmes utiles . . . . .	128
A.3	Lemmes utiles pour les LMIs . . . . .	128
<b>Bibliographie</b>		<b>131</b>

# Table des figures

1.1	Illustration de la définition intuitive de la stabilité (tirée de [PM09]) . . . . .	9
1.2	Illustration de la stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	9
1.3	Illustration de la stabilité asymptotique . . . . .	10
1.4	Illustration de la stabilité asymptotique . . . . .	11
1.5	Illustration de la stabilité pratique . . . . .	19
1.6	Illustration de la stabilité pratique . . . . .	19
2.1	Norme pondérée de la réponse du système ouvert (2.131) . . . . .	52
2.2	Norme pondérée de la réponse du système (2.131) en boucle fermée . . . . .	53
2.3	Norme pondérée de la réponse du système en boucle fermée (2.131) . . . . .	54
2.4	Norme pondérée de la réponse du système en boucle fermée (2.131) . . . . .	70
3.1	FTB du système (3.140) . . . . .	95
3.2	Le système (3.140) n'est pas $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f = 5, d = 1.6)$ -FTB . . . . .	96
3.3	FTB avec stabilisation en temps fini du système (3.141) . . . . .	97
3.4	Ellipsoïdes $\mathcal{E}(P_{x1}, 1)$ et $\mathcal{E}(P_{x2}, 1)$ , polytopes $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ , et quelques trajectoires du système . . . . .	98
3.5	Occurrences de convergence parmi 50 matrices $E(x)$ aléatoires . . . . .	98
3.6	Occurrences de convergence parmi 50 matrices $A(x)$ aléatoires . . . . .	99
3.7	Ellipsoïdes $\mathcal{E}(P_{x1}, 1)$ et $\mathcal{E}(P_{x2}, 1)$ , polytopes $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ , et quelques trajectoires du système en boucle fermée . . . . .	99
4.1	Réponse du système en boucle ouverte . . . . .	110
4.2	Domaine $\mathcal{E}_1$ pour différents types de fonctions de Lyapunov . . . . .	111
4.3	Réponse du système en boucle ouverte . . . . .	115
4.4	Trajectoires du système en boucle fermée . . . . .	122
4.5	Réponse du système en boucle fermée . . . . .	123
4.6	Commande . . . . .	123



# Liste des tableaux

3.1	Valeurs de $\alpha$ pour différents $d$ avec $T_f = 0.7$ . . . . .	95
3.2	Valeurs de $\alpha$ pour différents $T_f$ avec $d = 0.3$ . . . . .	95
4.1	Valeurs maximales de $T_f$ obtenues pour différents types de $P(x)$ . . . . .	110
4.2	Spectre et valeur propre maximale de $P$ pour différents types de $P(x)$ . . . . .	111
4.3	Valeur maximale de $\max T_f$ pour différentes types de $P(x)$ . . . . .	114



# Introduction générale

La plupart des résultats existant dans la littérature liés à la stabilité des systèmes dynamiques concernent la stabilité au sens de Lyapunov ou la stabilité asymptotique. Ces concepts sont définis sur un intervalle de temps infini et ne donnent aucune idée sur le régime transitoire des trajectoires du système dynamique. C'est pourquoi, dans de nombreux domaines d'application pratique concernant l'analyse de la stabilité et la synthèse des lois de commande stabilisantes, l'utilisation d'une approche plus pratique est requise. En effet, étudier le comportement des systèmes dans un intervalle de temps fini est récurrent et devient un problème important lorsque leur vie est finie. En outre le comportement de système en régime transitoire joue un rôle essentiel. En effet, contraindre l'état d'un système en régime transitoire à ne pas dépasser certaines limites évite les saturations, les excitations excessives des parties vitales et des dynamiques non linéaires. Suivant ces considérations, les chercheurs russes ont introduit le concept de stabilité en temps fini durant les années 50 [Kam53, Leb54a, Leb54b]. Plus tard, au cours des années 1960, ce concept est apparu dans des journaux en anglais [Dor61b, Dor61a, MP72, WI67]. En définissant deux ensembles bornés dans l'espace d'état, nommés "ensemble initial" et "ensemble des trajectoires", le système est dit stable en temps fini (FTS, Finite-Time Stable), si les trajectoires du système émanant de l'ensemble initial restent dans l'ensemble des trajectoires pendant un intervalle de temps fini. Durant la même époque, en 1961 Lasalle et Lefschetz [LaS60] ont introduit le concept de la stabilité pratique. Un système est dit pratiquement stable, si les trajectoires émanant de l'ensemble initial restent dans l'ensemble des trajectoires pendant un intervalle de temps infini. En 1967, Weiss et Infante ont étendu le concept de FTS à des systèmes non linéaires en présence de perturbations. Cela conduit à la notion de stabilité BIBO en temps fini, qui est le même concept que la bornitude en temps fini (FTB, Finite-Time Boundedness) introduit par Amato *et al.* Un système soumis à des perturbations extérieures bornées est dit borné en temps fini si les trajectoires émanant de l'ensemble des conditions initiales restent dans l'ensemble des trajectoires pour un intervalle de temps fixe et fini. Ainsi, un système borné en temps fini est un système stable en temps fini en présence de perturbations extérieures bornées.

Par ailleurs, on note qu'il existe dans la littérature plusieurs travaux utilisant le terme "stabilité en temps fini" [BB98, Mou05] pour décrire une notion totalement différente, à savoir la convergence en temps fini vers un point d'équilibre. Celle-ci suppose que le système est déjà asymptotiquement stable. Au contraire, notre notion de stabilité en temps fini ne requiert pas que le système étudié soit asymptotiquement stable.

Il est à mentionner que Dorato a utilisé le terme "short-time Stability" [Dor61b, Dor61a] pour décrire la notion de stabilité en temps fini (FTS) que nous avons définie. Dans [Dor61b], Dorato *et al.* fournit un premier résultat d'analyse pour les systèmes linéaires variants. En 1965, Weiss et Infante ont publié une analyse détaillée sur la FTS pour les systèmes continus et non linéaires [WI65]. Ils ont donné des conditions suffisantes pour assurer la FTS d'un système continu non linéaire.

Ensuite, ils ont introduit la notion finite-time BIBO, qui était appliquée à des systèmes non linéaires perturbés [WI67]. En 1968, Weiss a développé des conditions nécessaires pour la FTS [Wei68].

Michel a étendu les travaux de Weiss sur la stabilité en temps fini des systèmes continus à plusieurs autres types de systèmes tels que les systèmes discrets, les systèmes simples, les systèmes interconnectés et les systèmes discontinus [MW69, Mic70b, Mic70a, MP72, MM77].

A la même époque, plusieurs autres résultats pour caractériser la FTS et la stabilité pratique des systèmes linéaires, non linéaires, déterministes et stochastiques sont apparus dans la littérature [Kus66, WS67, HW69, KW68, KR69, Kay71, LW75].

Tous ces travaux sont basés sur les fonctions dites “de type Lyapunov” (Lyapunov-like functions) [RM05]. Une fonction de type Lyapunov est une généralisation de la notion de fonctions de Lyapunov. Cependant, contrairement aux fonctions de Lyapunov, ni ces fonctions, ni leurs dérivées le long de la trajectoire ne sont obligées d’être signe-définies. C’est pourquoi la construction d’une telle fonction est très difficile en pratique, ce qui complique le développement des conditions basées sur ces fonctions [RM05]. Il est intéressant de noter que tous ces résultats ne concernent pas la synthèse de lois de commande pour la stabilisation en temps fini des systèmes bouclés : ce sont des résultats d’analyse de la stabilité en temps fini des systèmes dynamiques en boucle ouverte. Seul Garrard, en 1969, a présenté une approche pour la synthèse d’une loi de commande par retour d’état pour la stabilisation en temps fini d’un système non linéaire continu [Gar69, Gar72].

Durant la période entre 1969 et 1976, toutes les techniques d’analyse de FTS et celles de synthèse d’une loi de commande assurant la stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques, étaient d’une complexité de calcul très grande.

C’est à la fin des années 80 que le développement des méthodes de résolution des inégalités matricielles affines (LMIs, Linear Matrix Inequalities) a donné l’espoir d’une nouvelle approche pour la conception de nouvelles conditions d’analyse FTS et la synthèse de lois de commande assurant la stabilisation en temps fini des systèmes étudiés.

En 1997, Dorato, Abdallah et Famularo ont proposé pour la première fois la conception d’un correcteur par retour d’état à travers la résolution des contraintes LMIs, assurant la stabilisation en temps fini pour un système continu variant dans le temps avec des incertitudes polytopiques [DAF97].

En 1999, Amato *et al.*, dans [AAAD99b], ont construit un correcteur par retour d’état statique via des contraintes LMIs garantissant la bornitude en temps fini d’un système linéaire continu avec des incertitudes bornées en norme, et soumis à des perturbations constantes ou variantes dans le temps. Ce travail a été prolongé pour des systèmes linéaires avec des incertitudes paramétriques [AAD01]. Plusieurs autres résultats des mêmes auteurs concernant la conception de lois à base de LMIs assurant la FTS/FTB de systèmes linéaires bouclés se trouvent dans les références suivantes [AAC03, AA05, AAC06a].

Ensuite, plusieurs publications traitant la synthèse de lois de commande assurant la FTS ou FTB des systèmes linéaires dans le cas continu, discret, invariant, variant, déterministe ou stochastique, ont vu le jour. Par exemple, dans [ZA08, YZW10], la FTS et la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires stochastiques sont étudiés.

Par ailleurs, Ichihara et Katayama ont présenté des conditions nécessaires et suffisantes, sous forme de DLMI (inégalité matricielle affine différentielle), pour la FTB de systèmes linéaires variants dans le temps, et ceci dans le cas continu ainsi que le cas discret [IK09a, IK09b].

On note encore qu’il y a des travaux qui se sont intéressés à la stabilisation des systèmes linéaires variants en se basant sur les équations matricielles différentielles de Lyapunov [GTB09].

En 2006, Dorato a écrit un rapport appelé “An Overview of Finite-Time Stability” qui a rassemblé les différents résultats et références concernant la notion de la stabilité en temps fini



---

jusqu'à 2006 [Dor06]. Il a remarqué que, dans la littérature, la majorité des résultats existant dans le contexte de la stabilité en temps fini concernent des systèmes linéaires et non des systèmes non linéaires. Cette remarque sert d'indication pour les chercheurs pour investiguer de plus en plus les problèmes de stabilité en temps fini et de commande en temps fini pour les systèmes non linéaires.

Ainsi, dans [YLC09], Yang *et al.* ont considéré la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires hybrides et stochastiques.

Ambrisino *et al.* ont étudié la FTS des systèmes dynamiques impulsifs [ACCD09]. Zhuang et Liu ont considéré la stabilisation en temps fini pour une classe de systèmes non linéaires avec retard dans [ZL10].

Dans sa thèse [Mab10], Ben Mabrouk propose un résultat d'analyse de la stabilité et la stabilisation en temps fini avec des contraintes en norme sur l'état [MMG09]. Ce résultat est ensuite utilisé par l'auteur pour proposer deux résultats de synthèse de correcteurs par retour d'état et retour de sortie formulés en termes de LMIs, assurant la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires continus et invariants [MMG09, Mab10]. Ensuite, dans [BMBNGM11], Ben Mabrouk *et al.* se sont aussi intéressés à la stabilisation en temps fini de systèmes non linéaires affines en la commande en proposant une loi de commande garantissant la stabilisation en temps fini via des fonctions de Lyapunov contrôlées. Ce résultat est inspiré du travail de Sontag [Son89], [LS91].

En 2012, Elbsat a synthétisé dans sa thèse [ElB12] un retour d'état assurant la FTB de deux classes de systèmes non-linéaires : les systèmes avec des non-linéarités coniques, et les systèmes dont les matrices de représentation d'état dépendent de l'état.

Dans [ACM10], Amato a dressé le problème de la stabilité et la commande en temps fini de systèmes non linéaires quadratiques. Il a utilisé des ensembles polytopiques pour générer des conditions suffisantes assurant la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques.

Motivé par la conclusion de Dorato [Dor06], et par les travaux de Amato [ACM10], cette thèse sera consacré à l'étude des stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques. Ainsi ce manuscrit de thèse se compose de quatre chapitres.

Le premier chapitre se subdivise en quatre parties. Nous commençons par rappeler les notions de stabilité au sens de Lyapunov, de stabilité asymptotique ainsi que de stabilité exponentielle. Puis nous présentons différents théorèmes qui assurent la stabilité de Lyapunov, asymptotique et exponentielle des systèmes dynamiques. Dans une deuxième partie, nous introduisons l'analyse convexe et les problèmes d'optimisation convexe. Ensuite nous montrons que différents problèmes d'automatique peuvent se mettre sous forme de problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs. En troisième partie, nous nous intéressons à d'autres concepts de stabilité des systèmes dynamiques, tels que la stabilité pratique et la stabilité en temps fini. Nous donnons différentes notions issues de la stabilité en temps fini, tout en montrant leur intérêt en pratique. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons les différents théorèmes existant dans la littérature et qui donnent des conditions de stabilité en temps fini des systèmes linéaires, tout en mettant l'accent sur les résultats exprimés en termes de LMIs.

Le deuxième chapitre propose des nouvelles conditions d'analyse de la bornitude en temps fini et de la synthèse de correcteurs assurant la stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini des systèmes linéaires invariants. Dans un premier temps, nous développons de nouvelles conditions de bornitude en temps fini des systèmes linéaires invariants en utilisant l'approche descripteur. Cette approche est largement utilisée dans un contexte de stabilité de Lyapunov. Ces nouvelles conditions sont ensuite utilisées pour résoudre le problème de la synthèse d'un correcteur FTB. Dans un deuxième temps, nous nous focalisons sur le problème de la commande

$\mathcal{H}_\infty$  en temps fini. Nous proposons deux méthodes de synthèse d'un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB par retour de sortie dynamique pour les systèmes linéaires. La première est basée sur une approche classique et la deuxième méthode est basée sur une approche descripteur. Dans le cas où seulement une partie des composantes du vecteur d'état est accessible à la mesure, nous proposons de faire la commande de systèmes linéaires via un observateur. Ainsi nous présentons une méthode pour la synthèse d'un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB via un observateur  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB pour les systèmes linéaires invariants continus.

Le troisième chapitre comporte deux grandes parties. La première partie est consacrée à la présentation des systèmes non linéaires quadratiques non perturbés et perturbés, ainsi qu'aux différentes représentations de tels systèmes. Nous expliquons comment nous pouvons passer d'une représentation à une autre. Ensuite, nous rappelons les deux représentations d'un polytope. Puis nous définissons la stabilité en temps fini et la bornitude en temps fini d'un système non linéaire quadratique par rapport à des ensembles polytopiques. Dans la deuxième partie du chapitre, nous commençons par énoncer deux nouveaux lemmes. Le premier lemme donne des conditions assurant la stabilité en temps fini d'un système quadratique non perturbé. Le deuxième lemme énonce des conditions suffisantes garantissant la bornitude en temps fini des systèmes quadratiques perturbés. Ces deux lemmes servent pour la démonstration des prochains théorèmes des chapitres 3 et 4. Ensuite nous présentons des nouveaux théorèmes assurant la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques via des fonctions de Lyapunov quadratiques. Puis nous étendons ces résultats aux cas des systèmes quadratiques perturbés. Ces nouveaux résultats utilisent la notion d'annulateur dans un contexte de stabilité en temps fini, pour réduire le conservatisme des résultats de la littérature. Nous finissons ce chapitre par une section dédiée aux applications numériques. Ainsi différentes simulations sont effectuées pour montrer numériquement l'avantage de nos nouveaux résultats par rapport à ceux de la littérature.

Dans le quatrième chapitre, nous résolvons les problèmes de stabilité en temps fini, bornitude en temps fini, stabilisation en temps fini et stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini des systèmes quadratiques via des fonctions de Lyapunov polynomiales. Ce dernier chapitre se compose de deux parties. Une première partie est dédiée à la présentation des fonctions de Lyapunov polynomiales. La deuxième partie est consacrée à l'analyse de la stabilité en temps fini et de la bornitude en temps fini des systèmes quadratiques. Les résultats obtenus sont présentés en termes de LMIs. Des exemples numériques validant l'approche proposée sont détaillés. Puis nous résolvons les problèmes de stabilisation en temps fini et de stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini des systèmes quadratiques. Les résultats proposés sont exprimés en termes de conditions BMIs (inégalités matricielles bilinéaires). Deux algorithmes sont proposés pour la résolution de ces problèmes BMIs dans un contexte de stabilité en temps fini. Un exemple numérique valide l'approche proposée.

## 1 Publications issues de la thèse

- Delattre C., Bhiri B., Zemouche A., Souley Ali H., Zasadzinski M., Abderrahim K. Finite Time  $\mathcal{H}_\infty$  Functional Filter Design for a Class of Descriptor Linear Systems. In *22<sup>nd</sup> IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation.*, June 16-19 2014, Palermo, Italy.
- Bhiri B., Delattre C., Souley Ali H., Zasadzinski M., Zemouche A., Abderrahim K. Finite Time H-infinity Controller Design Based on Finite Time  $\mathcal{H}_\infty$  Fonctionnel Filter for Linear Continuous Systems. In *4<sup>th</sup> IEEE International Conference on Systems and Control.*, April 28-30, 2015, Sousse, Tunisia.

- Bhiri B., Delattre C., Zemouche A., Souley Ali H., Zasadzinski M., Abderrahim K. Finite Time  $\mathcal{H}_\infty$  Control via Dynamic Output Feedback for Linear Continuous Systems with Norm-Bounded Disturbances. In *European Control Conference.*, July 15-17 2015, Linz, Austria.
- Bhiri B., Delattre C., Zasadzinski M., Abderrahim K. Finite Time Stability via Polynomial Lyapunov Function of Nonlinear Quadratic Systems. In *American Control Conference.*, July 6-8 2016, Boston, USA.
- Bhiri B., Delattre C., Zasadzinski M., Abderrahim K. Finite Time Stabilization of Nonlinear Quadratic Systems by a Nonlinear State Feedback. In *European Control Conference.*, June 29-July 1 2016, Aalborg, Denmark.
- Bhiri B., Delattre C., Souley Ali H., Zasadzinski M., Abderrahim K.  $\mathcal{H}_\infty$  Controllers for Finite Time Stabilization of Linear Continuous Time-Invariant Systems. In *International Journal on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering.*
- Bhiri B., Delattre C., Zasadzinski M., Abderrahim K. Results on finite-time boundedness and finite-time control of non-linear quadratic systems subject to norm-bounded disturbances. In *IET Control Theory and Applications.*, DOI : 10.1049/iet-cta.2016.1434.
- Bhiri B., Delattre C., Souley Ali H., Zasadzinski M., Abderrahim K. A Descriptor System Approach for Finite-Time Control via Dynamic Output Feedback of Linear Continuous Systems. *20<sup>th</sup> World Congress of the International Federation of Automatic Control.*, July 9-14 2017, Toulouse, French.



# Chapitre 1

## Stabilité au sens de Lyapunov, stabilité pratique et stabilité en temps fini

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .</b>	<b>8</b>
1.2.1	Préliminaires et définitions . . . . .	8
1.2.2	Théorèmes de stabilité . . . . .	11
<b>1.3</b>	<b>Stabilité de Lyapunov et inégalités matricielles affines . . . . .</b>	<b>14</b>
1.3.1	Analyse convexe et optimisation convexe . . . . .	14
1.3.2	Problèmes d'optimisation LMIs . . . . .	15
1.3.3	Analyse et synthèse de la stabilité de Lyapunov par LMIs . . . . .	16
<b>1.4</b>	<b>Stabilité pratique et stabilité en temps fini . . . . .</b>	<b>18</b>
1.4.1	La stabilité pratique . . . . .	18
1.4.2	La stabilité en temps fini . . . . .	19
<b>1.5</b>	<b>Analyse et synthèse de stabilité en temps fini des systèmes linéaires invariants via des LMIs . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>1.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>26</b>

---

## 1.1 Introduction

La notion de stabilité joue un rôle primordial dans l'étude du comportement des systèmes dynamiques et dans la synthèse de lois de commande pour ces systèmes. Ainsi, le problème de la stabilité des systèmes dynamiques a été et reste un sujet de préoccupation majeur du travail des automaticiens et des ingénieurs [Hah67]. Dans la littérature, il existe plusieurs notions de stabilité, très souvent liées aux natures des systèmes étudiées, à ses environnements, à ses spécifications et aux performances désirées.

Parmi ces notions de stabilité, la plus connue est la stabilité au sens de Lyapunov, établie en 1892 par le mathématicien russe Lyapunov [Kha02]. Sa contribution consiste en une caractérisation qualitative de la stabilité par une étude des trajectoires des systèmes dynamiques, en utilisant des fonctions auxiliaires appelées aujourd'hui fonctions de Lyapunov. Ainsi, la stabilité au sens de Lyapunov est la plus connue et utilisée dans la littérature. Néanmoins, plusieurs travaux présentent d'autres notions de stabilité qui permettent de résoudre plusieurs cas pratiques d'étude des systèmes. On citera la bornitude de l'état, la stabilité entrée-sortie [Kha02], la stabilité pratique [LLM90] et la stabilité en temps fini [Dor61b].

Dans ce chapitre, on donnera la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, et quelques résultats relatifs à cette notion dans le cas des systèmes autonomes. Ensuite, on présentera les notions de stabilité pratique et de stabilité en temps fini.

## 1.2 Stabilité au sens de Lyapunov

### 1.2.1 Préliminaires et définitions

Ici, nous aborderons la stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes autonomes à temps invariant, régi par l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Une notion primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion de point d'équilibre.

**Définition 1.2.1** (Point d'équilibre). [Kha02] *L'état  $x_e$  est dit état ou point d'équilibre pour le système (1.1), si  $x(t_1) = x_e$  implique  $x(t) = x_e$  pour tout  $t \geq t_1$ . Ou tout simplement que l'état  $x_e$  vérifie l'équation  $f(x_e) = 0$ .*

**Définition 1.2.2** (Définition intuitive de la stabilité). [PM09] *Si le système dynamique est "légèrement" perturbé de son point d'équilibre, le même système reste "proche" de ce point d'équilibre. On dira alors que le point d'équilibre est stable.*

Cette définition intuitive de la stabilité traduit la capacité d'un système dynamique, pour des conditions initiales données, à rester très proche d'un point d'équilibre suite à une perturbation.

Considérons comme exemple illustratif une bille sur une surface sphérique comme montré sur la figure 1.1. Dans le schéma de gauche de la figure, suite à une légère perturbation de la position d'équilibre, la bille reste proche de sa position d'équilibre appelée stable ; alors que dans le schéma de droite, la bille ne reste pas proche de sa position d'équilibre qui est alors appelée instable.

La traduction mathématique de cette définition intuitive de la stabilité est donnée par la définition suivante.



FIGURE 1.1 – Illustration de la définition intuitive de la stabilité (tirée de [PM09])

**Définition 1.2.3** (Stabilité au sens de Lyapunov). [Kha02] Le point d'équilibre  $x_e$  est dit stable si  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\rho(\epsilon) > 0$  tel que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \rho \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \epsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.2)$$

Cela signifie que, quel que soit le rayon  $\epsilon$  d'une boule centrée sur l'équilibre, il est possible de trouver une sous-boule de rayon  $\rho(\epsilon)$ , telle que la trajectoire issue de n'importe quelle condition initiale dans cette sous-boule de rayon  $\rho$  ne quittera jamais la boule de rayon  $\epsilon$ .

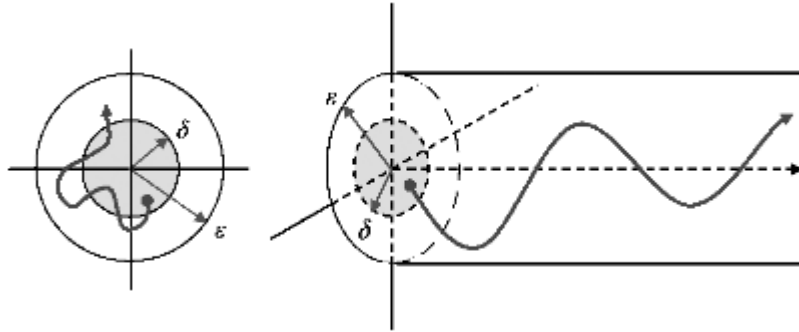


FIGURE 1.2 – Illustration de la stabilité au sens de Lyapunov

**Définition 1.2.4.** [Kha02] Le point d'équilibre  $x_e$  est dit attractif s'il existe  $\rho > 0$  tel que

$$\|x_0 - x_e\| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \quad (1.3)$$

L'attractivité signifie que, si l'état est initialisé dans un certain voisinage de l'état d'équilibre, alors la trajectoire issue de cet état initial convergera vers l'état d'équilibre au bout d'un temps suffisant (même infini).

**Définition 1.2.5.** [PM09] un système dynamique est dit instable au sens de Lyapunov lorsqu'il n'est pas stable au sens de la définition 1.2.3

Les deux dernières définitions éclaircissent deux faits très importants dans l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques. Le premier est que l'instabilité d'un système dynamique ne signifie pas nécessairement une explosion ou divergence à l'infini. Le deuxième est que l'attractivité d'un point d'équilibre n'assure pas la stabilité au sens Lyapunov. En effet, il existe des systèmes qui convergent vers un point d'équilibre quelles que soient les conditions initiales, sans pour autant que ces systèmes puissent être considérés comme stables. En effet, même en rapprochant les conditions initiales du point d'équilibre, il est parfois impossible de dominer le comportement transitoire des trajectoires résultantes.

Donc, la stabilité au sens de Lyapunov et l'attractivité sont deux propriétés indépendantes mais souhaitables. D'où la définition de la stabilité asymptotique.

**Définition 1.2.6** (Stabilité asymptotique). [Kha02] *Le point d'équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

Outre la stabilité, la stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage du point d'équilibre, tel que pour toute condition initiale appartenant à ce voisinage, l'état  $x(t)$  converge vers  $x_e$  lorsque le temps tend vers l'infini.

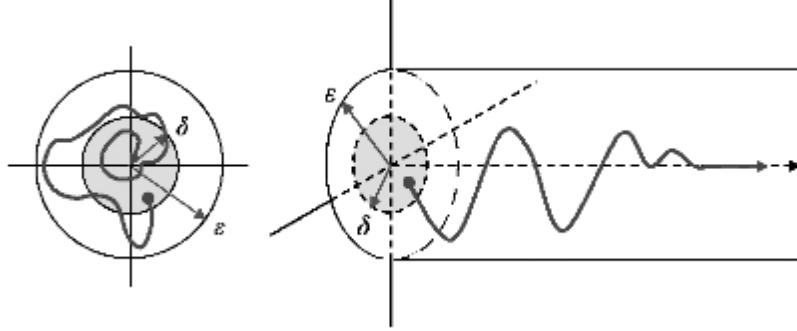


FIGURE 1.3 – Illustration de la stabilité asymptotique

Cependant, la définition de la stabilité asymptotique ne donne pas une idée sur la rapidité de convergence de la trajectoire  $x(t)$  vers le point d'équilibre  $x_e$ . D'où la notion de stabilité exponentielle.

**Définition 1.2.7** (Stabilité exponentielle). [Kha02] *Le point d'équilibre  $x_e$  est exponentiellement stable s'il existe  $\alpha > 0$  tel que, quel que soit  $\epsilon > 0$ , il existe  $\rho(\epsilon)$  tel que*

$$\forall t \geq t_0, \|x_0 - x_e\| \leq \rho \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon \|x_e - x_0\| \exp(-\alpha(t - t_0)) \quad (1.4)$$

Cette définition traduit le fait que toute trajectoire issue d'une condition initiale appartenant à la boule ouverte de rayon  $\rho$  converge vers le point d'équilibre  $x_e$  plus rapidement qu'une fonction exponentielle.  $\alpha$  est appelé dans ce cas le *taux de convergence*. On note que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique ainsi que la stabilité au sens de Lyapunov.

Dans chacune des définitions précédentes 1.2.6 et 1.2.7, la stabilité est définie localement, puisque les conditions initiales sont prises dans un voisinage  $\mathcal{V}(x_e)$  autour du point d'équilibre  $x_e$ . Si  $\mathcal{V}(x_e) = \mathbb{R}^n$ , le point d'équilibre  $x_e$  est dit globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.

**Définition 1.2.8** (Stabilité Globale).

*Si la condition de stabilité asymptotique (resp. exponentielle) est vérifiée dans tout  $\mathbb{R}^n$ , le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (resp. exponentiellement) stable.*



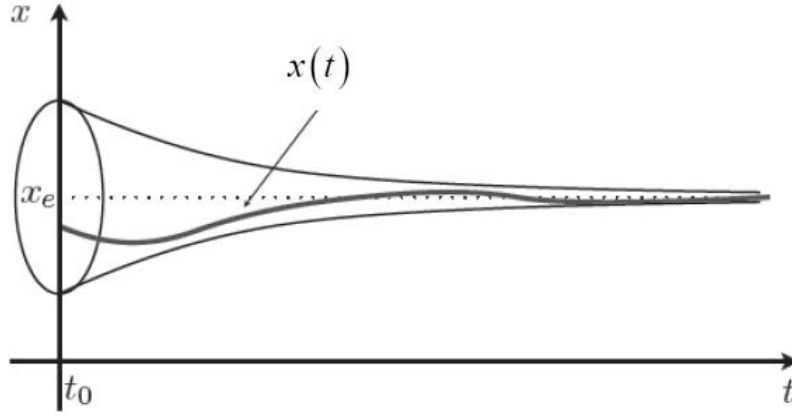


FIGURE 1.4 – Illustration de la stabilité asymptotique

On note que les définitions de la stabilité de Lyapunov, de la stabilité asymptotique et de la stabilité exponentielle présentent quelques inconvénients :

- Il est difficile de calculer de manière explicite chaque solution correspondante à chacune des conditions initiales.
- Ces définitions sont exprimées sous la forme de propositions mathématiques qu'il n'est pas simple de vérifier (trouver  $\epsilon, \rho, \alpha$ , etc.).

C'est pourquoi on présente dans la suite des résultats permettant de déterminer la stabilité d'un système dynamique sans recours à l'intégration des équations différentielles.

### 1.2.2 Théorèmes de stabilité

Commençons par des définitions très utiles par la suite telles que *candidat de Lyapunov* et *fonction de Lyapunov*.

**Définition 1.2.9.** [PM09]

- Une fonction  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite définie positive si  $V(x) > 0, \forall x \neq 0$  et  $V(x) = 0$  lorsque  $x = 0$ .
- Une fonction  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite définie négative si  $V(x) < 0, \forall x \neq 0$  et  $V(x) = 0$  lorsque  $x = 0$ .

**Définition 1.2.10.** [PM09][Candidat de Lyapunov] Toute fonction  $V(x)$  définie positive et continue est appelée candidat de Lyapunov.

**Définition 1.2.11.** [PM09][Fonction de Lyapunov] Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov de classe  $C^1$  ayant la propriété suivante :

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0; \quad \dot{V}(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \quad (1.5)$$

Par la suite, différents théorèmes de stabilité seront énoncés en considérant comme point d'équilibre l'origine 0 de l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$ . En effet, on peut toujours se ramener à l'étude de la stabilité de 0 par un simple changement de variable : si  $x_e$  est un point d'équilibre pour le système (1.1), c'est-à-dire  $f(x_e) = 0$ , il suffit de considérer le changement de coordonnées  $z = x - x_e$ . Dans ce cas on aura :

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x_e) \stackrel{\text{def}}{=} g(z)$$

Comme  $g(0) = 0$ , alors l'origine 0 est bien un point d'équilibre pour le nouveau système dynamique  $\dot{z} = g(z)$

**Théorème 1.2.1** (Stabilité au sens de Lyapunov). [Kha02] Soit  $x_e = 0$  un point d'équilibre du système (1.1) et  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  un voisinage de ce point d'équilibre. S'il existe une fonction de Lyapunov  $V$  définie sur  $\mathcal{V}$  vérifiant  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{V} - \{0\}$ , alors le point d'équilibre  $x_e$  est stable au sens de Lyapunov.

**Théorème 1.2.2** (Stabilité asymptotique). [Kha02] Soit  $x_e = 0$  un point d'équilibre du système (1.1) et  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  un voisinage de ce point d'équilibre. S'il existe une fonction de Lyapunov  $V$  définie sur  $\mathcal{V}$ , vérifiant en plus  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{V} - \{0\}$ , alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

On note que le théorème 1.2.1 donne des conditions suffisantes pour assurer la stabilité au sens de Lyapunov. La non existence d'une fonction de Lyapunov pour un système dynamique ne veut pas dire que ce dernier est non stable au sens de Lyapunov. De même, le théorème 1.2.2 fournit seulement des conditions suffisantes qui garantissent la stabilité asymptotique. On remarque aussi que les conditions de ces deux théorèmes ne sont vérifiées que dans un voisinage autour du point d'équilibre  $x_e$ , d'où la qualification de théorème de stabilité locale pour le théorème 1.2.1 et théorème de stabilité asymptotique locale pour le théorème 1.2.2.

Dans le cas de la stabilité asymptotique, les chercheurs ont essayé de caractériser le domaine contenant les conditions initiales à partir desquelles les trajectoires convergent asymptotiquement vers le point d'équilibre. C'est ainsi qu'on définit la *région d'attraction* ou *bassin d'attraction*. Dans le cas où le domaine d'attraction est tout l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$ , le point d'équilibre  $x_e$  sera dit globalement asymptotiquement stable. Cependant, il faut ajouter la propriété de la bornitude non radiale aux conditions de théorème 1.2.2 pour assurer la stabilité asymptotique globale. Le théorème suivant récapitule ces conditions.

**Théorème 1.2.3** (Stabilité asymptotique globale). [Kha02] Soit  $x_e = 0$  un point d'équilibre du système (1.1) et soit la fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , telle que

$$V(0) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n - \{0\} \quad (1.6a)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (1.6b)$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n - \{0\} \quad (1.6c)$$

alors  $x_e$  est globalement asymptotiquement stable.

La condition (1.6b) garantit la bornitude non radiale de la fonction  $V$  sur  $\mathbb{R}$ .

Outre les théorèmes garantissant les stabilités locale et globale des systèmes dynamiques autonomes, il existe des théorèmes caractérisant l'instabilité. Parmi ces théorèmes, on cite le théorème de Chetaev.

**Théorème 1.2.4** (Théorème d'instabilité). [Kha02]

Considérons  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  un voisinage de  $x_e = 0$ . Choisissons  $r > 0$  tel que la boule  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  soit contenue dans  $\mathcal{D}$ . Définissons maintenant la région suivante de l'espace d'état :

$$U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\} \quad (1.7)$$

Soit maintenant  $x_e = 0$  un point d'équilibre du système dynamique (1.1). Considérons  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $V(0) = 0$  et  $\dot{V}(x) > 0$  sur  $U$ . S'il existe  $x_0$  tel que  $V(x_0) > 0$  pour  $\|x_0\|$  assez petit, alors  $x_e = 0$  est instable.

Nous allons maintenant aborder le cas particulier des systèmes linéaires.

**Théorème 1.2.5.** [Kha02] Considérons un système linéaire défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = Ax, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.8)$$

- Le point d'équilibre 0 est stable au sens de Lyapunov si et seulement si toute valeur propre de  $A$  est à partie réelle négative ou nulle et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.
- Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.
- s'il existe une valeur propre de  $A$  à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre est instable.

**Définition 1.2.12.** Lorsque toute valeur propre de  $A$  est à partie réelle strictement négative  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , alors la matrice  $A$  est dite matrice de Hurwitz ou matrice de stabilité.

**Lemme 1.2.1.** [Kha02] Le point d'équilibre  $x_e = 0$  du système (1.8) est globalement asymptotiquement stable si et seulement si la matrice  $A$  est une matrice de Hurwitz.

Ainsi la stabilité asymptotique en l'origine d'un système linéaire caractérisé par l'équation d'état (1.8) est donnée par le théorème suivant de Lyapunov.

**Théorème 1.2.6.** [Kha02] Une matrice  $A$  est une matrice de Hurwitz, si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive  $Q$ , il existe une matrice symétrique définie positive  $P$  solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$PA + A^T P = -Q. \quad (1.9)$$

Une généralisation du théorème 1.2.5 pour les systèmes non linéaires autonomes a été proposée par Lyapunov. En effet, une approximation locale de la dynamique d'un système non linéaire permet, dans certains cas, d'en déduire la stabilité locale. Ainsi, on effectue un développement limité en série de Taylor du premier ordre en  $x_e = 0$  de l'équation (1.1). On obtient alors le système approché linéaire suivant :

$$\dot{x} = Jx \quad (1.10)$$

où

$$J = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \big|_{x=0} \quad \text{est la matrice Jacobienne de } f \text{ en } 0.$$

**Théorème 1.2.7.** [Kha02] Soit le système non linéaire défini par (1.1). Admettons que la fonction  $f$  de ce système est définie sur un voisinage  $\mathcal{V}$  autour de l'origine 0 et qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- L'origine est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de  $J$  sont à parties réelles strictement négatives.
- L'origine est instable si au moins une valeur propre de  $J$  est strictement positive.

Tous ces théorèmes et résultats concernent les systèmes autonomes non linéaires. Ils furent étendus au cas des systèmes non linéaires non autonomes. Les lecteurs intéressés peuvent se référer à [Kha02, Hah67].

### 1.3 Stabilité de Lyapunov et inégalités matricielles affines

L'origine des inégalités matricielles affines (LMIs, Linear Matrix Inequalities) date de 1890. Cette année-là, Lyapunov a introduit l'inégalité de Lyapunov  $A^T P + P A \leq 0$  pour vérifier la stabilité d'un système linéaire invariant et continu. En automatique, ces inégalités étaient utilisées par Lur'e, Yakubovich, Popov et Kalman. Dans un premier temps, les LMIs étaient résolues d'une manière analytique pour les systèmes d'ordre réduit. Dans un deuxième temps et avec l'établissement du lemme borné réel, des solutions graphiques furent proposées [BEFB94]. À la fin des années 60, une classe de LMIs a été résolue en utilisant les équations algébriques de Ricatti. Au début des années 80, Pyatnitskiy *et al.* [PS82b] ont remarqué que les problèmes d'optimisation avec contraintes LMIs peuvent se formuler sous la forme de problèmes d'optimisation convexe. L'intérêt des méthodes basées sur les LMIs vient donc du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. Avec cette approche, on n'est plus limité aux problèmes ayant une solution analytique. En résolvant ces inégalités, on obtient un domaine de solutions faisables, c'est-à-dire de solutions satisfaisant ces LMIs, plus vaste que celui généré par la recherche de solutions analytiques. En utilisant le fait qu'une inégalité possède davantage de solutions qu'une équation, il est possible d'employer les degrés de liberté supplémentaires pour inclure d'autres objectifs que ceux initialement retenus. Les travaux actuels se concentrent sur les formulations possibles des problèmes d'automatique en tant que problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI et l'amélioration des méthodes numériques de résolution des LMIs. Ces dernières concernent la minimisation des temps de calcul qui restent encore importants, et les problèmes de convergence lorsque la taille du problème (dimension des matrices, nombre des inégalités) devient grande.

#### 1.3.1 Analyse convexe et optimisation convexe

La notion de convexité joue un rôle important dans ce mémoire de thèse. En effet, les problèmes d'analyse et de synthèse évoqués seront formulés, lorsque cela est possible, en termes d'optimisation convexe. L'optimisation convexe permet de garantir que tout minimum local est global et que le temps de résolution de ces problèmes croît polynômialement plutôt qu'exponentiellement avec la taille du problème.

**Définition 1.3.1** (Ensemble convexe). [BV04, Zie12]

Un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit convexe s'il contient tout segment passant par deux de ses points. Cela est mathématiquement équivalent à

$$S = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid x, y \in S, \lambda \in [0; 1]\} \quad (1.11)$$

**Définition 1.3.2** (Fonction convexe). Une fonction  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0; 1] \Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (1.12)$$

Ainsi, étant donné  $S$  un ensemble convexe,  $f$  et  $g_i, i = 1, \dots, n$ , des fonctions convexes, un problème d'optimisation convexe peut se mettre sous la forme suivante

$$\begin{aligned} & \underset{x \in S}{\text{minimiser}} && f(x) \\ & \text{sous les contraintes} && g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.13)$$

Un des avantages des problèmes d'optimisation convexe est que toute optimisation d'une fonction convexe sous contraintes convexes sur un ensemble convexe peut se traiter localement, car toute solution locale est globale.

Une classe importante de problèmes d'optimisation convexe est la classe des inégalités matricielles affines.

### 1.3.2 Problèmes d'optimisation LMIs

**Définition 1.3.3.** Une LMI stricte est une inégalité matricielle affine de la forme suivante

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0, \text{ où} \quad (1.14)$$

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des variables appelées de décision.
- $F_0, F_1, \dots, F_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des matrices symétriques  $F_j = F_j^T, j = 0, \dots, n$ .

Une inégalité matricielle affine non-strictes s'obtient en remplaçant l'inégalité matricielle (1.14) par  $F(x) \geq 0$ . Remarquons que l'ensemble défini par  $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > 0\}$  est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

Un ensemble de plusieurs LMIs  $F^1(x) > 0, F^2(x) > 0, \dots, F^m(x) > 0$  peut être exprimé comme étant une seule LMI, formée par une matrice diagonale avec les contraintes LMIs sur la diagonale principale comme suit

$$\begin{pmatrix} F^1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F^2(x) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & F^3(x) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F^m(x) \end{pmatrix} > 0 \quad (1.15)$$

Les problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMIs sont alors de la forme suivante

**Définition 1.3.4** (Problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs). Considérons la fonction convexe  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , alors le problème

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && f(x) \\ & \text{sous les contraintes} && F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

représente un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs.

**Définition 1.3.5** (Inégalité matricielle bilinéaire (BMI)). *Une contrainte BMI est une contrainte sur  $x \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^r$  de la forme suivante*

$$F(x, y) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j=1}^r y_j H_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r x_i y_j F_i H_j > 0 \quad (1.17)$$

avec  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $H_j = H_j^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Les BMIs ne sont pas convexes. D'où des difficultés dans leur résolution. De récents travaux ont donné lieu à des algorithmes de résolution.

### 1.3.3 Analyse et synthèse de la stabilité de Lyapunov par LMIs

Soit le système linéaire invariant continu défini par la représentation d'état suivante

$$\dot{x} = Ax \quad (1.18)$$

**Théorème 1.3.1** (caractérisation de la stabilité asymptotique par LMIs).

*Le système (1.18) est asymptotiquement stable en temps fini si et seulement s'il existe une matrice  $P$  vérifiant*

$$P = P^T > 0 \quad (1.19a)$$

$$A^T P + P A < 0 \quad (1.19b)$$

Soit le système linéaire continu perturbé décrit par

$$G := \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ , est le vecteur d'état,  $z \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie et  $w \in \mathbb{R}^m$  celui de l'entrée exogène.

**Définition 1.3.6** (Norme  $\mathcal{H}_\infty$ ).

*La norme  $\mathcal{H}_\infty$  du système (1.20), stable ou instable, est définie par*

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \lambda_{\max}(G(j\omega)G^T(-j\omega)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (1.21)$$

La norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une fonction de transfert représente le maximum sur toute la bande de fréquence considérée de la valeur singulière maximale de la réponse fréquentielle du système considéré.

**Définition 1.3.7** (Norme  $\mathcal{L}_2$  sur les signaux).

*Pour un signal  $u(t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , la norme  $\mathcal{L}_2$  est définie par*

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty u^T(t)u(t) dt} \quad (1.22)$$

La norme  $\mathcal{L}_2$  permet de définir le gain  $\mathcal{L}_2$  d'un système asymptotiquement stable, qui correspond à sa norme  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Définition 1.3.8** (Gain  $\mathcal{L}_2$ ). Si le système (1.20) est asymptotiquement stable alors  $w \in \mathcal{L}_2$  implique  $z \in \mathcal{L}_2$  et, pour  $x(0) = 0$ , le gain  $\mathcal{L}_2$  du système (1.20) est donné par

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (1.23)$$

Le gain  $\mathcal{L}_2$  sert à mesurer la quantité d'énergie transmise par le système. Si ce gain est inférieur à 1, on dit que le système est contractif ou non expansif. Ainsi, la notion de gain  $\mathcal{L}_2$  est utile pour quantifier la façon dont le système rejette les perturbations externes.

**Théorème 1.3.2** (Lemme borné réel).

Les trois propositions suivantes sont équivalentes

- (i) le système (1.20) est stable et  $\|G\|_\infty < \gamma$
- (ii)  $\exists P = P^T > 0$  telle que

$$R = \gamma^2 I - D^T D > 0 \quad (1.24a)$$

$$A^T P + PA + C^T C + (PB + C^T D)R^{-1}(PB + C^T D)^T < 0 \quad (1.24b)$$

- (iii)  $\exists P = P^T > 0$  telle que

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Considérons le système linéaire invariant suivant

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.26)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état et  $u \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de commande. Nous cherchons à synthétiser une loi de commande par retour d'état statique  $u = Kx$  assurant la stabilité du système (1.26). Ce problème a été résolu dans la littérature en résolvant le problème LMIs suivant

**Théorème 1.3.3** (Stabilisation par retour d'état statique et LMIs).

Le système (1.26) est stabilisable par un retour d'état linéaire  $u = Kx$ , s'il existe deux matrices  $Q = Q^T$  et  $Y$  telles que

$$Q > 0 \quad (1.27a)$$

$$AQ + QA^T + Y^T B^T + BY < 0 \quad (1.27b)$$

La matrice gain est donnée par  $K = YQ^{-1}$ .

A l'instar des deux théorèmes précédents, il existe dans la littérature de nombreux résultats de stabilité et de stabilisation au sens de Lyapunov (ou asymptotique) de différentes classes de systèmes dynamiques sous forme de LMIs. Un objectif de ce doctorat est de présenter sous forme de LMIs des conditions de stabilité (et de stabilisation) en temps fini des systèmes linéaires et quadratiques, perturbés ou non.

## 1.4 Stabilité pratique et stabilité en temps fini

La théorie de la stabilité au sens de Lyapunov est maintenant bien connue et largement utilisée pour assurer le bon fonctionnement de la majorité des systèmes dynamiques rencontrés dans le monde réel.

Il est évident que, dans plusieurs applications, la stabilité asymptotique est plus intéressante que la stabilité au sens de Lyapunov.

En fait, il est très souhaitable de connaître la taille de la région de stabilité asymptotique afin que nous puissions juger si un système donné est suffisamment stable pour fonctionner correctement. Notons qu'un domaine de stabilité très réduit rend le système sans utilité d'un point de vue pratique [LLM90]. Un exemple illustrant ce phénomène est le système de Reynolds utilisé pour étudier l'écoulement de l'eau le long d'un tube de section transversale circulaire à différentes vitesses. En effet, il fut démontré que l'écoulement laminaire est stable pour toutes les vitesses. Cependant, le domaine de stabilité est très petit pour les grandes vitesses, rendant ainsi l'écoulement laminaire instable pratiquement [RM05].

D'autre part, le système désiré peut être non asymptotiquement stable, et pourtant il peut osciller suffisamment près de cet état d'équilibre, possédant ainsi des performances de fonctionnement très acceptables. De nombreux avions et des missiles se comportent de cette manière [LLM90].

De même, dans plusieurs autres situations, il est très commode de maintenir borné l'état du système, afin d'éviter plusieurs phénomènes non désirables, comme les saturations et les hystérésis [AAA<sup>+</sup>14].

De plus, les définitions 1.2.3 et 1.2.6 ne précisent pas les valeurs numériques de  $\epsilon$  et  $\delta$ , et n'interdisent donc pas d'avoir un rapport  $\epsilon/\delta$  très grand pour certains systèmes. Ainsi, les trajectoires de plusieurs systèmes non linéaires ou linéarisés s'éloignent beaucoup du point d'équilibre pendant le régime transitoire avant de converger vers ce point. Ce genre de comportement peut causer des dégâts matériels [HPP01].

Tenant compte de ces considérations, plusieurs chercheurs ont introduit des nouvelles notions de stabilité qui permettent gérer plusieurs situations d'ordre pratique. Parmi ces notions, on cite la stabilité pratique introduite par [LL61] et la stabilité en temps fini [Kam53].

### 1.4.1 La stabilité pratique

La notion de la stabilité pratique a été introduite par Lasalle et Lefschetz en 1961, pour des systèmes opérant pendant un intervalle de temps infini pour lesquels il faut spécifier les bornes sur les trajectoires de l'état [LL61].

**Définition 1.4.1** (stabilité pratique). [LL61]

*Etant donné  $Q$  et  $Q_0$  deux régions fermées et bornées de l'espace d'état contenant l'origine telles que  $Q_0 \subset Q$ . Le système (1.1) est pratiquement stable par rapport à  $(Q_0, Q)$  si*

$$x_0 \in Q_0 \Rightarrow x(t, t_0, x_0) \in Q, \forall t \geq t_0 \quad (1.28)$$

Cela revient à dire que les trajectoires commençant dans  $Q_0$  resteront dans  $Q$ .

Avant de décider si un système est pratiquement stable ou non, on doit obligatoirement définir les ensembles  $Q_0$  et  $Q$ . Ces ensembles sont généralement définis à partir de considérations pratiques de fonctionnement du système dynamique. A la différence de la stabilité pratique, pour la stabilité asymptotique, on sait que pour  $Q$  donnée, il existe  $Q_0$ , mais sans aucune précision sur leurs dimensions.



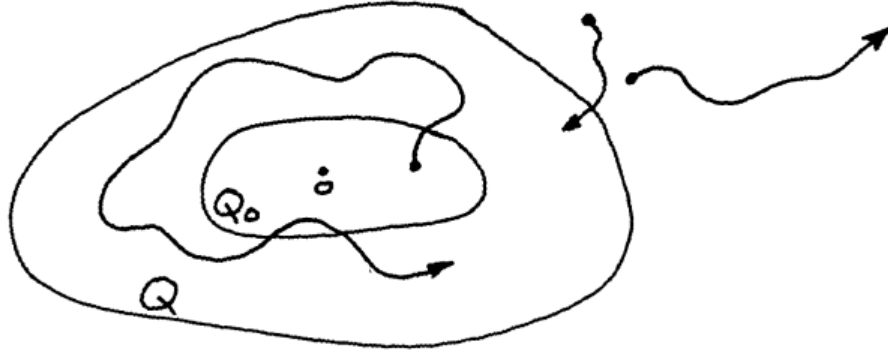


FIGURE 1.5 – Illustration de la stabilité pratique

On note que la stabilité pratique garantit que l'état reste borné pendant un intervalle de temps infini. Cependant, pour certaines applications industrielles, il est commode d'assurer que l'état reste borné pendant un intervalle de temps fixe et fini. Par exemple, pour garantir le déplacement d'un bras manipulateur d'un point A vers un point B, ou bien pour garder la pression, la température ou une autre grandeur physique dans certaines limites pendant une durée fixe et finie. D'où la notion de stabilité en temps fini. Dans la suite, on rappelle la définition de la stabilité en temps fini en termes ensemblistes.

#### 1.4.2 La stabilité en temps fini

**Définition 1.4.2** (Stabilité en temps fini). [AAA<sup>+</sup>14] Soit  $S_0$  et  $S$  deux régions fermées et bornées contenant l'origine, telles que  $S_0 \subset S$ , et soit  $\mathcal{T}$  un intervalle de temps fini et fixe. Le système (1.1) est dit stable en temps fini par rapport à  $(S_0, S, \mathcal{T})$  si

$$x_0 \in S_0 \Rightarrow x(t, t_0, x_0) \in S, \forall t \in \mathcal{T} \quad (1.29)$$

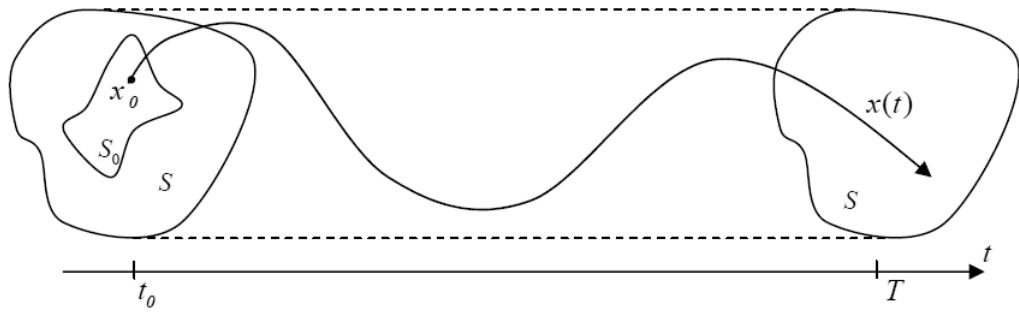


FIGURE 1.6 – Illustration de la stabilité pratique

La stabilité en temps fini par rapport à  $(S_0, S, \mathcal{T})$  signifie que toute trajectoire  $x(t, t_0, x_0)$  du système dynamique, émanant d'une condition initiale  $x_0$  dans la région  $S_0$ , ne quitte pas la région  $S$  pendant le temps fini  $\mathcal{T}$ .

On peut remarquer que la stabilité en temps fini ne diffère de la stabilité pratique que par la largeur de l'intervalle de temps. Cet intervalle de temps est infini dans le cas de la stabilité

pratique, alors qu'il est fini dans la cas de la stabilité en temps fini. Il existe dans la littérature plusieurs auteurs [PRGB95, GRBG04, Gar87] qui emploient le terme de stabilité pratique même dans le cas où l'intervalle de temps considéré est fini.

Par ailleurs, on note qu'il existe dans la littérature plusieurs travaux utilisant le terme "stabilité en temps fini" [BB98, Mou05] pour décrire une notion totalement différente de la définition 1.4.2, à savoir la convergence en temps fini vers un point d'équilibre. Celle-ci suppose que le système est déjà asymptotiquement stable. Au contraire, notre notion de stabilité en temps fini ne requiert pas que le système étudié soit asymptotiquement stable.

D'après la définition 1.2.3, on peut noter que la stabilité au sens de Lyapunov est un concept qualitatif [AAA<sup>+</sup>14]. En effet, les deux boules de rayon respectifs  $\epsilon$  et  $\rho$  ne sont pas quantifiées. Ainsi, la stabilité au sens de Lyapunov est une propriété structurelle du système dynamique : soit le système considéré est stable, soit il ne l'est pas.

Cependant, d'après la définition 1.4.2, le concept de la stabilité en temps fini (FTS) est un concept quantitatif [Dor61b, AAA<sup>+</sup>14], puisque les ensembles des conditions initiales et des trajectoires sont spécifiés une fois pour toute au début. Par conséquent, le même système peut être stable en temps fini par rapport à un certain choix de  $(S_0, S, \mathcal{T})$  et non stable en temps fini pour un choix différent de ces ensembles. En conséquence, la stabilité en temps fini et la stabilité au sens de Lyapunov sont des concepts indépendants. En effet, un système peut être stable en temps fini, mais pas stable dans le sens de Lyapunov et vice versa. Une autre caractéristique est que le concept de la stabilité de Lyapunov s'intéresse au comportement du système dynamique pendant un intervalle de temps suffisamment long (en principe, infini). Cependant, le concept de la stabilité en temps fini est un concept plus pratique et utile pour étudier le comportement du système sur un intervalle fini (peut-être court). Par conséquent, il trouve son application chaque fois que l'on désire que les variables d'état ne dépassent pas un seuil donné, par exemple, pour éviter la saturation ou l'excitation des dynamiques non linéaires au cours du régime transitoire.

Dans la pratique, et pour faciliter l'élaboration des conditions mathématiques vérifiant la stabilité en temps fini, il est commode de considérer des régions de formes spécifiques comme les boules, les ellipsoïdes et les polytopes.

Dans la suite, on donnera quelques définitions de stabilité en temps fini concernant les systèmes dynamiques autonomes.

Considérons des ensembles ellipsoïdaux  $S_0$  et  $S$ , la définition 1.4.2 de la stabilité en temps fini peut être établie comme suit.

**Définition 1.4.3** (Stabilité en temps fini). [AAC06a] *Etant donné trois scalaires positifs  $c_1$ ,  $c_2$ , et  $T_f$ , avec  $c_1 < c_2$ , et une matrice symétrique définie positive  $R$ , le système dynamique (1.1) est dit stable en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, R, T_f)$ , si*

$$x_0^T R x_0 \leq c_1 \Rightarrow x(t)^T R x(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f] \quad (1.30)$$

Lorsque le système étudié est soumis à des perturbations extérieures, le concept de stabilité en temps fini (FTS) est remplacé par le concept de *bornitude en temps fini (FTB)* [AAAD99b]. Donc un système borné en temps fini est un système stable en temps fini en présence de signaux de perturbations initialement bornés.

Considérons le système dynamique perturbé représenté par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(x) + w(t) \quad (1.31)$$

**Définition 1.4.4** (Bornitude en temps fini). *Soit  $S_0$  et  $S$  deux régions fermées et bornées contenant l'origine, telles que  $S_0 \subset S$ ,  $\mathcal{T}$  un intervalle de temps fini et fixe et  $\mathcal{W}$  l'ensemble des*

perturbations bornées. Le système (1.31) est dit borné en temps fini par rapport à  $(S_0, S, \mathcal{W}, \mathcal{T})$  si

$$x_0 \in S_0 \Rightarrow x(t, t_0, x_0) \in S, \forall w \in \mathcal{W}, \forall t \in \mathcal{T} \quad (1.32)$$

En considérant des régions ellipsoïdales  $S_0$  et  $S$ , la définition 1.4.4 deviendra :

**Définition 1.4.5** (Bornitude en temps fini). [AAD99b] Etant donné quatre scalaires positifs  $c_1, c_2, d$  et  $T_f$ , avec  $c_1 < c_2$  et une matrice symétrique définie positive  $R$ , le système dynamique (1.31) est dit borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, d, T_f)$ , si

$$x_0^T R x_0 \leq c_1, \text{ et } \|w(t)\|^2 \leq d \Rightarrow x(t)^T R x(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f] \quad (1.33)$$

Un système est dit borné en temps fini, si les trajectoires émanant des états initiaux appartenant à l'ellipsoïde  $x^T R x \leq c_1$ , restent dans l'ellipsoïde  $x^T R x < c_2$  pendant  $[0, T_f]$ , ceci quelles que soient les perturbations extérieures de norme inférieure ou égale à une constante  $d$  prédéfinie.

Le problème de commande en temps fini concerne la synthèse des correcteurs assurant la stabilité en temps fini et la bornitude en temps fini des systèmes bouclés.

Depuis la fin des années 40, des auteurs russes ont utilisé la notion de stabilité en temps fini pour l'analyse de comportement des trajectoires de systèmes dynamiques [Bul46, Kam53, Leb54a, Leb54b].... Ces travaux sont consacrés à l'estimation des valeurs limites des composants d'état des systèmes linéaires et non linéaires sur un intervalle de temps fixe et fini. Ces travaux de recherche seront disponibles en anglais avec la publication du livre de W.H.Hahn en 1963. C'est à partir de cette date que l'analyse et la synthèse des conditions garantissant la stabilité en temps fini (FTS) a connu un essor.

Il est très intéressant aussi de mentionner que Dorato a utilisé le terme "short-time stability" [Dor61b, Dor61a], qui coïncide avec la notion de la stabilité en temps fini (FTS) déjà défini. Dans [Dor61b], Dorato *et al.* fournit un premier résultat d'analyse pour les systèmes linéaires variants.

Considérant le système linéaire à temps variant décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1.34)$$

**Théorème 1.4.1.** [Dor61b] Le système (1.34) est stable en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f)$ ,  $c_1 < c_2$  si

$$\int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau \leq \ln \frac{c_2}{c_1}, \forall t \in [t_0, t_0 + T_f] \quad (1.35)$$

où  $\Lambda(\tau)$  est la valeur propre maximale de  $\frac{1}{2}(A^T(\tau) + A(\tau))$

En 1965, Weiss et Infante ont publié une analyse détaillée sur la FTS pour les systèmes continus et non linéaires [WI65]. Ils ont donné des conditions suffisantes pour assurer la FTS d'un système continu non linéaire. Ensuite, ils ont introduit la notion finite-time BIBO, qui était appliquée à des systèmes non linéaires perturbés [WI67]. Leurs contributions majeures sont détaillées dans le théorème qui suit :

Soit le système non linéaire défini par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) + w(x, t) \quad (1.36)$$

**Théorème 1.4.2.** [WI67] Le système est borné en temps fini (FTB) par rapport à  $(c_1, c_2, d, T_f)$ , s'il existe une fonction réelle  $V(x, t)$  et deux fonctions réelles  $\phi(t), \rho(t)$  intégrables sur l'intervalle  $\mathcal{I} = [t_0, t_0 + T_f]$  telles que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\left\| \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right\| \leq \rho(t), \forall x \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{I} \quad (1.37a)$$

$$\dot{V}_f(x, t) < \phi(t) \forall x \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{I} \quad (1.37b)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [\phi(t) + d\rho(t)] dt \leq V_m^{c_2}(t_2) - V_M^{c_1}(t_1), t_1, t_2 \in \mathcal{I} \quad (1.37c)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{x; c_1 < \|x\| \leq c_2\} \\ V_f(x, t) &= \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \\ V_M^{c_1}(t) &= \max_{\|x\|=c_1} V(x, t) \\ V_m^{c_2}(t) &= \min_{\|x\|=c_2} V(x, t) \end{aligned}$$

Ce théorème a été appliqué aux systèmes linéaires variants.

Soit le système linéaire à temps variant régi par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)w(t) \quad (1.39)$$

Dans ce cas le théorème 1.4.2 se simplifie au théorème suivant

**Théorème 1.4.3.** *Le système (1.39) est borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, d, T_f)$  si*

$$\int_{t_1}^{t_2} [\Lambda_A(t)c_2^2 + 2d\Lambda_b^{\frac{1}{2}}c_2] dt \leq (c_2^2 - c_1^2), \forall t_0 \leq t_1 < t_2 \leq T_f \quad (1.40)$$

où  $\Lambda_A(t)$  est la valeur propre maximale de  $(A^T(t) + A(t))$   
et  $\Lambda_b$  est la valeur propre maximale de  $b(t)b^T(t)$ .

En 1968 Weiss a développé des conditions nécessaires pour la FTS [Wei68].

Michel a étendu les travaux de Weiss sur la stabilité en temps fini (FTS) des systèmes continus à plusieurs autres types de systèmes tels que les systèmes discrets, les systèmes simples, les systèmes interconnectés et les systèmes discontinus [MW69, Mic70b, Mic70a, MP72, MM77].

Entre-temps, plusieurs autres résultats sur la FTS et la stabilité pratique des systèmes linéaires, non linéaires, déterministes et stochastiques sont apparus dans la littérature [Kus66, WS67, HW69, KW68, KR69, Kay71, LW75].

Tous ces travaux sont basés sur les fonctions dites "de type Lyapunov" (Lyapunov-like functions) [RM05]. Une fonction de type Lyapunov est une généralisation de la notion de fonction de Lyapunov défini dans la définition 1.2.11. Cependant, contrairement aux fonctions de Lyapunov, ni ces fonctions, ni leurs dérivées le long de la trajectoire ne sont obligées d'être signe-définies. C'est pourquoi la construction d'une telle fonction est très difficile en pratique, ce qui complique le développement des conditions basées sur ces fonctions. [RM05].

Il est intéressant de noter que tous ces résultats ne concernent pas la synthèse de lois de commande pour la stabilisation en temps fini des systèmes bouclés : ils restent des résultats d'analyses de la stabilité en temps fini des systèmes dynamiques en boucle ouverte.

En 1969, Garrard a présenté une approche pour la synthèse d'une loi de commande par retour d'état pour la stabilisation en temps fini d'un système non linéaire continu [Gar69, Gar72]. Et voici le principal résultat.

**Théorème 1.4.4.** [Gar72]

*Considérons le système non linéaire suivant*

$$\dot{x} = f(x, t) + Bu \quad (1.41)$$

Le système (1.41) est stable en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f)$ , si la commande  $u$  satisfait l'inégalité suivante

$$\sum_{i=0}^n x_i f_i + \sum_{i=0}^n x_i \sum_{j=0}^m b_{ij} u_j - \frac{1}{T} \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right) \sum_{i=0}^n x_i^2 \leq 0, \forall x \in \mathcal{R} \quad (1.42)$$

où  $n$  est la dimension de l'état  $x$ ,  $m$  est la dimension de la commande  $u$  et  $\mathcal{R}$  défini comme dans le théorème 1.4.2

Dans son travail, Garrard utilise une candidate logarithmique de Lyapunov  $V(x) = \ln \frac{\|x\|}{c_1}$ . Cependant, la synthèse de la loi de commande (1.42) assurant la stabilité en temps fini (FTS) est très coûteux d'un point de vue complexité de calcul.

Durant la période entre 1969 et 1976, toutes les techniques d'analyse de FTS et celles de synthèse d'une loi de commande assurant la stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques, étaient d'une complexité de calcul très grande.

C'est à la fin des années 80, que le développement des méthodes de résolution des inégalités matricielles affines (LMIs) a donné l'espoir d'une nouvelle approche pour la conception des nouvelles conditions d'analyse FTS et la synthèse de lois de commande assurant la stabilisation en temps fini des systèmes étudiés.

## 1.5 Analyse et synthèse de stabilité en temps fini des systèmes linéaires invariants via des LMIs

D'abord rappelons quelques définitions de stabilité en temps fini. Les ensembles des conditions initiales et celles des trajectoires sont des ensembles ellipsoïdaux.

**Définition 1.5.1** (Stabilité en temps fini).

Considérons le système linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(0) = x_0 \quad (1.43)$$

Le système (1.43) est dit stable en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R)$  avec  $c_2 > c_1 \geq 0$ ,  $R = R^T > 0$ , si

$$x_0^T R x_0 \leq c_1 \Rightarrow x(t)^T R x(t) < c_2, \forall t \in [0, T_f] \quad (1.44)$$

Considérons maintenant le système linéaire perturbé suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t), x(0) = x_0 \quad (1.45)$$

En fonction des hypothèses concernant la classe des signaux de perturbations  $\mathcal{W}$ , différents types de problèmes de bornitude en temps fini (FTB) peuvent être formulés.

Parmi ces classes, on note la classe des signaux de carré-intégrables [MS09, KBI15] donnée par

$$\mathcal{W}_d^2 = \{w(.) : \int_0^{T_f} w^T(\tau) w(\tau) d\tau \leq d\}. \quad (1.46)$$

et la classe des signaux de norme bornée donnée par [KBI15]

$$\mathcal{W}_d^\infty = \{w(.) : w^T(t) w(t) \leq d, \forall t \in [0, T_f]\}. \quad (1.47)$$

La classe de perturbations considérée dans les résultats de cette section est la classe des signaux de carré-intégrables (1.46).

**Définition 1.5.2** (Bornitude en temps fini [AAD01]).

Le système linéaire perturbé (1.45) est dit *borné en temps fini* par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$ , avec  $c_2 > c_1 \geq 0$ ,  $R = R^T > 0$ , si

$$x_0^T R x_0 \leq c_1 \Rightarrow x^T(t) R x(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T_f], \quad \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}_d^2. \quad (1.48)$$

Plusieurs travaux dans la littérature sont consacrés à l'analyse de la stabilité en temps fini, la bornitude en temps fini et la  $\mathcal{H}_\infty$ -bornitude en temps fini des systèmes linéaires continus invariants et variants dans le temps. Nous précisons que notre étude se limite à l'étude des systèmes linéaires continus invariants dans le temps.

**Théorème 1.5.1.** [AAC06a]

Le système (1.43) est stable en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R)$ , si en définissant  $\tilde{Q} = R^{-\frac{1}{2}} Q R^{-\frac{1}{2}}$ , il existe un scalaire  $\alpha \geq 0$  et une matrice  $Q$  tels que

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}^T > 0 \quad (1.49a)$$

$$A\tilde{Q} + \tilde{Q}A^T - \alpha\tilde{Q} < 0 \quad (1.49b)$$

$$\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} < \frac{c_2}{c_1} e^{-\alpha T_f} \quad (1.49c)$$

Les deux conditions (1.49b) et (1.49c) sont deux conditions non convexes. En effet, la condition (1.49b) fait intervenir le produit de deux variables à déterminer  $\alpha$  et  $\tilde{Q}$ . De même, la condition (1.49c) fait intervenir la valeur propre maximale et celle minimale de  $Q$ . Si  $\alpha$  est fixé, la condition (1.49b) devient une contrainte LMI. Et la condition (1.49c) est garantie en imposant la contrainte suivante à  $Q$

$$I < Q < \frac{c_2}{c_1} e^{-\alpha T_f} \quad (1.50)$$

On en déduit un lemme important donnant des conditions exprimées en termes de LMIs garantissant la stabilité en temps fini des systèmes linéaires continus et invariants.

**Lemme 1.5.1.** [AAC06a]

Le système (1.43) est stable en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R)$  si, étant donné un réel  $\alpha \geq 0$  et en définissant  $\tilde{Q} = R^{-\frac{1}{2}} Q R^{-\frac{1}{2}}$ , il existe une matrice  $Q$  telle que

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}^T > 0 \quad (1.51a)$$

$$A\tilde{Q} + \tilde{Q}A^T - \alpha\tilde{Q} < 0 \quad (1.51b)$$

$$I < Q < \frac{c_2}{c_1} e^{-\alpha T_f} \quad (1.51c)$$

En pratique, on peut déterminer  $\alpha$  par une recherche en ligne sur ce paramètre. Ainsi, à chaque valeur de  $\alpha$  de  $\alpha$  considérée, nous vérifions la faisabilité des conditions du lemme 1.5.1.

Remarquons que, si  $\alpha = 0$ , outre la stabilité en temps fini, les conditions du lemme 1.5.1 assurent la stabilité asymptotique du système considéré.

Dans la suite nous présentons des résultats assurant la bornitude en temps fini des systèmes linéaires invariants et perturbés.

**Théorème 1.5.2.** [MS09, XXX11]

Considérant la classe des perturbations  $\mathcal{W}_d^2$ , le système perturbé (1.45) est borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  si, en définissant  $\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}}Q_1R^{-\frac{1}{2}}$ , il existe un scalaire  $\alpha \geq 0$  et deux matrices  $Q_1$  et  $Q_2$  telles que

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1^T > 0 \quad (1.52a)$$

$$Q_2 = Q_2^T > 0 \quad (1.52b)$$

$$\begin{pmatrix} A\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1A^T - \alpha\tilde{Q}_1 & B_wQ_2 \\ Q_2B_w^T & -Q_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (1.52c)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)} < \frac{c_2e^{-\alpha T_f}}{\lambda_{\max}(Q_1)} \quad (1.52d)$$

Les conditions du théorème 1.5.2 ne sont pas des LMIs. En effet, même si on fixe  $\alpha$ , la condition (1.52d) reste non convexe. Cette condition peut être linéarisée en imposant les conditions suivantes

$$\lambda_1 I < Q_1 < I \quad (1.53a)$$

$$\lambda_2 I < Q_2 < \lambda_3 I \quad (1.53b)$$

$$\begin{pmatrix} c_2e^{-\alpha T_f} & \sqrt{c_1} & \sqrt{d} \\ \sqrt{c_1} & \lambda_1 & 0 \\ \sqrt{d} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} > 0 \quad (1.53c)$$

Ainsi, nous déduisons le lemme suivant.

**Lemme 1.5.2.** [AAC06a]

Considérant la classe des perturbations  $\mathcal{W}_d^2$ , le système perturbé (1.45) est borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  si, étant donné  $\alpha \geq 0$  et en définissant  $\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}}Q_1R^{-\frac{1}{2}}$ , il existe deux matrices définies positives  $Q_1$  et  $Q_2$  et des scalaires  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  telles que

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1^T > 0 \quad (1.54a)$$

$$Q_2 = Q_2^T > 0 \quad (1.54b)$$

$$\begin{pmatrix} A\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1A^T - \alpha\tilde{Q}_1 & B_wQ_2 \\ Q_2B_w^T & -Q_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (1.54c)$$

$$\lambda_1 I < Q_1 < I \quad (1.54d)$$

$$\lambda_2 I < Q_1 < \lambda_3 I \quad (1.54e)$$

$$\begin{pmatrix} c_2e^{-\alpha T_f} & \sqrt{c_1} & \sqrt{d} \\ \sqrt{c_1} & \lambda_1 & 0 \\ \sqrt{d} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} > 0 \quad (1.54f)$$

*Démonstration.* La condition (1.54f) est vérifiée en imposant :

$$\lambda_1 I < Q_1 < I \quad (1.55a)$$

$$\lambda_2 I < Q_1 < \lambda_3 I \quad (1.55b)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{d}{\lambda_2} < c_2 e^{-\alpha T_f} \quad (1.55c)$$

En appliquant le lemme de Schur deux fois sur l'inégalité (1.55b), nous obtenons exactement la condition (1.54f). •

## 1.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, différentes notions de stabilité ont été présentées. Premièrement, la notion de stabilité la plus classique, celle au sens de Lyapunov, a été rappelée. Nous avons également défini la stabilité asymptotique et la stabilité exponentielle. Ensuite, plusieurs résultats concernant ces différents types de stabilité ont été exposés en se basant sur la définition d'une fonction de Lyapunov. Principalement, nous avons rappelé que la caractérisation de la stabilité de Lyapunov d'un système linéaire invariant peut se mettre sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMIs.

Dans un deuxième temps, nous avons introduit la notion de stabilité pratique et le concept de stabilité en temps fini. Nous avons présenté différentes définitions liées à ce dernier concept, telles la stabilité en temps fini et la bornitude en temps fini. Ensuite, nous avons exposé différents résultats garantissant la stabilité en temps fini ou la bornitude en temps fini d'un système dynamique. Nous avons mis l'accent sur des résultats exprimés sous forme LMIs garantissant la stabilité en temps fini, la stabilisation en temps fini et la bornitude en temps fini des systèmes linéaires invariants.

Le second chapitre sera consacré à la présentation des nouveaux résultats concernant la bornitude en temps fini et la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires continus et invariants.



## Chapitre 2

# Commande en temps fini des systèmes linéaires invariants

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2.2</b>	<b>Préliminaires sur l'analyse de la stabilité en temps fini . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.3</b>	<b>Approche descripteur pour la stabilisation en temps fini . . . . .</b>	<b>32</b>
2.3.1	Approche descripteur pour l'analyse de la bornitude en temps fini . . . .	32
2.3.2	Synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique . . . . .	35
2.3.3	Exemples numériques . . . . .	41
<b>2.4</b>	<b>Commande <math>\mathcal{H}_\infty</math> en temps fini . . . . .</b>	<b>42</b>
2.4.1	Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini par retour de sortie dynamique : approche classique . . . . .	43
2.4.2	Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini par retour de sortie dynamique : approche descripteur . . . . .	48
2.4.3	Exemple numérique . . . . .	52
<b>2.5</b>	<b>Commande <math>\mathcal{H}_\infty</math> en temps fini basée sur un observateur <math>\mathcal{H}_\infty</math> en temps fini . . . . .</b>	<b>54</b>
2.5.1	Synthèse d'une commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini . . . . .	54
2.5.2	Synthèse d'une commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini sous la contrainte $KD_{yw} = 0$ . . . . .	56
2.5.3	Synthèse d'une commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini sans la contrainte $KD_{yw} = 0$ . . . . .	62
2.5.4	Exemple numérique . . . . .	69
<b>2.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>70</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans le chapitre 1, nous avons vu la notion de stabilité en temps fini (FTS), ainsi que son extension aux systèmes perturbés, appelée bornitude en temps fini (FTB) [WI67, AAAD99b]. Rappelons qu'un système est dit borné en temps fini lorsque, pour tous les états initiaux commençant dans un domaine donné et borné, et pour toutes les perturbations admissibles, l'état du système reste dans un autre domaine donné et borné (contenant le domaine des états initiaux), pour un intervalle de temps fixe et fini. Par conséquent, un système borné en temps fini est un système stable en temps fini en présence de perturbations exogènes bornées. Le concept de la stabilité en temps fini a été appliqué aux systèmes tels que les réseaux ATM [ACAA02], des systèmes aéronautiques [WI67], une suspension de voiture [KBI15]...

Le problème du contrôle en temps fini consiste en la conception d'un correcteur qui assure la FTS ou la FTB du système en boucle fermée. Pour le contrôle en temps fini, les premières méthodes étaient prohibitives du point de vue du calcul (voir [Dor06] et les références qui y figurent). À partir de la fin des années 80, l'évolution des méthodes de résolution des inégalités matricielles linéaires (LMI) ont stimulé une nouvelle approche pour la synthèse des conditions assurant la stabilisation en temps fini (voir [EIB12] et les références qui y figurent). Ainsi de nombreux travaux ont été consacrés au cas des systèmes linéaires : dans [AAD01], Amato *et al.* ont étudié le contrôle en temps fini par un retour d'état statique. Ensuite, dans [MS09], Meng *et al.* ont synthétisé un correcteur par retour d'état statique qui assure à la fois la FTB du système en boucle fermée et le critère  $\mathcal{H}_\infty$ .

Dans le cas où les variables d'état d'un système dynamique ne sont pas toutes accessibles, les chercheurs ont recours à la synthèse d'un correcteur par retour de sortie dynamique. Plusieurs articles ont été consacrés à la commande en temps fini par retour de sortie dynamique des systèmes linéaires. Dans [AAAD99a], les auteurs ont examiné le problème de synthèse d'un correcteur par retour de sortie dynamique pour le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps avec des incertitudes paramétriques. Les conditions d'existence de ce correcteur ont été exprimées en termes d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI). Or, la résolution d'un problème d'optimisation BMI ne conduit pas en général à une solution optimale. De plus, du point de vue complexité de calcul, les problèmes BMI sont des problèmes non-polynomiaux (N-P) et donc coûteux [VB00]. En 2006, Amato *et al.* [AAC06b] ont proposé la conception d'un correcteur en temps fini à sortie dynamique. Leur méthode consiste en la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMIs. Les inconvénients de cette approche sont que la procédure de synthèse du correcteur est effectuée en deux étapes : la première étape est la synthèse d'un correcteur par retour d'état statique assurant la FTS du système linéaire invariant considéré, la deuxième étape est la conception d'un observateur de type Luenberger en temps fini qui conserve les mêmes propriétés établies par le correcteur par retour d'état statique. Un autre inconvénient est l'utilisation dans cette deuxième phase d'une matrice diagonale de Lyapunov. Ce qui ne permet pas de considérer l'effet de termes croisés entre les variables d'état et celles du correcteur. Pour surmonter la restriction à une matrice de Lyapunov diagonale, Borges *et al.* [BIRR12] ont utilisé un lemme de N. Aronszajn pour les matrices positives hermitiennes [TF70]. Ils ont proposé des conditions suffisantes pour la synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique. La fonction de Lyapunov considérée pour la démonstration a une forme générale non restrictive.

Dans ce chapitre, le premier but est de fournir des conditions moins coûteuses en calcul (moins que les conditions BMIs) pour la synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique et de réduire le conservatisme des conditions LMIs présentées dans la littérature. Pour cela, nous utilisons une approche de système descripteur [FS02], originale dans un contexte de FTS. Cela permet de choisir une structure générale pour la matrice de Lyapunov, et d'exploiter les

avantages des variables supplémentaires introduites par cette approche.

Nous commençons ce chapitre par la définition de la  $\mathcal{H}_\infty$  bornitude en temps fini des systèmes linéaires invariants perturbés. Nous rappelons aussi quelques résultats permettant de garantir la  $\mathcal{H}_\infty$  bornitude en temps fini de ces systèmes. Dans un deuxième temps, nous présentons notre approche descripteur pour la synthèse d'un correcteur par retour de sortie dynamique assurant la bornitude en temps fini d'un système linéaire invariant perturbé. C'est la première fois que l'approche descripteur est investigué dans un contexte de stabilité en temps fini. La difficulté de linéariser une condition de stabilité en temps fini faisant intervenir les valeurs propres minimale et maximale de la fonction de Lyapunov est résolue de manière élégante en considérant une matrice de congruence. Ensuite, nous développons deux approches pour la synthèse d'un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB par retour de sortie dynamique. La première approche est dite approche classique. Elle consiste à proposer des conditions suffisantes pour la synthèse d'un  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB correcteur par retour de sortie dynamique. La principale contribution de cette approche est la considération d'une matrice de Lyapunov générale (non diagonale). La deuxième approche est la prolongation naturelle de l'approche descripteur au problème de synthèse d'un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB par retour de sortie dynamique. Lorsque des variables d'état sont non mesurables, on peut utiliser un observateur pour estimer ces variables. Enfin, la troisième partie de ce chapitre sera dédiée à la synthèse d'une commande  $\mathcal{H}_\infty$  en temps fini basée sur un observateur  $\mathcal{H}_\infty$  en temps fini.

## 2.2 Préliminaires sur l'analyse de la stabilité en temps fini

Les notions de stabilité en temps fini et de bornitude en temps fini ont été détaillées au chapitre 1. Dans le cas d'un système linéaire perturbé, il est également intéressant de limiter sa norme  $\mathcal{H}_\infty$  (voir les définitions 1.3.6 et 1.3.8), qui quantifie l'influence de la perturbation sur la sortie. Cela nous amène à la notion de  $\mathcal{H}_\infty$  bornitude en temps fini (FTB- $\mathcal{H}_\infty$ ).

**Définition 2.2.1** ( $\mathcal{H}_\infty$  bornitude en temps fini (FTB- $\mathcal{H}_\infty$ ) [MS09]).

Considérons le système linéaire continu invariant suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2.1a)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) \quad (2.1b)$$

Le système linéaire (2.1) est dit  $\mathcal{H}_\infty$  borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T, R, d, \gamma)$  si il est borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T, R, d)$  et, sous conditions initiales nulles, la sortie  $z(t)$  vérifie

$$\int_0^{T_F} z^T(\tau) z(\tau) d\tau < \gamma^2 \int_0^{T_F} w^T(\tau) w(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Afin de pouvoir énoncer un théorème garantissant la  $\mathcal{H}_\infty$  bornitude en temps fini d'un système linéaire perturbé, nous donnons une version modifiée du théorème 1.5.2.

**Théorème 2.2.1.** [MS09, XXX11]

Considérons la classe des perturbations  $\mathcal{W}_d^2$  (1.46), le système perturbé (1.45) est borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  si, en définissant  $\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}}$ , il existe un scalaire  $\alpha \geq 0$ , un réel  $\gamma > 0$  et une matrice  $Q_1$  tels que

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1^T > 0 \quad (2.3a)$$

$$\begin{pmatrix} A\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T - \alpha\tilde{Q}_1 & B_w \\ B_w^T & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.3b)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} + d\gamma^2 < \frac{c_2 e^{-\alpha T_f}}{\lambda_{\max}(Q_1)} \quad (2.3c)$$

le théorème 2.2.1 est déduit du théorème 1.5.2 en considérant dans la démonstration que  $Q_2 = \gamma^2 I$

Maintenons nous pouvons énoncer un théorème garantissant la  $\mathcal{H}_\infty$  bornitude en temps fini du système linéaire perturbé (2.1)

**Théorème 2.2.2.** [MS09, XXX11]

Considérons la classe des perturbations  $\mathcal{W}_d^2$  (1.46), le système perturbé (2.1) est  $\mathcal{H}_\infty$  borné en temps fini par rapport à  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$  si, en définissant  $\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}}$ , il existe un réel  $\alpha \geq 0$  et une matrice  $Q_1$  tels que

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1^T > 0 \quad (2.4a)$$

$$\begin{pmatrix} A\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T - \alpha\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 C_z^T C_z \tilde{Q}_1 & B + \tilde{Q}_1 C^T D_{zw} \\ B^T + D_{zw}^T C \tilde{Q}_1 & -\gamma^2 e^{-\alpha T_f} I + D_{zw}^T D_{zw} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.4b)$$

$$d\gamma^2 < \frac{c_2}{\lambda_{\max}(Q_1)} \quad (2.4c)$$

*Démonstration.*

La démonstration de ce théorème se trouve dans [XXX11]. Nous en donnons ici les grandes lignes.

La démonstration se base sur la définition de la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = x^T \tilde{Q}_1^{-1} x = x^T R^{\frac{1}{2}} Q_1^{-1} R^{\frac{1}{2}} x \quad (2.5)$$

Dans un premier temps, on montre la bornitude en temps fini du système perturbé (1.45). Dans un deuxième temps, on prouve le critère  $\mathcal{H}_\infty$  (2.2). L'inégalité (2.4b) est équivalente à l'inégalité suivante

$$\dot{V} < \alpha V + \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w^T w - z^T z \quad (2.6)$$

Cette inégalité (2.6) implique nécessairement

$$\dot{V} - \alpha V < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w^T w \quad (2.7)$$

Multiplions les deux inégalités par  $e^{-\alpha t}$ , nous obtenons

$$e^{-\alpha t} (\dot{V} - \alpha V) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} e^{-\alpha t} w^T w \quad (2.8)$$

qui peut s'écrire comme suit

$$\frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} V) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} e^{-\alpha t} w(t)^T w(t). \quad (2.9)$$

Ensuite, en intégrant de 0 à  $t$ , nous aurons

$$e^{-\alpha t} V(x(t)) - V(x(0)) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} \int_0^t e^{-\alpha \tau} w(\tau)^T w(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

Sachant que  $V(x(0)) = 0$  et que  $e^{-\alpha T_f} \leq e^{-\alpha \tau} \leq 1$  pour tout  $\tau \in [0, T_f]$ , la condition (2.10) implique

$$V(x(t)) \leq d\gamma^2 \quad (2.11)$$

En remarquant que  $V(x(t)) \geq \lambda_{\min}(Q_1^{-1})x^T R x$ , nous obtenons

$$x^T R x \leq d\gamma^2 \lambda_{\max}(Q_1) \quad (2.12)$$

En tenant compte de (2.4b) nous écrivons

$$x^T R x < c_2 \quad (2.13)$$

ce qui prouve la bornitude en temps fini du système perturbé (1.45).

Montrons maintenant le critère  $\mathcal{H}_\infty$  (2.2).

En multipliant (2.6) par  $e^{-\alpha t}$ , nous aurons

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-\alpha t} V \right) < e^{-\alpha t} \left[ \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w^T w - z^T z \right] \quad (2.14)$$

Ensuite, en intégrant de 0 à  $T_f$ , nous obtenons

$$e^{-\alpha T_f} V(x(T_f)) < \int_0^{T_f} e^{-\alpha \tau} \left[ \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w^T(\tau) w(\tau) - z^T(\tau) z(\tau) \right] d\tau \quad (2.15)$$

qui implique, du fait que  $e^{-\alpha T_f} V(x(T_f)) > 0$ ,

$$\int_0^{T_f} e^{-\alpha \tau} z^T(\tau) z(\tau) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} \int_0^{T_f} e^{-\alpha \tau} w^T(\tau) w(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

Comme  $e^{-\alpha T_f} \leq e^{-\alpha \tau} \leq 1$  pour tout  $\tau \in [0, T_f]$ , alors le critère  $\mathcal{H}_\infty$  (2.2) est déduit, i.e.

$$\int_0^{T_f} z^T(\tau) z(\tau) < \gamma^2 \int_0^{T_f} w^T(\tau) w(\tau) d\tau. \quad (2.17)$$

•

Notons que la condition (2.4c), peut être vérifiée en imposant les contraintes suivantes

$$\lambda_1 I < Q_1 < I \quad (2.18a)$$

$$d\gamma^2 < c_2 e^{-\alpha T_f} \quad (2.18b)$$

Dans la section qui suit, nous développons des nouvelles conditions suffisantes assurant la bornitude en temps fini des systèmes linéaires perturbés. Nous adoptons une nouvelle approche dans un contexte de stabilité en temps fini. Cette approche, appelée approche descripteur, a déjà été utilisée dans un contexte de stabilité asymptotique [FS02]. Ces nouvelles conditions nous permettent de proposer des conditions exprimées en termes de LMIs pour la synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique pour les systèmes linéaires invariants. Cette nouvelle approche sera ensuite comparée avec l'approche de Borges [BIRR12].

## 2.3 Approche descripteur pour la stabilisation en temps fini

Rappelons que le but essentiel de cette section est la synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique pour les systèmes linéaires invariants perturbés par approche descripteur. Nous commençons par énoncer un nouveau théorème des conditions d'analyse de bornitude en temps fini des systèmes linéaires perturbés. Ensuite, nous appliquons ce théorème pour synthétiser un correcteur FTB par retour de sortie dynamique. Les conditions de synthèse sont linéarisées grâce à l'utilisation d'une matrice de congruence appropriée. On finit la section par des exemples numériques montrant l'efficacité de notre approche.

### 2.3.1 Approche descripteur pour l'analyse de la bornitude en temps fini

Considérons le système linéaire invariant suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) \quad (2.19)$$

Le bruit externe  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  vérifie la contrainte suivante

$$\forall t \in [0, T_f], \quad w(t)^T w(t) \leq d \quad (2.20)$$

Le théorème suivant donne de nouvelles conditions suffisantes assurant la bornitude en temps fini du système (2.19).

#### **Théorème 2.3.1.**

Le système (2.19) est borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  si il existe une matrice inversible  $F$ , deux matrices symétriques définies positives  $\tilde{Q}$  et  $Q_2$ , et un réel  $\alpha > 0$  tels que

$$\Phi = \begin{pmatrix} AF + F^T A^T - \alpha \tilde{Q} & F^T A^T + \tilde{Q} - F & B_w Q_2 \\ \tilde{Q} - F^T + AF & -F - F^T & B_w Q_2 \\ Q_2 B_w^T & Q_2 B_w^T & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.21a)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R^{\frac{1}{2}} F \tilde{Q}^{-1} F^T R^{\frac{1}{2}})} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)} < \frac{c_2 e^{-\alpha T_f}}{\lambda_{\max}(R^{\frac{1}{2}} F \tilde{Q}^{-1} F^T R^{\frac{1}{2}})} \quad (2.21b)$$

*Démonstration.*

Soit la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = x^T \tilde{Q}_1^{-1} x, \quad \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1^T > 0 \quad (2.22)$$

avec  $\tilde{Q}_1$  est donnée par

$$\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

D'après [BIRR12], on sait que le système (2.19) est borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\Gamma = \dot{V}(x) - \alpha V(x) - \alpha w^T Q_2^{-1} w < 0 \quad (2.24a)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)} < \frac{c_2 e^{-\alpha T_f}}{\lambda_{\max}(Q_1)} \quad (2.24b)$$

Maintenant, nous intégrons le changement de variable  $y = \dot{x}$  dans l'équation (2.19). Immédiatement, la forme descripteur du système (2.19) sera donnée par

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_w \end{pmatrix} w \quad (2.25)$$

Définissons la matrice  $E = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et le changement de variable  $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , l'égalité (2.25) sera écrite comme suit

$$E\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ B_w \end{pmatrix} w \quad (2.26)$$

et la fonction de Lyapunov comme suit

$$V(\xi) = \xi^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi \quad (2.27)$$

Soit une matrice  $F_1$  inversible, remarquons qu'on a

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & F_1 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} E = E^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & 0 \\ F_1^T & F_1^T \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

et donc  $V(\xi)$  se récrit comme suit

$$V(\xi) = \xi^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & F_1 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} E \xi = \xi^T E^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & 0 \\ F_1^T & F_1^T \end{pmatrix} \xi \quad (2.29)$$

Calculons la dérivée de  $V(\xi)$  par rapport au temps

$$\dot{V}(\xi) = \dot{\xi}^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi + \xi^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\xi} \quad (2.30a)$$

$$= \dot{\xi}^T E^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & 0 \\ F_1^T & F_1^T \end{pmatrix} \xi + \xi^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & F_1 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} E \dot{\xi} \quad (2.30b)$$

$$= \left[ \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ B_w \end{pmatrix} w \right]^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & 0 \\ F_1^T & F_1^T \end{pmatrix} \xi + \xi^T \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} & F_1 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ B_w \end{pmatrix} w \right] \quad (2.30c)$$

Soit, après développement et regroupement

$$\dot{V}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^T & w^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 A + A^T F_1^T & A^T F_1^T + \tilde{Q}_1^{-1} - F_1 & F_1 B_w \\ \tilde{Q}_1^{-1} - F_1^T + F_1 A & -F_1 - F_1^T & F_1 B_w \\ B_w^T F_1^T & B_w^T F_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ w \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

En calculant  $\Gamma$  donné par (2.24a), on aura

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \xi \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_1 A + A^T F_1^T - \alpha \tilde{Q}_1^{-1} & A^T F_1^T + \tilde{Q}_1^{-1} - F_1 & F_1 B_w \\ \tilde{Q}_1^{-1} - F_1^T + F_1 A & -F_1 - F_1^T & F_1 B_w \\ B_w^T F_1^T & B_w^T F_1^T & -\alpha Q_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ w \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

et nous déduisons que la condition  $\Gamma < 0$  (2.24a) est équivalente à l'inégalité suivante

$$\begin{pmatrix} F_1 A + A^T F_1^T - \alpha \tilde{Q}_1^{-1} & A^T F_1^T + \tilde{Q}_1^{-1} - F_1 & F_1 B_w \\ \tilde{Q}_1^{-1} - F_1^T + F_1 A & -F_1 - F_1^T & F_1 B_w \\ B_w^T F_1^T & B_w^T F_1^T & -\alpha Q_2^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.33)$$

Multiplions (2.33) à gauche par  $\begin{pmatrix} F_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & F_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 \end{pmatrix}$  et à droite par  $\begin{pmatrix} F_1^{-T} & 0 & 0 \\ 0 & F_1^{-T} & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ , nous aurons

$$\begin{pmatrix} A F_1^{-T} + F_1^{-1} A^T - \alpha F_1^{-1} \tilde{Q}_1^{-1} F_1^{-T} & F_1^{-1} A^T - F_1^{-1} \tilde{Q}_1^{-1} F_1^{-T} - F_1^{-T} & B_w Q_2 \\ F_1^{-1} \tilde{Q}_1^{-1} F_1^{-T} - F_1^{-T} - F_1^{-1} + A F_1^{-T} & -F_1^{-T} - F_1^{-1} & B_w Q_2 \\ Q_2 B_w^T & Q_2 B_w^T & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

Posons les changements de variables suivants

$$F = F_1^{-T} \quad (2.35a)$$

$$F^T = F_1^{-1} \quad (2.35b)$$

$$\tilde{Q} = F^T \tilde{Q}_1^{-1} F \quad (2.35c)$$

La condition (2.34) est donc équivalente à la condition (2.21a).

Par ailleurs, compte tenu de l'expression (2.23) de  $\tilde{Q}_1^{-1}$ , l'égalité (2.35c) s'écrit

$$\tilde{Q} = F^T R^{\frac{1}{2}} Q_1^{-1} R^{\frac{1}{2}} F \quad (2.36)$$

et donc l'inverse de  $\tilde{Q}$  est donné par

$$\tilde{Q}^{-1} = F^{-1} R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{\frac{1}{2}} F^{-T} \quad (2.37)$$

Ce qui nous fournit l'expression suivante de  $Q_1$

$$Q_1 = R^{\frac{1}{2}} F \tilde{Q}^{-1} F^T R^{\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

Remplaçons l'expression (2.38) dans la condition (2.24b), nous obtenons exactement l'inégalité (2.21b). Ce qui finit la démonstration.  $\bullet$

En pratique, les conditions du théorème 2.3.1 sont difficiles à vérifier car la condition (2.21b) est fortement non linéaire. Notons qu'un résultat basé sur la même approche descripteur et dont les conditions sont linéaires est donné dans [BDZA17a]. Ce résultat dans [BDZA17a] est un cas particulier d'un résultat général de Kussaba *et al.* [KB15]. Dans la section suivante, on s'appuiera néanmoins sur ce théorème 2.3.1 pour résoudre la synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique, en linéarisant la condition (2.21b) grâce à une relation de congruence.



### 2.3.2 Synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique

Dans ce qui suit, nous utilisons le théorème 2.3.1 pour développer des conditions suffisantes assurant la synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique.

Considérons le système linéaire décrit par le système d'équations suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \quad (2.39a)$$

$$y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) \quad (2.39b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  est la sortie mesurée et  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  est la perturbation extérieure.

Considérons le correcteur par retour de sortie dynamique suivant

$$\dot{x}_k(t) = A_K x_k(t) + B_K y(t) \quad (2.40a)$$

$$u(t) = C_K x_k(t) + D_K y(t) \quad (2.40b)$$

Ainsi le système en boucle fermée est décrit par

$$\dot{\zeta} = \mathcal{A}\zeta + \mathcal{B}w \quad (2.41)$$

avec

$$\zeta = \begin{pmatrix} x \\ x_k \end{pmatrix} \quad (2.42a)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{pmatrix} \quad (2.42b)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.42c)$$

Notre but est de trouver des conditions suffisantes telles que le système (2.41) est borné en temps fini par rapport aux paramètres  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$ .

#### Théorème 2.3.2.

Considérons le système (2.39), les paramètres  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$ , les matrices  $Q_q = \begin{pmatrix} Q_x & * \\ Q_t & Q_y \end{pmatrix}$ ,  $G = \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix}$ . S'il existe les matrices de dimensions appropriées  $U, V, W, X, S, N, J, L, R_1, Q_t$ , trois matrices symétriques  $Q_x, Q_y, W_1$ , un réel  $\alpha \geq 0$  et des réels positifs  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4, \tilde{\lambda}_5$  tels que

$$\Psi = \left( \begin{array}{c|c|c} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ (*) & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ (*) & (*) & \Psi_{33} \end{array} \right) < 0 \quad (2.43a)$$

$$R_1 > \tilde{\lambda}_4 I \quad (2.43b)$$

$$\tilde{\lambda}_3 I < W_1 < \tilde{\lambda}_2 I \quad (2.43c)$$

$$\begin{pmatrix} c_2 e^{-\alpha T_f} & \sqrt{c_1} \tilde{\lambda}_1 & \sqrt{d} \tilde{\lambda}_2 \\ * & \tilde{\lambda}_1 & 0 \\ * & * & \tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix} > 0 \quad (2.43d)$$

$$\begin{pmatrix} Q_q & G^T \\ G & R^{-1} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.43e)$$

$$0 < Q_q < \tilde{\lambda}_5 I \quad (2.43f)$$

$$\tilde{\lambda}_5 < \tilde{\lambda}_1 \lambda_{\min}(R) \min(1, \tilde{\lambda}_4^2) \quad (2.43g)$$

où

$$\Psi_{11} = \left( \begin{array}{c|c} (AN + B_u W) - \alpha Q_x & (*) \\ \hline + (AN + B_u W)^T & \\ \hline U - \alpha Q_t & (JA + VC_y) \\ + (A + B_u X C_y)^T & + (JA + VC_y)^T - \alpha Q_y \end{array} \right) \quad (2.44a)$$

$$\Psi_{12} = \left( \begin{array}{c|c} Q_x - N & Q_t^T - I \\ \hline + (AN + B_u W)^T & + U^t \\ \hline (A + B_u X C_y)^T & Q_y - J \\ + Q_t - S & + (AJ + VC_y)^T \end{array} \right) \quad (2.44b)$$

$$\Psi_{13} = \begin{pmatrix} B_w + B_u X D_{yw} \\ JB_w + V D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.44c)$$

$$\Psi_{22} = \begin{pmatrix} -N^T - N & (*) \\ -I - S & -J^T - J \end{pmatrix} \quad (2.44d)$$

$$\Psi_{23} = \begin{pmatrix} B_w + B_u X D_{yw} \\ JB_w + V D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.44e)$$

$$\Psi_{33} = -\alpha W_1 \quad (2.44f)$$

alors un correcteur par retour de sortie dynamique (2.40) garantit que le système en boucle fermée est borné en temps fini par rapport à  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$ .

Les matrices  $A_K, B_K, C_K$  et  $D_K$  sont déduites en résolvant le système de deux égalités suivantes

$$\begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & JB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ C_y N & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} JAN & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.45a)$$

$$S = JN + LR_1 \quad (2.45b)$$

*Démonstration.*

Appliquons le théorème 2.3.1 au système (2.41), il faut donc montrer que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathcal{A}F + F^T \mathcal{A}^T - \alpha \tilde{Q} & F^T \mathcal{A}^T + \tilde{Q} - F & \mathcal{B}Q_2 \\ \tilde{Q} - F^T + \mathcal{A}F & -F - F^T & \mathcal{B}Q_2 \\ Q_2 \mathcal{B}^T & Q_2 \mathcal{B}^T & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.46a)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(R^{\frac{1}{2}}F\tilde{Q}^{-1}F^TR^{\frac{1}{2}})} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)} < \frac{c_2e^{-\alpha T_f}}{\lambda_{\max}(R^{\frac{1}{2}}F\tilde{Q}^{-1}F^TR^{\frac{1}{2}})} \quad (2.46b)$$

Soit les partitions suivantes des matrices  $F$  et  $F^{-1}$

$$F = \begin{pmatrix} N & Z_1 \\ R_1 & Z_2 \end{pmatrix} \quad (2.47a)$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} J^T & Z_3 \\ L^T & Z_4 \end{pmatrix} \quad (2.47b)$$

Remarquons que

$$FF^{-1} = \begin{pmatrix} N & Z_1 \\ R_1 & Z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^T & Z_3 \\ L^T & Z_4 \end{pmatrix} \quad (2.48a)$$

$$= \begin{pmatrix} NJ^T + Z_1L^T & NZ_3 + Z_1Z_4 \\ R_1J^T + Z_2L^T & RZ_3 + Z_2Z_4 \end{pmatrix} \quad (2.48b)$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.48c)$$

nous déduisons

$$NJ^T + Z_1L^T = I \quad (2.49a)$$

$$R_1J^T + Z_2L^T = 0 \quad (2.49b)$$

Définissons les matrices  $H$  et  $\mathcal{H}$  comme suit

$$H = \begin{pmatrix} I & J^T \\ 0 & L^T \end{pmatrix} \quad (2.50a)$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.50b)$$

Multiplions l'inégalité (2.46a) à gauche par  $\mathcal{H}^T$  et à droite par  $\mathcal{H}$ , nous obtenons

$$\mathcal{H}^T \Phi \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H^T \mathcal{A} F H + H^T F^T \mathcal{A}^T H - \alpha H^T \tilde{Q} H & H^T F^T \mathcal{A}^T H + H^T \tilde{Q} H - H^T F H & H^T \mathcal{B} \\ H^T \tilde{Q} H - H^T F^T H + H^T \mathcal{A} F H & -H^T F H - H^T F^T H & H^T \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^T H & \mathcal{B}^T H & -\alpha Q_2^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.51)$$

En calculant le produit  $FH$ , nous avons

$$FH = \begin{pmatrix} N & NJ^T + Z_1L^T \\ R_1 & R_1J^T + Z_2L^T \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Du fait des égalités (2.49a) et (2.49b), nous obtenons

$$FH = \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

En procédant comme précédemment, nous aurons

$$H^T FH = \begin{pmatrix} I & J^T \\ 0 & L^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.54a)$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ J & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.54b)$$

$$= \begin{pmatrix} N & I \\ JN + LR_1 & J \end{pmatrix} \quad (2.54c)$$

En posant  $S = JN + LR_1$ , nous obtenons

$$H^T FH = \begin{pmatrix} N & I \\ S & J \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$H^T \mathcal{A} FH$  s'écrit comme suit

$$H^T \mathcal{A} FH = \begin{pmatrix} I & 0 \\ J & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56a)$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ J & L \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_y & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56b)$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ J & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ J & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56c)$$

$$= \begin{pmatrix} AN & A \\ JAN & JA \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ L & JB_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ C_y N & C_y \end{pmatrix} \quad (2.56d)$$

$$= \begin{pmatrix} AN & A \\ JAN & JA \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & JB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ C_y N & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C_y \end{pmatrix} \quad (2.56e)$$

$$= \begin{pmatrix} AN & A \\ 0 & JA \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} L & JB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ C_y N & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} JAN & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C_y \end{pmatrix} \quad (2.56f)$$

De même  $H^T \mathcal{B}$  s'écrit

$$H^T \mathcal{B} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ J & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.57a)$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ J & L \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} B_w \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D_{yw} \end{pmatrix} \right] \quad (2.57b)$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ J & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_w \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ J & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.57c)$$

$$= \begin{pmatrix} B_w \\ JB_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & JB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ C_y N & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.57d)$$

$$= \begin{pmatrix} B_w \\ JB_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} L & JB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ C_y N & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} JAN & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.57e)$$

En tenant compte du changement de variables (2.45a), les expressions de  $H^T \mathcal{A}FH$  et  $H^T \mathcal{B}$  se mettent sous la forme suivante

$$H^T \mathcal{A}FH = \begin{pmatrix} AN & A \\ 0 & JA \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C_y \end{pmatrix} \quad (2.58a)$$

$$H^T \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_w \\ JB_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.58b)$$

Maintenant, soit la décomposition suivante de la matrice  $Q_q$

$$H^T \tilde{Q}H = Q_q = \begin{pmatrix} Q_x & Q_t^T \\ Q_t & Q_y \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Par la suite, posons  $W_1 = Q_2^{-1}$ , remplaçons les expressions (2.55), (2.59), (2.58a) et (2.58b) dans la condition (2.51), nous obtenons la condition (2.43a) du théorème 2.3.2.

Pour satisfaire la condition (2.46b), on remarque que

$$H^T \tilde{Q}H = Q_q = H^T F^T R^{\frac{1}{2}} Q_1^{-1} R^{\frac{1}{2}} FH \quad (2.60)$$

Maintenant, imposons les conditions suivantes

$$\lambda_1 I < Q_1 < I \quad (2.61a)$$

$$\lambda_2 I < Q_2 < \lambda_3 \quad (2.61b)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{d}{\lambda_2} < c_2 e^{-\alpha T_f} \quad (2.61c)$$

La condition (2.61b) est équivalente à la condition suivante

$$\lambda_3^{-1} I < Q_2^{-1} < \lambda_2^{-1} I \quad (2.62)$$

qui n'est d'autre que la condition (2.43c) en posant  $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3^{-1}$ ,  $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2^{-1}$  et  $W_1 = Q_2^{-1}$ . De même, la condition (2.61a) est équivalente à

$$I < Q_1^{-1} < \lambda_1^{-1} I \quad (2.63)$$

Multiplions l'inégalité (2.63) à gauche par  $H^T F^T R^{\frac{1}{2}}$  et à droite par  $R^{\frac{1}{2}} FH$ , nous obtenons les deux conditions suivantes

$$(FH)^T R(FH) < Q_q \quad (2.64a)$$

$$Q_q < \lambda_1^{-1} (FH)^T R(FH) \quad (2.64b)$$

Appliquons le lemme de Schur à la condition (2.64a), nous obtenons la condition (2.43e) du théorème 2.3.2.

Posons  $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1^{-1}$ , l'égalité (2.64b) est satisfaite si la condition suivante est vérifiée

$$\lambda_{\max}(Q_q) < \tilde{\lambda}_1 \lambda_{\min}((FH)^T R(FH)) \quad (2.65)$$

Cette dernière est vérifiée si

$$Q_q < \tilde{\lambda}_5 I \quad (2.66a)$$

$$\tilde{\lambda}_5 I < \tilde{\lambda}_1 \lambda_{\min}((FH)^T R(FH)) \quad (2.66b)$$

Sachant que

$$\lambda_{\min}(R) \lambda_{\min}((FH)^T (FH)) \leq \lambda_{\min}((FH)^T R(FH)), \quad (2.67)$$

nous cherchons une borne inférieure de la valeur propre minimale  $\lambda_{\min}((FH)^T (FH))$ . Remarquons que la matrice  $(FH)^T (FH)$  s'écrit comme suit

$$(FH)^T (FH) = \begin{pmatrix} N^T N + R_1^T R_1 & N^T \\ N & I \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

et considérant la matrice suivante

$$K = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -N & I \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

nous déduisons

$$G_1 = K^T (FH)^T (FH) K = \begin{pmatrix} R_1^T R_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Soit  $G_2 = K^{-1} (FH)^T (FH) K$ . Les deux matrices  $G_2$  et  $(FH)^T (FH)$  ont les mêmes valeurs propres. De plus remarquons que  $G_2 = (K^T K)^{-1} G_1$ . Ce qui conduit à

$$\lambda_{\min}((K^T K)^{-1}) \lambda_{\min}(G_1) < \lambda_{\min}(G_2) = \lambda_{\min}((FH)^T (FH)). \quad (2.71)$$

Etant donné que

$$\lambda_{\min}((K^T K)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\max}(K^T K)} = \frac{1}{\lambda_{\max}^2(K)}, \quad (2.72)$$

vu que toutes les valeurs propres de  $K$  sont égales à 1, et en prenant compte de la structure de  $G_1$ , nous aurons

$$\min(1, \lambda_{\min}^2(R_1)) < \lambda_{\min}(G_2) = \lambda_{\min}((FH)^T (FH)). \quad (2.73)$$

Du fait de (2.73), (2.66), la condition (2.64b) est vérifiée si les inégalités (2.43f), (2.43g) et (2.43b) sont vérifiées. •

**Remarque 2.3.1.**

- Bien que nous utilisions la même démarche que [CG96] pour linéariser les inégalités (2.46), cela n'est pas suffisant pour obtenir des conditions sous forme LMIs. La difficulté principale est d'obtenir une borne inférieure de la valeur propre minimale de la matrice  $(FH)^T(FH)$  dans l'équation (2.68). Nous surmontons cette difficulté en utilisant la matrice de congruence originale (2.69).
- Notons que les conditions (2.43a) et (2.43g) ne sont pas des LMIs, et donc difficiles à résoudre. Cependant, en fixant  $\alpha$  et  $\tilde{\lambda}_4$ , ces conditions (2.43a) et (2.43g) deviennent des LMIs.
- En pratique, une recherche en ligne simultanée sur les paramètres  $\alpha$  et  $\tilde{\lambda}_4$  peut être effectuée. Dans ce cas, nous résolvons à chaque itération un problème de faisabilité LMI. On peut aussi fixer la valeur d'un paramètre et effectuer une recherche en ligne sur l'autre.
- Une autre possibilité pour transformer la condition (2.43g) en LMI est d'imposer  $\tilde{\lambda}_4 > 1$ . Alors l'inégalité (2.43g) devient

$$\tilde{\lambda}_5 < \tilde{\lambda}_4 \lambda_{\min}(R) \quad (2.74)$$

qui est linéaire.

**2.3.3 Exemples numériques**

Considérons le système dynamique tiré de [BIRR12]

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0.0884 & -0.4026 & -0.5796 & -0.5733 \\ 0.8984 & 0.0276 & -0.3622 & 0.9771 \\ -1.0667 & 2.8289 & -2.4719 & 1.0680 \\ -1.1599 & 0.1808 & -0.0779 & -1.2306 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B_w = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ C_y &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_{yw} = 0.5 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Soit les paramètres suivants ( $c_1 = 0, c_2 = 0.35, R = I, d = 1$ ). En considérant  $T_f = 11$ , il est montré [BIRR12] que le système en boucle ouverte est non borné en temps fini par rapport à ( $c_1 = 0, c_2 = 0.35, T_f = 11, R = I, d = 1$ ). Nous proposons de synthétiser un correcteur assurant la bornitude en temps fini du système en boucle fermée (2.75). La synthèse de notre correcteur revient à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} &\underset{T_f}{\text{maximiser}} && T_f \\ &\text{sous les contraintes} && (2.43a), (2.43b), (2.43e), (2.43c), (2.43d), (2.43f) \text{ et } (2.43g) \end{aligned} \quad (2.76)$$

La résolution se fait en fixant  $\tilde{\lambda}_4 = 0.01$  et par une recherche en ligne du paramètre  $\alpha$  par pas de 0.1. A chaque pas, on résout un problème d'optimisation convexe. Ainsi, on obtient une solution pour  $\alpha = 0.1$  et  $T_f = 39.2126$ . Les matrices du correcteur sont données par

$$A_K = 10^5 \begin{pmatrix} -0.1892 & -0.0782 & 0.8554 & -1.7618 \\ -0.2480 & -0.1028 & 1.1218 & -2.3109 \\ -0.2102 & -0.0865 & 0.9502 & -1.9567 \\ -0.2083 & -0.0860 & 0.9420 & -0.9401 \end{pmatrix}, B_K = \begin{pmatrix} 0.0015 \\ -0.0109 \\ 0.0093 \\ 0.0033 \end{pmatrix}$$

$$C_K = 10^3 \begin{pmatrix} -0.6317 & -0.2252 & 2.5974 & -5.3108 \end{pmatrix}, D_K = 0.0539 \quad (2.77)$$

En suivant cette procédure et afin de comparer notre approche par rapport à celle de [BIRR12], nous résolvons le même problème d'optimisation en utilisant la méthode de Borges [BIRR12]. Ainsi nous obtenons  $\alpha = 0.1$  et  $T_f = 38.1749$  pour le système en boucle fermée.

On voit que, dans certains cas, nous obtenons avec notre approche un correcteur plus performant ( $T_f$  plus grand).

On déduit que les conditions de notre approche sont ici moins restrictives par rapport à celles de Borges [BIRR12].

## 2.4 Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini

Considérons le système linéaire invariant perturbé suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \quad (2.78a)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \quad (2.78b)$$

$$y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) \quad (2.78c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  est la sortie mesurée et  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie de performance.

La perturbation externe  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  est à norme bornée

$$\int_0^{T_0} w(t)^T w(t) dt \leq d \quad (2.79)$$

Notre but est de proposer une méthode de synthèse d'une commande assurant la stabilité en temps fini du système (2.78) en garantissant le critère  $\mathcal{H}_\infty$  (2.2).

Pour cela, considérons le contrôleur dynamique d'ordre plein décrit par les équations suivantes

$$\dot{x}_k(t) = A_K x_k(t) + B_K y(t) \quad (2.80a)$$

$$u(t) = C_K x_k(t) + D_K y(t) \quad (2.80b)$$

Le système bouclé est donné par la représentation d'état suivante

$$\dot{\zeta} = \mathcal{A}\zeta + \mathcal{B}w \quad (2.81a)$$

$$z = \mathcal{C}\zeta + \mathcal{D}w \quad (2.81b)$$

avec

$$\zeta = \begin{pmatrix} x \\ x_k \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

et

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{pmatrix} \quad (2.83a)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.83b)$$



$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_z + D_{zu}D_KC_y & D_{zu}C_K \end{pmatrix} \quad (2.83c)$$

$$\mathcal{D} = D_{zw} + D_{zu}D_KD_{yw} \quad (2.83d)$$

Nous désirons synthétiser des conditions suffisantes pour obtenir un correcteur à retour de sortie dynamique donné par (2.80) tel que l'état du système augmenté (2.82) est borné en temps fini et, sous conditions initiales nulles, la sortie  $z$  vérifie le critère  $\mathcal{H}_\infty$ . Pour cela, nous procédons de deux façons : d'abord par une approche classique [BDZ<sup>+</sup>15a] puis par une approche descripteur.

### 2.4.1 Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini par retour de sortie dynamique : approche classique

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour synthétiser ce type de correcteur.

**Théorème 2.4.1.** (*Correcteur FTB- $\mathcal{H}_\infty$  à retour de sortie dynamique*)

Considérant le système (2.78) et les paramètres  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$ , s'il existe deux matrices symétriques définies positives  $X$  et  $Y$ , des matrices  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $M_1$  et  $N_1$ , des réels positifs  $\alpha$ ,  $\tilde{\lambda}_1$  et  $\lambda_2$  tels que

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{M}_{11} + \mathcal{M}_{11}^T - \alpha Y & * & * & * \\ \hline (A + B_u N_1 C_y) + R_1^T - \alpha I & \mathcal{M}_{22} + \mathcal{M}_{22}^T - \alpha X & * & * \\ \hline B_w^T Y^T + D_{yw}^T L_1^T & B_w^T + D_{yw}^T N_1^T B_u^T & -\gamma^2 e^{-\alpha T_0} I & * \\ \hline C_z + D_{zu} N_1 C_y & C_z X + D_{zu} M_1 & D_{zw} + D_{zu} N_1 D_{yw} & -I \end{array} \right) < 0 \quad (2.84a)$$

$$c_2 - d\gamma^2 > 0 \quad (2.84b)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q} & S^T \\ S & \tilde{\lambda}_1 R \end{pmatrix} > 0 \quad (2.84c)$$

$$X - \lambda_2 I < 0 \quad (2.84d)$$

$$10\lambda_2 < 9\lambda_{\min}(R^{-1}) \quad (2.84e)$$

où

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Y & I \\ I & X \end{pmatrix} \quad (2.85a)$$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} Y & I \\ 3Y & 0 \end{pmatrix} \quad (2.85b)$$

$$\mathcal{M}_{11} = (YA + L_1 C_y) \quad (2.85c)$$

$$\mathcal{M}_{22} = (AX + B_u M_1) \quad (2.85d)$$

alors il existe un correcteur par retour de sortie dynamique garantissant que le système en boucle fermée (2.81) est  $\mathcal{H}_\infty$  borné en temps fini par rapport à  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$ . Une réalisation de ce correcteur est donnée par

$$A_K = Y^{-1}(R_1 - YAX - YB_u M_1 - L_1 C_y X + YB_u D_K C_y X)(Y^{-1} - X)^{-1} \quad (2.86a)$$

$$B_K = \frac{1}{3}Y^{-1}(L_1 - YB_u D_K) \quad (2.86b)$$

$$C_K = 3(M_1 - D_K C_y X)(Y^{-1} - X)^{-1} \quad (2.86c)$$

$$D_K = N_1 \quad (2.86d)$$

*Démonstration.*

Définissons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = x^T \tilde{Q}_1^{-1} x \quad (2.87)$$

avec

$$\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.88)$$

Appliquons le théorème 2.2.2 au système en boucle fermée (2.81). Ce système est  $\mathcal{H}_\infty$  borné en temps fini par rapport à  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$  si, en définissant  $\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}}$ , il existe un réel  $\alpha \geq 0$ , un réel  $\gamma > 0$  et une matrice  $Q_1$  tels que

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1^T > 0 \quad (2.89a)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1\mathcal{A}^T - \alpha\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1\mathcal{C}^T\mathcal{C}\tilde{Q}_1 & \mathcal{B} + \tilde{Q}_1\mathcal{C}^T\mathcal{D} \\ \mathcal{B}^T + \mathcal{D}^T\mathcal{C}\tilde{Q}_1 & -\gamma^2 e^{-\alpha T_f} I + \mathcal{D}^T\mathcal{D} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.89b)$$

$$d\gamma^2 < \frac{c_2}{\lambda_{\max}(Q_1)} \quad (2.89c)$$

Outre la non-linéarité de la condition (2.89c), qui comporte la valeur propre maximale de  $Q_1$  (c'est un problème qu'on rencontre dans tous les problèmes de stabilité en temps fini), la condition (2.89b) est aussi non linéaire puisque elle comporte le produit entre la matrice inconnue à déterminer  $\tilde{Q}_1$  et les matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  comportant les matrices inconnues du correcteur  $A_K, B_K, C_K$  et  $D_K$ . Dans la suite de la démonstration, le but est de lever ces non-linéarités afin d'obtenir des conditions convexes en ces variables inconnues. Remarquons que la condition (2.89b) se met sous la forme suivante

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1\mathcal{A}^T - \alpha\tilde{Q}_1 & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^T & -\gamma^2 e^{-\alpha T_f} I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1\mathcal{C}^T \\ \mathcal{D}^T \end{pmatrix} (-I) \begin{pmatrix} \mathcal{C}\tilde{Q}_1 & \mathcal{D} \end{pmatrix} < 0. \quad (2.90)$$

Appliquons le Lemme de Schur, l'inégalité précédente (2.90) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1\mathcal{A}^T - \alpha\tilde{Q}_1 & \mathcal{B} & \tilde{Q}_1\mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T & -\gamma^2 e^{-\alpha T_f} I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C}\tilde{Q}_1 & \mathcal{D} & -I \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

**Proposition 2.4.1.**

*Il existe une transformation de congruence utilisant une matrice inversible  $H$  qui permet les transformations suivantes*

$$\tilde{Q}_1 \rightarrow H^T \tilde{Q}_1 H = \tilde{Q}_1(v) \quad (2.92a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}\tilde{Q}_1 & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}\tilde{Q}_1 & \mathcal{D} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}\tilde{Q}_1 & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}\tilde{Q}_1 & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T \mathcal{A}\tilde{Q}_1 H & H^T \mathcal{B} \\ \mathcal{C}\tilde{Q}_1 H & \mathcal{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix} \quad (2.92b)$$

Le but de cette transformation de congruence est de transformer les blocs qui dépendent d'une manière non linéaire de  $\tilde{Q}_1$  et des matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  (ces dernières matrices contenant les matrices du correcteur  $A_K, B_K, C_K$  et  $D_K$ ) en de nouvelles matrices dépendantes linéairement de nouvelles variables  $X, Y, U$  et  $V$  définies ci-dessous.

Partitionnons les matrices  $\tilde{Q}_1$  et  $\tilde{Q}_1^{-1}$  comme suit

$$\tilde{Q}_1 = \begin{pmatrix} X & U^T \\ U & \hat{X} \end{pmatrix} \quad (2.93a)$$

$$\tilde{Q}_1^{-1} = \begin{pmatrix} Y & V^T \\ V & \hat{Y} \end{pmatrix} \quad (2.93b)$$

Définissons comme en [CG96] la matrice  $H$  telle que

$$H = \begin{pmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

Posons la matrice de congruence suivante

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

Multiplions l'inégalité (2.91) à gauche par  $\tilde{H}^T$  et à droite par  $\tilde{H}$ , et appliquons une transformation de congruence par  $H$  à l'inégalité (2.89a). Nous aurons

$$H^T \tilde{Q}_1 H > 0 \quad (2.96a)$$

$$\begin{pmatrix} H^T \mathcal{A} \tilde{Q}_1 H + H^T \tilde{Q}_1 \mathcal{A}^T H - \alpha H^T \tilde{Q}_1 H & H^T \mathcal{B} & H^T \tilde{Q}_1 \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T H & -\gamma^2 e^{-\alpha T_f} I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C} \tilde{Q}_1 H & \mathcal{D} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.96b)$$

D'après la proposition 2.4.1, les conditions (2.96) sont équivalentes à

$$\tilde{Q}_1(v) > 0 \quad (2.97a)$$

$$\begin{pmatrix} A(v) + A^T(v) - \alpha \tilde{Q}_1(v) & B(v) & C^T(v) \\ B^T(v) & -\gamma^2 e^{-\alpha T_f} I & D^T(v) \\ C(v) & D(v) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.97b)$$

En tenant compte des expressions de  $\tilde{Q}_1$  (2.93a) et de  $H$  (2.94),  $\tilde{Q}_1(v)$  sera égale à

$$\tilde{Q}_1(v) = \begin{pmatrix} Y & I \\ I & X \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

Dans la suite, on montre que la condition (2.84a) est équivalente à la condition (2.97b).

Les matrices du système en boucle fermée (2.81) peuvent s'exprimer de manière à faire apparaître les matrices du correcteur (2.80)

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} A & 0 & B_w \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline C_z & 0 & D_{zw} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc|c} 0 & B_u \\ I & 0 \\ \hline 0 & D_{zu} \end{array} \right) \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

En remarquant que  $\tilde{Q}_1 H = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & U \end{pmatrix}$  et en insérant (2.99) dans l'équation (2.92b), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} H^T \mathcal{A} \tilde{Q}_1 H & H^T \mathcal{B} \\ \mathcal{C} \tilde{Q}_1 H & \mathcal{D} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 H & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} Y & V^T & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} YA & YAX & YB_w \\ A & AX & B_w \\ C_z & C_z X & D_{zu} \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} V^T & YB_u \\ 0 & B_u \\ 0 & D_{zu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & U & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} YA & YAX & YB_w \\ A & AX & B_w \\ C_z & C_z X & D_{zu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_u \\ 0 & D_{zu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^T & YB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \left( \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ C_y X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} YA & 0 & YB_w \\ A & AX & B_w \\ C_z & C_z X & D_{zu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_u \\ 0 & D_{zu} \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \left( \begin{pmatrix} V^T & YB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ C_y X & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} YAX & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{pmatrix} \tag{2.100}
 \end{aligned}$$

Posons le changement de variable suivant

$$\begin{pmatrix} R_1 & L_1 \\ M_1 & N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^T & YB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ C_y X & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} YAX & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.101}$$

On peut donc réécrire l'équation (2.100) en utilisant les nouvelles variables données par l'équation (2.101). Ainsi on obtient

$$\begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} YA & 0 & YB_w \\ A & AX & B_w \\ C_z & C_z X & D_{zu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_u \\ 0 & D_{zu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & L_1 \\ M_1 & N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{pmatrix} \tag{2.102a}$$

$$\begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|c} YA + L_1 C_y & R_1 & YB_w + L_1 D_{yw} \\ A + B_u N_1 C_y & AX + B_u M_1 & B_w + B_u N_1 D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} N_1 C_y & C_z X + D_{zu} M_1 & D_{zw} + D_{zu} N_1 D_{yw} \end{array} \right) \quad (2.102b)$$

En tenant compte de l'équation (2.102b) et de l'égalité (2.98), il est facile de voir l'égalité entre les conditions (2.97b) et (2.84a).

Pour garantir la condition (2.89c), nous imposons les deux conditions suivantes

$$\lambda_1 I < Q_1 < I \quad (2.103a)$$

$$c_2 - d\gamma^2 > 0 \quad (2.103b)$$

L'inégalité (2.103b) est la condition (2.84b) du théorème 2.4.1.

Multiplions l'inégalité à gauche et à droite par  $R^{-\frac{1}{2}}$ , nous obtenons les deux inégalités suivantes

$$\lambda_1 R^{-1} < \tilde{Q}_1 \quad (2.104a)$$

$$\tilde{Q}_1 < R^{-1} \quad (2.104b)$$

Multiplions maintenant l'inégalité (2.104a) à gauche par  $H^T$ , et à droite par  $H$ . Nous obtenons

$$\lambda_1 H^T R^{-1} H < H^T \tilde{Q}_1 H \quad (2.105)$$

qui est équivalent à

$$\tilde{Q} - H^T (\lambda_1^{-1} R)^{-1} H > 0 \quad (2.106)$$

En appliquant le lemme de Schur, l'inégalité sera équivalente à

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q} & S^T \\ S & \tilde{\lambda}_1 R \end{pmatrix} > 0 \quad (2.107)$$

qui n'est d'autre que la condition (2.84c) du théorème 2.4.1.

Remarquons que l'inégalité (2.104b) s'écrit comme suit

$$\begin{pmatrix} X & U^T \\ U & \hat{X} \end{pmatrix} < R^{-1}. \quad (2.108)$$

Cette dernière inégalité est satisfaite si la condition suivante est garantie

$$\lambda_{\max}(\tilde{Q}_1) < \lambda_{\min}(R^{-1}). \quad (2.109)$$

Appliquons le lemme A.2.4 (voir Annexe A) à la matrice symétrique définie positive  $\tilde{Q}_1$ , nous aurons

$$\lambda_{\max}(\tilde{Q}_1) \leq \lambda_{\max}(X) + \lambda_{\max}(\hat{X}). \quad (2.110)$$

Cette dernière condition est satisfaite s'il existe  $\lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 > 0$  tels que

$$X < \lambda_2 I \quad (2.111a)$$

$$\hat{X} < \lambda_3 I \quad (2.111b)$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 < \lambda_{\min}(R^{-1}) \quad (2.111c)$$

L'inégalité (2.111a) est exactement la condition (2.84d) du théorème 2.4.1.

Sachant que  $\tilde{Q}_1 \tilde{Q}_1^{-1} = I$  et choisissant  $V^T = 3Y$ , nous aurons

$$YX + 3YU = I \quad (2.112)$$

Multiplions cette égalité à droite et à gauche par  $Y^{-1}$ , il suit

$$Y^{-1} = X + 3U. \quad (2.113)$$

D'autre part, d'après le lemme d'inversion de Sherman-Morrison [CG96] pour les deux matrices partitionnés  $\tilde{Q}_1$  et  $\tilde{Q}_1^{-1}$  données par (2.93), nous aurons

$$Y = (X - U^T \hat{X}^{-1} U)^{-1} \quad (2.114)$$

Inversons cette dernière équation, nous obtenons

$$Y^{-1} = X - U^T \hat{X}^{-1} U \quad (2.115)$$

Du fait des égalités entre (2.113), (2.115) et (2.111a), nous obtenons

$$\hat{X} = \frac{X - Y^{-1}}{9} < \frac{\lambda_2 I - Y^{-1}}{9} \quad (2.116)$$

Ainsi l'inégalité (2.111b) est satisfaite si on impose

$$\lambda_2 I - Y^{-1} < 9\lambda_3 I \quad (2.117)$$

Cette dernière condition est toujours satisfaite pour un choix de  $\lambda_3 = \frac{\lambda_2}{3}$  et du fait que  $Y > 0$ . Et par conséquence la condition (2.111b) est satisfaite pour ce choix.

Notons que, avec ce choix, la condition (2.111c) est équivalente à (2.84e). Ce qui finit la démonstration.  $\bullet$

## 2.4.2 Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini par retour de sortie dynamique : approche descripteur

Présentons en premier lieu un lemme qui garantit la synthèse d'un correcteur par retour de sortie dynamique.

**Lemme 2.4.1.** *Considérons le système linéaire perturbé (2.78) et la classe des perturbations (2.79), il existe un correcteur par retour de sortie dynamique (2.80) qui garantit la FTB- $\mathcal{H}_\infty$  du système augmenté (2.81) par rapport à  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$ , si il existe un réel  $\alpha \geq 0$  et une matrice  $\tilde{Q}$  tels que*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}F + F^T \mathcal{A}^T - \alpha \tilde{Q} & \tilde{Q} - F + F^T \mathcal{A}^T & \mathcal{B} & F^T \mathcal{C}^T \\ \tilde{Q} - F^T + \mathcal{A}F & -F - F^T & \mathcal{B} & 0 \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{B}^T & -\gamma^2 e^{-\alpha T_f} I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C}F & 0 & \mathcal{D} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.118a)$$

$$d\gamma^2 < \frac{c_2}{\lambda_{\max}(R^{\frac{1}{2}} F \tilde{Q}^{-1} F^T R^{\frac{1}{2}})} \quad (2.118b)$$

*Démonstration.*

Définissons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = x^T \tilde{Q}_1^{-1} x \quad (2.119)$$

avec  $Q_1$  une matrice symétrique définie positive donnée par

$$\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.120)$$

En s'inspirant de [BDZ<sup>+</sup>15a], le système (2.81) est borné en temps fini par rapport à  $(0, c_2, T_f, R, d)$  si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\dot{V} < \alpha V + \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w^T w - z^T z \quad (2.121a)$$

$$d\gamma^2 < \frac{c_2}{\lambda_{\max}(Q_1)} \quad (2.121b)$$

En utilisant la forme descripteur pour réécrire le système (2.81), et en adoptant le changement de variable (2.35), les conditions (2.121a) et (2.121b) impliquent les conditions (2.118a) et (2.118b) du lemme 2.4.1.  $\bullet$

Notre but est de trouver des conditions suffisantes telles que le système (2.78) est  $\mathcal{H}_\infty$  borné en temps fini par rapport aux paramètres  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$ .

**Théorème 2.4.2.**

Considérons le système (2.39), les paramètres  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$ , et les matrices  $Q_p = \begin{pmatrix} Q_x & * \\ Q_t & Q_y \end{pmatrix}$ ,

$G = \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix}$ , s'il existe des matrices de dimensions appropriées  $U, V, W, X, S, N_1, J, L, Q_t$ , deux matrices symétriques  $Q_x, Q_y$ , un réel  $\alpha \geq 0$  et des réels positifs  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$  tels que

$$\Phi = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} \\ (*) & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} \\ (*) & (*) & \Phi_{33} & \Phi_{11} \\ (*) & (*) & (*) & \Phi_{44} \end{array} \right) < 0 \quad (2.122a)$$

$$R_1 > \tilde{\lambda}_2 I \quad (2.122b)$$

$$c_2 - d\gamma^2 > 0 \quad (2.122c)$$

$$\begin{pmatrix} Q_q & G^T \\ G & R^{-1} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.122d)$$

$$0 < Q_q < \tilde{\lambda}_3 I \quad (2.122e)$$

$$\tilde{\lambda}_3 < \tilde{\lambda}_1 \lambda_{\min}(R_0) \min(1, \tilde{\lambda}_2^2) \quad (2.122f)$$

où

$$\Phi_{11} = \left( \begin{array}{c|c} (AN + B_u W) - \alpha Q_x & (*) \\ + (AN + B_u W)^T & \\ \hline U - \alpha Q_t & (JA + VC_y) \\ + (A + B_u X C_y)^T & + (JA + VC_y)^T - \alpha Q_y \end{array} \right) \quad (2.123a)$$

$$\Phi_{12} = \left( \begin{array}{c|c} Q_x - N & Q_t^T - I \\ \hline +(AN + B_u W)^T & +U^t \\ (A + B_u X C_y)^T & Q_y - J \\ +Q_t - S & +(AJ + V C_y)^T \end{array} \right) \quad (2.123b)$$

$$\Phi_{13} = \begin{pmatrix} B_w + B_u X D_{yw} \\ J B_w + V D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.123c)$$

$$\Phi_{14} = \begin{pmatrix} N^T C_z^T + W^T D_{zu}^T \\ C_z^T + C_y^T X^T D_{zu}^T \end{pmatrix} \quad (2.123d)$$

$$\Phi_{22} = \begin{pmatrix} -N^T - N & (*) \\ -I - S & -J^T - J \end{pmatrix} \quad (2.123e)$$

$$\Phi_{23} = \begin{pmatrix} B_w + B_u X D_{yw} \\ J B_w + V D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.123f)$$

$$\Phi_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.123g)$$

$$\Phi_{33} = -\gamma^2 e^{-\alpha T_f} I \quad (2.123h)$$

$$\Phi_{34} = D_{zw}^T + D_{yw}^T X^T D_{zu}^T \quad (2.123i)$$

$$\Phi_{44} = -I \quad (2.123j)$$

alors il existe un correcteur par retour de sortie dynamique (2.40) tel que le système en boucle fermée est  $\mathcal{H}_\infty$  borné en temps fini par rapport à  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$ .

Les matrices  $A_K, B_K, C_K$  et  $C_K$  sont déduites en résolvant les deux égalités suivantes

$$\begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & J B_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ C_y N & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J A N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.124a)$$

$$S = J N + L R_1 \quad (2.124b)$$

*Démonstration.* La démonstration est très semblable à celle du 2.3.2.

Définissons les matrices  $F$  et  $F^{-1}$  comme en (2.47). À partir de la matrice  $H$  définie en (2.50), posons la matrice  $\mathcal{H}$  comme suit

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \quad (2.125)$$

Appliquons d'abord le lemme 2.4.1 et multiplions la condition (2.118a) à gauche par  $\mathcal{H}^T$  et



à droite par  $\mathcal{H}$ , nous obtenons

$$\begin{pmatrix} H^T \mathcal{A} F H + H^T F^T \mathcal{A}^T H - \alpha H^T \tilde{Q} H & (*) & (*) & (*) \\ H^T \tilde{Q} H - H^T F^T H + H^T \mathcal{A} F H & -H^T F H - H^T F^T H & (*) & (*) \\ \mathcal{B}^T H & \mathcal{B}^T H & -\gamma^2 e^{-\alpha T_f} I & (*) \\ C F H & 0 & \mathcal{D} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.126)$$

En tenant compte du changement de variable (2.124), les expressions de  $H^T F H$ ,  $H^T Q H$ ,  $H^T \mathcal{A} F H$  et  $H^T B$  sont données respectivement par (2.55), (2.59), (2.58a) et (2.58b).

Il nous reste à déterminer les expressions de  $C F H$  et  $\mathcal{D}$ . Commençons par l'expression de  $C F H$

$$C F H = \begin{pmatrix} C_z + D_{zu} D_K C_y & D_{zu} C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.127a)$$

$$= \left[ \begin{pmatrix} C_z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & D_{zu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_y & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.127b)$$

$$= \begin{pmatrix} C_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & D_{zu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & I \\ R_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.127c)$$

$$= \begin{pmatrix} C_z N & C_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & D_{zu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ C_y N & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C_y \end{pmatrix} \quad (2.127d)$$

$$= \begin{pmatrix} C_z N & C_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & D_{zu} \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} L & J B_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ C_y N & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J A N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C_y \end{pmatrix} \quad (2.127e)$$

De même,  $\mathcal{D}$  s'écrit

$$\mathcal{D} = D_{zw} + D_{zu} D_K D_{yw} \quad (2.128a)$$

$$= D_{zw} + \begin{pmatrix} 0 & D_{zu} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} L & J B_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ C_y N & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J A N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.128b)$$

Du fait du changement de variables (2.124), nous obtenons

$$C F H = \begin{pmatrix} C_z N + D_{zu} W & C_z + D_{zu} X C_y \end{pmatrix} \quad (2.129a)$$

$$\mathcal{D} = D_{zw} + D_{zu} X D_{yw} \quad (2.129b)$$

ce qui implique que l'inégalité (2.126) est équivalente à la condition (2.122a) du théorème 2.4.2. La condition (2.118b) est satisfaite en imposant les deux conditions suivantes

$$\lambda_1 I < Q_1 < I \quad (2.130a)$$

$$c_2 - d\gamma^2 > 0 \quad (2.130b)$$

L'inégalité (2.130b) est exactement la condition (2.122c) du théorème (2.4.2).

Suivant la même démarche que la démonstration 2.3.2, l'inégalité (2.130a) est satisfaite en imposant les conditions (2.122b), (2.122d), (2.122e) et (2.122f).

Ce qui finit la démonstration du théorème 2.4.2. •

### 2.4.3 Exemple numérique

Considérons le système du deuxième ordre de [MS09] modifié décrit par

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_w = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \\ C_y &= \begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}, D_{yw} = 0.01 \\ C_z &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, D_{zu} = 1, D_{zw} = 0.1. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Fixons les paramètres suivants ( $c_1 = 0, R = I, d = 1, T_f = 2$ ). La courbe de la réponse du système en boucle ouverte soumis à la perturbation suivante  $\exp(-0.1t)\sin(t)$  est donnée par la figure 2.1

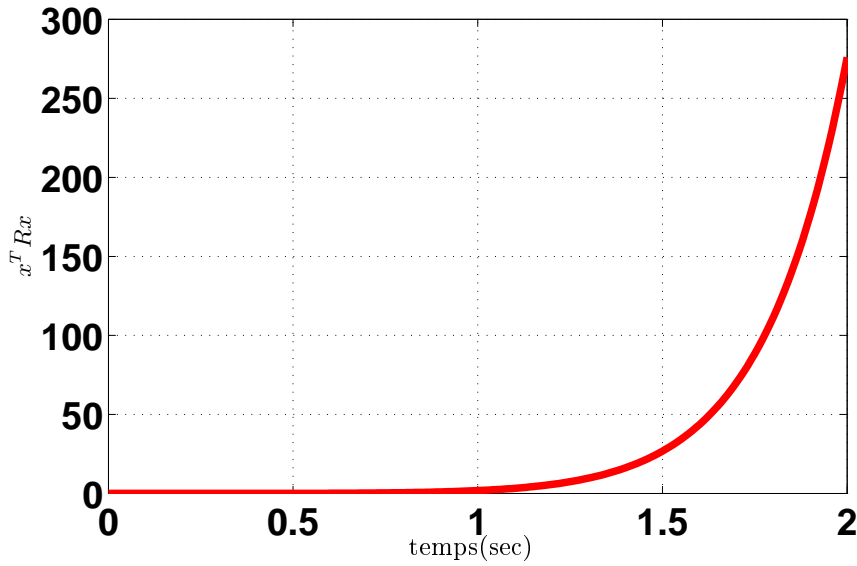


FIGURE 2.1 – Norme pondérée de la réponse du système ouvert (2.131)

Remarquons que la norme pondérée du système en boucle ouverte dépasse la valeur de 250 au bout de 2 secondes. En pratique, ceci présente un danger pour le matériel et pour l'opérateur du système considéré. D'où l'idée de synthétiser un correcteur par sortie dynamique pour contraindre l'état du système à rester au-dessous d'une borne donnée pendant un temps fini. Essayons de résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} &\underset{\gamma > 0, c_2 > 0}{\text{minimiser}} && \gamma + c_2 \\ &\text{sous les contraintes} && (2.84a), (2.84b), (2.84c), (2.84d) \text{ et } (2.84e) \end{aligned} \quad (2.132)$$

La résolution du problème d'optimisation (2.132) nous fournit les deux valeurs  $\gamma = 1.8161$  et  $c_2 = 3.2986$ . Notons que le problème est résolu par une recherche en ligne de la variable  $\alpha$ . De ce fait, à chaque itération de  $\alpha$ , nous résolvons des LMIs. Les valeurs de  $\gamma$  et  $c_2$  données correspondent à une valeur  $\alpha = 2.5$ . Les paramètres du correcteur sont alors

$$\begin{aligned} A_K &= \begin{pmatrix} -0.6158 & 0.000 \\ -99.9983 & 1 \end{pmatrix}, B_K = \begin{pmatrix} 0 \\ -3.33 \end{pmatrix} \\ C_K &= \begin{pmatrix} -2.92.1474 & 3 \end{pmatrix}, D_K = -9.9998 \end{aligned} \quad (2.133)$$

La figure 2.2 représente la norme pondérée de l'état du système en boucle fermée.

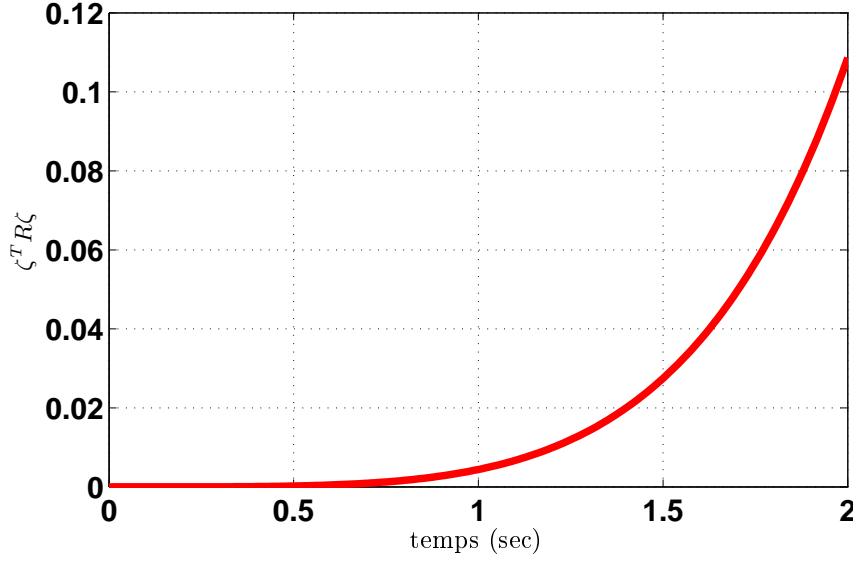


FIGURE 2.2 – Norme pondérée de la réponse du système (2.131) en boucle fermée

Remarquons que la norme pondérée du système en boucle fermée ne dépasse pas la valeur de  $c_2 = 3.2986$  trouvée en résolvant le problème d'optimisation (2.132).

Reprenons l'exemple (2.131) et résolvons le problème d'optimisation suivant, correspondant à notre approche descripteur.

$$\begin{aligned}
& \underset{\gamma > 0, c_2 > 0}{\text{minimiser}} && \gamma + c_2 \\
& \text{sous les contraintes} && (2.122a), (2.122b), (2.122c), (2.122d), (2.122e) \text{ et } (2.122f)
\end{aligned} \tag{2.134}$$

La résolution du problème d'optimisation (2.134) nous fournit les deux valeurs de  $\gamma = 1.7229$  et  $c_2 = 2.9689$ . Notons que le problème est résolu par une recherche en ligne de la variable  $\alpha$ . De ce fait, à chaque itération de  $\alpha$ , nous résolvons des LMIs. Les valeurs de  $\gamma$  et  $c_2$  données correspondent à une valeur  $\alpha = 2.5$ . Les paramètres du correcteur sont

$$\begin{aligned}
A_K &= \begin{pmatrix} -21.0621 & 9.6416 \\ -21.3525 & 10.6025 \end{pmatrix}, B_K = \begin{pmatrix} 0.4212 \\ 0.4029 \end{pmatrix} \\
C_K &= \begin{pmatrix} 771.4048 & -586.7621 \end{pmatrix}, D_K = -8.8155
\end{aligned} \tag{2.135}$$

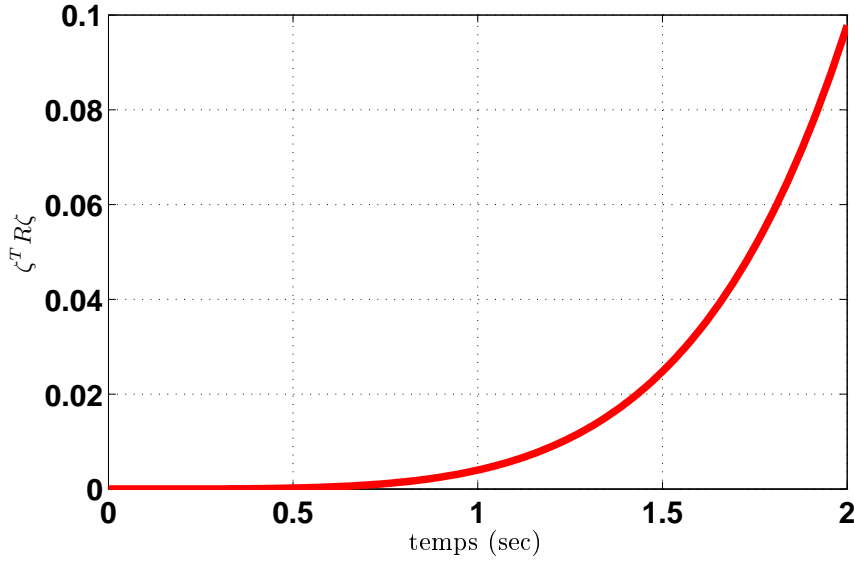


FIGURE 2.3 – Norme pondérée de la réponse du système en boucle fermée (2.131)

Remarquons que la norme pondérée du système fermé ne dépasse pas la valeur de  $c_2 = 2.9689$  trouvée en résolvant le problème d'optimisation (2.134).

On remarque que le correcteur obtenu par l'approche descripteur donne de meilleurs résultats que celui obtenu par l'approche classique (les valeurs de  $\gamma$  et  $c_2$  sont inférieures). Cela est confirmé par les figures 2.3 et 2.2.

## 2.5 Commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini

### 2.5.1 Synthèse d'une commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini

La commande basée observateur que nous développons dans cette section est différente de l'approche développée par Amato *et al.* dans leur article [AAC06b]. Nous procédons en deux étapes. Il s'agit d'abord de trouver la commande qui garantit les performances désirées. Ensuite, nous construisons un filtre qui a pour but l'estimation de cette loi de commande. Notre principal avantage par rapport à la méthode de [AAC06b] est que notre filtre est de même ordre que la commande, donc d'ordre réduit généralement. Rappelons que la commande dans le cas d'un retour d'état linéaire peut être vue comme une fonctionnelle de l'état dans le sens où nous avons  $u = K_1 x$ . D'où le nom de *filtre fonctionnel à temps fini*.

Considérons la classe des systèmes linéaires perturbés suivante

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \quad (2.136a)$$

$$z = C_z x + D_{zu} u + D_{zw} w \quad (2.136b)$$

$$y = C_y x + D_{yw} w \quad (2.136c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  est la sortie mesurée et  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie de performance.

Le bruit extérieur  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  est à norme bornée et vérifie la contrainte (2.79).

Le but est de synthétiser un correcteur FTB- $\mathcal{H}_\infty$  pour le système (2.136). Nous procédons en deux étapes comme suit :

- Premièrement, nous cherchons à déterminer un gain du retour d'état linéaire  $K_1$  qui assure la FTB- $\mathcal{H}_\infty$  par rapport à  $(0, c_2, T_f, R, d)$  du système bouclé par  $u = K_1x$ .
- Deuxièmement, nous synthétisons un filtre FTB- $\mathcal{H}_\infty$  qui estime la fonctionnelle (où la commande)  $u = K_1x$ . Ce filtre a pour structure

$$\dot{\varphi} = N\varphi + L_1y + Gu \quad (2.137a)$$

$$u = \varphi + Ky. \quad (2.137b)$$

La dimension du vecteur d'état  $\varphi(t) \in \mathbb{R}^m$  du correcteur est la même que celle du vecteur de la commande  $u(t)$ . Ce correcteur basé observateur est d'ordre réduit puisque  $\dim(\varphi(t)) = m \leq \dim(x(t)) = n$ .

Commençons par la synthèse d'un retour d'état linéaire  $u = K_1x$  qui garantit la FTB- $\mathcal{H}_\infty$  du système bouclé. À partir des équations (2.136a) et (2.136b) et de la commande  $u = K_1x$ , le système en boucle fermée a la forme suivante

$$\dot{x} = (A + B_uK_1)x + B_w w \quad (2.138a)$$

$$z = (C_z + D_{zu}K_1)x + D_{zw}w \quad (2.138b)$$

Nous rappelons le théorème suivant donnant des conditions suffisantes pour la synthèse d'un correcteur à retour d'état linéaire pour un système linéaire perturbé.

**Théorème 2.5.1.** [MS09, XXX11]

Considérons le système (2.136), les paramètres  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$  et la matrice  $\tilde{Q} = R^{-\frac{1}{2}}QR^{-\frac{1}{2}}$ . S'il existe une matrice symétrique définie positive  $\tilde{Q}_1$ , une matrice  $L$ , un réel  $\alpha \geq 0$  tels que

$$\begin{pmatrix} A\tilde{Q} + \tilde{Q}A^T - \alpha\tilde{Q} + B_uL + L^TB_u^T & B_w & \tilde{Q}C_z^T + L^TD_{zu}^T \\ B_w^T & -\gamma^2e^{-\alpha T_f} & D_{zw} \\ C_z\tilde{Q} + D_{zu}L & D_{zw}^T & -I \end{pmatrix} < 0, \quad (2.139a)$$

$$d\gamma^2 < \frac{c_2}{\lambda_{\max}(\tilde{Q})}. \quad (2.139b)$$

alors il existe un correcteur par retour d'état linéaire  $u = K_1x$  tel que le système en boucle fermée soit FTB- $\mathcal{H}_\infty$  par rapport à  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$ . La matrice gain du correcteur est donnée par

$$K_1 = L\tilde{Q}^{-1}. \quad (2.140)$$

*Démonstration.* La démonstration est basée sur la matrice de Lyapunov suivante

$$V(x) = x^T\tilde{Q}^{-1}x. \quad (2.141)$$

Appliquons le théorème 2.2.2 au système (2.138), nous devons montrer que

$$\begin{pmatrix} \bar{A}\tilde{Q} + \tilde{Q}\bar{A}^T - \alpha\tilde{Q} + \tilde{Q}\bar{C}^T\bar{C}\tilde{Q} & B_w + \tilde{Q}\bar{C}^TD_{zw} \\ B_w^T + D_{zw}^T\bar{C}\tilde{Q} & -\gamma^2e^{-\alpha T_0}I + D_{zw}^TD_{zw} \end{pmatrix} < 0, \quad (2.142a)$$

$$d\gamma^2 < \frac{c_2}{\lambda_{\max}(\tilde{Q})}. \quad (2.142b)$$

avec

$$\bar{A} = (A + B_uK_1) \quad (2.143a)$$

$$\bar{C} = (C_z + D_{zu}K_1) \quad (2.143b)$$

Posons  $L = K_1\tilde{Q}$  et appliquons le Lemme de Schur à la condition (2.142a), nous obtenons exactement la condition (2.139a) du théorème 2.5.1. Ainsi, il est clair que les deux conditions (2.139a) et (2.139b) du théorème 2.5.1 garantissent la FTB- $\mathcal{H}_\infty$  par rapport à  $(0, c_2, T_f, R, d, \gamma)$  du système (2.138). Ce qui finit la démonstration. •

La condition (2.139b) n'est pas une condition LMI. Afin de faciliter la résolution, on peut la remplacer par les LMIs suivantes

$$Q > I \quad (2.144a)$$

$$c_2 - d\gamma^2 > 0 \quad (2.144b)$$

Passons à la deuxième phase et définissons l'erreur d'estimation suivante

$$e = K_1x - u \quad (2.145)$$

Compte tenu de l'expression du filtre (2.137), nous obtenons

$$\begin{aligned} e &= K_1x - \varphi - Ky \\ &= K_1x - \varphi - K(C_yx + D_{yw}w) \\ &= \psi x - \varphi - KD_{yw}w. \end{aligned} \quad (2.146a)$$

avec

$$\psi = K_1 - KC_y. \quad (2.147)$$

Pour éviter la dérivation de la perturbation  $w$ , nous disposons de deux méthodes [SDZ06] : la première méthode consiste à imposer la contrainte  $KD_{yw} = 0$ , la deuxième méthode propose de dériver seulement  $\varepsilon = \psi x - \varphi$  au lieu de  $e$ , en posant le changement de variable suivant [SDZ06]

$$\begin{cases} \varepsilon = \psi x - \varphi \\ e = \varepsilon - KD_{yw}w \end{cases} \quad (2.148)$$

Nous appliquons la première méthode dans la sous-section 2.5.2 et la deuxième méthode dans la sous section 2.5.3.

### 2.5.2 Synthèse d'une commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini sous la contrainte $KD_{yw} = 0$

En imposant la contrainte  $KD_{yw} = 0$ , la dynamique de l'erreur  $e$  s'écrit

$$e = \psi x - \varphi \quad (2.149)$$

Par dérivation de la nouvelle dynamique du filtre  $e$  défini en (2.149), nous aurons le système dynamique équivalent suivant

$$\dot{e} = Ne + (\psi A - N\psi - L_1C_y)x + (\psi B_u - G)u + (\psi B_w - L_1D_{yw})w. \quad (2.150)$$

En utilisant (2.147) et (2.149), la dynamique du système (2.136a) s'écrit

$$\dot{x} = Ax + B_uu + B_w w$$

$$\begin{aligned}
&= Ax + B_u(\varphi + Ky) + B_w w \\
&= Ax + B_u \varphi + B_u Ky + B_w w \\
&= Ax + B_u(\psi x - e) + B_u K(C_y x + D_{yw} w) + B_w w \\
&= Ax + B_u K_1 x - BK C_y x + BK C_y x - B_u e + B_u K D_{yw} w + B_w w \\
&= (A + B_u K_1)x - B_u e + B_w w
\end{aligned} \tag{2.151a}$$

La sortie de performance  $z$  est donnée par

$$z = C_z x + D_{zu}(\varphi + Ky) + D_{zw} w \tag{2.152a}$$

$$z = C_z x + D_{zu}(\psi x - e + Ky) + D_{zw} w \tag{2.152b}$$

$$z = C_z x + D_{zu}\psi x - D_{zu}e + D_{zu}Ky + D_{zw} w \tag{2.152c}$$

$$z = C_z x + D_{zu}(K_1 - KC_y)x - D_{zu}e + D_{zu}K(C_y x + D_{yw} w) + D_{zw} w \tag{2.152d}$$

$$z = C_z x + D_{zu}K_1 x - D_{zu}KC_y x - D_{zu}e + D_{zu}KC_y x + D_{zu}KD_{yw} w + D_{zw} w \tag{2.152e}$$

$$z = (C_z + D_{zu}K_1)x - D_{zu}e + D_{zw} w \tag{2.152f}$$

Le système en boucle fermée obtenu est alors donné par

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K_1)x - B_u e + B_w w \\ \dot{e} = Ne + (\psi A - N\psi - L_1 C_y)x + (\psi B_u - G)u + (\psi B_w - L_1 D_{yw})w \\ z = (C_z + D_{zu}K_1)x - D_{zu}e + D_{zw} w. \end{cases} \tag{2.153}$$

Le filtre que nous considérons doit vérifier la propriété de non-dépendance explicite de la dynamique de l'erreur d'observation avec l'état du système  $x(t)$  et l'entrée  $u(t)$  : cette propriété est appelée le non biais du filtre [DB95, Dar00, SDZ06].

Ainsi, le problème de synthèse d'une commande FTB- $\mathcal{H}_\infty$  basée sur un filtre fonctionnel FTB- $\mathcal{H}_\infty$  revient à déterminer les matrices  $N$ ,  $L_1$ ,  $G$  et  $K$  telles que

- (i) le filtre (2.150) est non biaisé : si  $w(t) = 0$  alors il ne dépend pas explicitement ni de l'état  $x(t)$  ni de l'entrée  $u(t)$  ;
- (ii) la nouvelle représentation du système en boucle fermée (2.153) est FTB- $\mathcal{H}_\infty$ .

Le non biais du filtre est garanti si et seulement si ces deux équations sont vérifiées

$$\psi A - N\psi - L_1 C_y = 0, \tag{2.154a}$$

$$\psi B_u - G = 0. \tag{2.154b}$$

L'équation (2.154a) est une équation de Sylvester.

Donc en tenant compte des conditions de non biais (2.154a) et (2.154b), le système en boucle fermée s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K_1)x - B_u e + B_w w \\ \dot{e} = Ne + (\psi B_w - L_1 D_{yw})w \\ z = (C_z + D_{zu}K_1)x - D_{zu}e + D_{zw} w. \end{cases} \tag{2.155}$$

Vu l'expression (2.147) de  $\psi$ , l'équation de Sylvester (2.154a) s'écrit comme suit

$$K_1 A - KC_y A - NK_1 + (NK - L_1)C_y = 0. \tag{2.156}$$

Définissons

$$J = L_1 - NK, \tag{2.157}$$

En rassemblant la condition (2.156) et la contrainte  $KD_{yw} = 0$ , nous obtenons le système d'équations suivant

$$\begin{cases} NK_1 + JC_y + KC_yA = K_1A \\ KD_{yw} = 0 \end{cases} \quad (2.158)$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme suivante

$$X\bar{\Sigma} = \bar{\Theta} \quad (2.159)$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} N & J & K \end{pmatrix} \quad (2.160a)$$

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ C_y & 0 \\ C_yA & D_{yw} \end{pmatrix} \quad (2.160b)$$

$$\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} K_1A & 0 \end{pmatrix} \quad (2.160c)$$

L'équation (2.159) a une solution  $X$  si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite [RM71]

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \bar{\Sigma} \\ \bar{\Theta} \end{pmatrix} = \text{rang } \bar{\Sigma} \quad (2.161)$$

et une solution générale  $X$  de (2.159) est donnée par [RM71]

$$X = \bar{\Theta}\bar{\Sigma}^+ + Z(I - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^+) \quad (2.162)$$

où  $\bar{\Sigma}^+$  est l'inverse généralisée de  $\bar{\Sigma}$  (i.e.  $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^+\bar{\Sigma}$ ) et  $Z$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée. Une fois la matrice  $X$  déterminée, nous déduisons les matrices de notre filtre fonctionnel de la façon suivante

$$N = X \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{11} + ZB_{11}, \quad (2.163a)$$

$$J = X \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} = A_{22} + ZB_{22}, \quad (2.163b)$$

$$K = X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} = A_{33} + ZB_{33}, \quad (2.163c)$$

avec

$$A_{11} = \bar{\Theta}\bar{\Sigma}^+ \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.164a)$$



$$B_{11} = (I - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^+) \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.164b)$$

$$A_{22} = \bar{\Theta}\bar{\Sigma}^+ \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.164c)$$

$$B_{22} = (I - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^+) \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.164d)$$

$$A_{33} = \bar{\Theta}\bar{\Sigma}^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (2.164e)$$

$$B_{33} = (I - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^+) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (2.164f)$$

En utilisant (2.163b), (2.157) et  $KD_{yw} = 0$ , le terme  $L_1D_{yw}$  s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} L_1D_{yw} &= (J + NK)D_{yw} \\ &= (A_{22} + ZB_{22})D_{yw} \end{aligned} \quad (2.165)$$

Et par conséquent, le système en boucle fermée (2.155) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_uK_1)x - B_ue + B_w w \\ \dot{e} = Ne + \bar{B}_e w \\ z = (C_z + D_{zu}K_1)x - D_{zu}e + D_{zw}w. \end{cases} \quad (2.166)$$

avec

$$\bar{B}_e = \bar{B}_{e_1} - Z\bar{B}_{e_2} \quad (2.167)$$

où

$$\bar{B}_{e_1} = [(K_1 - A_{33}C_y)B_w - A_{22}D_{yw}] \quad (2.168a)$$

$$\bar{B}_{e_2} = [B_{33}C_yB_w + B_{22}D_{yw}] \quad (2.168b)$$

Rappelons que notre but est de synthétiser un filtre fonctionnel garantissant la propriété FTB- $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.138a). Cela équivaut à garantir que le système (2.166) est FTB- $\mathcal{H}_\infty$ . Le théorème qui suit donne des conditions suffisantes pour satisfaire la propriété de FTB- $\mathcal{H}_\infty$ .

**Théorème 2.5.2.**

Le système (2.166) est FTB- $\mathcal{H}_\infty$  par rapport à  $(0, c_2, T_f, \tilde{R}, d, \gamma)$  si, étant donné  $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R_e \end{pmatrix}$ ,

$\tilde{Q}_1 = R^{\frac{1}{2}} Q_1 R^{\frac{1}{2}}$  et  $\tilde{Q}_2 = R_e^{\frac{1}{2}} Q_2 R_e^{\frac{1}{2}}$ , il existe deux matrices symétriques et définies positives  $Q_1, Q_2$ , une matrice  $Y$  et un réel  $\alpha \geq 0$  tels que

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ (*) & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ (*) & (*) & F_{33} & F_{34} \\ (*) & (*) & (*) & F_{44} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.169a)$$

$$d\gamma^2 < \lambda_{\min}(Q_1)c_2 \quad (2.169b)$$

$$d\gamma^2 < \lambda_{\min}(Q_2)c_2 \quad (2.169c)$$

avec

$$F_{11} = (A + B_u K_1)^T \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 (A + B_u K_1) - \alpha \tilde{Q}_1 \quad (2.170a)$$

$$F_{12} = -\tilde{Q}_1 B_u \quad (2.170b)$$

$$F_{13} = \tilde{Q}_1 B_w \quad (2.170c)$$

$$F_{14} = (C_z + D_{zu} K_1)^T \quad (2.170d)$$

$$F_{22} = (A_{11}^T \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_2 A_{11}) + (Y \bar{B}_{11} + \bar{B}_{11}^T Y^T) - \alpha \tilde{Q}_2 \quad (2.170e)$$

$$F_{23} = \tilde{Q}_2 \bar{B}_{e1} - Y \bar{B}_{e2} \quad (2.170f)$$

$$F_{24} = -D_{zu}^T \quad (2.170g)$$

$$F_{33} = -\gamma^2 e^{-\alpha T_0} I \quad (2.170h)$$

$$F_{34} = D_{zw}^T \quad (2.170i)$$

$$F_{44} = -I \quad (2.170j)$$

*Démonstration.*

Définissons le vecteur d'état augmenté  $\zeta = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$  et la matrice de Lyapunov  $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{pmatrix}$ .

Ainsi la fonction de Lyapunov correspondante est la suivante

$$V(\zeta) = \zeta(t)^T \tilde{Q} \zeta = x(t)^T \tilde{Q}_1 x(t) + e(t)^T \tilde{Q}_2 e(t). \quad (2.171)$$

Pour garantir la FTB- $\mathcal{H}_\infty$  par rapport à  $(0, c_2, T_f, \tilde{R}, d, \gamma)$  du système (2.166), nous montrons dans un premier temps les conditions suivantes

$$\dot{V} - \alpha V - \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w(t)^T w(t) + z(t)^T z(t) < 0 \quad (2.172a)$$

$$d\gamma^2 < \lambda_{\min}(Q_1)c_2 \quad (2.172b)$$

$$d\gamma^2 < \lambda_{\min}(Q_2)c_2 \quad (2.172c)$$

Après calcul, la condition (2.172a) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ (*) & R_{22} & R_{23} \\ (*) & (*) & R_{33} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.173)$$

avec

$$\begin{aligned} R_{11} &= (A + B_u K_1)^T \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 (A + B_u K_1) + (C_z + D_{zu} K_1)^T (C_z + D_{zu} K_1) - \alpha \tilde{Q}_1 \\ R_{12} &= -\tilde{Q}_1 B_u - (C_z + D_{zu} K_1)^T D_{zu} \\ R_{13} &= \tilde{Q}_1 B_w + (C_z + D_{zu} K_1)^T D_{zw} \\ R_{22} &= N^T \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_2 N - \alpha \tilde{Q}_2 + D_{zu}^T D_{zu} \\ R_{23} &= \tilde{Q}_2 \bar{B}_e - D_{zu}^T D_{zw} \\ R_{33} &= D_{zw}^T D_{zw} - \gamma^2 e^{-\alpha T_f} I \end{aligned}$$

En remplaçant  $N$  et  $\bar{B}_{e_1}$  par leurs expressions respectives (2.163a) et (2.168b), en posant  $Y = \tilde{Q}_2 Z$  dans (2.173), et en appliquant finalement le lemme de Schur, on obtient exactement (2.169a).

Remarquons maintenant que la condition (2.172a) implique nécessairement

$$\dot{V} - \alpha V - \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w(t)^T w(t) < 0. \quad (2.174)$$

Multiplions (2.174) par  $e^{-\alpha t}$ , cela donne

$$e^{-\alpha t} \dot{V} - \alpha e^{-\alpha t} V < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} e^{-\alpha t} w(t)^T w(t) \quad (2.175)$$

qui peut s'écrire comme

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} V) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} e^{-\alpha t} w(t)^T w(t). \quad (2.176)$$

En intégrant de 0 à  $t$ , on obtient

$$e^{-\alpha t} V(\zeta(t)) - V(\zeta(0)) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} \int_0^t e^{-\alpha \tau} w(\tau)^T w(\tau) d\tau \quad (2.177)$$

Puisque  $\alpha \geq 0$ ,  $V(\zeta(0)) = 0$  et  $t \leq T_f$ , nous déduisons

$$\begin{aligned} V(\zeta(t)) &< \gamma^2 e^{-\alpha T_f} e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha \tau} w(\tau)^T w(\tau) d\tau \\ &< \gamma^2 d. \end{aligned} \quad (2.178)$$

Ainsi, comme  $V(\zeta(t)) \geq \lambda_{\min}(Q_1) x^T R x$  par définition de  $V$ , et du fait de (2.172b), nous déduisons

$$x(t)^T R x(t) < \frac{\gamma^2 d}{\lambda_{\min}(Q_1)} < c_2. \quad (2.179)$$

De même, du fait que  $V(\zeta(t)) \geq \lambda_{\min}(Q_2) e^T R_e e$  et du fait de la condition (2.172c), nous déduisons

$$e(t)^T R_e e(t) < \frac{\gamma^2 d}{\lambda_{\min}(Q_2)} < c_2 \quad (2.180)$$

Et donc le système (2.166) est FTB par rapport à  $(0, c_2, T_f, \tilde{R}, d)$ .

Maintenant, multiplions (2.172a) par  $e^{-\alpha t}$ , nous aurons

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} V) < e^{-\alpha t} [\gamma^2 e^{-\alpha T_f} w^T w - z^T z] \quad (2.181)$$

Ensuite, en intégrant de 0 à  $T_f$ , nous obtenons

$$e^{-\alpha T_f} V(\zeta(T_f)) < \int_0^{T_f} e^{-\alpha \tau} \left[ \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w^T(\tau) w(\tau) - z^T(\tau) z(\tau) \right] d\tau \quad (2.182)$$

or  $e^{-\alpha T_f} V(e(T_f)) > 0$ , on aura

$$\int_0^{T_f} e^{-\alpha \tau} z^T(\tau) z(\tau) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} \int_0^{T_f} e^{-\alpha \tau} w^T(\tau) w(\tau) d\tau \quad (2.183)$$

Comme  $e^{-\alpha T_f} \leq e^{-\alpha \tau} \leq 1$  pour tout  $\tau \in [0, T_f]$ , alors le critère  $\mathcal{H}_\infty$  (2.2) est déduit i.e.

$$\int_0^{T_f} z^T(\tau) z(\tau) < \gamma^2 \int_0^{T_f} w^T(\tau) w(\tau) d\tau. \quad (2.184)$$

Ce qui finit la démonstration. •

Les deux conditions (2.169b) et (2.169c) du théorème ne sont pas des LMIs. Afin de faciliter les calculs, on propose de les remplacer par les inégalités suivantes

$$Q_1 > I \quad (2.185a)$$

$$Q_2 > I \quad (2.185b)$$

$$c_2 - d\gamma^2 > 0 \quad (2.185c)$$

En conclusion, la synthèse d'une commande  $\mathcal{H}_\infty$  en temps fini basée sur un observateur  $\mathcal{H}_\infty$  en temps fini sous la contrainte  $KD_{yw} = 0$  se réalise grâce à l'algorithme suivant

**Algorithme 2.5.1.**

- (i) Fixer les valeurs  $c_2$ ,  $T_f$ ,  $d$ ,  $R$  et  $\gamma$ , conformément aux données physiques du problème (les valeurs non imposées par le problème pourront être optimisées).
- (ii) Fixer  $\alpha > 0$  et résoudre les LMIs (2.139a), (2.144a) et (2.144b) pour obtenir le gain  $K_1 = L\tilde{Q}^{-1}$ .
- (iii) Pour les paramètres  $c_2$ ,  $T_f$ ,  $d$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\gamma$  et  $K_1$ , résoudre les LMIs (2.169a), (2.185a), (2.185b) et (2.185c).
- (iv) Calculer  $Z = \tilde{Q}_2^{-1}Y$ .
- (v) Les matrices du contrôleur basé observateur  $N$ ,  $L_1$ ,  $G$  et  $K$  sont calculées grâce aux équations (2.163a), (2.163b), (2.157), (2.154b) et (2.163c).

### 2.5.3 Synthèse d'une commande $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini basée sur un observateur $\mathcal{H}_\infty$ en temps fini sans la contrainte $KD_{yw} = 0$

Ainsi par dérivation de la nouvelle dynamique du filtre  $\varepsilon$  défini en (2.148), nous aurons le système dynamique équivalent suivant

$$\dot{\varepsilon} = N\varepsilon + (\psi A - N\psi - L_1 C_y)x + (\psi B_u - G)u + (\psi B_w - L_1 D_{yw})w \quad (2.186)$$

En utilisant (2.147) et (2.148), la dynamique du système (2.136a) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_w w \\ &= Ax + B_u(\varphi + Ky) + B_w w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Ax + B_u \varphi + B_u Ky + B_w w \\
 &= Ax + B_u(\psi x - \varepsilon) + B_u K(C_y x + D_{yw} w) + B_w w \\
 &= Ax + B_u K_1 x - BK C_y x + BK C_y x - B_u \varepsilon + B_u K D_{yw} w + B_w w \\
 &= (A + B_u K_1)x - B_u \varepsilon + (B_u K D_{yw} + B_w)w
 \end{aligned} \tag{2.187a}$$

La sortie de performance  $z$  est donnée par

$$z = C_z x + D_{zu}(\varphi + Ky) + D_{zw} w \tag{2.188a}$$

$$z = C_z x + D_{zu}(\psi x - \varepsilon + Ky) + D_{zw} w \tag{2.188b}$$

$$z = C_z x + D_{zu}\psi x - D_{zu}\varepsilon + D_{zu}Ky + D_{zw} w \tag{2.188c}$$

$$z = C_z x + D_{zu}(K_1 - KC_y)x - D_{zu}\varepsilon + D_{zu}K(C_y x + D_{yw} w) + D_{zw} w \tag{2.188d}$$

$$z = C_z x + D_{zu}K_1 x - D_{zu}KC_y x - D_{zu}\varepsilon + D_{zu}KC_y x + D_{zu}K D_{yw} w + D_{zw} w \tag{2.188e}$$

$$z = (C_z + D_{zu}K_1)x - D_{zu}\varepsilon + (D_{zu}K D_{yw} + D_{zw})w \tag{2.188f}$$

Le système en boucle fermée obtenu est alors donné par

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K_1)x - B_u \varepsilon + (B_u K D_{yw} + B_w)w \\ \dot{\varepsilon} = N\varepsilon + (\psi A - N\psi - L_1 C_y)x + (\psi B_u - G)u + (\psi B_w - L_1 D_{yw})w \\ z = (C_z + D_{zu}K_1)x - D_{zu}\varepsilon + (D_{zu}K D_{yw} + D_{zw})w. \end{cases} \tag{2.189}$$

Le filtre que nous considérons doit vérifier la propriété de non dépendance explicite de la dynamique de l'erreur d'observation avec l'état du système  $x(t)$  et de l'entrée  $u(t)$  : cette propriété est appelée le non biais du filtre [DB95, Dar00, SDZ06].

Ainsi, le problème de synthèse d'une commande FTB- $\mathcal{H}_\infty$  basée sur un filtre fonctionnel FTB- $\mathcal{H}_\infty$  revient à déterminer les matrices  $N$ ,  $L_1$ ,  $G$  et  $K$  telles que

(i) le filtre (2.137) est non biaisé : si  $w(t) = 0$  alors il ne dépend pas explicitement ni de l'état  $x(t)$  ni de l'entrée  $u(t)$  ;

(ii) la nouvelle représentation du système en boucle fermée (2.189) est FTB- $\mathcal{H}_\infty$ .

Le non biais du filtre est garanti si et seulement si ces deux équations sont vérifiées

$$\psi A - N\psi - L_1 C_y = 0, \tag{2.190a}$$

$$\psi B_u - G = 0. \tag{2.190b}$$

L'équation (2.190a) est une équation de Sylvester.

Donc le système en boucle fermée s'écrit en tenant compte des conditions de non biais (2.190a) et (2.190b).

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K_1)x - B_u \varepsilon + (B_u K D_{yw} + B_w)w \\ \dot{\varepsilon} = N\varepsilon + (\psi B_w - L_1 D_{yw})w \\ z = (C_z + D_{zu}K_1)x - D_{zu}\varepsilon + (D_{zu}K D_{yw} + D_{zw})w. \end{cases} \tag{2.191}$$

Vu l'expression (2.147) de  $\psi$ , l'équation de Sylvester (2.190a) s'écrit comme suit

$$K_1 A - KC_y A - NK_1 + (NK - L_1)C_y = 0. \tag{2.192}$$

Définissons

$$J = L_1 - NK, \tag{2.193}$$

la condition (2.192) devient

$$NK_1 + JC_y + KC_yA = K_1A. \quad (2.194)$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme suivante

$$X\Sigma = \Theta \quad (2.195)$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} N & J & K \end{pmatrix} \quad (2.196a)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} K_1 \\ C_y \\ C_yA \end{pmatrix} \quad (2.196b)$$

$$\Theta = K_1A. \quad (2.196c)$$

L'équation (2.195) a une solution  $X$  si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite [RM71]

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Theta \end{pmatrix} = \text{rang} \Sigma \quad (2.197)$$

et une solution générale  $X$  de (2.195) est donnée par [RM71]

$$X = \Theta\Sigma^+ + Z(I - \Sigma\Sigma^+) \quad (2.198)$$

où  $\Sigma^+$  est l'inverse généralisée de  $\Sigma$  (i.e.  $\Sigma = \Sigma\Sigma^+\Sigma$ ) et  $Z$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée. Une fois la matrice  $X$  déterminée, nous déduisons les matrices de notre filtre fonctionnel. En effet,

$$N = X \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{11} + ZB_{11}, \quad (2.199a)$$

$$J = X \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} = A_{22} + ZB_{22}, \quad (2.199b)$$

$$K = X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} = A_{33} + ZB_{33}, \quad (2.199c)$$

avec

$$A_{11} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.200a)$$

$$B_{11} = (I - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.200b)$$

$$A_{22} = \Theta \Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.200c)$$

$$B_{22} = (I - \Sigma \Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.200d)$$

$$A_{33} = \Theta \Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (2.200e)$$

$$B_{33} = (I - \Sigma \Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (2.200f)$$

En utilisant (2.193), (2.199a), (2.199b) et (2.199c), le terme  $L_1 D_{yw}$  s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} L_1 D_{yw} &= (J + NK) D_{yw} \\ &= (A_{22} + Z B_{22} + (A_{11} + Z B_{11})(A_{33} + Z B_{33})) D_{yw} \end{aligned} \quad (2.201)$$

Cette équation (2.201) contient une bilinéarité de la variable  $Z$  à déterminer. Ceci est dû au produit  $(A_{11} + Z B_{11})(A_{33} + Z B_{33})$ . Le but est d'exprimer les conditions de synthèse du filtre sous forme d'un problème d'optimisation convexe. Pour éliminer cette bilinéarité, nous imposons la contrainte suivante sur le gain  $Z$  [SDZ06]

$$Z B_{33} D_{yw} = 0. \quad (2.202)$$

Ainsi l'équation (2.201) devient

$$L_1 D_{yw} = [A_{22} + Z B_{22} + (A_{11} + Z B_{11}) A_{33}] D_{yw}. \quad (2.203)$$

Une solution  $Z$  vérifiant (2.202) est donnée par

$$Z = \bar{Z} (I - B_{33} D_{yw} (B_{33} D_{yw})^+)^+ \quad (2.204)$$

et les relations (2.199a), (2.199b) et (2.199c) deviennent respectivement

$$N = A_{11} + \bar{Z} \bar{B}_{11} \quad (2.205a)$$

$$J = A_{22} + \bar{Z} \bar{B}_{22} \quad (2.205b)$$

$$K = A_{33} + \bar{Z} \bar{B}_{33} \quad (2.205c)$$

où

$$\bar{B}_{11} = (I - B_{33} D_{yw} (B_{33} D_{yw})^+) B_{11} \quad (2.206a)$$

$$\bar{B}_{22} = (I - B_{33} D_{yw} (B_{33} D_{yw})^+) B_{22} \quad (2.206b)$$

$$\bar{B}_{33} = (I - B_{33} D_{yw} (B_{33} D_{yw})^+) B_{33} \quad (2.206c)$$

Par conséquent le système en boucle fermée (2.191) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K_1)x - B_u \varepsilon + (B_u A_{33} D_{yw} + B_w)w \\ \dot{\varepsilon} = N\varepsilon + \bar{B}_\varepsilon w \\ \dot{z} = (C_z + D_{zu} K_1)x - D_{zu} \varepsilon + (D_{zu} A_{33} D_{yw} + D_{zw})w. \end{cases} \quad (2.207)$$

avec

$$\bar{B}_\varepsilon = \bar{B}_{\varepsilon_1} - \bar{Z} \bar{B}_{\varepsilon_2} \quad (2.208)$$

où

$$\bar{B}_{\varepsilon_1} = [(K_1 - A_{33} C_y) B_w - (A_{22} + A_{11} A_{33}) D_{yw}] \quad (2.209a)$$

$$\bar{B}_{\varepsilon_2} = [\bar{B}_{33} C_y B_w + (\bar{B}_{22} + \bar{B}_{11} A_{33}) D_{yw}]. \quad (2.209b)$$

Rappelons que notre but est de synthétiser un filtre fonctionnel garantissant la propriété FTB- $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.138a). Cela équivaut à garantir que le système (2.207) est FTB- $\mathcal{H}_\infty$ . Le théorème qui suit donne des conditions suffisantes pour satisfaire la propriété de FTB- $\mathcal{H}_\infty$ .

### Théorème 2.5.3.

Le système (2.207) est FTB- $\mathcal{H}_\infty$  par rapport à  $(0, c_2, T_f, \tilde{R}, d, \gamma)$  si, étant donné  $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R_\varepsilon \end{pmatrix}$

$\tilde{Q}_1 = R^{\frac{1}{2}} Q_1 R^{\frac{1}{2}}$  et  $\tilde{Q}_2 = R_\varepsilon^{\frac{1}{2}} Q_2 R_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ , il existe deux matrices  $Q_1, Q_2$  symétriques et définies positives, une matrice  $Y$  et un réel  $\alpha \geq 0$  tels que

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ (*) & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ (*) & (*) & F_{33} & F_{34} \\ (*) & (*) & (*) & F_{44} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.210a)$$

$$d\gamma^2 < \lambda_{\min}(Q_1) c_2 \quad (2.210b)$$

$$d\gamma^2 < \lambda_{\min}(Q_2) c_2 \quad (2.210c)$$

avec

$$F_{11} = (A + B_u K_1)^T \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 (A + B_u K_1) - \alpha \tilde{Q}_1 \quad (2.211a)$$

$$F_{12} = -\tilde{Q}_1 B_u \quad (2.211b)$$

$$F_{13} = \tilde{Q}_1 (B_u A_{33} D_{yw} + B_w) \quad (2.211c)$$

$$F_{14} = (C_z + D_{zu} K_1)^T \quad (2.211d)$$

$$F_{22} = (A_{11}^T \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_2 A_{11}) + (Y \bar{B}_{11} + \bar{B}_{11}^T Y^T) - \alpha \tilde{Q}_2 \quad (2.211e)$$

$$F_{23} = \tilde{Q}_2 \bar{B}_{\varepsilon_1} - Y \bar{B}_{\varepsilon_2} \quad (2.211f)$$

$$F_{24} = -D_{zu}^T \quad (2.211g)$$

$$F_{33} = -\gamma^2 e^{-\alpha T_0} I \quad (2.211h)$$

$$F_{34} = (D_{zu} A_{33} D_{yw} + D_{zw})^T \quad (2.211i)$$

$$F_{44} = -I \quad (2.211j)$$



*Démonstration.*

Définissons le vecteur d'état augmenté  $\zeta = \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}$  et la matrice de Lyapunov  $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{pmatrix}$ . Ainsi la fonction de Lyapunov correspondante est la suivante

$$V(\zeta) = \zeta(t)^T \tilde{Q} \zeta = x(t)^T \tilde{Q}_1 x(t) + \varepsilon(t)^T \tilde{Q}_2^T \varepsilon(t) \quad (2.212)$$

Pour garantir la FTB- $\mathcal{H}_\infty$  par rapport à  $(0, c_2, T_f, \tilde{R}, d, \gamma)$  du système (2.207), nous essayons de vérifier les conditions suivantes

$$\dot{V} - \alpha V - \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w(t)^T w(t) + z(t)^T z(t) < 0 \quad (2.213a)$$

$$d\gamma^2 < \lambda_{\min}(Q_1)c_2 \quad (2.213b)$$

$$d\gamma^2 < \lambda_{\min}(Q_2)c_2. \quad (2.213c)$$

Après calcul, la condition (2.213a) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ (*) & R_{22} & R_{23} \\ (*) & (*) & R_{33} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.214)$$

avec

$$\begin{aligned} R_{11} &= (A + B_u K_1)^T \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 (A + B_u K_1) + (C_z + D_{zu} K_1)^T (C_z + D_{zu} K_1) - \alpha \tilde{Q}_1 \\ R_{12} &= -\tilde{Q}_1 B_u - (C_z + D_{zu} K_1)^T D_{zu} \\ R_{13} &= \tilde{Q}_1 (B A_{33} D_{yw} + B_w) + (C_z + D_{zu} K_1)^T (D_{zu} A_{33} D_{yw} + D_{zw}) \\ R_{22} &= N^T \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_2 N - \alpha \tilde{Q}_2 + D_{zu}^T D_{zu} \\ R_{23} &= \tilde{Q}_2 \bar{B}_\varepsilon - D_{zu}^T (D_{zu} A_{33} D_{yw} + D_{zw}) \\ R_{33} &= (D_{zu} A_{33} D_{yw} + D_{zw})^T (D_{zu} A_{33} D_{yw} + D_{zw}) - \gamma^2 e^{-\alpha T_f} I. \end{aligned}$$

En remplaçant  $N$  et  $\bar{B}_{\varepsilon_1}$  par respectivement leurs expressions (2.205a) et (2.208), en posant  $Y = \tilde{Q}_2 \bar{Z}$  dans (2.214), et en appliquant finalement le lemme de Schur, on obtient exactement (2.210a).

Remarquons maintenant que la condition (2.213a) implique nécessairement

$$\dot{V} - \alpha V - \gamma^2 e^{-\alpha T_f} w(t)^T w(t) < 0 \quad (2.215)$$

Multiplions (2.215) par  $e^{-\alpha t}$

$$e^{-\alpha t} \dot{V} - \alpha e^{-\alpha t} V < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} e^{-\alpha t} w(t)^T w(t) \quad (2.216)$$

qui peut s'écrire comme

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} V) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} e^{-\alpha t} w(t)^T w(t). \quad (2.217)$$

En intégrant de 0 à  $t$ , on obtient

$$e^{-\alpha t} V(\zeta(t)) - V(\zeta(0)) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} \int_0^t e^{-\alpha \tau} w(\tau)^T w(\tau) d\tau \quad (2.218)$$

Puisque  $\alpha \geq 0$ ,  $V(\zeta(0)) = 0$  et  $t \leq T_f$ , nous déduisons

$$\begin{aligned} V(\zeta(t)) &< \gamma^2 e^{-\alpha T_f} e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha \tau} w(\tau)^T w(\tau) d\tau \\ &< \gamma^2 d. \end{aligned} \quad (2.219)$$

Ainsi, comme  $V(\zeta(t)) \geq \lambda_{\min}(Q_1) x^T R x$ , par définition de  $V$  et du fait de (2.210b), nous déduisons

$$x(t)^T R x(t) < \frac{\gamma^2 d}{\lambda_{\min}(Q_1)} < c_2. \quad (2.220)$$

De même, du fait que  $V(\zeta(t)) \geq \lambda_{\min}(Q_2) \varepsilon^T R \varepsilon$  et du fait de la condition (2.210c), nous déduisons

$$\varepsilon(t)^T R \varepsilon(t) < \frac{\gamma^2 d}{\lambda_{\min}(Q_2)} < c_2. \quad (2.221)$$

Et donc le système (2.207) est FTB par rapport à  $(0, c_2, T_f, \tilde{R}, d)$ .

Maintenant, multiplions (2.213a) par  $e^{-\alpha t}$ , nous aurons

$$\frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} V) < e^{-\alpha t} [\gamma^2 e^{-\alpha T_f} w^T w - z^T z]. \quad (2.222)$$

Ensuite, en intégrant de 0 à  $T_f$ , nous obtenons

$$e^{-\alpha T_f} V(\zeta(T_f)) < \int_0^{T_f} e^{-\alpha \tau} [\gamma^2 e^{-\alpha T_f} w^T(\tau) w(\tau) - z^T(\tau) z(\tau)] d\tau \quad (2.223)$$

qui implique de fait que  $e^{-\alpha T_f} V(e(T_f)) > 0$ ,

$$\int_0^{T_f} e^{-\alpha \tau} z^T(\tau) z(\tau) < \gamma^2 e^{-\alpha T_f} \int_0^{T_f} e^{-\alpha \tau} w^T(\tau) w(\tau) d\tau. \quad (2.224)$$

Comme  $e^{-\alpha T_f} \leq e^{-\alpha \tau} \leq 1$  pour tout  $\tau \in [0, T_f]$ , alors le critère  $\mathcal{H}_\infty$  (2.2) est déduit i.e.

$$\int_0^{T_f} z^T(\tau) z(\tau) < \gamma^2 \int_0^{T_f} w^T(\tau) w(\tau) d\tau. \quad (2.225)$$

Ce qui finit la démonstration •

Notons que les deux conditions (2.210b) et (2.210c) du théorème sont satisfaites en imposant les inégalités suivantes

$$Q_1 > I \quad (2.226a)$$

$$Q_2 > I \quad (2.226b)$$

$$c_2 - d\gamma^2 > 0 \quad (2.226c)$$

En conclusion, la synthèse d'une commande  $\mathcal{H}_\infty$  en temps fini basée sur un observateur  $\mathcal{H}_\infty$  en temps fini sans la contrainte  $KD_{yw} = 0$  se réalise grâce à l'algorithme suivant

#### Algorithme 2.5.2.

- (i) Fixer les valeurs  $c_2$ ,  $T_f$ ,  $d$ ,  $R$  et  $\gamma$ , conformément aux données physiques du problème (les valeurs non imposées par le problème pourront être optimisées).

- (ii) Fixer  $\alpha > 0$  et résoudre les LMIs (2.139a), (2.144a) et (2.144b) pour obtenir le gain  $K_1 = L\tilde{Q}^{-1}$ .
- (iii) Pour les paramètres  $c_2$ ,  $T_f$ ,  $d$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\gamma$  et  $K_1$ , résoudre les LMIs (2.169a), (2.226a), (2.226b) et (2.226c).
- (iv) Calculer  $\bar{Z} = \tilde{Q}_2^{-1}Y$ .
- (v) Les matrices du contrôleur basé observateur  $N$ ,  $L_1$ ,  $G$  et  $K$  sont calculées grâce aux équations (2.205a), (2.205b), (2.193), (2.190b) et (2.205c).

#### 2.5.4 Exemple numérique

Reprenons l'exemple (2.131) et résolvons le problème de synthèse de la commande FTB- $\mathcal{H}_\infty$  via un observateur FTB- $\mathcal{H}_\infty$ .

Pour les paramètres ( $c_1 = 0$ ,  $R = I$ ,  $d = 1$ ,  $T_f = 2$ ), les conditions des théorèmes 2.5.2 et 2.5.3 ne sont pas faisables. En effet, les conditions de synthèse avec un correcteur par retour de sortie dynamique sont généralement moins restrictives, car la synthèse d'une commande via un filtre fonctionnel revient à estimer la commande  $u$  avec un filtre d'ordre réduit.

Choisissons alors les nouveaux paramètres suivants ( $c_1 = 0$ ,  $R = I$ ,  $d = 1$ ,  $T_f = 1$ ) et commençons par déterminer le gain de la commande qui vérifie ce problème d'optimisation

$$\begin{aligned} & \underset{\gamma > 0, c_2 > 0}{\text{minimiser}} && \gamma + c_2 \\ & \text{sous les contraintes} && (2.139a), (2.144a) \text{ et } (2.144b). \end{aligned} \tag{2.227}$$

Après résolution, on obtient  $\gamma = 0.4936$ ,  $c_2 = 0.2437$  et le gain  $K_1 = \begin{pmatrix} -2.8303 & -1.5008 \end{pmatrix}$ . Passons à l'étape iii de l'algorithme 2.5.1 et résolvons le problème de faisabilité donné par les conditions à vérifier (2.169a), (2.185a), (2.185b) et (2.185c) pour les valeurs de  $\gamma$ ,  $c_2$  et  $K_1$  trouvées dans l'étape ii et  $R_e = 1$ . Le problème est trouvé non faisable.

Passons donc à l'étape iii de l'algorithme 2.5.2 et résolvons le problème de faisabilité donné par les conditions à vérifier (2.169a), (2.226a), (2.226b) et (2.226c). Pour les valeurs de  $\gamma$ ,  $c_2$  et  $K_1$  trouvées dans l'étape ii et  $R_e = 1$ . On obtient alors les valeurs suivantes

$$Y = \begin{pmatrix} 2.5602 & 1.5602 & 1.5602 \end{pmatrix}, \bar{Z} = \begin{pmatrix} 1.5061 & 0.9178 & 0.9178 \end{pmatrix} \tag{2.228}$$

$$N = 0.0686, J = 0.2990, K = -0.4228 \tag{2.229}$$

$$L_1 = 0.27, G = 1.3979 \tag{2.230}$$

Les conditions de synthèse d'une commande basée observateur sans la contrainte  $KD_{yw} = 0$  sont donc moins conservatives que celles avec  $KD_{yw} = 0$ .

On constate sur la figure 2.4 la validité du correcteur synthétisé.

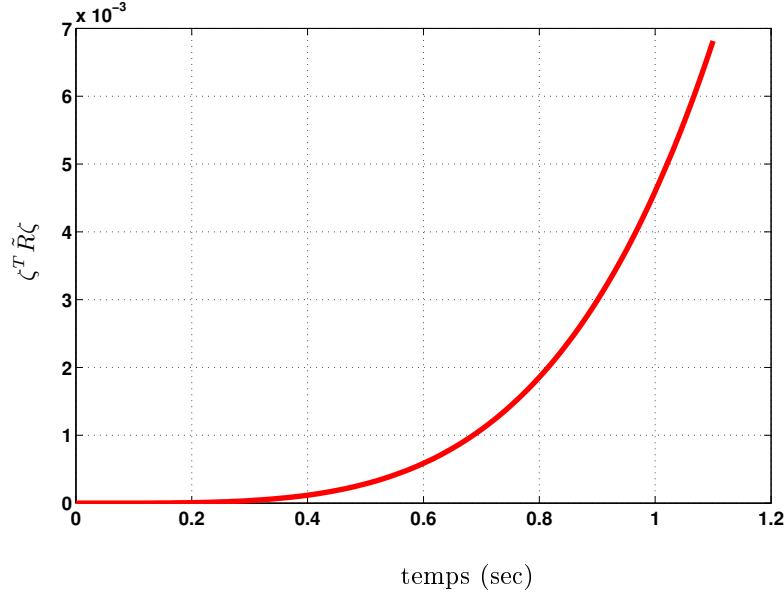


FIGURE 2.4 – Norme pondérée de la réponse du système en boucle fermée (2.131)

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, trois problèmes liés à la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires invariants perturbés ont été abordés. Dans un premier temps, le problème de synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique a été résolu par l'approche descripteur. Les résultats obtenus sont exprimés en termes de LMIs. Ces résultats ont été testés sur un exemple numérique. Dans un deuxième temps, le problème de synthèse d'un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB par retour de sortie dynamique a été abordé. Ce problème a été résolu par deux méthodes. La première méthode est une extension de la méthode de Borges, la deuxième méthode est basée sur l'approche descripteur. Un exemple numérique révèle que l'approche descripteur est moins pessimiste. Dans un troisième temps, le problème de synthèse d'une commande basée observateur assurant la stabilisation en temps fini avec  $\mathcal{H}_\infty$  bornitude en temps fini a été considéré. Les résultats obtenus sont des LMIs. Un exemple numérique atteste la validité de ces résultats.

## Chapitre 3

# Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques via des fonctions de Lyapunov quadratiques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>3.2</b>	<b>Préliminaires et définitions . . . . .</b>	<b>72</b>
3.2.1	Représentations des systèmes non linéaires quadratiques . . . . .	72
3.2.1.1	Première représentation . . . . .	72
3.2.1.2	Deuxième représentation . . . . .	72
3.2.1.3	Troisième représentation . . . . .	73
3.2.1.4	Exemples numériques . . . . .	74
3.2.1.4.1	Exemple 1 . . . . .	74
3.2.1.4.2	Exemple 2 . . . . .	75
3.2.1.4.3	Exemple 3 . . . . .	75
3.2.2	Représentations des systèmes non linéaires quadratiques perturbés . . .	75
3.2.2.1	Première représentation . . . . .	76
3.2.2.2	Deuxième représentation . . . . .	76
3.2.2.3	Troisième représentation . . . . .	76
3.2.3	Définitions de la stabilité en temps fini avec des domaines polytopiques	77
3.2.3.1	Représentations d'un polytope . . . . .	77
3.2.3.2	Définitions de la stabilité en temps fini . . . . .	78
<b>3.3</b>	<b>Etude de la stabilité et stabilisation en temps fini par des fonctions de Lyapunov quadratiques . . . . .</b>	<b>79</b>
3.3.1	Conditions de stabilité en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques . . . . .	79
3.3.2	Conditions de la bornitude en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques . . . . .	82
3.3.3	Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques . . . . .	87
3.3.4	Stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini des systèmes quadratiques . . . . .	90
3.3.5	Exemples numériques . . . . .	94
<b>3.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>100</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, différents lemmes et théorèmes concernant la stabilité en temps fini et la bornitude en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques seront présentés. Dans un premier temps, trois différentes représentations des systèmes quadratiques seront introduites. Ces représentations sont largement utilisées dans la littérature, voir entre autres [ACM10, Cd12, Cd11, VTG10]. Nous montrerons comment passer d'une représentation à une autre. Dans un deuxième temps, nous présenterons plusieurs notions utiles tels les ensembles convexes, les enveloppes convexes, les polyèdres et les polytopes. Ensuite, nous donnons la définition de la stabilité en temps fini par rapport à des ensembles polytopiques ainsi que son extension au cas de la bornitude en temps fini. Puis nous énonçons deux lemmes qui assurent la stabilité en temps fini et la bornitude en temps fini par rapport à deux ensembles polytopiques des systèmes dynamiques. Ces deux lemmes servent à la démonstration de tous les résultats de ce chapitre. Une grande partie de ce chapitre sera dédiée à l'étude de la stabilité en temps fini ainsi qu'à la stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques. La nouveauté principale dans ce contexte est l'utilisation des annulateurs [Cd12] et d'une version du lemme de Finsler. Nous montrerons que les conditions suffisantes de FTS obtenues sont moins restrictives que celles de la littérature. Nous finissons le chapitre par une section dédiée à des exemples numériques illustrant la validité de nos approches. En plus, ces exemples numériques montrent que les nouvelles approches développées dans ce chapitre sont moins pessimistes que celles existant dans la littérature.

### 3.2 Préliminaires et définitions

#### 3.2.1 Représentations des systèmes non linéaires quadratiques

Dans la littérature, un système non linéaire quadratique peut être décrit par plusieurs représentations [ACM10, Cd12, Cd11, VTG10].

##### 3.2.1.1 Première représentation

Un système non linéaire quadratique peut être présenté comme suit [ACM10] :

$$\dot{x} = A_0x + A_q(x) \quad (3.1)$$

où :  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $A_0$  est la matrice associée à la partie linéaire du système dynamique et  $A_q(x)$  est la partie non linéaire du même système dynamique donné par

$$A_q(x) = \begin{pmatrix} x^T A_{q1} x \\ x^T A_{q2} x \\ \vdots \\ x^T A_{qn} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^T A_{q1} \\ x^T A_{q2} \\ \vdots \\ x^T A_{qn} \end{pmatrix} x \quad (3.2)$$

avec  $A_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

##### 3.2.1.2 Deuxième représentation

Le même système non linéaire peut s'écrire comme suit [Cd11] :

$$\dot{x} = A(x)x \quad (3.3)$$

où  $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice affine en  $x$ , donnée par :

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i \quad (3.4)$$

avec :  $A_i$  sont des matrices réels constantes, et  $x_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur d'état  $x$ .

La deuxième représentation peut être déduite de la première représentation. En effet chaque matrice  $A_i$  se déduit des matrices  $A_{q1}, A_{q2} \dots A_{qn}$  comme suit

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{q1(i)} \\ A_{q2(i)} \\ \vdots \\ A_{qn(i)} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où  $A_{qj(i)}$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A_{qj}$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

Réciproquement, chaque matrice  $A_{qi}$  peut être déduite des matrices  $A_1, A_2, \dots, A_n$  comme suit

$$A_{qi} = \begin{pmatrix} A_{1(i)} \\ A_{2(i)} \\ \vdots \\ A_{n(i)} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

où  $A_{j(i)}$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A_j$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

### 3.2.1.3 Troisième représentation

Une autre représentation intéressante consiste en l'écriture suivante [VTG10]

$$\dot{x} = A_0 x + \mathcal{A}_q \mathcal{X} x \quad (3.7)$$

avec  $\mathcal{A}_q \in \mathbb{R}^{n \times n^2}$  et  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n}$ . Les matrices  $\mathcal{A}_q$  et  $\mathcal{X}$  sont telles que

$$\mathcal{A}_q = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{q1} \\ \mathcal{A}_{q2} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{qn} \end{pmatrix} \quad (3.8a)$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x(t) \end{pmatrix} \quad (3.8b)$$

où  $\mathcal{A}_q \in \mathbb{R}^{n \times n^2}$ . Chaque sous matrice  $\mathcal{A}_{qi}$  peut se représenter comme suit

$$\mathcal{A}_{qi} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{qi1} & \mathcal{A}_{qi2} & \cdots & \mathcal{A}_{qin} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

avec  $\mathcal{A}_{qij} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , pour  $j = 1, \dots, n$ . La matrice  $\mathcal{X}$  peut s'écrire sous la forme du produit de Kronecker :

$$\mathcal{X} = (I_n \otimes x(t)) \quad (3.10)$$

La troisième représentation peut être déduite de la première représentation. En effet, chaque matrice  $\mathcal{A}_{qi}$  se déduit de la matrice  $A_{qi}$  comme suit

$$\mathcal{A}_{qi} = \begin{pmatrix} A_{qi(1)} & A_{qi(2)} & \dots & A_{qi(n)} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Ainsi la matrice  $\mathcal{A}_q$  s'écrit comme suit

$$\mathcal{A}_q = \begin{pmatrix} A_{q1(1)} & A_{q1(2)} & \dots & A_{q1(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{qn(1)} & A_{qn(2)} & \dots & A_{qn(n)} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Réciproquement, la première représentation se déduit de la troisième représentation comme suit

$$A_{qi} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{qi1} \\ \mathcal{A}_{qi2} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{qin} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

où  $\mathcal{A}_{qij}$  est définie en (3.9).

Remarquons aussi que la troisième représentation peut être déduite de la deuxième représentation. En effet, chaque matrice  $\mathcal{A}_{qi}$  se déduit des matrices  $A_1, A_2, \dots, A_n$  comme suit

$$\mathcal{A}_{qi} = \begin{pmatrix} A_{1(i)} & A_{2(i)} & \dots & A_{n(i)} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

où  $A_{j(i)}$  présente la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A_j$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Réciproquement,  $A_i$  se déduit facilement des matrices  $\mathcal{A}_{q1}, \mathcal{A}_{q2}, \dots, \mathcal{A}_{qn}$  comme suit

$$A_i = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{q1i} \\ \mathcal{A}_{q2i} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{qni} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.2.1.4 Exemples numériques

**3.2.1.4.1 Exemple 1** Considérons le système quadratique décrit par la première (3.1) avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{q1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix}, A_{q2} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Utilisant l'équation (3.5), ce système peut également être décrit par la représentation (3.3) où les matrices  $A_1$  et  $A_2$  seront comme suit

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{q1(1)} \\ A_{q2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} A_{q1(2)} \\ A_{q2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$



La troisième représentation (3.7) de ce système se déduit de l'équation (3.11) comme suit

$$\mathcal{A}_{q1} = \begin{pmatrix} A_{q1(1)} & A_{q1(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{q2} = \begin{pmatrix} A_{q2(1)} & A_{q2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

d'où

$$\mathcal{A}_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

**3.2.1.4.2 Exemple 2** Considérons un système quadratique décrit par la deuxième représentation (3.3) et (3.4) avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Utilisant l'équation (3.6), la première représentation est déduite avec

$$A_{q1} = \begin{pmatrix} A_{1(1)} \\ A_{2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 2 \\ 0.1 & 3 \end{pmatrix}, A_{q2} = \begin{pmatrix} A_{1(2)} \\ A_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

De même pour la troisième représentation, on obtient

$$\mathcal{A}_{q1} = \begin{pmatrix} A_{1(1)} & A_{2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 2 & 0.1 & 3 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{q2} = \begin{pmatrix} A_{1(2)} & A_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

conduisant à la matrice  $\mathcal{A}_q$  suivante

$$\mathcal{A}_q = \begin{pmatrix} 0.6 & 2 & 0.1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

**3.2.1.4.3 Exemple 3** Considérons un système quadratique décrit par la troisième représentation comme suit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_q = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

En suivant (3.13), la première représentation est déduite comme suit

$$A_{q1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{q11} \\ \mathcal{A}_{q12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{q2} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{q21} \\ \mathcal{A}_{q22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Et la deuxième à partir (3.15) comme suit

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{q11} \\ \mathcal{A}_{q21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ -0.25 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{q12} \\ \mathcal{A}_{q22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

## 3.2.2 Représentations des systèmes non linéaires quadratiques perturbés

Dans le cas où le système est soumis à une perturbation  $w(t) \in \mathbb{R}^\ell$ , on peut déduire trois représentations différentes comme dans le cas des systèmes non linéaires quadratiques non perturbés.

### 3.2.2.1 Première représentation

Un système non linéaire quadratique perturbé peut être présenté comme suit

$$\dot{x} = A_0x + A_q(x) + E_0w + E_q(x)w \quad (3.27)$$

où :  $w \in \mathbb{R}^\ell$  est la perturbation extérieure,  $E_0 \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  et la matrice  $E_q(x)$  est donnée par

$$E_q(x) = \begin{pmatrix} x^T E_{q1} \\ x^T E_{q2} \\ \vdots \\ x^T E_{qn} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

avec  $E_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times \ell}, i = 1, \dots, n$ .

### 3.2.2.2 Deuxième représentation

Le même système perturbé peut s'écrire comme suit [Cd11]

$$\dot{x} = A(x)x + E(x)w \quad (3.29)$$

où  $E(x) \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  est une matrice affine en  $x$ , donnée par

$$E(x) = E_0 + \sum_{i=1}^n x_i E_i \quad (3.30)$$

avec :  $E_i$  sont des matrices réelles constantes.

### 3.2.2.3 Troisième représentation

Une autre représentation intéressante consiste en l'écriture suivante [VTG10]

$$\dot{x} = A_0x + \mathcal{A}_q \mathcal{X}x + E_0w + \mathcal{E}_q \mathcal{X}_1 w \quad (3.31)$$

avec  $\mathcal{E}_q \in \mathbb{R}^{n \times (\ell \times n)}$  et  $\mathcal{X}_1 \in \mathbb{R}^{(\ell \times n) \times \ell}$ . Les matrices  $\mathcal{E}_q$  et  $\mathcal{X}_1$  sont telles que

$$\mathcal{E}_q = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{q1} \\ \mathcal{E}_{q2} \\ \vdots \\ \mathcal{E}_{qn} \end{pmatrix} \quad (3.32a)$$

$$\mathcal{X}_1 = \begin{pmatrix} x(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x(t) \end{pmatrix} \quad (3.32b)$$

Chaque sous matrice  $\mathcal{E}_{qi}$  peut se représenter comme suit

$$\mathcal{E}_{qi} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{qi1} & \mathcal{E}_{qi2} & \cdots & \mathcal{E}_{qin} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

avec  $\mathcal{E}_{qij} \in \mathbb{R}^{1 \times \ell}$ , pour  $j = 1, \dots, n$ .

On passe d'une représentation à une autre de la même façon que la sous section 3.2.2. Ainsi, on calcule les matrices  $E_q(x)$ ,  $E(x)$  et  $\mathcal{E}_q$  de la même façon que les matrices  $A_q(x)$ ,  $A(x)$  et  $\mathcal{A}_q$ . Pour plus de détails, veuillez consulter la sous section 3.2.1.

### 3.2.3 Définitions de la stabilité en temps fini avec des domaines polytopiques

#### 3.2.3.1 Représentations d'un polytope

La stabilité en temps fini a été définie par rapport à deux ensembles fermés et bornés. Cependant, pour avoir des conditions constructives d'analyse de la stabilité en temps fini, les premiers ensembles considérés étaient des ensembles ellipsoïdaux [AAA<sup>+</sup>14] dans le cas des systèmes linéaires invariants. La considération des ensembles ellipsoïdaux permet de dériver des conditions sous formes de LMIs dans le cas des systèmes linéaires invariants [AAD99b, AAC06a]. Cependant, dans des situations pratiques [AAC07, AAC10], il a été montré que l'utilisation de tels ensembles conduit à des résultats pessimistes. Cette constatation conduit à adopter des ensembles polyédriques [AAC07, AAC10]. En effet, lorsque les variables d'état  $x_i$  sont contraintes d'être dans un intervalle donné  $[a_i, b_i]$ , l'utilisation de domaines polytopiques s'avère plus pratique [AAC10]. Pour l'étude de la stabilité en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques, la considération des ensembles polyédriques s'avère judicieux [ACM10]. En effet, la représentation (3.4) d'un système non linéaire quadratique est très semblable à la définition (3.36) d'un polyèdre. De plus, un polytope est aussi un domaine convexe [BV04], [Zie12]. Rappelons qu'un ensemble convexe est une condition nécessaire pour définir un problème d'optimisation convexe [Sco14], tel que des inégalités matricielles linéaires (LMIs).

Dans la suite, nous rappelons les définitions d'un ensemble convexe, d'une enveloppe convexe, d'un polytope, d'un polyèdre et les relations qui existent entre ces différents ensembles.

**Définition 3.2.1** (ensemble convexe). [BV04, Zie12]

Un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit convexe s'il contient tout segment passant par deux de ses points. Cela est mathématiquement équivalent à

$$S = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid x, y \in S, \lambda \in [0; 1]\} \quad (3.34)$$

**Définition 3.2.2** (enveloppe convexe).

L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  est l'intersection de tous les ensembles convexes de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $S$ . L'enveloppe convexe de  $S$  est par conséquent le plus petit sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$  qui contienne  $S$ , on le note  $\text{conv}(S)$  [BV04, Zie12].

**Proposition 3.2.1.** [Zie12]

$\text{conv}(S)$  est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de  $S$ . Cela est mathématiquement équivalent à

$$\text{conv}\{S\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, x_i \in S, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}. \quad (3.35)$$

**Définition 3.2.3** (Polytope).

Un polytope  $\mathcal{P}_i$  dans  $\mathbb{R}^n$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de  $\mathbb{R}^n$  [BV04, Zie12]. On le note comme suit [ACM10]

$$\mathcal{P}_i = \text{conv} \left\{ x_{\mathcal{P}_i}^{(1)}, x_{\mathcal{P}_i}^{(2)}, \dots, x_{\mathcal{P}_i}^{(n)} \right\} \quad (3.36)$$

**Définition 3.2.4** (Polyèdre). [BV04, Zie12]

Un polyèdre dans  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble de la forme

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}, \quad (3.37)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , et  $b \in \mathbb{R}^m$  sont fixés. On précise que  $Ax$  et  $b$  sont des vecteurs.

Autrement dit, un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est un polyèdre si et seulement si c'est une intersection finie de demi-espaces fermés de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier, tout polyèdre dans  $\mathbb{R}^n$  est un convexe fermé [BV04, Zie12].

**Proposition 3.2.2.**

Tout polyèdre borné  $\mathcal{P}_i$  dans  $\mathbb{R}^n$  est un polytope. Un polytope contenant 0 peut s'écrire comme suit [ACM10]

$$\mathcal{P}_i = \{x \in \mathbb{R}^n : a_{k_i}^T x \leq 1, k_i = 1, 2, \dots, q\} \quad (3.38)$$

Dans la suite, nous donnons la définition de la stabilité en temps fini par rapport à des domaines polytopiques. Ensuite nous étendrons cette définition au cas d'un système perturbé.

### 3.2.3.2 Définitions de la stabilité en temps fini

La première définition de la stabilité en temps fini par rapport à des polytopes a été donnée par Amato *et al.* [ACM10] pour étudier la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques.

**Définition 3.2.5** (stabilité en temps fini). [ACM10]

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$  et un scalaire positif  $T_f$ , le système (3.1) est dit stable en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f)$  si

$$x(0) \in \mathcal{P}_0 \Rightarrow x(t) \in \mathcal{P}_1, \forall t \in [0, T_f]. \quad (3.39)$$

Lorsque le système (3.1) est soumis à des perturbations extérieures appartenant à un ensemble défini  $\mathcal{W}$ , on parle la bornitude en temps fini. L'ensemble des perturbations extérieures peut être l'ensemble (1.46) ou (1.47) ou tout autre ensemble.

**Définition 3.2.6** (bornitude en temps fini).

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ , l'ensemble  $\mathcal{W}_d^2$  et un scalaire positif  $T_f$ , le système (3.27) est dit borné en temps fini (FTB) par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$  si

$$x(0) \in \mathcal{P}_0 \Rightarrow x(t) \in \mathcal{P}_1, \forall t \in [0, T_f], \forall w(t) \in \mathcal{W}_d^2. \quad (3.40)$$

Notons que la bornitude en temps fini implique la stabilité en temps fini.

Dans la prochaine section, nous proposons de nouvelles conditions de stabilité en temps fini et de bornitude en temps fini. De même, de nouvelles conditions de stabilisation en temps fini avec et sans bornitude en temps fini seront proposées. Toutes les nouvelles conditions seront validées par deux exemples numériques. Les simulations numériques montrent que nos approches sont moins pessimistes que celle de [ACM10].

### 3.3 Etude de la stabilité et stabilisation en temps fini par des fonctions de Lyapunov quadratiques

Dans cette section, dans un premier temps, nous développons des conditions suffisantes pour l'analyse de la stabilité en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques via l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques. Ces conditions sont converties en termes de conditions LMIs. Ensuite, une prolongation de ces résultats dans le cas des systèmes quadratiques non linéaires perturbés est faite. Nous proposons ainsi de nouvelles conditions exprimées en termes des LMIs pour l'étude de la bornitude en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques. Dans un deuxième temps, et dans le cas des systèmes non linéaires quadratiques avec une entrée de commande, nous synthétisons des correcteurs par retour d'état non linéaire permettant de stabiliser en temps fini. Les conditions de synthèse sont aussi exprimées sous forme de LMIs.

#### 3.3.1 Conditions de stabilité en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques

D'abord, nous présentons un lemme qui garantit la stabilité en temps fini par rapport à des ensembles polytopiques de tout système dynamique, que ce soit linéaire ou non linéaire. Ce lemme est déduit du lemme assurant la bornitude en temps fini [BDZA17b].

**Lemme 3.3.1** (stabilité en temps fini).

*Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0$ ,  $\mathcal{P}_1$ , et un réel positif  $T_f$ , le système (3.1) est FTS par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f)$  s'il existe un scalaire positif  $\alpha$ , une fonction différentiable définie positive  $V : \mathcal{P}_1 \mapsto \mathbb{R}^+$ , tels que*

$$V(x(0))e^{\alpha T_f} < 1, \quad (3.41a)$$

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}_1 \quad (3.41b)$$

$$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{P}_1 \quad (3.41c)$$

$$\dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) < 0, \forall x \in \mathcal{P}_1, \quad (3.41d)$$

où  $\mathcal{E}_1$  est un ensemble défini par

$$\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\}. \quad (3.42)$$

*Démonstration.*

Dans la suite, nous montrerons que toute trajectoire commençant dans le polytope  $\mathcal{P}_0$  ne sort pas de l'ensemble  $\mathcal{E}_1$ , pour  $t \leq T_f$ . Pour cela, nous allons argumenter par contradiction comme dans [ACM10].

Supposons qu'il existe un instant  $t_1$  tel que  $0 < t_1 < T_f$  et que  $x(t_1)$  soit dans la frontière de  $\mathcal{E}_1$ . Sachant que  $x(0) \in \mathcal{P}_0$ ,  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}_1$  (condition (3.41b)) et que les trajectoires d'état sont continues par rapport au temps, nous pouvons toujours trouver un instant  $t_2$  avec  $0 < t_2 \leq t_1$ , tel que

$$V(x(t_2)) = 1 \quad (3.43)$$

et  $x(t) \in \mathcal{E}_1$ , pour tout  $t \in [0, t_2]$ .

De la condition (3.41c) et de l'inégalité (3.41d), on déduit

$$\dot{V}(x(t)) < \alpha V(x(t)), \forall t \in [0, t_2]. \quad (3.44)$$

En multipliant (3.44) par  $e^{-\alpha t}$ , nous obtenons

$$e^{-\alpha t} \dot{V}(x(t)) - e^{-\alpha t} \alpha V(x(t)) < 0 \quad (3.45)$$

et donc

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} V(x(t))) < 0. \quad (3.46)$$

Si on intègre de 0 à  $t$ , nous obtenons  $\forall t \in [0, t_2]$

$$e^{-\alpha t} V(x(t)) - V(x(0)) < 0. \quad (3.47)$$

Puisque  $\alpha > 0$ , on aura  $0 < e^{-\alpha t} < 1$ , et les inégalités précédentes conduisent à

$$V(x) < (V(x(0)))e^{\alpha t}. \quad (3.48)$$

Notons que, si l'inégalité (3.41a) est valable pour un  $T_f > 0$  donné, alors elle est satisfaite  $\forall t \in [0, T_f]$ . Compte tenu de (3.41d), l'inégalité (3.48) implique

$$V(x(t_2)) < 1, \quad (3.49)$$

ce qui contredit (3.43).

Alors, un instant  $t_1$  tel que  $t_1 < T_f$  et  $x(t_1) \in \partial \mathcal{E}_1$  n'existe pas. Donc toute trajectoire issue de  $x(0)$  commençant dans  $\mathcal{P}_0$  ne sort pas de  $\mathcal{E}_1$ ,  $\forall t \in [0, T_f]$ ,  $\forall w(t) \in \mathcal{W}_d^2$ . CQFD. •

Les conditions du lemme 3.3.1 ne sont pas explicites. Ce lemme sera très utile pour démontrer les théorèmes de stabilité et de stabilisation en temps fini qui seront énoncés dans la suite.

Maintenant, nous énonçons un nouveau théorème garantissant la stabilité en temps fini d'un système quadratique. Les outils de base pour avoir des conditions exprimées en termes de LMIs sont la notion d'annulateur et le lemme de Finsler (voir annexe A).

**Théorème 3.3.1** (Stabilité en temps fini).

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ , et un réel positif  $T_f$ , le système (3.1) est stable en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f)$ , s'il existe un réel  $\alpha \geq 0$ , une matrice symétrique définie positive  $P_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $L$  de dimension appropriée, tels que

$$\left( \lambda_{\max}(P_x) \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 \right) e^{\alpha T_f} \leq 1, \quad (3.50a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{k_1}^T \\ a_{k_1} & P_x \end{pmatrix} \geq 0, k_1 = 1, 2, \dots, q, \quad (3.50b)$$

$$\Phi(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + L\mathcal{N}(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + \mathcal{N}^T(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)})L^T < 0, i = 1, 2, \dots, p, \quad (3.50c)$$

où

$$\Phi(x) = [A_0^T + \begin{pmatrix} A_{11}^T x & \dots & A_{nn}^T x \end{pmatrix}] P_x + P_x [A_0 + \begin{pmatrix} x^T A_{11} \\ \vdots \\ x^T A_{nn} \end{pmatrix}] - \alpha P_x \quad (3.51)$$

et  $\mathcal{N}(x)$  est un annulateur linéaire du vecteur  $x$

$$\mathcal{N}(x) = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_n & -x_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

*Démonstration.*

D'abord, définissons la fonction de Lyapunov quadratique  $V(x)$

$$V(x) = x^T P_x x \quad (3.53)$$

et l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(P_x, 1)$  associé à  $V(x)$

$$\mathcal{E}(P_x, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_x x \leq 1\}. \quad (3.54)$$

Par le lemme de Schur, les inégalités (3.50b) sont équivalentes à

$$a_{k_1}^T P_x^{-1} a_{k_1} \leq 1, k_1 = 1, 2, \dots, q. \quad (3.55)$$

De [BEFB94, chapitre 5], nous déduisons que les inégalités (3.55) garantissent que

$$\mathcal{E}(P_x, 1) \subset \mathcal{P}_1. \quad (3.56)$$

En utilisant (3.50a), nous obtenons ( $i = 1, \dots, p$ )

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{P}_0}^{(i)T} P_x x_{\mathcal{P}_0}^{(i)} &\leq \lambda_{\max}(P_x) \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 \\ &\leq \lambda_{\max}(P_x) \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 \\ &\leq \left( \lambda_{\max}(P_x) \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 \right) e^{\alpha T_f} \\ &\leq 1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

et donc l'inégalité (3.57) satisfait

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}(P_x, 1). \quad (3.58)$$

Dans la suite, nous montrons que la condition (3.50c) est équivalente à

$$\dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) < 0, \quad (3.59)$$

où  $\dot{V}(x(t))$  est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T P_x x + x^T P_x \dot{x} \\ &= (A_0 x + A_q(x) x)^T P_x x + x^T P_x (A_0 x + A_q(x) x) \\ &= x^T [A_0^T P_x + P_x A_0 + A_q^T(x) P_x + P_x A_q(x)] x. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Donc, du fait de l'expression (3.2) de  $A_q(x)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) &= x^T [A_0^T P_x + P_x A_0 - \alpha P_x + A_q^T(x) P_x + P_x A_q(x)] x \\ &= x^T \Phi(x) x. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Et par conséquent l'inégalité (3.41d) est équivalente à

$$x^T \Phi(x) x < 0, \forall x \in \mathcal{P}_1. \quad (3.62)$$

Dans l'inégalité (3.62), la matrice  $\Phi(x)$  dépend aussi du vecteur  $x$ . La condition  $\Phi(x) < 0$  utilisée en [ACM10] pour garantir (3.62) est pessimiste puisque elle est équivalente à

$$y^T \Phi(x) y < 0 \quad (3.63)$$

pour tout  $y$  et pas seulement pour le cas  $y = x$ , correspondant exactement à (3.62). Ainsi, pour réduire ce conservatisme, nous proposons d'utiliser une technique basée sur les annulateurs et le lemme de Finsler [TD14], utilisée pour la première fois dans [BDZA16] dans un contexte de stabilité en temps fini.

Définissons la matrice dépendante de l'état  $\mathcal{N}(x)$  (3.52).

Il est facile de remarquer que  $\mathcal{N}(x)$  est un annulateur linéaire du vecteur  $x$  qui vérifie

$$\mathcal{N}(x)x = 0. \quad (3.64)$$

Appliquons le lemme de Finsler [BEFB94] : l'inégalité (3.62) est garantie, s'il existe une matrice  $L$  de dimension appropriée telle que

$$\Phi(x) + L\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}^T(x)L^T < 0, \forall x \in \mathcal{P}_1. \quad (3.65)$$

Du fait que l'inégalité (3.65) est affine par rapport aux variables  $x_1, \dots, x_n$  et que le polytope  $\mathcal{P}_1$  est convexe, alors elle est vérifiée pour tout  $x \in \mathcal{P}_1$  si les LMIs (3.50c) sont vérifiées. En conclusion, nous déduisons que l'ensemble des LMIs dans (3.50c) impliquent l'inégalité suivante

$$\dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) - w^T(t)P_w w(t) < 0, \forall x(t) \in \mathcal{P}_1, \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}_d^2 \quad (3.66)$$

Par ailleurs, comme  $\alpha \geq 0$ , nous avons  $0 < e^{-\alpha\tau} \leq 1$ , et comme nous avons (3.82), nous obtenons

$$\begin{aligned} (V(x(0))) e^{\alpha t} &\leq e^{\alpha t} (x^T(0)P_x x(0)) \\ &\leq e^{\alpha t} \left( \lambda_{\max}(P_x) \|x(0)\|^2 \right) \\ &< \left( \lambda_{\max}(P_x) \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 \right) e^{\alpha T_f} \\ &< 1. \end{aligned} \quad (3.67)$$

En conclusion, du fait des conditions (3.56), (3.58), (3.66), (3.67) et du lemme 3.3.1, nous déduisons que les conditions du théorème 3.3.1 assurent que le système (3.1) est FTS par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f)$ . Ce qui finit la démonstration.  $\bullet$

Le théorème 3.3.1 apporte une amélioration à la condition 4d du théorème 1 dans [ACM10]. En effet la condition (3.50c) est moins conservative que la condition 4d du théorème 1 dans [ACM10], puisqu'elle tient compte du fait que  $\Phi(x)$  dans (3.62) dépend de  $x$ . Ceci sera confirmé par des exemples numériques.

### 3.3.2 Conditions de la bornitude en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques

Lorsque le système dynamique est soumis à des perturbations extérieures, on étudie la bornitude en temps fini du système considéré. En effet, l'étude de la bornitude en temps fini revient à garantir que le système quadratique est stable en temps fini par rapport à deux polytopes et en présence des perturbations extérieures appartenant à une classe bien définie de perturbations. Dans ce qui suit, nous énonçons un lemme qui garantit la bornitude en temps fini d'un système non linéaire quadratique pour la classe  $\mathcal{W}_d^2$  des perturbations. Notons toutefois que le lemme reste valable pour n'importe quel type de système dynamique.

Le lemme suivant est extension du lemme 3.3.1 au cas d'un système quadratique perturbé. La démonstration est également similaire.



**Lemme 3.3.2** (bornitude en temps fini). [BDZA17b]

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ , l'ensemble de perturbations  $\mathcal{W}_d^2$  (1.46) et un réel positif  $T_f$ , le système (3.27) est FTB par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$  s'il existe un réel positif  $\alpha$ , une matrice symétrique définie positive  $P_w \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$  et une fonction différentiable définie positive  $V : \mathcal{P}_1 \mapsto \mathbb{R}^+$ , tels que

$$\left( V(x(0)) + \int_0^{T_f} e^{-\alpha\tau} w^T(\tau) P_w w(\tau) d\tau \right) e^{\alpha T_f} < 1, \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}_d^2 \quad (3.68a)$$

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}_1 \quad (3.68b)$$

$$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{P}_1 \quad (3.68c)$$

$$\dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) - w^T P_w w < 0, \forall x \in \mathcal{P}_1, \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}_d^2 \quad (3.68d)$$

où  $\mathcal{E}_1$  est un ensemble défini par

$$\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\}. \quad (3.69)$$

*Démonstration.*

Dans la suite, nous montrerons que toute trajectoire commençant dans le polytope  $\mathcal{P}_0$  ne sort pas de l'ensemble  $\mathcal{E}_1$ , pour  $t \leq T_f$  et  $\forall w(T) \in \mathcal{W}_d^2$ . Pour cela, nous allons argumenter par contradiction comme dans [ACM10].

Supposons qu'il existe un instant  $t_1$  tel que  $0 < t_1 < T_f$  et  $x(t_1)$  soit dans la limite de  $\mathcal{E}_1$ . Sachant que  $x(0) \in \mathcal{P}_0$ ,  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}_1$  (condition (3.68b)) et que les trajectoires d'état sont continues par rapport au temps, nous pouvons toujours trouver un instant  $t_2$  avec  $0 < t_2 \leq t_1$ , tel que

$$V(x(t_2)) = 1 \quad (3.70)$$

et  $x(t) \in \mathcal{E}_1$ , pour tout  $t \in [0, t_2]$ .

De la condition (3.68c) et de l'inégalité (3.68d), on déduit

$$\dot{V}(x(t)) < \alpha V(x(t)) + w^T(t) P_w w(t), \forall t \in [0, t_2]. \quad (3.71)$$

En multipliant (3.71) par  $e^{-\alpha t}$ , nous obtenons

$$e^{-\alpha t} \dot{V}(x(t)) - e^{-\alpha t} \alpha V(x(t)) < e^{-\alpha t} w^T(t) P_w w(t) \quad (3.72)$$

et donc

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} V(x(t))) < e^{-\alpha t} w^T(t) P_w w(t). \quad (3.73)$$

Si on intègre de 0 à  $t$ , nous obtenons  $\forall t \in [0, t_2]$

$$e^{-\alpha t} V(x(t)) - V(x(0)) < \int_0^t e^{-\alpha\tau} w^T(\tau) P_w w(\tau) d\tau. \quad (3.74)$$

Puisque  $\alpha > 0$ , on aura  $0 < e^{-\alpha\tau} < 1$ , et les inégalités précédentes conduisent à

$$V(x) < \left( V(x(0)) + \int_0^t e^{-\alpha\tau} w^T(\tau) P_w w(\tau) d\tau \right) e^{\alpha t}. \quad (3.75)$$

Notons que si l'inégalité (3.68a) est valable pour un  $T_f > 0$  donné, alors elle est satisfaite  $\forall t \in [0, T_f]$ . Compte tenu de (3.68d), l'inégalité (3.75) implique

$$V(x(t_2)) < 1, \quad (3.76)$$

ce qui contredit (3.70).

Alors, un instant  $t_1$  tel que  $t_1 < T_f$  et  $x(t_1) \in \partial \mathcal{E}_1$  n'existe pas. Donc toute trajectoire issue de  $x(0)$  commençant dans  $\mathcal{P}_0$  ne sort pas de  $\mathcal{E}_1$ ,  $\forall t \in [0, T_f]$ ,  $\forall w(t) \in \mathcal{W}_d^2$ . CQFD. •

Notons que les conditions de lemme 3.3.2 sont des conditions suffisantes qui garantissent la bornitude en temps fini.

Le théorème suivant donne des conditions explicites de FTB pour un système quadratique. La démonstration est similaire à la démonstration du théorème 3.3.1 et elle est basée sur une fonction quadratique de Lyapunov et utilise une version du lemme de Finsler.

**Théorème 3.3.2** (bornitude en temps fini).

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ , l'ensemble de perturbations  $\mathcal{W}_d^2$  (1.46) et un réel positif  $T_f$ , le système (3.27) est borné en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$ , s'il existe un réel  $\alpha \geq 0$ , deux matrices symétriques définies positives  $P_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P_w \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$  et une matrice  $L$  de dimension appropriée, tels que

$$\left( \lambda_{\max}(P_x) \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 + d \lambda_{\max}(P_w) \right) e^{\alpha T_f} \leq 1, \quad (3.77a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{k_1}^T \\ a_{k_1} & P_x \end{pmatrix} \geq 0, k_1 = 1, 2, \dots, q, \quad (3.77b)$$

$$\Phi(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + L\Omega(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + \Omega^T(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)})L^T < 0, i = 1, 2, \dots, p, \quad (3.77c)$$

où

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \Phi_{12}(x) \\ \Phi_{21}(x) & \Phi_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad (3.78)$$

avec

$$\Phi_{11}(x) = [A_0^T + \begin{pmatrix} A_{11}^T x & \dots & A_{nn}^T x \end{pmatrix}] P_x + P_x [A_0 + \begin{pmatrix} x^T A_{11} \\ \vdots \\ x^T A_{nn} \end{pmatrix}] - \alpha P_x, \quad (3.79a)$$

$$\Phi_{21}(x) = [E_0^T + \begin{pmatrix} E_{11}^T x & \dots & E_{mm}^T x \end{pmatrix}] P_x, \quad (3.79b)$$

$$\Phi_{12}(x) = \Phi_{21}^T(x), \quad (3.79c)$$

$$\Phi_{22}(x) = -P_w. \quad (3.79d)$$

où  $\Omega(x)$  est un annulateur linéaire du vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$ , qui a pour forme

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}(x) & 0_{(n-1) \times \ell} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

avec

$$\mathcal{N}(x) = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_n & -x_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

*Démonstration.* D'abord définissons la fonction de Lyapunov quadratique  $V(x)$

$$V(x) = x^T P_x x \quad (3.82)$$

et l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(P_x, 1)$  associée à  $V(x)$

$$\mathcal{E}(P_x, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_x x \leq 1\}. \quad (3.83)$$

Par le lemme de Schur, les inégalités (3.77b) sont équivalentes à

$$a_{k_1}^T P_x^{-1} a_{k_1} \leq 1, k_1 = 1, 2, \dots, q. \quad (3.84)$$

De [BEFB94, chapitre 5], nous déduisons que les inégalités (3.84) garantissent que

$$\mathcal{E}(P_x, 1) \subset \mathcal{P}_1. \quad (3.85)$$

En utilisant (3.77a), nous obtenons ( $i = 1, \dots, p$ )

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{P}_0}^{(i)T} P_x x_{\mathcal{P}_0}^{(i)} &\leq \lambda_{\max}(P_x) \left\| x_{\mathcal{P}_0}^{(i)} \right\|^2 \\ &\leq \lambda_{\max}(P_x) \max_i \left\| x_{\mathcal{P}_0}^{(i)} \right\|^2 \\ &\leq \left( \lambda_{\max}(P_x) \max_i \left\| x_{\mathcal{P}_0}^{(i)} \right\|^2 + d \lambda_{\max}(P_w) \right) e^{\alpha T_f} \\ &\leq 1. \end{aligned} \quad (3.86)$$

et donc l'inégalité (3.86) satisfait

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}(P_x, 1). \quad (3.87)$$

Dans la suite, nous montrons que la condition (3.77c) est équivalente à

$$\dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) - w^T(t) P_w w(t) < 0, \quad (3.88)$$

où  $\dot{V}(x(t))$  est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T P_x x + x^T P_x \dot{x} \\ &= (A_0 x + A_q(x) x + E_0 w + E_q(x) w)^T P_x x + x^T P_x (A_0 x + A_q(x) x + E_0 w + E_q(x) w) \\ &= x^T [A_0^T P_x + P_x A_0 + A_q^T(x) P_x + P_x A_q(x)] x + x^T P_x [E_0 + E_q(x)] w \\ &\quad + w^T [E_0^T + E_q^T(x)] P_x x. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Donc, du fait des expressions de  $A_q(x)$  et  $E_q(x)$  dans (3.27) et du  $\Phi$  dans (3.78) et (3.79), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) - w^T P_w w &= x^T [A_0^T P_x + P_x A_0 - \alpha P_x + A_q^T(x) P_x + P_x A_q(x)] x \\ &\quad + x^T P_x [E_0 + E_q(x)] w + w^T [E_0^T + E_q^T(x)] P_x x - w^T P_w w \\ &= x^T \Phi_{11}(x) x + x^T \Phi_{12}(x) w + w^T \Phi_{21}(x) x + w^T \Phi_{22}(x) w \\ &= \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \Phi_{12}(x) \\ \Phi_{21}(x) & \Phi_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \Phi(x) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.68d) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \Phi(x) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} < 0, \forall x \in \mathcal{P}_1, \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}_d^2. \quad (3.91)$$

Définissons la matrice dépendante de l'état  $\Omega(x)$  (3.80).

Il est facile de remarquer que  $\Omega(x)$  est un annulateur linéaire du vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$  qui vérifie

$$\Omega(x) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = 0. \quad (3.92)$$

Appliquons le lemme de Finsler [BEFB94] : l'inégalité (3.92) est vraie, s'il existe une matrice  $L$  de dimension appropriée telle que

$$\Phi(x) + L\Omega(x) + \Omega^T(x)L^T < 0, \forall x \in \mathcal{P}_1. \quad (3.93)$$

Du fait que l'inégalité (3.93) est affine par rapport aux variables  $x_1, \dots, x_n$  et que le polytope  $\mathcal{P}_1$  est convexe, alors elle est vérifiée pour tout  $x \in \mathcal{P}_1$  si les LMIs (3.77c) sont garanties. En conclusion, nous déduisons que l'ensemble des LMIs dans (3.77c) implique l'inégalité suivante

$$\dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) - w^T(t)P_w w(t) < 0, \forall x(t) \in \mathcal{P}_1, \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}_d^2 \quad (3.94)$$

Par ailleurs, comme  $\alpha \geq 0$ , nous avons  $0 < e^{-\alpha\tau} \leq 1$ , et comme nous avons (3.82), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left( V(x(0)) + \int_0^t e^{-\alpha\tau} w^T(\tau)P_w w(\tau) d\tau \right) e^{\alpha t} &\leq e^{\alpha t} \left( x^T(0)P_x x(0) + \int_0^t w^T(\tau)P_w w(\tau) d\tau \right) \\ &\leq e^{\alpha t} \left( \lambda_{\max}(P_x) \|x(0)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{\max}(P_w) \int_0^t w^T(\tau)w(\tau) d\tau \right) \\ &< \left( \lambda_{\max}(P_x) \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 + d\lambda_{\max}(P_w) \right) e^{\alpha T_f} \\ &< 1. \end{aligned} \quad (3.95)$$

En conclusion, du fait des conditions (3.85), (3.87), (3.94), (3.95) et du lemme 3.3.2, nous déduisons que les conditions du théorème 3.3.2 assurent que le système (3.27) est FTB par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$ . Ce qui finit la démonstration.  $\bullet$

À notre connaissance, ceci est la première fois que le lemme de Finsler et les annulateurs sont utilisés pour déduire les conditions de FTB des systèmes non linéaires quadratiques. Cette approche prend en considération le fait que  $\Phi(x)$  et  $\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$  dépendent du vecteur  $x$ .

*Remarque 3.3.1.*

Il est intéressant de noter que les conditions (3.77a) et (3.77c) ne sont pas des LMIs à proprement parler, et donc sont difficiles à résoudre. Cependant, si  $\alpha$  est fixé, les conditions (3.77a) peuvent être converties en les LMIs suivantes

$$P_x < \lambda_x I_n, \quad (3.96a)$$

$$P_w < \lambda_w I_n, \quad (3.96b)$$

$$(\lambda_x \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 + d\lambda_w)e^{\alpha T_f} < 1, \quad (3.96c)$$

où  $\lambda_x$  et  $\lambda_w$  sont des réels positifs à déterminer.

Et par la suite, le corollaire suivant est déduit du théorème 3.3.2.

**Corollaire 3.3.1.**

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ , l'ensemble des perturbations  $\mathcal{W}_d^2$  (1.46) et un réel  $T_f$ , le système (3.27) est borné en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$ , s'il existe trois réels positifs  $\alpha, \lambda_x, \lambda_w$ , deux matrices symétriques définies positives  $P_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_w \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$  et une matrice constante  $L$  de dimension appropriée tels que

$$P_x < \lambda_x I_n, \quad (3.97a)$$

$$P_w < \lambda_w I_n, \quad (3.97b)$$

$$(\lambda_x \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 + d\lambda_w)e^{\alpha T_f} < 1, \quad (3.97c)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{k_1}^T \\ a_{k_1} & P_x \end{pmatrix} \geq 0, k_1 = 1, 2, \dots, q, \quad (3.97d)$$

$$\Phi(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + L\Omega(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + \Omega^T(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)})L^T < 0, i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.97e)$$

### 3.3.3 Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques

Pour cela, considérons le système quadratique suivant

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, x(0) = x_0. \quad (3.98)$$

Les matrices  $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont données par (3.4), et la matrice  $B(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est définie comme suit

$$B(x) = B_0 + \sum_{i=1}^n x_i B_i \quad (3.99)$$

où  $B_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des matrices constantes et réelles,  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Pour stabiliser le système dynamique (3.98), la commande  $u \in \mathbb{R}^m$  est remplacée par

$$u = K(x)x \quad (3.100)$$

avec

$$K(x) = K_0 + \sum_{i=1}^n x_i K_i \quad (3.101)$$

où  $K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des matrices réelles et constantes à déterminer.

Considérons (3.98) et (3.100), le système en boucle fermée est donné par

$$\dot{x} = [A(x) + B(x)K(x)]x. \quad (3.102)$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour synthétiser la matrice gain  $K(x)$  dans le but de garantir la stabilité en temps fini du système (3.102). Ce résultat nécessite la réécriture de la matrice  $B(x)$  et la définition d'une matrice  $\Omega_a(x)$  comme suit

$$B(x) = \Psi_1^T(x) \begin{pmatrix} B_0 \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} = B_0 + \Pi^T(x)\mathcal{B}, \quad (3.103a)$$

$$\Omega_a(x) = \begin{pmatrix} \Pi(x) & -I_{n^2} \\ 0_{n(n-1) \times n} & \mathcal{N}_a(x) \end{pmatrix}, \quad (3.103b)$$

avec

$$\Pi(x) = \begin{pmatrix} x_1 I_n & x_2 I_n & \dots & x_n I_n \end{pmatrix}^T, \quad (3.104a)$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} I_n & \Pi^T(x) \end{pmatrix}^T, \quad (3.104b)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1^T & B_2^T & \dots & B_n^T \end{pmatrix}^T, \quad (3.104c)$$

$$\mathcal{N}_a(x) = \begin{pmatrix} x_2 I_n & -x_1 I_n & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & x_3 I_n & -x_2 I_n & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \dots & 0_n & x_n I_n & -x_{n-1} I_n \end{pmatrix}. \quad (3.104d)$$

**Théorème 3.3.3** (stabilisation en temps fini d'un système quadratique).

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$  tels que  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$  et un réel positif  $T_f$ , le retour d'état non linéaire  $u(x) = K(x)x$  assure que le système (3.102) est stable en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f)$  s'il existe un réel positif  $\alpha$ , une matrice symétrique et définie positive  $Q_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  et une matrice  $L_a$  de dimension appropriée, tels que

$$\left( \lambda_{\max}(Q_x^{-1}) \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 \right) e^{\alpha T_f} \leq 1, \quad (3.105a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{k_1}^T Q_x \\ Q_x a_{k_1} & Q_x \end{pmatrix} \geq 0, k_1 = 1, 2, \dots, q, \quad (3.105b)$$

$$\Phi_a(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + L_a \Omega_a(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + \Omega_a^T(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) L_a^T \leq 0, i = 1, 2, \dots, p, \quad (3.105c)$$

où

$$\Phi_a(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \Phi_{21}^T(x) \\ \Phi_{21}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.106)$$

avec

$$\Phi_{11}(x) = Q_x A^T(x) + A(x) Q_x - \alpha Q_x + Y^T(x) B_0^T + B_0 Y(x), \quad (3.107a)$$

$$\Phi_{21}(x) = \mathcal{B} Y(x). \quad (3.107b)$$

La matrice gain est donnée par  $K(x) = Y(x) Q_x^{-1}$  où

$$Y(x) = Y_0 + x_1 Y_1 + \dots + x_n Y_n. \quad (3.108)$$

*Démonstration.* Considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante

$$V(x) = x^T P_x x, P_x^T = P_x > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3.109)$$

Nous dérivons  $V(x)$  par rapport au temps  $t$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P_x x + x^T P_x \dot{x}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(A(x) + B(x)K(x))x + x^T P_x [(A(x) + B(x)K(x))x] \\
 &= x^T [A(x) + B_0 K(x) + \Pi^T(x) \mathcal{B} K(x)]^T P_x x + x^T P_x [A(x) + B_0 K(x) + \Pi^T(x) \mathcal{B} K(x)] x.
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Posons  $\xi = P_x x$  et  $Q_x = P_x^{-1}$ , alors nous aurons

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) - \alpha V(x) &= \xi^T Q_x [A(x) + B_0 K(x) + \Pi^T(x) \mathcal{B} K(x)]^T \xi + \xi^T [A(x) + B_0 K(x) \\
 &\quad + \Pi^T(x) \mathcal{B} K(x)] Q_x \xi - \alpha \xi^T Q_x \xi \\
 &= \xi^T [Q_x A^T(x) + A(x) Q_x - \alpha Q_x + Q_x K^T(x) B_0^T + B_0 K(x) Q_x] \xi \\
 &\quad + \xi^T Q_x K^T(x) \mathcal{B}^T \Pi(x) + \Pi^T(x) \mathcal{B} K(x) Q_x \xi \\
 &= \rho^T(x) \Phi_a(x) \rho(x),
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

où

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta(x) \end{pmatrix} = \Psi_1(x) \xi \tag{3.112a}$$

$$\zeta(x) = \Pi(x) \xi, \tag{3.112b}$$

$$Y(x) = K(x) Q_x. \tag{3.112c}$$

Et donc la condition  $\dot{V}(x) - \alpha V(x) < 0, \forall x(t) \in \mathcal{P}_1$  est équivalente à

$$\rho^T(x) \Phi_a(x) \rho(x) < 0, \forall \rho(x) \neq 0, \forall x(t) \tag{3.113}$$

Puisque la matrice  $\Omega_a(x)$  définie par (3.103b) est un annulateur linéaire du vecteur  $\rho(x)$ , i.e.

$$\Omega_a(x) \rho(x) = 0, \forall x \in \mathcal{P}_1,$$

appliquons le lemme de Finsler, l'inégalité (3.113) est donc vérifiée s'il existe une matrice  $L_a$  de dimension appropriée telle que

$$\Phi_a(x) + L_a \Omega_a(x) + \Omega_a^T(x) L_a^T < 0, \forall x \in \mathcal{P}_1. \tag{3.114}$$

De plus, l'ensemble des LMIs dans (3.105c) sont vérifiées sur tous les sommets  $x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}$  de  $\mathcal{P}_1$ , et donc par convexité, elles sont satisfaites  $\forall x \in \mathcal{P}_1$ , i.e elles sont équivalentes à la condition (3.114). Finalement nous déduisons que l'ensemble des LMIs (3.105c) sont des conditions suffisantes garantissant

$$\dot{V}(x) - \alpha V(x) - w^T P_w w < 0, \forall x(t) \in \mathcal{P}_1, \forall w(t) \in \mathcal{W}_d^2. \tag{3.115}$$

Vue la démonstration du théorème 3.3.1, l'ensemble des inégalités (3.105a) et des LMIs (3.105b) impliquent

$$\mathcal{E}(P_x, 1) \subset \mathcal{P}_1, \tag{3.116a}$$

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}(P_x, 1), \tag{3.116b}$$

$$(V(x(0))) e^{\alpha t} < 1. \tag{3.116c}$$

Finalement, selon le Lemme 3.3.1, les conditions (3.115), (3.116a), (3.116b) et (3.116c) garantissent la stabilité en temps fini du système (3.102) par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f)$ . Ce qui finit la démonstration. •

*Remarque 3.3.2.*

Si  $\alpha$  est fixé, l'ensemble des conditions (3.105a) peut être garanti en imposant les conditions suivantes

$$\lambda_x I < Q_x, \quad (3.117a)$$

$$\begin{pmatrix} -e^{-\alpha T_f} & \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\| \\ \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\| & -\lambda_x \end{pmatrix} < 0. \quad (3.117b)$$

Compte tenu de la remarque 3.3.2, le corollaire suivant est déduit du théorème 3.3.3.

**Corollaire 3.3.2.**

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$  et un réel positif  $T_f$ , le retour d'état non linéaire  $u(x) = K(x)x$  (3.100) assure que le système (3.102) est borné en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f)$  s'il existe un réel positif  $\alpha$ , une matrice symétrique et définie positive  $Q_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  et une matrice  $L_a$  de dimension appropriée, tels que

$$\lambda_x I < Q_x, \quad (3.118a)$$

$$\begin{pmatrix} -e^{-\alpha T_f} & \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\| \\ \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\| & -\lambda_x \end{pmatrix} < 0, \quad (3.118b)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{k_1}^T Q_x \\ Q_x a_{k_1} & Q_x \end{pmatrix} \geq 0, k_1 = 1, 2, \dots, q, \quad (3.118c)$$

$$\Phi_a(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + L_a \Omega_a(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + \Omega_a^T(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) L_a^T \leq 0, i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.118d)$$

### 3.3.4 Stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini des systèmes quadratiques

Dans la suite, les résultats donnés par le théorème 3.3.2 et le corollaire 3.3.1 sont étendus à la stabilisation (bornitude) en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques perturbés. Pour cela, considérons le système quadratique suivant

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + E(x)w, x(0) = x_0. \quad (3.119)$$

Les matrices  $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $E(x) \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  sont données par (3.4), et la matrice  $B(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est définie comme suit

$$B(x) = B_0 + \sum_{i=1}^n x_i B_i \quad (3.120)$$

où  $B_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des matrices constantes et réelles,  $x \in \mathcal{P}_1 \subset \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $w \in \mathbb{R}^\ell$  est la perturbation,  $x_0 \in \mathcal{P}_0 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  sont des régions polytopiques de l'espace d'état telles que  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$ .

Pour stabiliser le système dynamique (3.119), la commande  $u \in \mathbb{R}^m$  est remplacée par

$$u = K(x)x \quad (3.121)$$

avec

$$K(x) = K_0 + \sum_{i=1}^n x_i K_i \quad (3.122)$$



où  $K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des matrices réelles et constantes à déterminer.

Considérons (3.119) et (3.121), le système en boucle fermée est donné par

$$\dot{x} = [A(x) + B(x)K(x)]x + E(x)w. \quad (3.123)$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour synthétiser la matrice gain  $K(x)$  dans le but de garantir la bornitude en temps fini du système (3.123). Ce résultat nécessite la réécriture de la matrice  $B(x)$  et la définition d'une matrice  $\Omega_a(x)$  comme suit

$$B(x) = \Psi_1^T(x) \begin{pmatrix} B_0 \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} = B_0 + \Pi^T(x)\mathcal{B}, \quad (3.124a)$$

$$\Omega_a(x) = \begin{pmatrix} \Pi(x) & -I_{n^2} & 0_{n^2 \times \ell} \\ 0_{n(n-1) \times n} & \mathcal{N}_a(x) & 0_{n(n-1) \times \ell} \end{pmatrix}, \quad (3.124b)$$

avec

$$\Pi(x) = \begin{pmatrix} x_1 I_n & x_2 I_n & \dots & x_n I_n \end{pmatrix}^T, \quad (3.125a)$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} I_n & \Pi^T(x) \end{pmatrix}^T, \quad (3.125b)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1^T & B_2^T & \dots & B_n^T \end{pmatrix}^T, \quad (3.125c)$$

$$\mathcal{N}_a(x) = \begin{pmatrix} x_2 I_n & -x_1 I_n & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & x_3 I_n & -x_2 I_n & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \dots & 0_n & x_n I_n & -x_{n-1} I_n \end{pmatrix}. \quad (3.125d)$$

**Théorème 3.3.4** (stabilisation avec bornitude en temps fini d'un système quadratique).

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$ , l'ensemble des perturbations  $\mathcal{W}_d^2$  (1.46) et un réel positif  $T_f$ , le retour d'état non linéaire  $u(x) = K(x)x$  assure que le système (3.123) est borné en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$  s'il existe un réel positif  $\alpha$ , deux matrices symétriques et définies positives  $Q_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_w \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ , des matrices  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  et une matrice  $L_a$  de dimension appropriée, tels que

$$\left( \lambda_{\max}(Q_x^{-1}) \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2 + d \lambda_{\max}(Q_w^{-1}) \right) e^{\alpha T_f} \leq 1, \quad (3.126a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{k_1}^T Q_x \\ Q_x a_{k_1} & Q_x \end{pmatrix} \geq 0, k_1 = 1, 2, \dots, q, \quad (3.126b)$$

$$\Phi_a(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + L_a \Omega_a(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + \Omega_a^T(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) L_a^T \leq 0, i = 1, 2, \dots, p, \quad (3.126c)$$

où

$$\Phi_a(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{aa}(x) & \Phi_{bb}^T(x) \\ \Phi_{bb}(x) & -Q_w \end{pmatrix}, \quad (3.127)$$

avec

$$\Phi_{aa}(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \Phi_{21}^T(x) \\ \Phi_{21}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.128a)$$

$$\Phi_{bb}(x) = \begin{pmatrix} Q_w E^T(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.128b)$$

$$\Phi_{11}(x) = Q_x A^T(x) + A(x)Q_x - \alpha Q_x + Y^T(x)B_0^T + B_0 Y(x), \quad (3.128c)$$

$$\Phi_{21}(x) = \mathcal{B}Y(x). \quad (3.128d)$$

La matrice gain est donnée par  $K(x) = Y(x)Q_x^{-1}$  où

$$Y(x) = Y_0 + x_1 Y_1 + \dots + x_n Y_n. \quad (3.129)$$

*Démonstration.* Considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante

$$V(x) = x^T P_x x, P_x^T = P_x > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3.130)$$

Nous dérivons  $V(x)$  par rapport au temps  $t$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P_x x + x^T P_x \dot{x} \\ &= [(A(x) + B(x)K(x))x + E(x)w]^T P_x x + x^T P_x [(A(x) + B(x)K(x))x + E(x)w] \\ &= x^T [A(x) + B_0 K(x) + \Pi^T(x)\mathcal{B}K(x)]^T P_x x + x^T P_x [A(x) + B_0 K(x) + \Pi^T(x)\mathcal{B}K(x)]x \\ &\quad + w^T E^T(x)P_x x + x^T P_x E(x)w. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Posons  $\xi = P_x x$ ,  $\varpi = P_w w$ ,  $Q_x = P_x^{-1}$  et  $Q_w = P_w^{-1}$ , alors nous aurons

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) - \alpha V(x) - w^T P_w w &= \xi^T Q_x [A(x) + B_0 K(x) + \Pi^T(x)\mathcal{B}K(x)]^T \xi + \xi^T [A(x) + B_0 K(x) \\ &\quad + \Pi^T(x)\mathcal{B}K(x)] Q_x \xi - \alpha \xi^T Q_x \xi + \varpi^T Q_w \xi \\ &\quad + \xi^T E(x)Q_w \varpi - \varpi^T Q_w \varpi \\ &= \xi^T [Q_x A^T(x) + A(x)Q_x - \alpha Q_x + Q_x K^T(x)B_0^T + B_0 K(x)Q_x] \xi \\ &\quad + \xi^T Q_x K^T(x)\mathcal{B}^T \Pi(x) + \Pi^T(x)\mathcal{B}K(x)Q_x \xi + \varpi^T E^T(x)Q_w \xi \\ &\quad + \xi^T E(x)Q_w \varpi - \varpi^T Q_w \varpi \\ &= \rho^T(x)\Phi_a(x)\rho(x), \end{aligned} \quad (3.132)$$

où

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta(x) \\ \varpi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1(x)\xi \\ \varpi \end{pmatrix}, \quad (3.133a)$$

$$\zeta(x) = \Pi(x)\xi, \quad (3.133b)$$

$$Y(x) = K(x)Q_x. \quad (3.133c)$$

Et donc la condition  $\dot{V}(x) - \alpha V(x) - w^T P_w w < 0, \forall x(t) \in \mathcal{P}_1, \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}_d^2$  est équivalente à

$$\rho^T(x)\Phi_a(x)\rho(x) < 0, \forall \rho(x) \neq 0, \forall x(t) \in \mathcal{P}_1, \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}_d^2. \quad (3.134)$$

Puisque la matrice  $\Omega_a(x)$  définie par (3.124b) est un annulateur linéaire du vecteur  $\rho(x)$ , i.e.

$$\Omega_a(x)\rho(x) = 0, \forall x \in \mathcal{P}_1,$$

appliquons le lemme de Finsler, l'inégalité (3.134) est donc vérifiée s'il existe une matrice  $L_a$  de dimension appropriée telle que

$$\Phi_a(x) + L_a \Omega_a(x) + \Omega_a^T(x) L_a^T < 0, \forall x \in \mathcal{P}_1. \quad (3.135)$$

De plus, l'ensemble des LMIs dans (3.126c) sont vérifiées sur tous les sommets  $x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}$  de  $\mathcal{P}_1$ , et donc par convexité, elles sont satisfaites  $\forall x \in \mathcal{P}_1$ , i.e elles sont équivalentes à la condition (3.135). Finalement, nous déduisons que l'ensemble des LMIs (3.126c) sont des conditions suffisantes garantissant

$$\dot{V}(x) - \alpha V(x) - w^T P_w w < 0, \forall x(t) \in \mathcal{P}_1, \forall w(t) \in \mathcal{W}_d^2. \quad (3.136)$$

Vu la démonstration du théorème 3.3.2, l'ensemble des inégalités (3.126a) et des LMIs (3.126b) impliquent

$$\mathcal{E}(P_x, 1) \subset \mathcal{P}_1, \quad (3.137a)$$

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}(P_x, 1), \quad (3.137b)$$

$$\left( V(x(0)) + \int_0^t e^{-\alpha\tau} w^T(\tau) P_w w(\tau) d\tau \right) e^{\alpha t} < 1. \quad (3.137c)$$

Finalement, selon le lemme 3.3.2, les conditions (3.136), (3.137a), (3.137b) et (3.137c) garantissent la bornitude en temps fini du système (3.123) par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$ . Ce qui finit la démonstration.  $\bullet$

#### Remarque 3.3.3.

Si  $\alpha$  est fixé, l'ensemble des conditions (3.126a) peut être garanti en imposant les conditions suivantes

$$\lambda_x I < Q_x, \quad (3.138a)$$

$$\lambda_w I < Q_w, \quad (3.138b)$$

$$\begin{pmatrix} -e^{-\alpha T_f} & \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\| & \sqrt{d} \\ \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\| & -\lambda_x & 0 \\ \sqrt{d} & 0 & -\lambda_w \end{pmatrix} < 0. \quad (3.138c)$$

Compte tenu de la remarque 3.3.1, le corollaire suivant est déduit du théorème 3.3.4.

#### Corollaire 3.3.3.

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$ , l'ensemble des perturbations  $\mathcal{W}_d^2$  (1.46) et un réel positif  $T_f$ , le retour d'état non linéaire  $u(x) = K(x)x$  (3.121) assure que le système (3.123) est borné en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$  s'il existe un réel positif  $\alpha$ , deux matrices symétriques et définies positives  $Q_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_w \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ , des matrices  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  et une matrice  $L_a$  de dimension appropriée, tels que

$$\lambda_x I < Q_x, \quad (3.139a)$$

$$\lambda_w I < Q_w, \quad (3.139b)$$

$$\begin{pmatrix} -e^{-\alpha T_f} & \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\| & \sqrt{d} \\ \max_i \|x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\| & -\lambda_x & 0 \\ \sqrt{d} & 0 & -\lambda_w \end{pmatrix} < 0, \quad (3.139c)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{k_1}^T Q_x \\ Q_x a_{k_1} & Q_x \end{pmatrix} \geq 0, k_1 = 1, 2, \dots, q, \quad (3.139d)$$

$$\Phi_a(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + L_a \Omega_a(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) + \Omega_a^T(x_{\mathcal{P}_1}^{(i)}) L_a^T \leq 0, i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.139e)$$

*Démonstration.* •

*Remarque 3.3.4.*

- Le théorème 3.3.2 et le corollaire 3.3.1 englobent le cas de la FTS. En effet, si  $d = 0$  et  $E(x) = 0$  dans (3.27), les conditions (3.77a)-(3.77c) du théorème 3.3.4 et les conditions (3.97a)-(3.97e) du corollaire 3.3.3 deviennent des conditions suffisantes qui garantissent la FTS. À rapprocher des résultats dans [ACM10] où Amato *et al.* considèrent un système non linéaire quadratique (3.27) sans perturbation  $w$ , où les conditions suffisantes pour la FTS sont déduites sans utilisation d'annulateur. Ceci est différent de notre approche puisque nous utilisons des annulateurs pour déduire des conditions suffisantes pour la FTS et la FTB.
- L'intérêt des annulateurs est d'obtenir des conditions de stabilisation moins pessimistes. On l'illustrera à travers deux exemples numériques dans la section suivante.

### 3.3.5 Exemples numériques

Dans cette section, on applique les corollaires 3.3.1 et 3.3.3 à deux exemples numériques. Lorsque le paramètre  $\alpha$  est fixé, les conditions des corollaires 3.3.1 et 3.3.3 deviennent des LMIs. Par conséquent la FTB peut être testée à partir d'une recherche en ligne du paramètre  $\alpha$  associé à une résolution de ces LMIs. L'intérêt de la matrice  $L$  dans (3.97e) est mis en évidence par l'examen de deux cas dans chaque exemple : soit  $L$  est une matrice non nulle à déterminer, soit on impose  $L = 0$ . Notons que dans ce dernier cas, le corollaire 3.3.1 peut être vu comme une extension du théorème 1 de [ACM10] au cas des systèmes perturbés. Cette approche n'utilise pas l'approche par annulateur, contrairement au cas où  $L$  est une matrice non nulle à déterminer.

**Exemple 3.3.1.** Considérons le système quadratique suivant [KKM91]

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w. \quad (3.140)$$

Dans un premier temps, on utilise le corollaire 3.3.1 pour vérifier si le système (3.140) est FTB par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f = 0.7, d = 0.9)$ , où  $\mathcal{P}_0 = [-0.1, 0.1] \times [-0.1, 0.1] \times [-0.1, 0.1]$  et  $\mathcal{P}_1 = [-5, 5] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ . Si  $L$  est fixée à zéro dans (3.97e), les LMIs (3.97a) à (3.97e) ne sont pas faisables quel que soit  $\alpha$ , cependant ces LMIs sont faisables lorsque  $L$  est à déterminer. Dans ce cas, une recherche linéaire sur le paramètre  $\alpha$  nous fournit  $\alpha = 2.8$ .

Afin d'illustrer la faisabilité des conditions du corollaire 3.3.1, une simulation est effectuée en considérant 10000 états initiaux aléatoires dans le polytope  $\mathcal{P}_0$ . La perturbation est donnée par  $w(t) = 2e^{-0.4t} \sin(2t)$ . En considérant l'ensemble de toutes les trajectoires  $x(t)$  issues de ces 10000 états initiaux aléatoires, le maximum de la valeur absolue de chaque composante de  $x_i(t)$  de  $x(t)$  à chaque instant est tracé dans la Figure 3.1. Ces maximas n'excèdent pas 5 durant l'intervalle de temps prescrit  $[0, 0.7]$ .

Deuxièmement, afin de comparer l'efficacité des conditions du corollaire 3.3.1 dans les deux cas  $L \neq 0$  et  $L = 0$ , nous fixons le paramètre  $T_f = 0.7$  et nous faisons varier le paramètre  $d$  de

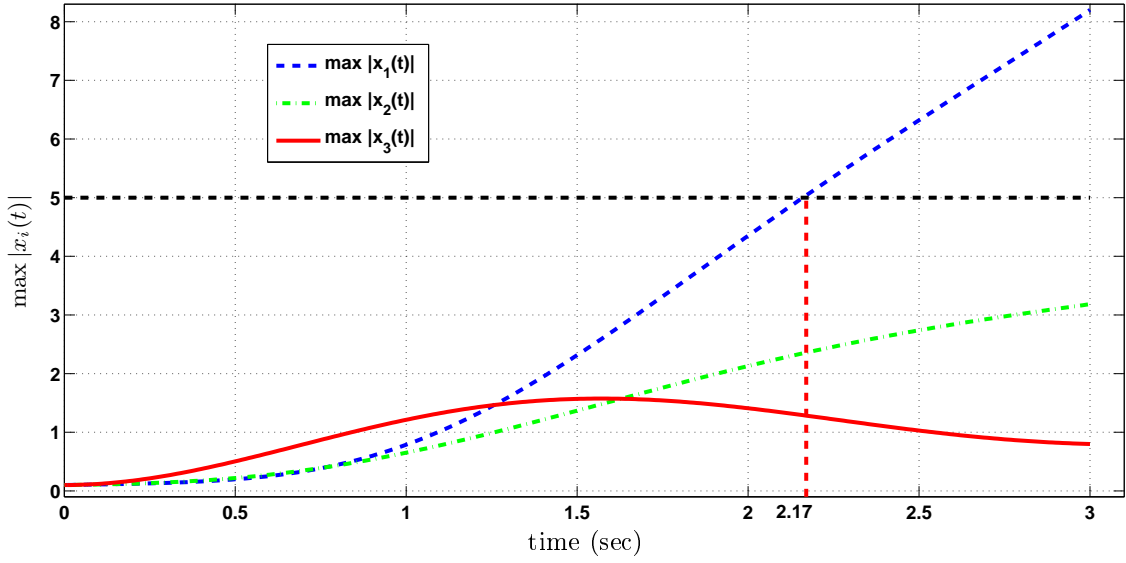


FIGURE 3.1 – FTB du système (3.140)

0.3 à 0.9. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 3.1. Ce tableau montre que, pour les trois premières valeurs de  $d$ , on obtient par notre approche la faisabilité des LMIs pour des valeurs de  $\alpha$  inférieures au cas où  $L = 0$ . Le paramètre  $\alpha$  pouvant être vu comme le facteur de croissance du système analysé, notre approche montre que le système s'éloigne moins de son état initial que ce que montre une approche sans annulateur (cas où  $L = 0$ ).

$d$	$\alpha$ (Corollaire 3.3.1 with $L \neq 0$ )	$\alpha$ (Corollaire 3.3.1 with $L = 0$ )
0.3	1	1.8
0.5	1.4	2.4
0.7	1.9	3
0.9	2.8	-

TABLE 3.1 – Valeurs de  $\alpha$  pour différents  $d$  avec  $T_f = 0.7$ 

Troisièmement, dans les deux cas  $L = 0$  et  $L \neq 0$ , nous fixons  $d = 0.3$  et nous faisons varier le paramètre  $T_f$  de 0.8 jusque 1.1. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 3.2. Nous remarquons que les conditions du corollaire 3.3.1 avec  $L = 0$  ne permettent pas de vérifier la FTB pour  $T_f \geq 1$ , cependant les conditions du corollaire 3.3.1 avec  $L \neq 0$  prouvent la FTB lorsque  $T_f = 1$  et  $T_f = 1.1$ . Les deux tableaux 3.1 et 3.2 montrent que les conditions du corollaire 3.3.1

$T_f$	$\alpha$ (Corollaire 3.3.1 avec $L \neq 0$ )	$\alpha$ (Corollaire 3.3.1 avec $L = 0$ )
0.8	1.1	2
0.9	1.2	2.4
1	1.4	-
1.1	1.7	-

TABLE 3.2 – Valeurs de  $\alpha$  pour différents  $T_f$  avec  $d = 0.3$ 

avec  $L \neq 0$  sont moins pessimistes que celles du corollaire 3.3.1 avec  $L = 0$ .

Quatrièmement, nous considérons  $\mathcal{P}_0 = [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4]$ ,  $\mathcal{P}_1 = [-5, 5] \times$

$[-5, 5] \times [-5, 5]$ ,  $T_f = 5$ , avec  $d = 1.6$ . La figure 3.2 montre que le système (3.140) n'est pas FTB par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f = 5, d = 1.6)$ . Notons que pour le traçage des courbes de la figure 3.2, on choisit la perturbation  $w(t) = 2e^{-0.5t} \sin(t)$ . Afin de rendre ce système FTB, une commande

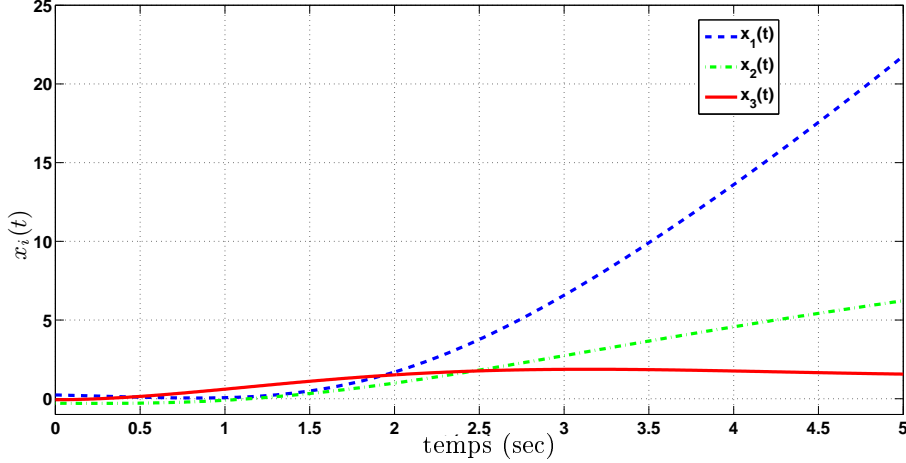


FIGURE 3.2 – Le système (3.140) n'est pas  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f = 5, d = 1.6)$ -FTB

$u$  est introduite pour le système (3.140) comme suit

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w. \quad (3.141)$$

Les conditions LMIs du corollaire 3.3.3 nous permettent de synthétiser un retour d'état non linéaire  $u = K(x)x$  tel que le système (3.141) en boucle fermée est FTB par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f, d)$ , où,  $\mathcal{P}_0 = [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4]$ ,  $\mathcal{P}_1 = [-5, 5] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ ,  $T_f = 5$ , et  $d = 1.6$ .

Les conditions du corollaire 3.3.3 sont faisables pour  $\alpha = 0.3$ . La matrice  $P_x$  est donnée par

$$P_x = \begin{pmatrix} 0.040061 & -0.00064155 & -0.0000267 \\ -0.00064155 & 0.46299 & 0.00018552 \\ -0.0000267 & 0.00018552 & 0.051294 \end{pmatrix}.$$

Les gains de la commande  $K(x) = K_0 + x_1 K_1 + x_2 K_2 + x_3 K_3$  sont donnés par

$$K_0^T = \begin{pmatrix} 0.20689 \\ -10.372 \\ -371.81 \end{pmatrix}, \quad K_1^T = \begin{pmatrix} 4.6617 \times 10^{-7} \\ -3.2344 \times 10^{-6} \\ -0.00089472 \end{pmatrix}, \quad (3.142a)$$

$$K_2^T = \begin{pmatrix} 6.6564 \times 10^{-7} \\ -4.6133 \times 10^{-6} \\ -0.0012748 \end{pmatrix}, \quad K_3^T = \begin{pmatrix} -0.78101 \\ 0.012503 \\ -0.00042625 \end{pmatrix}. \quad (3.142b)$$

Afin d'illustrer la FTB obtenue par le correcteur (3.142), une simulation est effectuée en considérant 10000 états initiaux aléatoires dans le polytope  $\mathcal{P}_0$ . La perturbation est donnée par  $w(t) = 2e^{-0.5t} \sin(t)$ . En considérant l'ensemble de tous les trajectoires  $x(t)$  issues de ces 10000 conditions initiales, le maximum de la valeur absolue de chaque composante de  $x_i(t)$  of  $x(t)$  à

chaque instant est tracé dans la figure 3.3. Ces maximas n'excèdent pas 5 durant l'intervalle de temps prescrit  $[0, 5]$ .

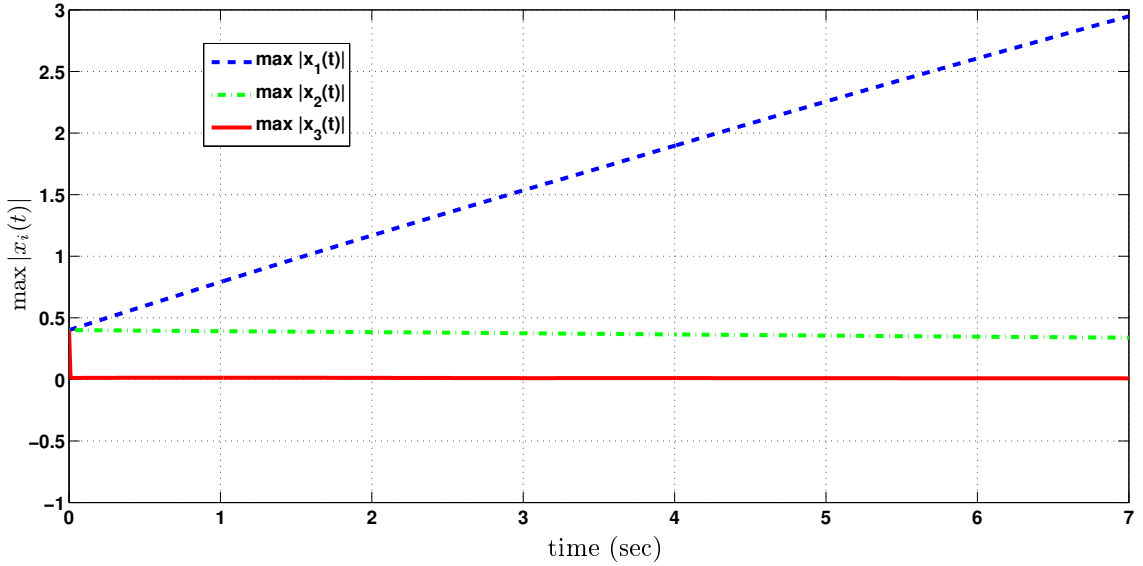


FIGURE 3.3 – FTB avec stabilisation en temps fini du système (3.141)

**Exemple 3.3.2.** Contrairement à l'exemple 3.3.1, nous considérons un système quadratique avec plusieurs matrices  $A_i$  et  $E_i$  sous la forme (3.3) avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.143a)$$

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \end{pmatrix}. \quad (3.143b)$$

Nous choisissons  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  comme suit  $\mathcal{P}_0 = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \times [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ,  $\mathcal{P}_1 = [-\sqrt{10}, \sqrt{10}] \times [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$ . Nous fixons  $T_f = 0.8$  et  $d = 0.1$ .

Premièrement, par une recherche en ligne de  $\alpha$ , les conditions du corollaire 3.3.1 avec  $L \neq 0$  à déterminer prouvent la FTB pour ce système avec  $\alpha = 1.4$ , et celles du corollaire 3.3.1 avec  $L = 0$ , avec une valeur de  $\alpha = 1.1$ . La figure 3.4 montre les ellipsoïdes  $\mathcal{E}(P_{x1}, 1)$  et  $\mathcal{E}(P_{x2}, 1)$ , les polytopes  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$ , et quelques trajectoires de notre système, les matrices  $P_{x1}$  et  $P_{x2}$  étant respectivement la matrice  $P_x$  déduite du corollaire 3.3.1 avec  $L \neq 0$ , et avec  $L = 0$ . Les états initiaux sont aléatoirement choisis dans le polytope  $\mathcal{P}_0$ . Ils sont représentés par des cercles. La figure 3.4 montre que les trajectoires issues de ces conditions initiales ne quittent pas le polytope  $\mathcal{P}_1$ .

Deuxièmement, nous analysons l'influence des termes quadratiques  $E(x)$ . Nous fixons  $T_f = 0.8$ ,  $d = 1$  et nous imposons des bornes pour  $E_1$  et  $E_2$  telles que  $-b_{\inf} \leq E_1(i, j) \leq b_{\inf}$  et  $-b_{\inf} \leq E_2(i, j) \leq b_{\inf}$ . Le paramètre  $b_{\inf}$  est choisi dans l'ensemble de valeurs suivantes  $\{0.15; 0.45; 0.75; 1\}$ . La figure 3.5 montre les résultats obtenus en générant aléatoirement 50 termes quadratiques respectant les bornes définies par  $b_{\inf}$ . Les barres sombres correspondent aux conditions du corollaire 3.3.1 avec  $L \neq 0$  et les claires correspondent aux conditions du corollaire 3.3.1 avec  $L = 0$ . Pour la plupart des cas testés, les conditions du corollaire 3.3.1 avec  $L \neq 0$  dépassent celles du corollaire 3.3.1 avec  $L = 0$ . En plus, pour étudier l'influence des termes quadratiques de la matrice  $A(x)$ , nous fixons  $T_f = 0.8$ ,  $d = 0.1$  et les matrices  $A_1$  et

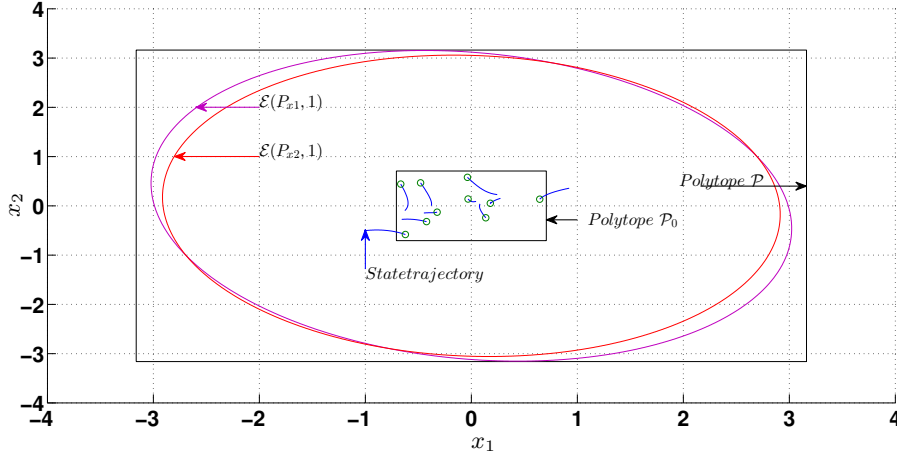


FIGURE 3.4 – Ellipsoïdes  $\mathcal{E}(P_{x1}, 1)$  et  $\mathcal{E}(P_{x2}, 1)$ , polytopes  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$ , et quelques trajectoires du système

$A_2$  sont remplacées par  $A_1 + A_{01}$  et  $A_2 + A_{02}$ , où les éléments de  $A_{01}$  et  $A_{02}$  sont bornés par  $-a_{\text{inf}} \leq A_{01}(i, j) \leq a_{\text{inf}}$ ,  $-a_{\text{inf}} \leq A_{02}(i, j) \leq a_{\text{inf}}$ . Le paramètre  $a_{\text{inf}}$  est choisi parmi l'ensemble suivant  $\{0.1; 0.3; 0.5\}$ . La figure 3.6 montre les résultats obtenus en générant aléatoirement 50 termes quadratiques respectant les bornes définies par  $a_{\text{inf}}$ . Les barres sombres correspondent aux conditions du corollaire 3.3.1 avec  $L \neq 0$  et les claires correspondent aux conditions du corollaire 3.3.1 avec  $L = 0$ . Pour la plupart des cas testés, les conditions du corollaire 3.3.1 avec  $L \neq 0$  dépassent celles du corollaire 3.3.1 avec  $L = 0$ .

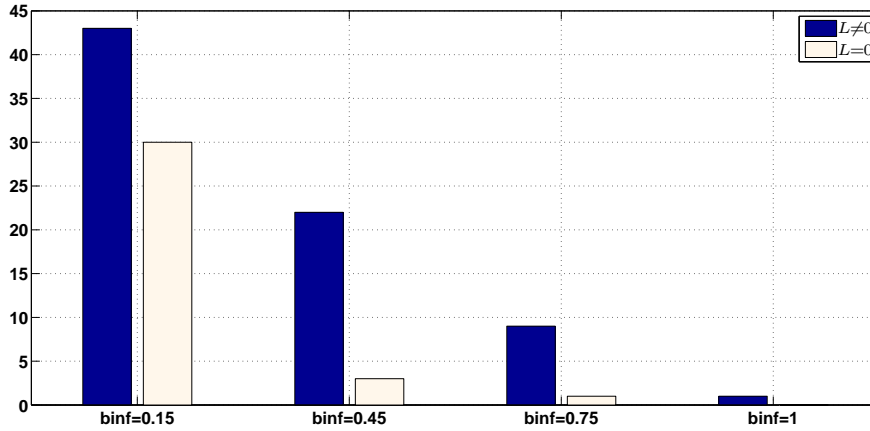


FIGURE 3.5 – Occurrences de convergence parmi 50 matrices  $E(x)$  aléatoires

Troisièmement, nous considérons  $\mathcal{P}_0 = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \times [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ,  $\mathcal{P}_1 = [-2, 2] \times [-2, 2]$ ,  $T_f = 5$  et  $d = 0.4$ . Le corollaire 3.3.1 avec  $L \neq 0$  et avec  $L = 0$  ne permet pas dans les deux cas d'assurer la FTB pour le système en boucle ouverte par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f, d)$ .

Pour garantir la FTB, une commande  $u$  est introduite pour le système (3.3) avec les matrices (3.143) pour obtenir un système de forme (3.119), où

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix}. \quad (3.144)$$

Dans la suite nous testons si les conditions du corollaire 3.3.3 permettent de synthétiser un retour d'état non linéaire  $u = K(x)x$  (3.101) tel que le système en boucle fermée est FTB par



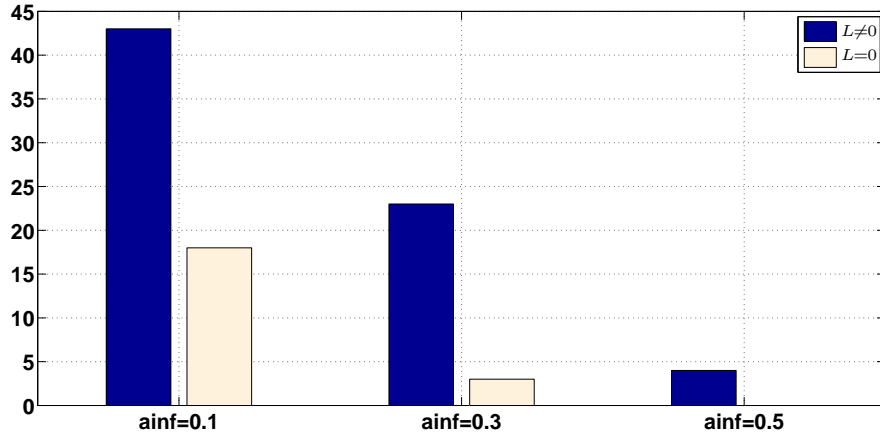


FIGURE 3.6 – Occurrences de convergence parmi 50 matrices  $A(x)$  aléatoires

rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f = 5, d = 0.4)$ , où  $\mathcal{P}_0 = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \times [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ,  $\mathcal{P}_1 = [-2, 2] \times [-2, 2]$ ,  $T_f = 5$  et  $d = 0.4$ .

En utilisant le corollaire 3.3.3 et en fixant  $\alpha = 0.1$ , le système (3.119) avec les matrices (3.143) et (3.144) est FTB stabilisable par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, T_f, d)$ . La matrice  $P_x$  et les gains du correcteur  $K(x) = K_0 + x_1 K_1 + x_2 K_2$  sont donnés par

$$P_x = \begin{pmatrix} 0.29223 & 0.10461 \\ 0.1046 & 0.29281 \end{pmatrix} \quad (3.145a)$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} -6.4625 & -10.843 \end{pmatrix} \quad (3.145b)$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} -0.088315 & 0.41494 \end{pmatrix} \quad (3.145c)$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} -0.0006783 & -0.62135 \end{pmatrix} \quad (3.145d)$$

Plusieurs trajectoires, partant de plusieurs états initiaux dans  $\mathcal{P}_0$  indiqués par des astérisques, sont tracées dans la figure 3.7 pour  $t \in [0, 5]$ . La figure 3.7 montre que les trajectoires issues de ces états initiaux dans  $\mathcal{P}_0$  ne quittent pas le polytope  $\mathcal{P}_1$  pour  $t \in [0, 5]$ .

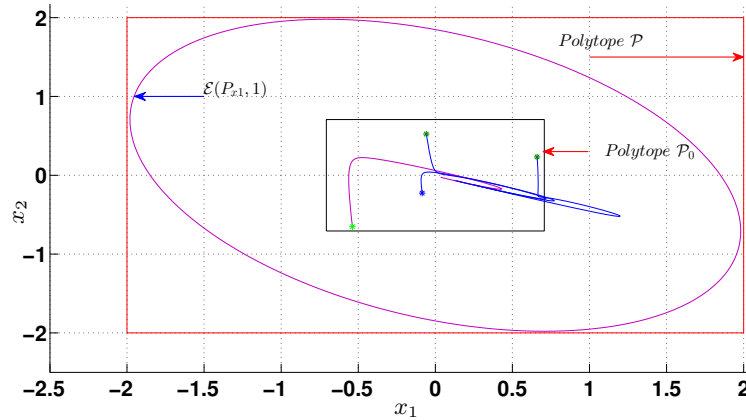


FIGURE 3.7 – Ellipsoïdes  $\mathcal{E}(P_{x1}, 1)$  et  $\mathcal{E}(P_{x2}, 1)$ , polytopes  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$ , et quelques trajectoires du système en boucle fermée

### **3.4 Conclusion**

Dans ce chapitre quatre problèmes ont été traités. Le premier problème concerne la détermination des conditions assurant la stabilité en temps fini des systèmes quadratiques non linéaires. Ces conditions ont été obtenues en considérant la notion d'annulateurs et une version du lemme de Finsler. Le deuxième problème traite la synthèse d'une commande non linéaire par retour d'état non linéaire assurant la stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques. Ce problème a été résolu. Les conditions de synthèse étaient exprimées en termes des LMIs. Le troisième problème évoque l'analyse de la bornitude en temps fini. Les résultats obtenus constituent une prolongation des résultats de la stabilité en temps fini aux cas des systèmes quadratiques perturbés. Le quatrième problème est le problème de la stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini des systèmes quadratiques perturbés. Les résultats obtenus sont exprimés en termes des LMIs. Tous ces résultats ont été testés par des exemples numériques.

## Chapitre 4

# Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques via des fonctions de Lyapunov polynomiales

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>4.2</b>	<b>Fonctions de Lyapunov . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>4.3</b>	<b>Etude de la stabilité et de la stabilisation en temps fini par fonction de Lyapunov polynomiale . . . . .</b>	<b>103</b>
4.3.1	Conditions de stabilité en temps fini des systèmes quadratiques . . . . .	103
4.3.1.1	Exemples numériques . . . . .	109
4.3.2	Conditions de bornitude en temps fini des systèmes quadratiques . . . . .	110
4.3.2.1	Exemple numérique . . . . .	113
4.3.3	Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques par retour d'état non linéaire . . . . .	115
4.3.3.1	Stabilisation en temps fini . . . . .	115
4.3.3.2	Stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini . . . . .	119
4.3.4	Exemples numériques . . . . .	121
<b>4.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>122</b>

---

## 4.1 Introduction

Les fonctions de Lyapunov sont un outil standard pour aborder le problème de l'analyse de la stabilité en temps fini et celui de la stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques. Les fonctions de Lyapunov quadratiques  $V(x) = x^T P x$  ont été considérées pour l'étude de différents problèmes de stabilité en temps fini, tel que la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires [AAD01, AAC03, AAC06a, AAC06b, MS09, XXX11, BDZ<sup>+</sup>15b, BDZ<sup>+</sup>15a] ou pour l'étude de la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques [ACM10, BDZA16]. Dans tous ces travaux, la stabilité en temps fini est définie en utilisant la norme quadratique pondérée conduisant à des domaines ellipsoïdaux, que ce soit pour les états initiaux ou pour les trajectoires. La définition de tels domaines s'avère intuitive et compatible puisqu'une fonction de Lyapunov quadratique définit un domaine ellipsoïdal. Cependant, dans certains cas pratiques, l'utilisation des domaines polytopiques, plutôt que des domaines ellipsoïdaux, s'impose. Comme, par exemple, dans le cas où on a des contraintes sur les variables d'états de la forme suivante :  $a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n$ . Dans ce cas, il est montré dans [AAAC07] et [ACM10] que l'utilisation des domaines ellipsoïdaux et par la suite d'une fonction de Lyapunov quadratique est conservative. Ainsi, dans [AAAC07] et [ACM10], des conditions assurant la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires invariants sont basées sur des fonctions de Lyapunov polyédriques  $V(x) = \max(P^T x)$ . Ces conditions sont non convexes, et par la suite, elles nécessitent une charge de calcul très élevée ce qui limite leur utilisation. Pour avoir un compromis entre les fonctions de Lyapunov quadratiques et les fonctions de Lyapunov polyédriques, nous proposons l'utilisation d'une classe de fonctions de Lyapunov quasi-quadratiques, ou polynomiales [CTF02a, CFTD08, TD14].

## 4.2 Fonctions de Lyapunov

Une fonction de Lyapunov quasi-quadratique s'écrit comme suit [Het07, El 12]...

$$V(x) = x^T P(x) x \quad (4.1)$$

où  $P(x)$  est une matrice fonction de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  composantes du vecteur d'état  $x$ .

Dans la suite du chapitre, nous prenons

$$P(x) = \Psi_2^T(x) P \Psi_2(x), \quad (4.2)$$

où la matrice  $\Psi_2$  est donnée par

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} \Pi(x) \\ I_n \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où

$$\Pi(x) = \begin{pmatrix} x_1 I_n & x_2 I_n & \dots & x_n I_n \end{pmatrix}^T \quad (4.4)$$

La matrice de Lyapunov  $P(x)$  (4.1) est alors une fonction polynomiale de second degré en  $x$ . Et donc la fonction de Lyapunov 4.1 n'est plus une fonction de Lyapunov quadratique. Ce type de fonction a été largement utilisée par Coutinho *et.al* [CTF02a, CTF02b, CBTS04, CFTD08] dans un contexte de stabilité asymptotique sous le nom de "fonction de Lyapunov polynomiale". Dans la suite, et conformément avec l'appellation dans [CTF02a, CTF02b], on l'utilise sous le nom de fonction de Lyapunov polynomiale.

Compte tenu des blocs de la matrice  $\Psi_2$ , la matrice  $P$  peut être décomposée comme suit

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

où  $P_0 = P_0^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^{n^2 \times n}$ ,  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$  sont des matrices constantes à déterminer.

Ainsi, suivant les contraintes sur les matrices  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ , on distingue les 3 classifications de la matrice  $P(x)$  :

- (i) Si  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  sont non nulles, alors  $P(x)$  est quadratique en  $x$ .
- (ii) Si  $P_0$ ,  $P_2$  sont non nulles et  $P_1 = 0$ , alors  $P(x)$  est affine en  $x$ .
- (iii) Si  $P_0$  est non nulle,  $P_1 = 0$  et  $P_2 = 0$ , alors  $P(x)$  est constante et  $V(x)$  est la fonction de Lyapunov quadratique utilisée dans le chapitre précédent.

### 4.3 Etude de la stabilité et de la stabilisation en temps fini par fonction de Lyapunov polynomiale

Dans cette section, nous commençons par présenter une nouvelle approche pour l'analyse de la stabilité en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques. Cette approche est basée sur les fonctions de Lyapunov polynomiales. Les conditions sont exprimées en termes de LMIs. Nous étendons ces résultats à l'analyse de la bornitude en temps fini des systèmes quadratiques perturbés. Dans un deuxième temps, avec la même approche, nous synthétisons des correcteurs garantissant la stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques non perturbés et perturbés.

#### 4.3.1 Conditions de stabilité en temps fini des systèmes quadratiques

Dans un contexte de stabilité en temps fini, l'utilisation des fonctions de Lyapunov polynomiales conduit à des conditions moins pessimistes que les fonctions de Lyapunov quadratiques [CTF02a, HBB08, CFTD08, TD14]. Amato *et al.* ont montré que l'utilisation des fonctions de Lyapunov polyédriques [AAAC10] pour l'analyse et la synthèse en temps fini est une bonne alternative qui, en général, est moins conservatrice. Cependant, cette approche ne permet pas d'exprimer les conditions en termes de LMIs, ce qui la rend non constructive. Afin de réduire le conservatisme introduit par des fonctions de Lyapunov lors de l'étude de la stabilité en temps fini des systèmes quadratiques, nous proposons d'utiliser des fonctions de Lyapunov polynomiales [CTF02a] (voir section 4.2).

Définissons le vecteur  $\zeta(x)$  comme suit

$$\zeta(x) = \Psi_2(x)x = \begin{pmatrix} \Pi(x) \\ I_n \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \Pi(x)x \\ x \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

La fonction de Lyapunov (4.1) s'écrit

$$V(x) = \zeta^T(x)P\zeta(x) \quad (4.7)$$

Afin de pouvoir appliquer le lemme 3.3.1, dérivons la fonction de Lyapunov (4.7) par rapport au temps  $t$

$$\dot{V}(x) = \dot{\zeta}(x)^T P \zeta(x) + \zeta(x)^T P \dot{\zeta}(x) \quad (4.8)$$

La dérivée  $\dot{\zeta}(x)$  de  $\zeta(x)$  s'écrit :

$$\dot{\zeta}(x) = \begin{pmatrix} \Pi(x)\dot{x} + \dot{\Pi}(x)x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Pour déduire  $\dot{\Pi}(x)$ , notons que  $\Pi(x)$  s'écrit comme suit

$$\Pi(x) = \sum_{i=1}^n x_i S_i \quad (4.10)$$

où  $S_i$  est la  $i$ -ème colonne de la matrice  $S \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$  définie par blocs comme suit :

$$S = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} & \cdots & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \cdots & 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

et donc  $\dot{\Pi}(x)$  est donnée par

$$\dot{\Pi}(x) = \sum_{i=1}^n S_i \dot{x}_i \quad (4.12a)$$

$$= \sum_{i=1}^n S_i s_i \dot{x} \quad (4.12b)$$

où  $s_i$  est la  $i$ -ème ligne de  $I_n$ . Soit finalement

$$\dot{\zeta}(x) = \Theta(x)\dot{x} = \Theta(x)A(x)x \quad (4.13)$$

où  $\Theta(x)$  est donnée par :

$$\Theta(x) = \begin{pmatrix} \Pi(x) + \sum_{i=1}^n S_i x s_i \\ I_n \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

En posant

$$\tilde{\Pi}(x) = \sum_{i=1}^n S_i x s_i, \quad (4.15)$$

$\Theta(x)$  s'écrit comme suit

$$\Theta(x) = \begin{pmatrix} \Pi(x) + \tilde{\Pi}(x) \\ I_n \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Afin d'exprimer  $\dot{\zeta}(x)$  en fonction de  $\zeta(x)$ , réécrivons  $A(x)x$

$$A(x)x = (A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i)x \quad (4.17a)$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 I_n \\ x_2 I_n \\ \vdots \\ x_n I_n \\ I_n \end{pmatrix} x \quad (4.17b)$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi(x) \\ I_n \end{pmatrix} x \quad (4.17c)$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n & A_0 \end{pmatrix} \Psi_2(x)x. \quad (4.17d)$$

En tenant compte de (4.6), et en posant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n & A_0 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

l'expression de  $A(x)x$  (4.17) s'écrit comme suit

$$A(x)x = \mathbb{A}\zeta(x) \quad (4.19)$$

et donc  $\dot{\zeta}(x)$  (4.13) devient

$$\dot{\zeta}(x) = \Theta(x)\mathbb{A}\zeta(x). \quad (4.20)$$

Compte tenu de (4.8) et (4.20), nous déduisons

$$\dot{V}(x) = \mathbb{A}^T \Theta^T(x) P \zeta(x) + \zeta^T(x) P \Theta(x) \mathbb{A} \zeta(x) \quad (4.21a)$$

$$= \zeta^T(x) (\mathbb{A}^T \Theta^T(x) P + P \Theta(x) \mathbb{A}) \zeta(x) \quad (4.21b)$$

Afin d'énoncer un nouveau théorème garantissant la stabilité en temps fini des systèmes linéaires quadratiques à partir des fonctions de Lyapunov polynomiales, nous définissons les matrices suivantes

$$N = \begin{pmatrix} 0_{n \times n^2} & I_n \end{pmatrix} \quad (4.22a)$$

$$\mathcal{N}_a(x) = \begin{pmatrix} x_2 I_n & -x_1 I_n & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & x_3 I_n & -x_2 I_n & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \dots & 0_n & x_n I_n & -x_{(n-1)} I_n \end{pmatrix} \quad (4.22b)$$

$$\Omega_1(x) = \begin{pmatrix} -I_{n^2} & \Pi(x) \end{pmatrix} \quad (4.22c)$$

$$\Omega_2(x) = \begin{pmatrix} \Omega_1(x) \\ \begin{pmatrix} \mathcal{N}_a(x) & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.22d)$$

$$\Omega_3(x) = \begin{pmatrix} x & -N \\ 0 & \Omega_1(x) \end{pmatrix} \quad (4.22e)$$

Il est facile de montrer que chaque matrice vérifie

$$N\zeta(x) = x \quad (4.23a)$$

$$\mathcal{N}_a(x)\Pi(x) = 0 \quad (4.23b)$$

$$\Omega_1(x)\zeta(x) = 0 \quad (4.23c)$$

$$\Omega_2(x)\zeta(x) = 0 \quad (4.23d)$$

$$\Omega_3(x) \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.23e)$$

Ainsi,  $\Omega_1(x)$  et  $\Omega_2(x)$  sont deux annulateurs linéaires de  $\zeta(x)$  et  $\Omega_3(x)$  est un annulateur de  $\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta(x) \end{pmatrix}$ .

**Théorème 4.3.1** (Stabilité en temps fini des systèmes quadratiques).

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$  et un scalaire positif  $T_f$ , le système (3.3) est stable en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}, T_f)$  s'il existe deux scalaires positifs  $\alpha, \mu$ , une matrice symétrique  $P \in \mathbb{R}^{(n+n^2) \times (n+n^2)}$ , des matrices  $L, L_2, M_1, \dots, M_q$  de dimensions appropriées tels que

$$P - \frac{1}{(\gamma + 1)\gamma e^{\alpha T_f}} I_{n+n^2} < 0 \quad (4.24a)$$

$$P + L\Omega_1(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + \Omega_1(x_{\mathcal{P}}^{(i)})^T L^T > 0, \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (4.24b)$$

$$\Phi_1(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + L_2\Omega_2(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + \Omega_2(x_{\mathcal{P}}^{(i)})^T L_2^T < 0, \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (4.24c)$$

$$\Lambda_k + M_k\Omega_3(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + \Omega_3(x_{\mathcal{P}}^{(i)})^T M_k^T \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, q\}, \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (4.24d)$$

avec

$$\Phi_1(x) = P\Theta(x)\mathbb{A} + \mathbb{A}^T\Theta(x)^T P - \alpha P, \quad (4.25a)$$

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} 2\mu - 1 & -\mu a_k^T N \\ -N^T \mu a_k & P \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \{1, \dots, q\}, \quad (4.25b)$$

$$\gamma = \max_i \left\| (x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}) \right\|^2. \quad (4.25c)$$

*Démonstration.*

Définissons la fonction de Lyapunov polynomiale comme dans (4.1)

$$V(x) = x^T P(x)x. \quad (4.26)$$

Soit  $\mathcal{E}_1$  l'ensemble défini par

$$\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\}. \quad (4.27)$$

Tout d'abord, nous allons montrer que la condition (4.24b) implique que  $V(x)$  est définie positive. En effet,  $V(x) > 0$  est équivalent à

$$\zeta(x)^T P \zeta(x) > 0, \quad \forall x \in \mathcal{P}. \quad (4.28)$$

Du fait que  $\Omega_1(x)$  est un annulateur de  $\zeta$ , et en appliquant le lemme de Finsler, une condition pour satisfaire (4.28) est l'existence d'une matrice  $L$  telle que

$$P + L\Omega_1(x) + \Omega_1(x)^T L^T > 0. \quad (4.29)$$



Du fait que  $\Omega_1(x)$  est affine par rapport aux variables  $x_1, \dots, x_n$ , et que le polytope  $\mathcal{P}$  est convexe, l'inégalité (4.29) est vérifiée pour tout  $x \in \mathcal{P}$  si l'ensemble des LMIs (4.24b) est garanti. Et par conséquent, les LMIs (4.24b) impliquent que  $V(x)$  est définie positive.

Maintenant, montrons que les LMIs (4.24d) impliquent  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{P}$ . En effet, vu la définition (4.27) de l'ensemble  $\mathcal{E}_1$  et la définition (3.38) du polytope  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{P}$  est équivalent à

$$a_k^T x \leq 1, \forall x : x^T P(x) x \leq 1, \forall k = 1, 2, \dots, q. \quad (4.30)$$

Cela revient à écrire que

$$2 - a_k^T x - x^T a_k \geq 0 \forall x : 1 - x^T P(x) x \geq 0, \forall k = 1, 2, \dots, q \quad (4.31)$$

qui n'est autre que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -a_k^T \\ -a_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \geq 0, \forall x : \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -P(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \geq 0, \forall k = 1, 2, \dots, q \quad (4.32)$$

En appliquant la S-procédure (voir annexe A, il existe  $\tau_1 \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 - \tau_1 & -a_k^T \\ -a_k & \tau_1 P(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \geq 0, \forall k = 1, 2, \dots, q \quad (4.33)$$

En posant  $\mu = \frac{1}{\tau_1}$ , l'inégalité (4.33) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2\mu - 1 & -\mu a_k^T \\ -\mu a_k & P(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \geq 0, \forall k = 1, 2, \dots, q \quad (4.34)$$

En développant (4.34), nous aurons

$$(2\mu - 1) - \mu a_k^T x - \mu a_k x^T + x^T P(x) x \geq 0 \quad (4.35)$$

qui est équivalent à

$$(2\mu - 1) - \mu a_k^T N \zeta - \zeta^T N^T \mu a_k + \zeta^T P \zeta \geq 0 \quad (4.36)$$

qui n'est autre que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2\mu - 1 & -\mu a_k^T N \\ -N^T \mu a_k & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \end{pmatrix} \geq 0, \forall k = 1, 2, \dots, q \quad (4.37)$$

Par le lemme de Finsler, une condition pour satisfaire (4.37) est l'existence des matrices  $M_k$  de dimensions appropriées telles que

$$\begin{pmatrix} 2\mu - 1 & -\mu a_k^T N \\ -N^T \mu a_k & P \end{pmatrix} + M_k \Omega_3(x) + \Omega_3(x)^T M_k^T \geq 0, \forall k = 1, 2, \dots, q, \forall x \in \mathcal{P} \quad (4.38)$$

où  $\Omega_3(x)$  est donnée par (4.22e).

Par convexité de  $\mathcal{P}$  et par linéarité de  $\Omega_3(x)$  par rapport aux composantes de  $x$ , nous déduisons que les conditions (4.24d) sont équivalentes à (4.38), et donc ils impliquent

$$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{P} \quad (4.39)$$

Maintenant, nous montrons que l'ensemble des conditions (4.24c) implique  $\dot{V}(x) - \alpha V(x) < 0$ . Vu l'expression (4.28) de  $V(x)$ , et celle (4.21b) de  $\dot{V}(x)$ , nous déduisons

$$\dot{V}(x) - \alpha V(x) = \zeta^T(x) \Phi_1(x) \zeta(x), \forall x \in \mathcal{P}. \quad (4.40)$$

Remarquons que  $\Phi_1(x)$  et  $\zeta(x)$  dépendent tous deux de  $x$ . Pour tenir compte de cette dépendance en  $x$ , nous proposons d'utiliser  $\Omega_2(x)$  comme annulateur de  $\zeta$ . En effet,  $\Omega_2(x)$  contient  $\Omega_1(x)$  et une ligne de plus. Cela permet d'obtenir des résultats moins pessimistes [TD14]. En appliquant le lemme de Finsler, une condition pour satisfaire (4.40) est l'existence d'une matrice  $L_2$  de dimension adéquate telle que

$$\Phi_1(x) + L_2 \Omega_2(x) + \Omega_2(x)^T L_2^T < 0, \forall x \in \mathcal{P} \quad (4.41)$$

qui est équivalente à (4.24c). Et par conséquent les conditions (4.24c) impliquent

$$\dot{V}(x) - \alpha V(x) < 0. \quad (4.42)$$

Il reste à montrer que (4.24a) garantit que  $V(x_0)e^{\alpha T_f} < 1$ .

L'inégalité (4.42) implique

$$V(x) \leq V(x(0))e^{\alpha t} < V(x(0))e^{\alpha T_f} \quad (4.43)$$

d'où

$$V(x(0))e^{\alpha T_f} \leq \zeta(x(0))^T P \zeta(x(0))e^{\alpha T_f} \quad (4.44a)$$

$$\leq \lambda_{\max}(P) \|\zeta(x(0))\|^2 e^{\alpha T_f} \quad (4.44b)$$

$$\leq \lambda_{\max}(P) \max_i \|\zeta(x_{\mathcal{P}_0}^{(i)})\|^2 e^{\alpha T_f} \quad (4.44c)$$

Cherchons un majorant à  $\|\zeta(x_{\mathcal{P}_0}^{(i)})\|^2$  :

$$\|\zeta(x_{\mathcal{P}_0}^{(i)})\|^2 \leq \left( \|(x_{\mathcal{P}_0}^{(i)})\|^2 + 1 \right) \|(x_{\mathcal{P}_0}^{(i)})\|^2. \quad (4.45)$$

Posons  $\max_i \|(x_{\mathcal{P}_0}^{(i)})\|^2 = \gamma$ , nous pouvons écrire

$$\max_i \|\zeta(x_{\mathcal{P}_0}^{(i)})\|^2 \leq (\gamma + 1)\gamma \quad (4.46)$$

et donc (4.44c) devient

$$V(x(0))e^{\alpha T_f} \leq \lambda_{\max}(P)(\gamma + 1)\gamma e^{\alpha T_f}. \quad (4.47)$$

En imposant  $\lambda_{\max}(P)(\gamma + 1)\gamma e^{\alpha T_f} < 1$ , nous garantissons que  $V(x(0))e^{\alpha T_f} < 1$ .

Notons qu'une contrainte LMI pour que (4.47) soit satisfaite est la condition (4.24a). Finalement, nous déduisons que la contrainte LMI (4.24a) garantit que

$$V(x(0))e^{\alpha T_f} < 1. \quad (4.48)$$

En utilisant (4.24a), nous obtenons ( $i = 1, \dots, p$ )

$$\zeta_{\mathcal{P}_0}^{(i)T} P \zeta_{\mathcal{P}_0}^{(i)} \leq \lambda_{\max}(P) \|\zeta_{\mathcal{P}_0}^{(i)}\|^2$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \lambda_{\max}(P) \max_i \left\| \zeta_{\mathcal{P}_0}^{(i)} \right\|^2 \\
 &\leq \lambda_{\max}(P) (\gamma + 1) \gamma e^{\alpha T_f} \\
 &\leq 1
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

et, par convexité, l'inégalité (4.49) équivaut à

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}_1. \tag{4.50}$$

Finalement, les conditions (4.24a), (4.24b), (4.24c) et (4.24d) garantissent respectivement les conditions (4.39), (4.42), (4.48) et (4.50).

Ce qui finit la démonstration. •

#### 4.3.1.1 Exemples numériques

Considérons le système (3.140) sans la perturbation extérieure  $w$ . Nous proposons de déterminer la valeur maximale de  $T_f$  qui assure la stabilité en temps fini, pour différents types de matrices de Lyapunov. Ceci revient à résoudre, pour  $\alpha$  fixé, un problème d'optimisation du paramètre  $T_f$  sous les contraintes du théorème 4.3.1.

En posant  $\beta = e^{-\alpha T_f}$ , la condition (4.24a) du théorème 4.3.1 où le paramètre  $T_f$  apparaît peut être transformée comme suit

$$P - \frac{\beta}{(\gamma + 1)\gamma} I_{n+n^2} < 0 \tag{4.51}$$

Ainsi le problème de maximisation de  $T_f$  sous contraintes se transforme en un problème de minimisation de  $\beta$  sous contraintes, comme suit

$$\begin{array}{ll}
 \underset{0 < \beta < 1}{\text{minimiser}} & \beta \\
 \text{sous} & (4.51), (4.24b), (4.24c) \text{ et } (4.24d).
 \end{array} \tag{4.52}$$

Afin d'illustrer l'effet du choix de la matrice de Lyapunov  $P$  sur la valeur maximale de  $T_f$  obtenue à partir du théorème 4.3.1, nous considérons les différents types de matrice de Lyapunov suivantes :

**Cas 1**  $P_0, P_1$  et  $P_2$  sont libres, c-à-d  $P(x)$  est quadratique en  $x$ .

**Cas 2**  $P_0, P_1$  sont libres et  $P_2 = 0$ , c-à-d  $P(x)$  est quadratique en  $x$ . Sachant que, dans ce deuxième cas, la matrice  $P(x)$  ne possède que des termes d'ordre 2 et d'ordre 0 en  $x$ .

**Cas 3**  $P_0, P_2$  sont libres et  $P_1 = 0$ , c-à-d  $P(x)$  est affine en  $x$ .

**Cas 4**  $P_0$  est libre,  $P_1 = 0$  et  $P_2 = 0$ , c-à-d  $P(x)$  est constante.

En optimisant  $T_f$  pour les 4 types de fonctions de Lyapunov précédentes, nous obtenons les résultats regroupés dans le tableau 4.1

Nous remarquons une augmentation de  $\max T_f$  en allant d'une fonction de Lyapunov polynomiale moins générale vers une fonction de Lyapunov polynomiale plus générale.

Une simulation est effectuée en considérant 10000 états initiaux générés aléatoirement dans le polytope  $\mathcal{P}_0$ . Ensuite, en considérant l'ensemble de toutes les trajectoires  $x(t)$  issues de ces 10000 états initiaux, le maximum de la valeur absolue de chaque composante  $x_i(t)$  de  $x(t)$  à chaque instant est tracé dans la figure 4.1. Cette figure montre que le premier instant où la trajectoire de

$P(x)$	$\max T_f$
Cas 1	7.1035
Cas 2	7.0681
Cas 3	6.5698
Cas 4	2.4732

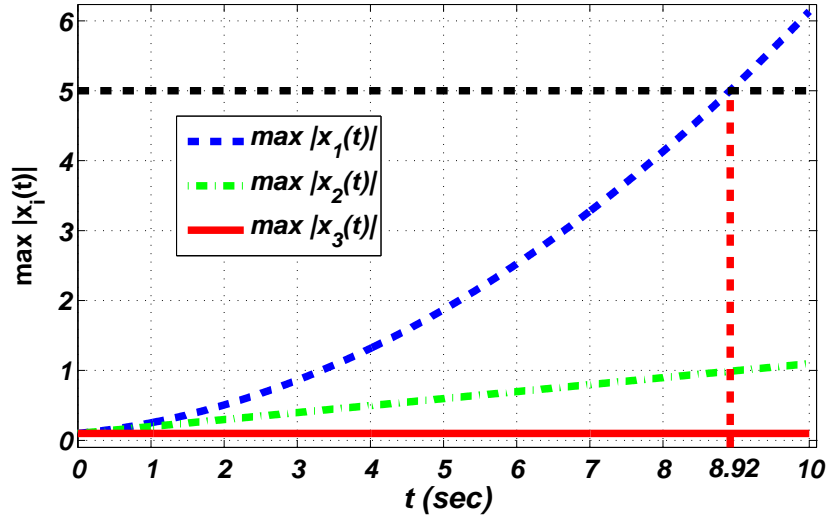
 TABLE 4.1 – Valeurs maximales de  $T_f$  obtenues pour différents types de  $P(x)$ 


FIGURE 4.1 – Réponse du système en boucle ouverte

$\max |x_1(t)|$  atteint 5 est 8.92 secondes. Ce qui est bien supérieur à toutes les valeurs de  $\max T_f$  des différents cas présentés dans le tableau 4.1.

Dans le tableau 4.2, nous présentons les valeurs propres et la valeur propre maximale de la matrice  $P$  pour les différents cas.

Le vecteur des valeurs propres de la matrice  $P$  dans les cas 1, 2 et 3 montre des valeurs négatives.  $P$  n'est pas contrainte à être définie positive comme le montre la condition (4.24b) du théorème 4.3.1.

Le domaine  $\mathcal{E}_1$  (4.27) est présenté dans la figure 4.2. On remarque que le domaine  $\mathcal{E}_1$  est une ellipsoïde seulement dans le cas 4 correspondant à la matrice  $P(x)$  constante. La forme de  $\mathcal{E}_1$  n'est pas une ellipsoïde dans les cas 1, 2, 3.

### 4.3.2 Conditions de bornitude en temps fini des systèmes quadratiques

Considérons le système perturbé suivant décrit par

$$\dot{x} = A(x)x + E(x)w, x(0) = x_0. \quad (4.53)$$

La matrice  $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est donnée par (3.4), et la matrice  $E(x) \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  est définie comme suit

$$E(x) = E_0 + \sum_{i=1}^n x_i E_i \quad (4.54)$$

4.3. Etude de la stabilité et de la stabilisation en temps fini par fonction de Lyapunov polynomiale

P(x)	Spectre de $P$	$\lambda_{\max}(P)$
<b>Cas 1</b>	$\begin{bmatrix} -0.047687 & -0.034227 & -0.00017715 & 0.014911 \\ & 0.049979 & 0.16646 & 0.30092 & 0.91323 \\ & & 0.91457 & 0.91795 & 0.92623 & 0.92792 \end{bmatrix}$	0.92792
<b>Cas 2</b>	$\begin{bmatrix} -0.0097358 & -0.00071869 & 0.0011463 & 0.0272 \\ & 0.034175 & 0.14295 & 0.23927 & 0.92974 \\ & & 0.93062 & 0.93893 & 0.94354 & 0.94454 \end{bmatrix}$	0.94454
<b>Cas 3</b>	$\begin{bmatrix} -0.016202 & -0.0089434 & -0.0016494 & -2.3843 \times 10^{-18} \\ & -4.7978 \times 10^{-19} & -3.6623 \times 10^{-20} & 6.8709 \times 10^{-21} & 2.1591 \times 10^{-19} \\ & & 1.0491 \times 10^{-18} & 0.048013 & 0.27151 & 1.2118 \end{bmatrix}$	1.2118
<b>Cas 4</b>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0.0399 & 0.88005 & 9.3937 \end{bmatrix}$	9.3937

TABLE 4.2 – Spectre et valeur propre maximale de  $P$  pour différents types de  $P(x)$

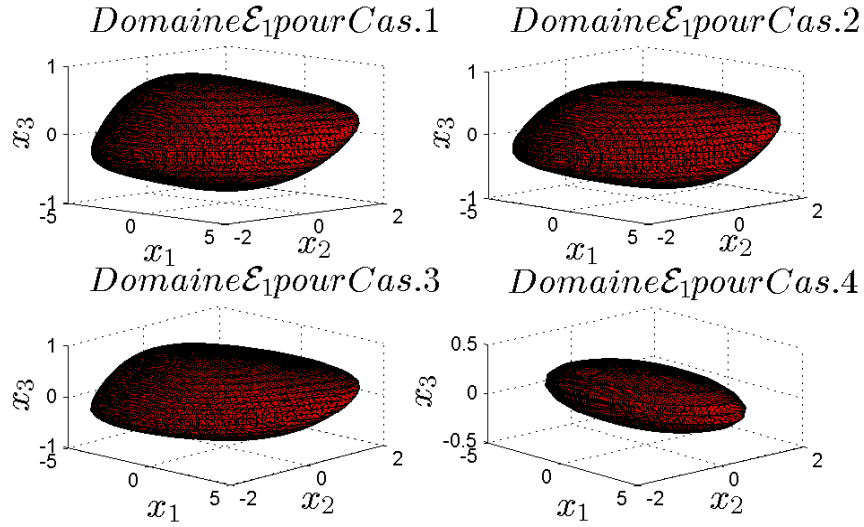


FIGURE 4.2 – Domaine  $\mathcal{E}_1$  pour différents types de fonctions de Lyapunov

avec  $E_i \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des matrices constantes et réelles.

Définissons les matrices suivantes

$$G(x) = \begin{pmatrix} I_{n^2} & -(\Pi(x) + \tilde{\Pi}(x)) \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad (4.55a)$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{A} \end{pmatrix} \quad (4.55b)$$

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ E(x) \end{pmatrix} \quad (4.55c)$$

$$\mathcal{N}_b(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_a & 0 \\ -I_{n^2} & \Pi(x) \end{pmatrix} \quad (4.55d)$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour garantir la bornitude en temps fini du système (4.53)

**Théorème 4.3.2** (Bornitude en temps fini d'un système quadratique).

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ , l'ensemble de perturbations  $\mathcal{W}_d^2$  (1.46) et un réel positif  $T_f$ , le système (4.53) est borné en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$  s'il existe des scalaires positifs  $\alpha, \mu, \mu_1, \mu_2$ , une matrice symétrique  $P \in \mathbb{R}^{(n+n^2) \times (n+n^2)}$ , une matrice symétrique, définie positive  $P_w \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ , des matrices  $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}, L_{31}, L_{32}, L_2, M_1, \dots, M_q$  de dimensions appropriées tels que,

$$P < \mu_1 I_{n+n^2} \quad (4.56a)$$

$$P_w < \mu_2 I_\ell \quad (4.56b)$$

$$(\mu_1 \gamma (\gamma + 1) + d \mu_2) e^{\alpha T_f} - 1 < 0 \quad (4.56c)$$

$$P + L \Omega_1(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + \Omega_1(x_{\mathcal{P}}^{(i)})^T L^T, > 0, \forall i = 1, \dots, p \quad (4.56d)$$

$$\Gamma(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) < 0, \forall i = 1, \dots, p \quad (4.56e)$$

$$\Lambda_k + M_k \Omega_3(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + \Omega_3(x_{\mathcal{P}}^{(i)})^T M_k^T \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, q\}, \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad (4.56f)$$

où

$$\Gamma(x) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(x) & \Gamma_{12}(x) & \Gamma_{13}(x) \\ \Gamma_{12}^T(x) & \Gamma_{22}(x) & \Gamma_{23}(x) \\ \Gamma_{13}^T(x) & \Gamma_{23}^T(x) & \Gamma_{33}(x) \end{pmatrix} \quad (4.57a)$$

$$\Gamma_{11}(x) = -L_{11}G(x) - G^T(x)L_{11}^T \quad (4.57b)$$

$$\Gamma_{12}(x) = P + L_{11}H(x) + L_{12}\mathcal{N}_b(x) - G^T(x)L_{21}^T \quad (4.57c)$$

$$\Gamma_{13}(x) = L_{11}H_1(x) - G(x)L_{31}^T \quad (4.57d)$$

$$\Gamma_{22}(x) = -\alpha P + L_{21}H(x) + L_{22}\mathcal{N}_b(x) + H^T(x)L_{21}^T + \mathcal{N}_b^T(x)L_{22}^T \quad (4.57e)$$

$$\Gamma_{23}(x) = L_{21}H_1(x) + H^T(x)L_{31}^T + \mathcal{N}_b^T(x)L_{32}^T \quad (4.57f)$$

$$\Gamma_{33}(x) = -P_w + L_{31}H_1(x) + H_1^T(x)L_{31}^T \quad (4.57g)$$

*Démonstration.* Définissons la fonction de Lyapunov comme dans (4.26) et l'ensemble  $\mathcal{E}_1$  comme dans (4.27).

En suivant la même démarche que la démonstration précédente, il ne reste à montrer que

$$\dot{V}(x) - \alpha V(x) - w^T P_w w < 0 \quad (4.58)$$

$$\dot{V}(x) - \alpha V(x) - w^T P_w w = \dot{\zeta}^T(x) P \zeta(x) + \zeta(x)^T P \dot{\zeta}(x) - \alpha \zeta^T(x) P \zeta(x) w^T P_w w \quad (4.59a)$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\zeta}^T(x) & \zeta(x)^T & w^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P & 0 \\ P & -\alpha P & 0 \\ 0 & 0 & -P_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\zeta}(x) \\ \zeta(x) \\ w \end{pmatrix} \quad (4.59b)$$

L'équation (4.53) s'écrit comme suit

$$-\dot{x} + A(x)x + E(x)w = 0 \quad (4.60)$$

Rappelons que  $A(x)x = \mathbb{A}\zeta(x)$  et l'expression (4.22a) de la matrice  $N$ . Nous en déduisons

$$-N\dot{\zeta} + \mathbb{A}\zeta(x) + E(x)w = 0 \quad (4.61)$$

En outre, remarquons que

$$\begin{pmatrix} I_{n^2} & -(\Pi(x) + \tilde{\Pi}(x)) \end{pmatrix} \dot{\zeta}(x) = 0 \quad (4.62a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_a & 0 \end{pmatrix} \zeta(x) = 0 \quad (4.62b)$$

$$\begin{pmatrix} -I_{n^2} & \Pi(x) \end{pmatrix} \zeta(x) = 0 \quad (4.62c)$$

Nous déduisons

$$\mathcal{N}_t(x) = \begin{pmatrix} -G & H & H_1 \\ 0 & \mathcal{N}_b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\zeta}(x) \\ \zeta(x) \\ w \end{pmatrix} = 0 \quad (4.63)$$

donc  $\mathcal{N}_t(x)$  est un annulateur de  $\begin{pmatrix} \dot{\zeta}(x) \\ \zeta(x) \\ w \end{pmatrix}$

Par le lemme de Finsler, une condition pour garantir  $\dot{V}(x) - \alpha V(x) - w^T P_w w < 0$  est l'existence d'une matrice  $L_2 = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \\ L_{31} & L_{32} \end{pmatrix}$  telle que

$$\begin{pmatrix} 0 & P & 0 \\ P & -\alpha P & 0 \\ 0 & 0 & -P_w \end{pmatrix} + L\mathcal{N}_t(x) + \mathcal{N}_t^T(x)L^T < 0. \quad (4.64)$$

En développant et par convexité du polytope  $\mathcal{P}_1$ , nous obtenons exactement la condition (4.56e). •

#### 4.3.2.1 Exemple numérique

Considérons l'exemple numérique (3.140) de la section précédente. Fixons  $d = 0.3$ , nous allons déterminer pour chaque type de fonction de Lyapunov la valeur maximale de  $T_f$ . Pour déterminer la valeur maximale de  $T_f$ , nous résolvons numériquement un problème d'optimisation sous contraintes pour différents types de fonctions de Lyapunov. En posant  $\beta = e^{-\alpha T_f}$ , la

condition (4.56c) du théorème 4.3.2, où le paramètre  $T_f$  apparaît, peut être transformée comme suit

$$(\mu_1\gamma(\gamma + 1) + d\mu_2) - \beta < 0. \quad (4.65)$$

Ainsi le problème de maximisation de  $T_f$  sous contraintes se transforme en un problème de minimisation de  $\beta$  sous contraintes, comme suit

$$\begin{array}{ll} \underset{0 < \beta < 1}{\text{minimiser}} & \beta \\ \text{sous} & (4.56a), (4.56b), (4.56d), (4.56e) (4.56f) \text{ et } (4.65). \end{array} \quad (4.66)$$

Notons que le théorème 3.3.2 de bornitude en temps fini avec une matrice de Lyapunov constante et le théorème 4.3.2 utilisent deux représentations différentes du même système quadratique.

Nous appliquons la même procédure d'optimisation de  $T_f$  (4.66) au théorème 3.3.2, avec et sans annulateur. Pour bien présenter les résultats, nommons *Cas 5* le cas correspondant à l'optimisation déduite du théorème 3.3.2 avec annulateur ( $L$  à déterminer), et le *Cas 6* celui correspondant à l'optimisation déduite du même théorème sans annulateur ( $L = 0$ ).

P(x)	$\alpha$	$\max \max T_f$
<b>Cas 1</b>	1.3	2.245
<b>Cas 2</b>	1.3	2.044
<b>Cas 3</b>	1.3	2.029
<b>Cas 4</b>	3.1	0.94929
<b>Cas 5</b>	1.9	1.1204
<b>Cas 6</b>	3.1	0.9544

TABLE 4.3 – Valeur maximale de  $\max T_f$  pour différents types de  $P(x)$

Le tableau 4.3 montre que la valeur maximale de  $\max T_f$  est obtenue grâce à une fonction polynomiale pleine. L'utilisation d'une fonction de Lyapunov affine montre de meilleurs résultat par rapport à une fonction de Lyapunov constante, que ce soit en utilisant un annulateur ou sans annulateur.

Une simulation est effectuée en considérant 10000 états initiaux générés aléatoirement dans le polytope  $\mathcal{P}_0$ . La perturbation est donnée par  $w(t) = \sqrt{2.4}e^{-t}\sin(t)$ . Ensuite, en considérant l'ensemble de toutes les trajectoires  $x(t)$  issues de ces 10000 états initiaux, le maximum de la valeur absolue de chaque composante  $x_i(t)$  de  $x(t)$  à chaque instant est tracé dans la Figure 4.1. Cette figure montre que le premier instant où la trajectoire de  $\max |x_1(t)|$  atteint 5 est 3.44 secondes, ce qui est bien strictement supérieur à toutes les valeurs de  $\max T_f$  des différents cas présentés dans le tableau 4.3.

Dans cette section, nous avons développé une nouvelle approche basée sur des fonctions de Lyapunov polynomiales pour déduire des nouvelles conditions garantissant la stabilité en temps fini et la bornitude en temps fini des systèmes nonlinéaires quadratiques. Ces nouvelles conditions étaient exprimées en termes de LMIs. A travers des exemples numériques, nous avons montré que notre approche basée sur des fonctions de Lyapunov polynomiales est moins pessimiste que l'approche basée sur des fonctions de Lyapunov quadratiques.

Dans la suite nous étendons l'approche basée sur des fonctions de Lyapunov polynomiales pour synthétiser des correcteurs assurant la stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques non perturbés et perturbés.



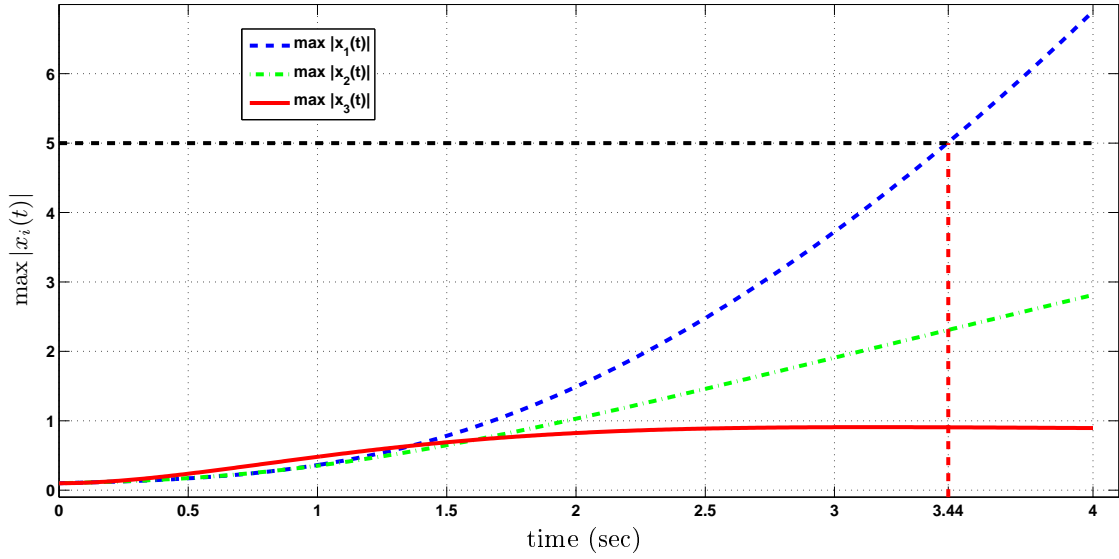


FIGURE 4.3 – Réponse du système en boucle ouverte

### 4.3.3 Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques par retour d'état non linéaire

Dans cette section nous essayons de développer de nouvelles conditions garantissant la stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques perturbés et non perturbés. Pour cela nous utilisons des fonctions de Lyapunov polynomiales. Dans un premier temps nous nous intéressons au problème de stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques non perturbés. Dans un deuxième temps nous étudions le problème de stabilisation avec bornitude en temps fini des systèmes quadratiques perturbés. Dans les deux cas, nous aboutissons à des conditions exprimées en termes de BMIs. Pour une résolution pratique de ces BMIs, nous proposons un algorithme original dans le contexte de stabilité en temps fini. Nous finissons cette section par des exemples numériques. Ces derniers montrent l'efficacité de notre approche basée sur des fonctions de Lyapunov polynomiales ainsi que la méthodologie proposée pour une mise en oeuvre pratique.

#### 4.3.3.1 Stabilisation en temps fini

Dans la suite, les résultats donnés par le théorème 4.3.1 sont étendus à la stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques. Pour cela considérons le système quadratique suivant

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad x(0) = x_0. \quad (4.67)$$

La matrice  $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est donnée par (3.4), et la matrice  $B(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est définie comme suit

$$B(x) = B_0 + \sum_{i=1}^n x_i B_i \quad (4.68)$$

où  $B_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des matrices constantes et réelles,  $x \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $x_0 \in \mathcal{P}_0 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}$  sont des régions polytopiques de l'espace d'état telles que  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ .

Pour stabiliser le système dynamique en boucle ouverte (4.67), l'entrée de commande  $u \in \mathbb{R}^m$  est définie par

$$u = K(x)x \quad (4.69)$$

avec

$$K(x) = K_0 + \sum_{i=1}^n x_i K_i \quad (4.70)$$

où  $K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des matrices réelles et constantes à déterminer.

Vu les équations (4.67) et (4.70), le système en boucle fermée est donné par

$$\dot{x} = [A(x) + B(x)K(x)]x. \quad (4.71)$$

Remarquons que  $A(x)$  et  $K(x)$  s'écrivent comme suit

$$A(x) = \mathbb{A}\Psi_2(x) \quad (4.72a)$$

$$K(x) = \mathbb{K}\Psi_2(x) \quad (4.72b)$$

où  $\Psi_2$  est donné par (4.3) et

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n & A_0 \end{pmatrix} \quad (4.73a)$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_n & K_0 \end{pmatrix} \quad (4.73b)$$

alors (4.71) devient

$$\dot{x} = [\mathbb{A} + B(x)\mathbb{K}]\Psi_2(x)x. \quad (4.74)$$

Nous définissons les matrices suivantes.

$$G(x) = \begin{pmatrix} I_{n^2} & -(\Pi(x) + \tilde{\Pi}(x)) \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad (4.75a)$$

$$\tilde{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{A} + B(x)\mathbb{K} \end{pmatrix} \quad (4.75b)$$

$$\mathcal{N}_b(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_a & 0 \\ -I_{n^2} & \Pi(x) \end{pmatrix} \quad (4.75c)$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour déterminer la matrice gain  $K(x)$  qui garantit la stabilité en temps fini du système (4.71).

**Théorème 4.3.3** (Stabilisation en temps fini des systèmes quadratiques).

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}$  et un scalaire positif  $T_f$ , le système (4.71) est stable en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}, T_f)$  s'il existe des scalaires positifs  $\alpha, \mu$ , une matrice symétrique  $P \in \mathbb{R}^{(n+n^2) \times (n+n^2)}$ , des matrices  $L, L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}, M_1, \dots, M_q, \mathbb{K}$  de dimensions appropriées tels que

$$P - \frac{1}{(\gamma + 1)\gamma e^{\alpha T_0}} I_{n+n^2} < 0 \quad (4.76a)$$

$$P + L\Omega_1(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + \Omega_1(x_{\mathcal{P}}^{(i)})^T L^T, > 0, \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (4.76b)$$

$$\Lambda(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (4.76c)$$

$$\Lambda_k + M_k\Omega_3(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + \Omega_3(x_{\mathcal{P}}^{(i)})^T M_k^T \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, q\}, \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (4.76d)$$

avec

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{12}^T & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \quad (4.77a)$$

$$\Lambda_{11}(x) = -L_{11}G(x) - G^T(x)L_{11}^T \quad (4.77b)$$

$$\Lambda_{12}(x) = P + L_{11}\tilde{H}(x) + L_{12}\mathcal{N}_b(x) - G^T(x)L_{21}^T \quad (4.77c)$$

$$\Lambda_{22}(x) = -\alpha P + L_{21}\tilde{H}(x) + L_{22}\mathcal{N}_b(x) + \tilde{H}^T(x)L_{21}^T + \mathcal{N}_b^T(x)L_{22}^T \quad (4.77d)$$

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} 2\mu - 1 & -\mu a_k^T N \\ -N^T \mu a_k & P \end{pmatrix}, \forall k \in \{1, \dots, q\} \quad (4.77e)$$

$$\gamma = \max_i \left\| (x_{\mathcal{P}_0}^{(i)}) \right\|^2 \quad (4.77f)$$

*Démonstration.*

Définissons la fonction de Lyapunov polynomiale comme dans (4.1)

$$V(x) = x^T P(x) x \quad (4.78a)$$

$$= \zeta^T(x) P \zeta(x). \quad (4.78b)$$

Soit  $\mathcal{E}_1$  l'ensemble défini comme en (4.27) par

$$\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\}. \quad (4.79)$$

Grâce au lemme de Finsler, la condition (4.76b) garantit que  $V(x) > 0$ . Dérivons  $V(x)$  par rapport au temps, nous obtenons

$$\dot{V}(x) = \dot{\zeta}^T(x) P \zeta(x) + \zeta(x)^T P \dot{\zeta}(x) \quad (4.80)$$

et donc

$$\dot{V}(x) - \alpha V(x) = \dot{\zeta}^T(x) P \zeta(x) + \zeta(x)^T P \dot{\zeta}(x) - \alpha \zeta^T(x) P \zeta(x) \quad (4.81a)$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\zeta}^T(x) & \zeta(x)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P \\ P & -\alpha P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\zeta}(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix}. \quad (4.81b)$$

Du fait de l'équation (4.74) et de l'expression (4.22a) de la matrice  $N$ , nous déduisons

$$[\mathbb{A} + B(x)\mathbb{K}]\Psi_2(x)x - \dot{x} = 0 \quad (4.82a)$$

$$-N\dot{\zeta}(x) + [\mathbb{A} + B(x)\mathbb{K}]\zeta(x) = 0. \quad (4.82b)$$

De plus, remarquons que

$$\begin{pmatrix} I_{n^2} & -(\Pi(x) + \tilde{\Pi}(x)) \end{pmatrix} \dot{\zeta}(x) = 0 \quad (4.83a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_a & 0 \end{pmatrix} \zeta(x) = 0 \quad (4.83b)$$

$$\begin{pmatrix} -I_{n^2} & \Pi(x) \end{pmatrix} \zeta(x) = 0. \quad (4.83c)$$

Nous déduisons

$$\mathcal{N}_t(x) = \begin{pmatrix} -G & \tilde{H} \\ 0 & \mathcal{N}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\zeta}(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.84)$$

donc  $\mathcal{N}_t(x)$  est un annulateur de  $\begin{pmatrix} \dot{\zeta}(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} = 0$ .

Et par le lemme de Finsler, une condition pour garantir  $\dot{V}(x) - \alpha V(x) < 0$  est l'existence d'une matrice  $L_2 = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$  telle que

$$\begin{pmatrix} 0 & P \\ P & -\alpha P \end{pmatrix} + L_2 \mathcal{N}_t(x) + \mathcal{N}_t^T(x) L_2^T < 0. \quad (4.85)$$

En développant et par convexité du polytope  $\mathcal{P}$ , nous obtenons exactement la condition (4.76c). Comme déjà vu dans la démonstration du théorème 4.3.1, la condition (4.76d) garantit que  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{P}$ , et la condition (4.76a) garantit que  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{E}_1$  et que chaque trajectoire qui commence dans  $\mathcal{P}_0$  ne quitte pas  $\mathcal{E}_1$ . Ce qui finit la démonstration. •

En posant  $\beta = e^{-\alpha T_f}$ , la condition (4.76a) du théorème 4.3.3 où le paramètre  $T_f$  apparaît peut être transformée comme suit

$$P - \frac{\beta}{(\gamma + 1)\gamma} I_{n+n^2} < 0. \quad (4.86)$$

Ainsi le problème de maximisation de  $T_f$  sous contraintes se transforme en un problème de minimisation de  $\beta$  sous contraintes comme suit

$$\begin{array}{ll} \underset{0 < \beta < 1}{\text{minimiser}} & \beta \\ \text{sous} & (4.86), (4.76b), (4.76c) \text{ et } (4.76d). \end{array} \quad (4.87)$$

La condition (4.76c) du théorème 4.3.3 n'est pas une condition convexe à cause de produits des variables inconnues à déterminer  $L_{11}$  et  $\mathbb{K}$  figurant dans  $\tilde{H}$  d'une part, et  $L_{21}$  et  $\mathbb{K}$  d'autre part. Ainsi, à cause de la bilinéarité des variables figurant dans la condition (4.76c), les deux problèmes 4.3.3 et (4.87) sont deux problèmes d'optimisation sous contraintes BMIs (Bilinear Matrix Inequalities). Les problèmes BMIs sont des problèmes NP-difficiles. Cela signifie que tout algorithme qui résout un problème BMI n'est pas un algorithme à complexité en temps polynomial [VB00, Sco14]. Il existe différentes approches pour résoudre un problème d'optimisation sous contraintes BMIs. On peut les classer en deux grandes approches : l'approche globale [FK01], [GSP94], [TA00], [YH98] et l'approche locale [GS96], [HHB99], [IT01], [Iwa99]. La plupart des algorithmes globaux sont des variantes de l'algorithme dit "Branch and Bound" [FK01]. La difficulté majeure des algorithmes globaux est la complexité de calcul. Tous ces algorithmes ont une complexité de calcul non polynomiale. En conséquence, l'approche globale n'est applicable que pour des problèmes avec un nombre réduit de variables de décision [TA00]. Le plupart des algorithmes locaux existants sont moins contraignants du point de vue complexité de calcul que ceux de l'approche globale [VB00]. Cependant, ils dépendent des valeurs initiales à attribuer aux variables de problème. De ce fait, la convergence vers l'optimum global n'est pas garantie [VB00] [GJ79], [PS82a]. Plusieurs chercheurs ont proposé différentes méthodes relatives à l'approche locale [GS96], [HHB99], [IT01], [Iwa99]. Cependant l'idée la plus simple découle du fait qu'en fixant certaines variables  $y$ , la BMI devient convexe par rapport aux variables restantes  $x$  et vice versa. Et par itération entre ces deux étapes, la BMI peut converger [Iwa99].

Dans la suite, nous proposons une méthode itérative basée sur cette simple idée pour résoudre le problème d'optimisation 4.3.3. En général, la difficulté réside dans la détermination

des valeurs initiales de  $T_{f0}$ , de  $\mathbb{K}$  et de  $L_{11}, L_{12}$  pour entamer la procédure de résolution itérative du problème d'optimisation sous contraintes BMIs. Pour cette étape d'initialisation, nous proposons une procédure adéquate en contexte de stabilité en temps fini : En effet, dans une première étape nous déterminons la valeur maximale de  $T_{f0}$  et  $L_{11}, L_{12}$  garantissant la stabilité en temps fini du système en boucle ouverte en résolvant le problème d'optimisation (4.52). Dans une seconde étape, et pour  $T_{f0}$  et  $L_{11}, L_{12}$  déduits de l'étape précédente, nous déterminons  $\mathbb{K}$  assurant la stabilisation en temps fini du système en boucle fermée par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}, T_{f0})$  par résolution des LMIs (4.76a), (4.76b), (4.76c) et (4.76d). L'étape 3 consiste en la détermination de nouveau, de  $L_{11}, L_{12}$  en résolvant les LMIs (4.76a), (4.76b), (4.76c) et (4.76d) pour  $\mathbb{K}$  déduite de l'étape 2. Dans la quatrième étape, nous optons à la détermination de  $T_{f0}$  et de  $\mathbb{K}$  par résolution des LMIs (4.76a), (4.76b), (4.76c) et (4.76d). A la fin de cette procédure d'initialisation, nous possédons des valeurs initiales de  $T_{f0}$ ,  $L_{11}, L_{12}$  et  $\mathbb{K}$ , et nous pouvons commencer notre procédure itérative qui comporte trois étapes. Dans la première étape nous déterminons,  $L_{11}, L_{12}$  en résolvant les LMIs (4.76a), (4.76b), (4.76c) et (4.76d) sachant  $T_{f0}$  et  $\mathbb{K}$ . Dans la deuxième étape, nous résolvons les LMIs (4.76a), (4.76b), (4.76c) et (4.76d) pour déterminer de nouveau  $T_{f0}$  et  $\mathbb{K}$ . Dans la troisième étape, nous incrémentons  $T_{f0}$  par un  $\epsilon_1 > 0$  très petit et fixé à l'avance. Nous itérons ces trois étapes jusqu'à ce que  $T_{f0} > T_f + \epsilon$ , où  $\epsilon$  est un nombre très petit, astuce numérique assurant que  $T_{f0} \geq T_f$ .

**Algorithme 4.3.1.**

- **Etape 0.**  
Fixer  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}, d, T_f)$ .
- **Etape 1.**  
Déterminer  $T_{f0}$  et  $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$  par résolution du problème (4.52).
- **Etape 2.**  
Pour  $T_{f0}, L_{11}$  et  $L_{21}$  déduit de *Étape 1*, déterminer  $\mathbb{K}$  par résolution des LMIs (4.76a), (4.76b), (4.76c) et (4.76d).
- **Etape 3.**  
Pour  $T_{f0}$  déduit de *Étape 1* et  $\mathbb{K}$  déduit de *Étape 2*, déterminer  $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$  par résolution des LMIs (4.76a), (4.76b), (4.76c) et (4.76d).
- **Etape 4.**  
Pour  $L_{11}$  et  $L_{21}$  déduit de *Étape 3*, déterminer  $\mathbb{K}$  par résolution des LMIs (4.76a), (4.76b), (4.76c) et (4.76d).
- **Etape 5.**  
  **while**  $T_{f0} < T_f + \epsilon$  **do**  
     $T_{f0} + \epsilon_1$   
    **Etape 3.**  
    **Etape 4.**  
  **end while**

**4.3.3.2 Stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini**

Dans la suite, les résultats donnés par le théorème 4.3.3 sont étendus à la stabilisation avec bornitude en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques perturbés. Pour cela, considérons le système quadratique suivant

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + E(x)w, x(0) = x_0. \quad (4.88)$$

Pour stabiliser le système dynamique en boucle ouverte (4.88), l'entrée de commande  $u \in \mathbb{R}^m$  est remplacée comme dans (4.69) par

$$u = K(x)x \quad (4.89)$$

Pour énoncer le théorème garantissant la stabilisation avec bornitude en temps fini, définissons les matrices suivantes

$$G(x) = \begin{pmatrix} I_{n^2} & -(\Pi(x) + \tilde{\Pi}(x)) \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad (4.90a)$$

$$\bar{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{A} + B(x)\mathbb{K} \end{pmatrix} \quad (4.90b)$$

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ E(x) \end{pmatrix} \quad (4.90c)$$

$$\mathcal{N}_b(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_a & 0 \\ -I_{n^2} & \Pi(x) \end{pmatrix} \quad (4.90d)$$

**Théorème 4.3.4** (stabilisation avec bornitude en temps fini des systèmes quadratiques).

Étant donné deux polytopes  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ , l'ensemble  $\mathcal{W}_d^2$  et un réel positif  $T_f$ , le système (4.53) est borné en temps fini par rapport à  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{W}_d^2, T_f)$  s'il existe des scalaires positifs  $\alpha, \mu, \mu_1, \mu_2$ , une matrice symétrique  $P \in \mathbb{R}^{(n+n^2) \times (n+n^2)}$ , une matrice symétrique définie positive  $P_w \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ , des matrices  $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}, L_{31}, L_{32}, L, M_1, \dots, M_k, \mathbb{K}$  de dimensions appropriées tels que

$$P < \mu_1 I_{n+n^2} \quad (4.91a)$$

$$P_w < \mu_2 I_\ell \quad (4.91b)$$

$$(\mu_1 \gamma(\gamma + 1) + d\mu_2) e^{\alpha T_f} - 1 < 0 \quad (4.91c)$$

$$P + L\Omega_1(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + \Omega_1(x_{\mathcal{P}}^{(i)})^T L^T, > 0, \forall i = 1, \dots, p \quad (4.91d)$$

$$\Gamma(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) < 0, \forall i = 1, \dots, p \quad (4.91e)$$

$$\Lambda_k + M_k \Omega_3(x_{\mathcal{P}}^{(i)}) + \Omega_3(x_{\mathcal{P}}^{(i)})^T M_k^T \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, q\}, \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (4.91f)$$

où

$$\Gamma(x) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(x) & \Gamma_{12}(x) & \Gamma_{13}(x) \\ \Gamma_{12}^T(x) & \Gamma_{22}(x) & \Gamma_{23}(x) \\ \Gamma_{13}^T(x) & \Gamma_{23}^T(x) & \Gamma_{33}(x) \end{pmatrix} \quad (4.92a)$$

$$\Gamma_{11}(x) = -L_{11}G(x) - G^T(x)L_{11}^T \quad (4.92b)$$

$$\Gamma_{12}(x) = P + L_{11}\bar{H}(x) + L_{12}\mathcal{N}_b(x) - G^T(x)L_{21}^T \quad (4.92c)$$

$$\Gamma_{13}(x) = L_{11}H_1(x) - G(x)L_{31}^T \quad (4.92d)$$

$$\Gamma_{22}(x) = -\alpha P + L_{21}\bar{H}(x) + L_{22}\mathcal{N}_b(x) + \bar{H}^T(x)L_{21}^T + \mathcal{N}_b^T(x)L_{22}^T \quad (4.92e)$$

$$\Gamma_{23}(x) = L_{21}H_1(x) + \bar{H}^T(x)L_{31}^T + \mathcal{N}_b^T(x)L_{32}^T \quad (4.92f)$$

$$\Gamma_{33}(x) = -P_w + L_{31}H_1(x) + H_1^T(x)L_{31}^T \quad (4.92g)$$

*Démonstration.* La démonstration est la même que la démonstration 4.3.2 •

En posant  $\beta = e^{-\alpha T_f}$ , la condition (4.91c) du théorème 4.3.4 où le paramètre  $T_f$  apparaît peut être transformée comme suit

$$(\mu_1 \gamma (\gamma + 1) + d \mu_2) - \beta < 0 \quad (4.93)$$

Ainsi le problème de maximisation de  $T_f$  sous contraintes se transforme en un problème de minimisation de  $\beta$  sous contraintes, comme suit

$$\begin{array}{ll} \underset{0 < \beta < 1}{\text{minimiser}} & \beta \\ \text{sous} & (4.91a), (4.91b), (4.91d), (4.91e) (4.91f) \text{ et } (4.93) \end{array} \quad (4.94)$$

Le théorème 4.3.4 et le problème (4.94) sont deux problèmes d'optimisation sous contraintes BMIs. Pour résoudre ce deux problèmes, nous procédons de la même manière que l'algorithme 4.3.1. L'algorithme de résolution peut être résumé comme suit

**Algorithme 4.3.2.**

- **Etape 0.**  
Fixer  $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}, T_f)$ .
- **Etape 1.**  
Déterminer  $T_{f0}$  et  $L_{11}, L_{21}, L_{31}$  par résolution du problème (4.66).
- **Etape 2.**  
Pour  $T_{f0}$ , et  $L_{11}, L_{21}, L_{31}$  déduit de *Étape 1*, déterminer  $\mathbb{K}$  par résolution des LMIs (4.91a), (4.91b), (4.91c), (4.91d), (4.91e) et (4.91f).
- **Etape 3.**  
Pour  $T_{f0}$  déduit de *Étape 1* et  $\mathbb{K}$  déduit de *Étape 2*, déterminer  $L_{11}, L_{21}, L_{31}$  par résolution des LMIs (4.91a), (4.91b), (4.91c), (4.91d), (4.91e) et (4.91f).
- **Etape 4.**  
Pour  $L_{11}, L_{21}, L_{31}$  déduit de *Étape 3*, déterminer  $\mathbb{K}$  par résolution des LMIs (4.91a), (4.91b), (4.91c), (4.91d), (4.91e) et (4.91f).
- **Etape 5.**  
while  $T_{f0} < T_f + \epsilon$  do  
     $T_{f0} + \epsilon_1$   
    **Etape 3.**  
    **Etape 4.**  
end while

#### 4.3.4 Exemples numériques

Considérons le système non linéaire quadratique (3.140). Soient  $\mathcal{P}_0 = [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4]$ ,  $\mathcal{P}_1 = [-5, 5] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ ,  $T_f = 8$  et  $d = 1.6$ . Appliquons l'algorithme 4.3.2 pour résoudre le problème 4.3.4 pour une fonction de Lyapunov polynomiale. La simulation de l'algorithme 4.3.2 prouve que le système (3.140) est stabilisable en temps fini avec bornitude en temps fini par rapport à  $\mathcal{P}_0 = [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4]$ ,  $\mathcal{P}_1 = [-5, 5] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ ,  $T_f = 8$ ,  $d = 1.6$ . La courbe 4.4 montre quelques trajectoires du système (3.140) correspondants à des conditions initiales choisis aléatoirement dans  $\mathcal{P}_0$ . La perturbation est donnée par  $w(t) = 2e^{-0.5t} \sin(t)$ . Ces trajectoires ne sortent pas de l'ensemble  $\mathcal{E}_1$  et par suite, elles ne quittent pas  $\mathcal{P}_1$  pendant  $[0, T_f]$ .

La matrice  $\mathbb{K}$  du correcteur est donnée par

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 0.042073 & 0.0073788 & 0.25757 & 0.023714 & 0.031905 & 0.22366 \\ 0.01689 & 0.022128 & 0.28269 & -14.948 & -18.788 & -114.88 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

et on déduit les matrices gains  $K_0, K_1, K_2, K_3$  du correcteur  $u(x) = K(x)x$  (4.89) :

$$K_0^T = \mathbb{K}(:, 1 : 3)^T = \begin{pmatrix} 0.042073 \\ 0.0073788 \\ 0.25757 \end{pmatrix}, \quad K_1^T = \mathbb{K}(:, 4 : 6)^T = \begin{pmatrix} 0.023714 \\ 0.031905 \\ 0.22366 \end{pmatrix}, \quad (4.96a)$$

$$K_2^T = \mathbb{K}(:, 7 : 9)^T = \begin{pmatrix} 0.01689 \\ 0.022128 \\ 0.28269 \end{pmatrix}, \quad K_3^T = \mathbb{K}(:, 10 : 12)^T = \begin{pmatrix} -14.948 \\ -18.788 \\ -114.88 \end{pmatrix} \quad (4.96b)$$

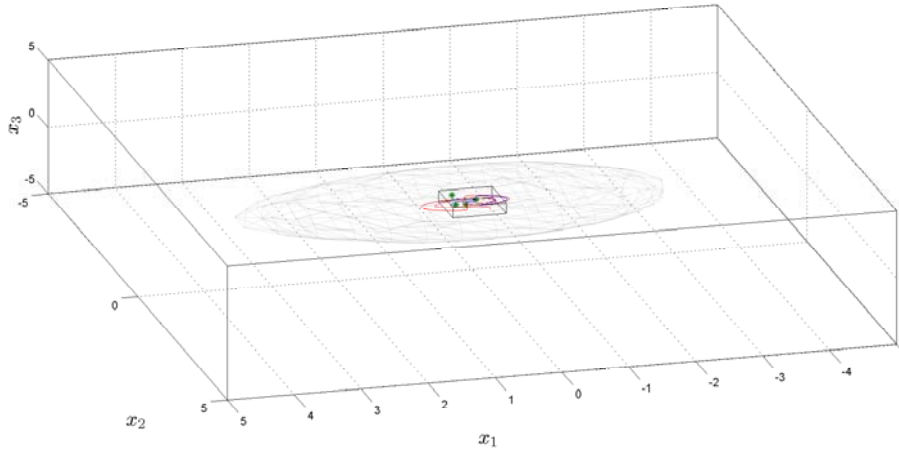


FIGURE 4.4 – Trajectoires du système en boucle fermée

Afin d'illustrer la FTB obtenue par le correcteur (4.96), une simulation est effectuée en considérant 10000 états initiaux aléatoires dans le polytope  $\mathcal{P}_0$ . La perturbation est donnée par  $w(t) = 2e^{-0.5t} \sin(t)$ . En considérant l'ensemble de toutes les trajectoires  $x(t)$  issues de ces 10000 conditions initiales choisies aléatoirement dans  $\mathcal{P}_0$ , le maximum de la valeur absolue de chaque composante  $x_i(t)$  de  $x(t)$  à chaque instant est tracé dans la figure 4.5. Ces maxima n'excèdent pas 5 durant l'intervalle de temps prescrit  $[0, 8]$ .

La figure ?? donne la courbe de la commande  $u$  pour stabiliser une trajectoire du système (3.140) issue d'une condition initiale générée aléatoirement.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, quatre problèmes ont été résolus. Les deux premiers problèmes étaient le problème de stabilité en temps fini et le problème de bornitude en temps fini via des fonctions de Lyapunov polynomiales. Dans les deux cas, les résultats obtenus sont exprimés en termes de LMIs. Ces résultats étaient testés sur un exemple numérique. Le fait de considérer une fonction de Lyapunov polynomiale conduit à des résultats moins conservatifs qu'avec des fonctions de



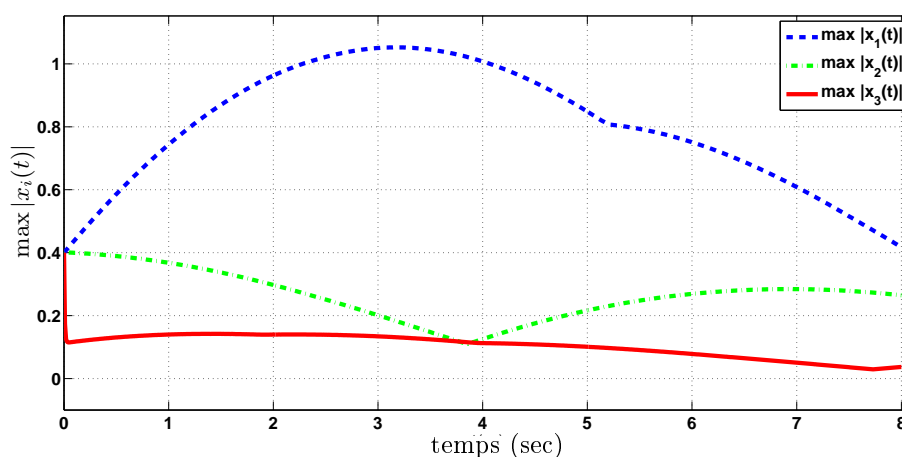


FIGURE 4.5 – Réponse du système en boucle fermée

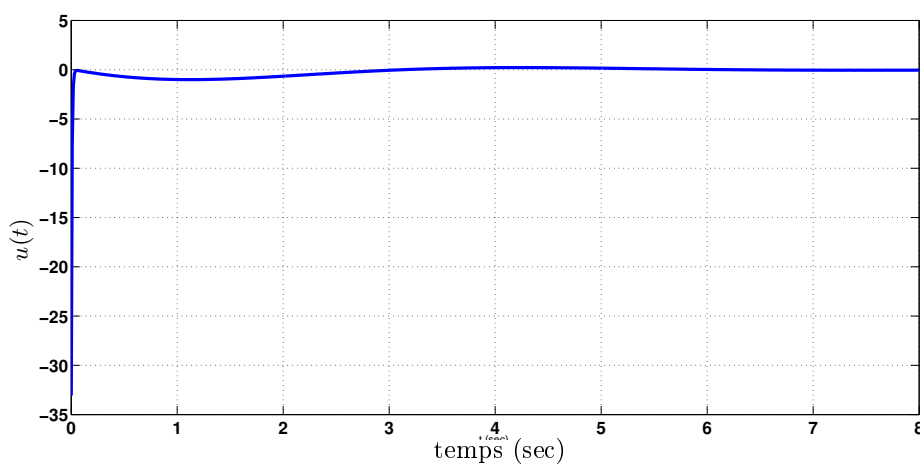


FIGURE 4.6 – Commande

Lyapunov quadratiques. Le troisième problème et le quatrième problème considérés étaient respectivement le problème de stabilisation en temps fini et celui de la stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini via des fonctions de Lyapunov polynomiales. Dans les deux cas, les résultats de synthèse sont exprimés en termes de BMIs. Une approche originale dans le contexte de stabilité en temps fini a été proposée dans chaque cas afin de résoudre de manière itérative les contraintes BMIs. Cette procédure a été validée par un exemple numérique.



# Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire de thèse est consacré à de nouveaux théorèmes pour l'analyse de la stabilité en temps fini et pour la synthèse de nouveaux correcteurs assurant la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires invariants et continus, ainsi que pour une classe de systèmes non linéaires, à savoir les systèmes quadratiques.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons rappelé les concepts de stabilité les plus utilisés dans la littérature, à savoir la stabilité au sens de Lyapunov, la stabilité asymptotique et la stabilité exponentielle. Dans des situations pratiques, il s'avère que la stabilité au sens de Lyapunov n'est pas appropriée. Ainsi nous avons rappelé le concept de stabilité pratique et surtout de stabilité en temps fini. Différents résultats garantissant la stabilité en temps fini et la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires ont été cités dans cette première partie.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous nous sommes focalisés sur l'analyse de la bornitude en temps fini des systèmes linéaires perturbés via l'approche descripteur. Le but est d'utiliser cette approche pour la synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique. Dans un deuxième temps, nous avons étendu ces résultats à la synthèse d'un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB par retour de sortie dynamique pour les systèmes linéaires. On montre que les conditions, exprimées sous forme LMIs, sont moins pessimistes que celles obtenues via l'approche classique. Nous avons fini cette partie en traitant la commande  $\mathcal{H}_\infty$  basée sur un observateur  $\mathcal{H}_\infty$  assurant la stabilisation en temps fini d'un système linéaire. Tous les résultats de cette partie ont été validés par des exemples numériques.

La troisième partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la stabilité en temps fini, bornitude en temps fini, stabilisation en temps fini et stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini des systèmes quadratiques via des fonctions de Lyapunov quadratiques. D'abord nous avons introduit deux lemmes garantissant respectivement la stabilité en temps fini et la bornitude en temps fini des systèmes dynamiques par rapport à des ensembles polytopiques. Ces deux lemmes ont servi à démontrer les résultats de cette troisième partie et ceux de la quatrième partie. Tous les résultats de cette partie sont exprimés en termes de LMIs. Plusieurs simulations numériques ont été menées dans cette troisième partie. Toutes ces simulations ont montré l'intérêt de notre approche en comparaison avec les approches existant dans la littérature.

La quatrième partie de cette thèse constitue une extension des résultats de la troisième partie en utilisant des fonctions de Lyapunov polynomiales. Cette utilisation originale des fonctions de Lyapunov polynomiales, plus générales que les fonctions de Lyapunov quadratiques, a donné naissance à de nouveaux résultats pour l'étude de la stabilité en temps fini, la bornitude en temps fini, la stabilisation en temps fini et la stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini. Les conditions assurant la stabilité en temps fini et la bornitude en temps fini sont exprimées en termes des LMIs. Plusieurs simulations sont proposées pour valider ces résultats et pour les comparer avec les résultats obtenus via des fonctions de Lyapunov quadratiques. Les résultats de stabilisation en temps fini et la stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini sont exprimés en termes de BMIs. Deux algorithmes itératifs sont proposés pour la mise en oeuvre

pratique de ces conditions BMIs. Ces algorithmes sont testés sur un exemple numérique.

Comme perspectives, nous proposons d'essayer de développer des conditions assurant la stabilité en temps fini et la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires perturbés incertains. Il serait aussi intéressant d'essayer de trouver des conditions garantissant la stabilité en temps fini et la stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques pour des ensembles ellipsoïdaux, avec des fonctions de Lyapunov quadratiques ou/et polynomiales. Enfin, nous proposons de synthétiser un observateur non linéaire en temps fini pour les systèmes non linéaires quadratiques.

## Annexe A

# Compléments mathématiques et Inégalités matricielles linéaires

### Sommaire

<b>A.1</b>	<b>Les annulateurs . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>A.2</b>	<b>Propriétés des matrices . . . . .</b>	<b>128</b>
A.2.1	Matrices définies et semi-définies . . . . .	128
A.2.2	Norme Euclidienne d'un vecteur . . . . .	128
A.2.3	Lemmes utiles . . . . .	128
<b>A.3</b>	<b>Lemmes utiles pour les LMIs . . . . .</b>	<b>128</b>

### A.1 Les annulateurs

Un annulateur peut être défini comme suit

**Définition A.1.1** (*Annulateur*[TD14]). Soient  $f(.) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$  une fonction vectorielle et  $r$  un réel positif, la fonction matricielle  $\Omega_f : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$  est appelée un annulateur de  $f(.)$  si  $\Omega_f(z)f(z) = 0, \forall z \in \mathbb{R}^q$ .

Un annulateur n'est pas unique en général. Lorsque  $\Omega_f(z)$  est une fonction linéaire, l'annulateur est dit *annulateur linéaire*.

**Exemple A.1.1.** Soit  $f(z) = \begin{pmatrix} z_1^2 & z_1 z_2 \end{pmatrix}^T$ , un annulateur linéaire de  $f$  est

$$\Omega_f(z) = \begin{pmatrix} z_2 & -z_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.1})$$

**Exemple A.1.2.** Un cas très intéressant est de déterminer un annulateur linéaire pour le vecteur d'état  $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ . Une représentation simple d'un tel annulateur linéaire  $\Omega(x)$  est la suivante

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_n & -x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n} \quad (\text{A.1.2})$$

## A.2 Propriétés des matrices

### A.2.1 Matrices définies et semi-définies

Une matrice symétrique  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite :

- (i) définie positive ( $S > 0$ ) ssi  $x^T S x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$
- (ii) semi-définie positive ( $S \geq 0$ ) ssi  $x^T S x \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$
- (iii) définie négative ( $S < 0$ ) ssi  $x^T S x < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$
- (iv) semi-définie négative ( $S \leq 0$ ) ssi  $x^T S x \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$

### A.2.2 Norme Euclidienne d'un vecteur

La norme euclidienne, aussi appelée norme 2 ou norme de Frobenius, du vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  est

$$\|x\| = \|x\|_2 = \|x\|_F = \sqrt{x^T x} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.2.1})$$

### A.2.3 Lemmes utiles

**Lemme A.2.1** (Inégalité de Rayleigh). [Zha11]

Soit une matrice symétrique  $Q$ , alors on a

$$\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_{\max}(Q) \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.2.2})$$

**Lemme A.2.2.** [Zha11]

Soit  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique, pour toute matrice  $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$  vérifiant  $V^T V = I_n$ , on a

$$\lambda_{i+m-n}(Q) \leq \lambda_i(V^T Q V) \leq \lambda_i(Q), \forall i \in 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.2.3})$$

**Lemme A.2.3.** [HJ85]

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques de dimensions appropriées, alors on a

$$\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\min}(B) \Rightarrow A \leq B \quad (\text{A.2.4})$$

**Lemme A.2.4.** [TF70]

Soit  $H = \begin{pmatrix} E & G \\ G^* & F \end{pmatrix}$  une matrice symétrique positive semi-définie dont les valeurs propres sont

$\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n$ , avec  $E$  une matrice carrée dont les valeurs propres sont  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_a$  et  $F$  une matrice carrée dont les valeurs propres sont  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_b$ , alors on a

$$\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j, \forall i, j \quad \text{tels que} \quad 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b. \quad (\text{A.2.5})$$

## A.3 Lemmes utiles pour les LMIs

**Lemme A.3.1** (Lemme de Schur [BEFB94]).

Étant donné trois matrices de dimensions appropriées, alors on a

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow (C > 0 \quad \text{et} \quad A - B^T C^{-1} B > 0) \quad (\text{A.3.1a})$$

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow (A > 0 \quad \text{et} \quad C - BA^{-1}B^T > 0) \quad (\text{A.3.1b})$$

**Lemme A.3.2** (S-procédure [BEFB94]).

Soient les formes quadratiques suivantes

$$q_i(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i & b_i^T \\ b_i & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = x^T A_i x + 2b_i^T x + c_i, \forall i = 0, 1, \dots, p \quad (\text{A.3.2})$$

alors on a  $q_0(x) \geq 0$ , pour tout  $x$  tel que  $q_i(x) \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , s'il existe des réels  $\rho_i \geq 0$  tels que

$$\begin{pmatrix} A_0 & b_0^T \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^p \rho_i \begin{pmatrix} A_i & b_i^T \\ b_i & c_i \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.3.3})$$

**Lemme A.3.3** (Lemme de complétion [BEFB94]).

Soient  $P$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  deux matrices symétriques définies positives. Il existe une matrice symétrique définie positive  $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  telle que le bloc supérieur gauche ( $n \times n$ ) de  $\tilde{P}$  soit  $P$ , et celui de  $\tilde{P}^{-1} = \tilde{Q}$  soit  $Q$ , si et seulement si  $Q > 0$  et  $P \geq Q^{-1}$ , ou bien si et seulement si

$$\begin{pmatrix} P & I \\ I & Q \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.3.4})$$

Si (A.3.4) est vérifiée, les matrices  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  peuvent être paramétrées par

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P & M \\ M^T & \bar{P} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.5a})$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & N \\ N^T & \bar{Q} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.5b})$$

avec  $\bar{P} = M^T(P - Q^{-1})^{-1}$  et  $\bar{Q} = N^T(Q - P^{-1})^{-1}N$  où  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est une matrice arbitraire de rang plein telle que  $MN^T = (I - PQ)$ .

**Lemme A.3.4** (Lemme de Finsler, [TD14]).

Soit  $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathbb{R}^s$  un polytope donné, soient  $S(\cdot) = S^T(\cdot) : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$  et  $K(\cdot) : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{r \times r}$  deux fonctions matricielles et soit  $Q(v)$  une base du noyau de  $K(v)$ , les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $\forall v \in \mathcal{P}_1$ , la condition  $z^T S(v)z > 0$  est satisfaite  $\forall z \in \mathbb{R}^q : K(v)z = 0$ .
- (ii)  $\forall v \in \mathcal{P}_1$ , il existe une fonction matricielle  $L(\cdot) : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{q \times r}$  telle que  $S(v) + L(v)K(v) + K(v)^T L(v)^T > 0$ .
- (iii)  $\forall v \in \mathcal{P}_1$ ,  $Q(v)^T S(v)Q(v) > 0$ .

Lorsque  $S(\cdot)$  et  $K(\cdot)$  sont des fonctions affines et  $L$  une matrice constante, l'item 2 du lemme A.3.4 devient seulement une condition suffisante de l'item 1 exprimée en termes de LMI.





# Bibliographie

- [AA05] F. Amato and M. Ariola. Finite-time control of discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 :724–729, 2005.
- [AAA<sup>+</sup>14] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino, and G. De Tommasi. *Finite-Time Stability and Control*, volume 453 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2014.
- [AAAC07] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, and F. Calabrese. Finite-time stability of linear systems : an approach based on polyhedral Lyapunov functions. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, pages 1100–1105, New Orleans, USA, 2007.
- [AAAC10] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, and F. Calabrese. Finite-time stability of linear systems : an approach based on polyhedral Lyapunov functions. *IET Control Theory and Applications*, 4 :1767–1774, 2010.
- [AAAD99a] F. Amato, M. Ariola, C.T. Abdallah, and P. Dorato. Dynamic output feedback finite-time control of LTI systems subject toparametric uncertainties and disturbances. In *Proc. European Contr. Conf.*, pages 2596–2601, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [AAAD99b] F. Amato, M. Ariola, C.T. Abdallah, and P. Dorato. Finite-time control for uncertain linear systems with disturbance inputs. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, pages 1776–1780, San Diego, USA, 1999.
- [AAC03] F. Amato, M. Ariola, and C. Cosentino. Finite time control via output feedback : a general approach. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Maui, Hawaii, USA, 2003.
- [AAC06a] F. Amato, M. Ariola, and C. Cosentino. Finite-time control of linear systems : a survey. In *Current Trends in Nonlinear Systems and Control*, pages 195–213. Springer, 2006.
- [AAC06b] F. Amato, M. Ariola, and C. Cosentino. Finite-time stabilization via dynamic output feedback. *Automatica*, 42 :337–342, 2006.
- [AAD01] F. Amato, M. Ariola, and P. Dorato. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances. *Automatica*, 37 :1459–1463, 2001.
- [ACAA02] F. Amato, C. Cosentino, C.T. Abdallah, and M. Ariola. Application of finite-time stability concepts to the control of ATM networks. In *Proc. of Allerton Conference on Communication, Control and Computers*, Allerton, USA, 2002.
- [ACCD09] R. Ambrosino, F. Calabrese, C. Cosentino, and G. De Tommasi. Sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(4) :861–865, 2009.

- [ACM10] F. Amato, C. Cosentino, and A. Merola. Sufficient conditions for finite-time stability and stabilization of nonlinear quadratic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2) :430–434, 2010.
- [BB98] S.P. Bhat and D.S. Bernstein. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5) :678–682, 1998.
- [BDZ<sup>+</sup>15a] B. Bhiri, C. Delattre, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, A. Zemouche, and K. Abderrahim. Finite time  $\mathcal{H}_\infty$  control via dynamic output feedback for linear continuous systems with norm-bounded disturbances. In *Proc. European Contr. Conf.*, Linz, Austria, 2015.
- [BDZ<sup>+</sup>15b] B. Bhiri, C. Delattre, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, A. Zemouche, and K. Abderrahim. Finite time  $\mathcal{H}_\infty$  controller design based on finite time  $\mathcal{H}_\infty$  functional filter for linear continuous systems. In *Proc. International Conference on Systems and Control*, Sousse, Tunisia, 2015.
- [BDZA16] B. Bhiri, C. Delattre, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. Finite time stabilization of nonlinear quadratic systems by a non linear state feedback. In *Proc. European Contr. Conf.*, pages 581–586, Aalborg, Denmark, 2016.
- [BDZA17a] B. Bhiri, C. Delattre, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. A descriptor system approach for finite-time control via dynamic output feedback of linear continuous systems. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Toulouse, France, 2017.
- [BDZA17b] B. Bhiri, C. Delattre, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. Finite-time boundedness and stabilization by a nonlinear state feedback of nonlinear quadratic systems subject to norm-bounded disturbances. *IET Control Theory and Applications*, 11 :1648–1657, 2017.
- [BEFB94] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [BIRR12] R.A. Borges, J.Y. Ishihara, I.G. Rocha, and L.O. Risso. Finite time robust filtering for time-varying uncertain polytopic linear systems. In *Proc. Latinamerican Control Conf.*, Lima, Peru, 2012.
- [BMBNGM11] W Ben Mabrouk, C Ben Njima, Germain Garcia, and H Messaoud. Finite time stabilization of nonlinear affine systems application to robot manipulator. In *Communications, Computing and Control Applications (CCCA), 2011 International Conference on*, pages 1–7, 2011.
- [Bul46] B.V. Bulgakov. On the accumulation of disturbances in linear oscillating systems with constant parameters. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 51(5), 1946.
- [BV04] S.P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [CBTS04] D.F. Coutinho, A.S. Bazanella, A. Trofino, and A.S. Silva. Stability analysis and control of a class of differential-algebraic nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(16) :1301–1326, 2004.
- [Cd11] D.F. Coutinho and C.E. de Souza. Control design for open-loop unstable quadratic systems. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, Corfu, Greece, 2011.

- 
- [Cd12] D.F. Coutinho and C.E. de Souza. Nonlinear state feedback design with a guaranteed stability domain for locally stabilizable unstable quadratic systems. *IEEE Trans. Circ. Syst. I : Fund. Theory & Appl.*, 59(2) :360–370, 2012.
- [CFTD08] D.F. Coutinho, M. Fu, A. Trofino, and P. Danes.  $\mathcal{L}_2$ -gain analysis and control of uncertain nonlinear systems with bounded disturbance inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(1) :88–110, 2008.
- [CG96] M. Chilali and P. Gahinet.  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367, 1996.
- [CTF02a] D.F. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu. Guaranteed cost control of uncertain nonlinear systems via polynomial Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(9) :1575–1580, 2002.
- [CTF02b] D.F. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu. Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  control : An LMI approach. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [DAF97] P. Dorato, C.T. Abdallah, and D. Famularo. Robust finite-time stability design via linear matrix inequalities. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, volume 2, pages 1305–1306, San Diego, USA, 1997.
- [Dar00] M. Darouach. Existence and design of functional observers for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5) :940–943, 2000.
- [DB95] M. Darouach and M. Boutayeb. Design of observers for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(7) :1323–1327, 1995.
- [Dor61a] P. Dorato. Short-time stability. *IRE Transactions on Automatic Control*, 6(1) :86, 1961.
- [Dor61b] P. Dorato. Short-time stability in linear time-varying systems. Technical report, DTIC Document, 1961.
- [Dor06] P. Dorato. An overview of finite-time stability. In *Current Trends in Nonlinear Systems and Control*, pages 185–194. Birkhäuser, Boston, 2006.
- [El 12] F. El Hachemi. *Analyse de Stabilité des Systèmes à Commutations Singulièrement Perturbés*. PhD thesis, Université de Lorraine, Nancy, France, 2012.
- [ElB12] M.N. ElBsat. *Finite-Time Control and Estimation of Nonlinear Systems with Disturbance Attenuation*. PhD thesis, Marquette University, Milwaukee, Wisconsin, 2012.
- [FK01] M. Fukuda and M. Kojima. Branch-and-cut algorithms for the bilinear matrix inequality eigenvalue problem. *Computational Optimization and Applications*, 19 :79–105, 2001.
- [FS02] Emilia Fridman and Uri Shaked. A descriptor system approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2) :253–270, 2002.
- [Gar69] W. Garrard. Finite-time stability in control system synthesis. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Warsaw, Poland, 1969.
- [Gar72] W. Garrard. Further results on the synthesis of finite-time stable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(1) :142–144, 1972.
- [Gar87] F.G. Garashchenko. Study of practical stability problems by numerical methods and optimization of beam dynamics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 51(5) :559–564, 1987.

- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of the NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, New York, 1979.
- [GRBG04] L.T. Grujić, J.P. Richard, P. Borne, and J.C. Gentina. *Stability Domains*. Chapman and Hall, London, 2004.
- [GS96] K.M. Grigoriadis and R.E. Skelton. Low-order control design for lmi problems using alternating projection methods. *Automatica*, 32(8) :1117–1125, 1996.
- [GSP94] K.C. Goh, M.G. Safonov, and G.P. Papavassilopoulos. A global optimization approach for the BMI problem. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, pages 2009–2014, Lake Buena Vista, USA, 1994.
- [GTB09] G. Garcia, S. Tarbouriech, and J. Bernussou. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2) :364–369, 2009.
- [Hah67] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [HBB08] Hajer H. Bouzaouache and N. Benhadj Braiek. On the stability analysis of nonlinear systems using polynomial Lyapunov functions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 76(5) :316–329, 2008.
- [Het07] L. Hetel. *Stabilité et Commande Robuste des Systèmes à Commutation*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2007.
- [HHB99] A. Hassibi, J. How, and S.P. Boyd. A path-following method for solving BMI problems in control. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, volume 2, pages 1385–1389, San Diego, USA, 1999.
- [HJ85] R.A. Horn and C.A. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
- [HPP01] D. Hinrichsen, E. Plischke, and A.J. Pritchard. Lyapunov and Riccati equations for practical stability. In *Proc. European Contr. Conf.*, pages 2883–2888, Porto, Portugal, 2001.
- [HW69] J. Heinen and S. Wu. Further results concerning finite-time stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(2) :211–212, 1969.
- [IK09a] H. Ichihara and H. Katayama. Necessary and sufficient conditions for finite-time boundedness of linear continuous-time systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, pages 3214–3219, Shanghai, P.R. China, 2009.
- [IK09b] H. Ichihara and H. Katayama. Necessary and sufficient conditions for finite-time boundedness of linear discrete-time systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, pages 3226–3231, Shanghai, P.R. China, 2009.
- [IT01] D. Ibaraki and M. Tomizuka. Rank minimization approach for solving BMI problems with random search. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, volume 3, pages 1870–1875, Arlington, USA, 2001.
- [Iwa99] T. Iwasaki. The dual iteration for fixed order control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4) :783–788, 1999.
- [Kam53] G.V. Kamenkov. On the stability of motion in a finite-time interval. *Prikl. Mat. Mekh.*, 17 :529–540, 1953.
- [Kay71] A.A. Kayande. A theorem on contractive stability. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 21(4) :601–604, 1971.

- 
- [KB115] H.T.M. Kussaba, R.A. Borges, and J.Y. Ishihara. A new condition for finite time boundedness analysis. *Journal of the Franklin Institute*, 352(12) :5514–5528, 2015.
- [Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3rd edition, 2002.
- [KKM91] P.V. Kokotović, I. Kanellakopoulos, and A.S. Morse. Adaptive feedback linearization of nonlinear systems. In *Foundations of Adaptive Control*, pages 309–346. Springer, New York, 1991.
- [KR69] A.A. Kayande and M. Rama Mohan Rao. *Comparison Principle and Converse Theorems for Finite Time Stability*. Universidade Federal de Pernambuco, Instituto de Matemática, 1969.
- [Kus66] H.J. Kushner. Finite time stochastic stability and the analysis of tracking systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2) :219–227, 1966.
- [KW68] A.A. Kayande and J.S.W. Wong. Finite time stability and comparison principles. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 64(3) :749–756, 1968.
- [LaS60] J.P. LaSalle. Some extensions of Liapunov’s second method. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 7(4) :520–527, 1960.
- [Leb54a] A.A. Lebedev. On stability of motion during a given interval of time. *Prikl Mat. Mekh.*, 18 :139–148, 1954.
- [Leb54b] A.A. Lebedev. The problem of stability in a finite interval of time. *Prikl Mat. Mekh.*, 18 :75–94, 1954.
- [LL61] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov’s Direct Method*. Academic Press, New York, 1961.
- [LLM90] V. Lakshmikantham, S. Leela, and A.A. Martynyuk. *Practical Stability of Nonlinear Systems*. World Scientific, London, 1990.
- [LS91] Y. Lin and E.D. Sontag. A universal formula for stabilization with bounded controls. *Syst. & Contr. Letters*, 16 :393–397, 1991.
- [LW75] L. Lam and L. Weiss. Finite time stability with respect to time-varying sets. *Journal of the Franklin Institute*, 298(5-6) :415–421, 1975.
- [Mab10] W. Ben Mabrouk. *Contribution à l’Etude de la Stabilisation en Temps Fini des Systèmes Linéaires et Non Linéaires*. PhD thesis, Ecole Nationale d’Ingénieurs de Monastir, Tunisie, 2010.
- [Mic70a] A.N. Michel. Quantitative analysis of simple and interconnected systems : Stability, boundedness, and trajectory behavior. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 17(3) :292–301, 1970.
- [Mic70b] A.N. Michel. Quantitative analysis of systems : Stability, boundedness, and trajectory behavior. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 38(2) :107–122, 1970.
- [MM77] A.N. Michel and R.K. Miller. *Qualitative analysis of large scale dynamical systems*. Academic Press, New York, 1977.
- [MMG09] W. Ben Mabrouk, H. Messaoud, and G. Garcia. Practical stability and stabilization of linear systems. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, pages 347–352, Thessaloniki, Greece, 2009.

- [Mou05] E. Moulay. *Une Contribution à l'Etude de la Stabilité en Temps Fini et de la Stabilisation*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, France, 2005.
- [MP72] A.N. Michel and D.W. Porter. Practical stability and finite-time stability of discontinuous systems. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 19(2) :123–129, 1972.
- [MS09] Q. Meng and Y. Shen. Finite-time  $\mathcal{H}_\infty$  control for linear continuous system with norm-bounded disturbance. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4) :1043 – 1049, 2009.
- [MW69] A.N. Michel and S. Wu. Stability of discrete-time systems over a finite interval of time. In *International Journal of Control*, volume 9, pages 679–694, 1969.
- [PM09] Philippe P. Müllhaupt. *Introduction à l'Analyse et à la Commande des Systèmes Non Linéaire*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2009.
- [PRGB95] W. Perruquetti, J.P. Richard, L.T. Grujić, and P. Borne. On practical stability with the settling time via vector norms. *International Journal of Control*, 62(1) :173–189, 1995.
- [PS82a] C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity*. Courier Corporation, 1982.
- [PS82b] Y.S. Pyatnitskiy and V.I. Skorodinskiy. Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem. *Systems & Control Letters*, 2(2) :130–135, 1982.
- [RM71] C.R. Rao and S.K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. Wiley, New York, 1971.
- [RM05] V. Ryali and K.M. Moudgalya. Practical stability analysis of uncertain nonlinear systems. In *Proc. National Conference on Control and Dynamic Systems*, pages 27–29, Bombay, India, 2005.
- [Sco14] G. Scorletti. Outils pour la robustesse : inégalités matricielles affines (notes de cours). Technical report, Ecole Centrale de Lyon, France, 2014.
- [SDZ06] H. Souley Ali, M. Darouach, and M. Zasadzinski. Approche LMI pour la synthèse des filtres  $\mathcal{H}_\infty$  non biaisés. In *Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bordeaux, France, 2006.
- [Son89] E.D. Sontag. A universal construction of Arstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems and control Letters*, 13 :117–123, 1989.
- [TA00] H.D. Tuan and P. Apkarian. Low nonconvexity-rank bilinear matrix inequalities : algorithms and applications in robust controller and structure designs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(11) :2111–2117, 2000.
- [TD14] A. Trofino and T.J.M. Dezuó. LMI stability conditions for uncertain rational nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(18) :3124–3169, 2014.
- [TF70] R.C. Thompson and L.J. Freede. Eigenvalues of partitioned Hermitian matrices. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 3(1) :23–37, 1970.
- [VB00] J.G. VanAntwerp and R.D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *J. of Process Control*, 10(4) :363–385, 2000.

- 
- [VTG10] G. Valmórbida, S. Tarbouriech, and G. Garcia. State feedback design for input-saturating quadratic systems. *Automatica*, 46(7) :1196–1202, 2010.
- [Wei68] L. Weiss. Converse theorems for finite time stability. *SIAM journal on Applied Mathematics*, 16(6) :1319–1324, 1968.
- [WI65] L. Weiss and E.F. Infante. On the stability of systems defined over a finite time interval. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 54 :44–48, 1965.
- [WI67] L. Weiss and E.F. Infante. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(1) :54–59, 1967.
- [WS67] J.M. Watson and A.T. Stubberud. Stability of systems operating in a finite time interval. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(1) :116–116, 1967.
- [XXX11] W. Xiang, J. Xiao, and C. Xiao. Comment on finite-time  $\mathcal{H}_\infty$  control for linear continuous system with norm-bounded disturbance. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(8) :3443–3445, 2011.
- [YH98] Y. Yamada and S. Hara. Global optimization for  $\mathcal{H}_\infty$  control with constant diagonal scaling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2) :191–203, 1998.
- [YLC09] Y. Yang, J. Li, and G. Chen. Finite-time stability and stabilization of nonlinear stochastic hybrid systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 356(1) :338–345, 2009.
- [YZW10] Z. Yan, G. Zhang, and J. Wang. Finite-time stability and stabilization of linear stochastic systems. In *Proc. Chinese Control Conference*, pages 1115–1120, Beijing, P.R. China, 2010.
- [ZA08] W. Zhang and X. An. Finite-time control of linear stochastic systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 4(3) :689–696, 2008.
- [Zha11] F. Zhang. *Matrix Theory : Basic Results and Techniques*. Springer, Berlin, 2011.
- [Zie12] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2012.
- [ZL10] J. Zhuang and F. Liu. Finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems with time-delay. In *International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, volume 1, pages 163–167, Yantai, P.R. China, 2010.





## Résumé

Ce mémoire de thèse traite de la stabilité en temps fini et de la stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques. Dans plusieurs situations pratiques, l'étude de la stabilité asymptotique ne suffit pas pour connaître le bon fonctionnement d'un système dynamique. En effet, il est souvent important de garantir que pendant le régime transitoire, les trajectoires d'état ne dépassent pas certaines limites prédéfinies afin d'éviter les saturations et l'excitation des non-linéarités du système, d'où l'intérêt d'étudier la stabilité en temps fini du système dynamique. Un système dynamique est dit *stable en temps fini* (FTS) si, pour tout état initial appartenant à un ensemble borné prédéterminé, la trajectoire d'état reste comprise dans un autre ensemble borné prédéterminé pendant un temps fini et fixé. Lorsque le système est perturbé, on parle de *bornitude en temps fini* (FTB).

Trois problèmes principaux sont traités dans ce manuscrit :

- (i) Commande et commande  $\mathcal{H}_\infty$  en temps fini des systèmes linéaires invariants continus perturbés.
- (ii) Stabilité en temps fini et stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques via des fonctions de Lyapunov quadratiques.
- (iii) Stabilité en temps fini et stabilisation en temps fini des systèmes non linéaires quadratiques via des fonctions de Lyapunov polynomiales.

Premièrement, des nouveaux résultats concernant la bornitude en temps fini et la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires continus invariants perturbés ont été proposés. Des nouvelles conditions suffisantes assurant la synthèse d'un correcteur FTB par retour de sortie dynamique ont été développées via une approche descripteur originale dans ce contexte. Pour surmonter la difficulté de linéariser une condition de bornitude en temps fini évoquant les valeurs propres maximale et minimale de la matrice de Lyapunov, une nouvelle méthode élégante a été proposée, qui consiste à utiliser une transformation de congruence particulière. Les conditions obtenues sont sous forme de LMIs, et peuvent donc être résolues par optimisation convexe. Ce résultat a été étendu à la synthèse d'un correcteur FTB- $\mathcal{H}_\infty$  par retour de sortie dynamique. Un exemple numérique montre l'intérêt de l'approche descripteur dans un contexte de stabilité en temps fini. Enfin, la synthèse d'une commande  $\mathcal{H}_\infty$  basée sur un observateur FTB- $\mathcal{H}_\infty$  a été réalisée.

Deuxièmement, des nouvelles conditions LMIs pour l'étude de la stabilité en temps fini et la stabilisation en temps fini ont été proposées pour les systèmes non linéaires quadratiques perturbés et non perturbés. Le développement de ces méthodes a été fait via des fonctions de Lyapunov quadratiques. La nouveauté par rapport à la littérature consiste en l'utilisation de la notion d'annulateur combinée avec le lemme de Finsler pour obtenir des conditions moins pessimistes.

Enfin, pour obtenir des conditions encore moins pessimistes, de nouveaux développements ont été proposés en utilisant des fonctions de Lyapunov polynomiales. Cette approche a abouti à des nouveaux théorèmes assurant la stabilité en temps fini et la bornitude en temps fini des systèmes quadratiques non linéaires. Ces conditions ont été exprimées en termes de LMIs. Pour la stabilisation en temps fini et la stabilisation en temps fini avec bornitude en temps fini, les développements via des fonctions de Lyapunov polynomiales ont abouti à des BMIs. Deux algorithmes itératifs ont été proposés pour résoudre ces BMIs.

**Mots-clés:** Stabilité en temps fini, stabilisation en temps fini, commande  $\mathcal{H}_\infty$  en temps fini, bornitude en temps fini, système non linéaire quadratique, fonction de Lyapunov polynomiale, annulateur, LMIs, BMIs

## Abstract

This dissertation deals with the finite time stability and the finite time stabilization of dynamic systems. In several practical situations, the study of the asymptotic stability is not sufficient to know the good working of a dynamic system. Indeed, it is often important to ensure that during the transient regime, the state trajectories do not exceed certain predefined limits in order to avoid saturations and excitations of the nonlinearities of the system. Hence the interest is to study the stability of the dynamic system in finite time. A dynamic system is said to be stable in finite time (FTS) if, for any initial state belonging to a predetermined bounded set, the state trajectory remains within another predetermined bounded set for a finite and fixed time. When the system is disturbed, it is called finite time boundedness (FTB). In this manuscript, the goal is to improve the results of finite time stability used in the literature.

Three main fields are treated in this manuscript :

- (i) Finite time control of perturbed continuous invariant linear systems.
- (ii) Finite time stability and finite time stabilization of nonlinear quadratic systems via quadratic Lyapunov functions.
- (iii) Finite time stability and finite time stabilization of nonlinear quadratic systems via polynomial Lyapunov functions.

New sufficient conditions for the synthesis of an FTB controller by dynamic output feedback have been developed via an original descriptor approach. To overcome the difficulty of linearizing a FTB condition evoking the maximum and minimum eigenvalues of the Lyapunov matrix, an original method has been proposed which consists in using a particular congruence transformation. The obtained conditions are expressed in terms of LMIs, and can therefore be solved by convex optimization. This result has been extended to the synthesis of an  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB dynamic output feedback controller. A numerical example shows the interest of the descriptor approach in a context of finite time stability. Second, new LMI conditions for the study of finite time stability and finite time stabilization have been proposed for disturbed and undisturbed nonlinear quadratic systems. The development of these methods was done via quadratic Lyapunov functions. The novelty with respect to the literature is the use of the notion of annihilators combined with the Finsler lemma to obtain less conservative conditions. Third, to obtain even less conservative conditions, new developments have been proposed using polynomial Lyapunov functions. This approach has resulted in new theorems providing finite time stability and finite time boundness of nonlinear quadratic systems. These conditions were expressed in terms of LMIs. For finite time stabilization and finite time stabilization with finite time boundness, developments via polynomial Lyapunov functions have resulted in BMIs. Two iterative algorithms have been proposed to solve these BMIs.

**Keywords:** Finite time stability (FTS), finite time boundedness (FTB), Finite time control, nonlinear quadratic systems, annihilators, polytopic domains,  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB controllers,  $\mathcal{H}_\infty$ -FTB filters, Finsler's lemma, Linear matrix inequalities (LMI), Bilinear matrix inequality,

