

Rapport de Stage

Modélisation de la dynamique des populations de *Ceratitis capitata* pour la mise en place de la technique de l'insecte stérile - Projet CeraTIS

Marine COURTOIS

Master 1 Biodiversité, Ecologie, Evolution (BEE) parcours Ecologie Evolutive et Comportementale (EEC) à l'Université de Tours

2020-2021



Stage réalisé à l'INRAE
400 Route des Chappes
06410 BIOT, FRANCE

Encadrants :
Ludovic MAILLERET
Louise VAN OUDENHOVE
Frédéric GROGNARD
Suzanne TOUZEAU

Table des matières

1	Introduction	2
2	Modèles	2
2.1	Modèle simplifié	2
2.2	Modèle tenant compte de l'erreur de stérilisation	3
3	Recherche des équilibres	4
3.1	Modèles 1 et 2	4
3.2	Modèle 3	5
4	Existence des équilibres	6
4.1	Modèle 1	6
4.2	Modèle 2	7
4.3	Modèle 3	8
5	Stabilité des équilibres	9
5.1	Etude de l'équilibre $(S^*, 0, 0)$:	10
5.2	Etude de stabilité des autres équilibres :	10
5.2.1	Trace	10
5.2.2	Déterminant	11
6	Diagrammes de bifurcation	13
6.1	Diagramme de bifurcation en fonction de $1/R$	13
6.2	Diagramme de bifurcation en fonction de ϕ	13
7	Conclusion	15
8	Remerciements	15

1 Introduction

En Corse, la culture de fruits est la seconde source économique. *Ceratitis capitata*, la mouche méditerranéenne des fruits, est une espèce d'insectes diptères ravageurs de nombreuses cultures fruitières de l'île. Chaque année en pondant dans les fruits, elle détruit des milliers d'agrumes, pêches, prunes, etc. Actuellement des moyens de lutte préventive comme le broyage des fruits tombés et un travail superficiel du sol durant l'hiver, afin d'exposer les pupes à l'humidité, au gel et aux prédateurs, permettent de diminuer les populations. Des moyens de lutte alternative tel que le piégeage massif et l'"attract and kill", consistant à attirer les mouches via un appât alimentaire ou sexuel (phéromones) et à les tuer à l'aide d'un insecticide, sont également mis en place pour réduire la taille des populations tout en évitant de déployer la lutte chimique (areflec.org). Le projet CeraTIS est quant à lui un projet pilote en Corse qui vise à contrôler les populations de *Ceratitis capitata* avec la mise en place de la méthode de l'insecte stérile (TIS). Cette méthode biologique consiste à faire des lâchers inondatifs de mâles stériles par voie aérienne afin de contrôler le nombre de descendants à la génération suivante, c'est-à-dire de diminuer la ponte au sein des fruits, et par conséquent d'augmenter les rendements en réduisant le nombre de fruits impropres à la consommation. Dans ce rapport de stage, la dynamique des populations de *Ceratitis capitata* a été étudiée à l'aide d'un modèle en trois dimensions, modèle intégrant la méthode de l'insecte stérile, avec notamment comme paramètres le nombre de mâles stériles lâchés. L'objectif étant de mettre en évidence l'efficacité théorique de cette technique et le seuil minimal de mâles stériles à lâcher pour contrôler les populations de cératites.

2 Modèles

2.1 Modèle simplifié

Le modèle (1) développé permet d'étudier la dynamique de la population de *Ceratitis capitata*. Il est composé de trois équations permettant de suivre la dynamique des mâles stériles (S), des femelles (F) et des mâles fertiles (M) au cours du temps. Il a été considéré que *Ceratitis capitata* pouvait seulement mourir et engendrer une descendance. Les différents paramètres ont été répertoriés dans le tableau 1 [5].

$$\begin{cases} \dot{S} = -\mu_S \cdot S + \phi \\ \dot{F} = -\mu_F \cdot F + (1-p) \cdot X(M) \cdot C(F) \cdot r \cdot F \\ \dot{M} = -\mu_M \cdot M + p \cdot X(M) \cdot C(F) \cdot r \cdot F \end{cases} \quad (1)$$

avec $X(M) = \frac{M}{k+M+\eta \cdot S}$

$X(M)$ correspond à la probabilité de fécondation, c'est-à-dire le rapport entre le nombre d'accouplements pouvant mener à une descendance viable - en considérant que tous les mâles fertiles s'accouplent - et le nombre d'accouplements totaux prenant en compte les mâles fertiles et les mâles stériles moins compétitifs dû à l'irradiation. Cette caractéristique est prise en compte avec le paramètre η .

Le paramètre ϕ correspond quant à lui aux lâchers de mâles stériles, c'est-à-dire à la densité d'individus stériles lâchés en fonction du temps.

TABLE 1: Paramètres des modèles

Paramètres	Description	Valeurs (Unités)
F	densité de femelles	- (ind)
M	densité de mâles	- (ind)
S	densité de mâles stériles	- (ind)
p	proportion de mâles parmi les nouveaux nés	0.50
r	émergence (prend en compte l'oviposition)	1.19 (egg/♀/day)
k	constante de demi-saturation d'accouplement	1 (densité σ)
μ_F	taux de mortalité des femelles	0.050 (day^{-1})
μ_M	taux de mortalité des mâles	0.036 (day^{-1})
μ_S	taux de mortalité des mâles stériles	0.057 (day^{-1})
ϕ	lâchers des mâles stériles	nombre ind/piège
δ	proportion de mâles non stériles parmi les lâchers	0.02
β	compétition	0.85 (female density) $^{-1}$
η	perte de compétitivité liée à la radiation	0.2
ϵ	proportion des mâles irradiés non stériles entraînant une descendance fertile	0.1

2.2 Modèle tenant compte de l'erreur de stérilisation

L'irradiation pour rendre stérile les mâles constituant les lâchers n'est pas efficace à 100%. Ainsi une part des mâles irradiés pourrait finalement engendrer une descendance.

Afin de prendre en compte cette erreur de stérilisation dans le modèle, plusieurs solutions sont envisageables :

- Soit en intégrant cette erreur dans la probabilité de fécondation $X(M) = \frac{M+\epsilon\eta S}{k+M+\eta S}$ dans le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\mu_S \cdot S + \phi \\ \dot{F} = -\mu_F \cdot F + (1-p) \cdot X(M) \cdot C(F) \cdot r \cdot F \\ \dot{M} = -\mu_M \cdot M + p \cdot X(M) \cdot C(F) \cdot r \cdot F \end{cases} \quad (2)$$

$X(M)$ correspondant au nombre d'accouplements engendrant une descendance viable divisé par le nombre d'accouplements totaux, c'est-à-dire à l'ensemble des mâles fertiles et une partie des mâles irradiés qui s'avèrent être fertiles, divisé par les mâles fertiles et les mâles stériles moins compétitifs dû à l'irradiation.

Le paramètre de fertilité résiduelle ϵ des mâles stériles est compris entre 0 et 1. Quand $\epsilon = 0$, tous les mâles sont stériles il n'y a pas de fertilité résiduelle.

Le paramètre de compétitivité différentielle η des mâles est compris entre 0 et 1. Quand $\eta = 1$, un mâle stérile est aussi compétitif qu'un mâle sauvage.

- Soit en ajoutant la proportion de mâles irradiés non stériles à la densité de mâles fertiles et en la retranchant de la densité de mâles stériles dans le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\mu_S \cdot S + \phi(1-\delta) \\ \dot{F} = -\mu_F \cdot F + (1-p) \cdot X(M) \cdot C(F) \cdot r \cdot F \\ \dot{M} = -\mu_M \cdot M + p \cdot X(M) \cdot C(F) \cdot r \cdot F + \phi \cdot \delta \end{cases} \quad (3)$$

avec $X(M) = \frac{M}{k+M+\eta \cdot S}$ construit comme dans le modèle (1).

Si $\eta = 0 \rightarrow X'(M) < 0$: rajouter des mâles stériles diminue le nombre d'accouplements

3 Recherche des équilibres

3.1 Modèles 1 et 2

Pour trouver les équilibres, il faut trouver les solutions S, M et F lorsque les équations constituant le modèle sont égales à 0.

- Isocline nulle en S :

S est considérée déjà à l'équilibre, ce qui permet d'étudier le système M et F

$$\dot{S} = 0 \iff S^* = \frac{\phi}{\mu_S} \quad (4)$$

- Isocline nulle en F :

$$\begin{aligned} \dot{F} = 0 &\iff F^*(-\mu_F + (1-p)X(M^*) \cdot C(F^*) \cdot r) = 0 \\ F^* = 0 &\text{ ou } \mu_F = (1-p)X(M^*) \cdot C(F^*) \cdot r \\ \frac{\mu_F}{(1-p)r} &= X(M^*) \cdot C(F^*) \end{aligned} \quad (5)$$

- Isocline nulle en M :

$$\dot{M} = 0 \iff \mu_M M^* = pX(M^*) \cdot C(F^*) \cdot r F^*$$

D'après (5)

$$\mu_M M^* = p \frac{\mu_F}{(1-p)} \cdot F^* \iff F^* = \frac{\mu_M(1-p)}{p\mu_F} \cdot M^* = \gamma M^*$$

avec

$$\gamma = \frac{\mu_M(1-p)}{p\mu_F} = \frac{F^*}{M^*} \quad (6)$$

- Fonction de compétition :

$$\begin{aligned} C(F^*) &= C\left(\beta \cdot \frac{\mu_M(1-p)}{p\mu_F} \cdot M^*\right) = C(\beta' M^*) \\ C(F^*) &= \frac{1}{1 + \beta \cdot F^*} = \frac{1}{1 + \beta' \cdot M^*} \end{aligned}$$

avec $\beta' = \beta \cdot \frac{\mu_M(1-p)}{p\mu_F} \cdot M^*$

Dans le modèle 1, $X(M)$ est de la forme $X(M) = \frac{M}{k+M+\eta \cdot S}$, ainsi l'équation (5) est de la forme suivante :

$$X(M^*) \cdot C(F^*) = \frac{M^*}{k + M^* + \eta \cdot S^*} \cdot C(F^*) = \frac{M^*}{k + M^* + \eta \cdot S^*} \cdot \frac{1}{1 + (\beta' M^*)} = \frac{\mu_F}{(1-p)r} = \frac{1}{R} \quad (7)$$

Or $S^* = \frac{\phi}{\mu_S}$ d'après (4), ce qui permet d'obtenir une équation en fonction de ϕ .

$$\frac{RM^*}{1 + \beta' M^*} - k - M^* = \frac{\eta}{\mu_S} \phi \quad (8)$$

Dans le modèle 2, $X(M)$ est de la forme $X(M) = \frac{M + \epsilon \eta S}{k + M + \eta S}$, ainsi l'équation (5) est de la forme suivante :

$$X(M^*) \cdot C(F^*) = \frac{M^* + \epsilon \eta S^*}{k + M^* + \eta S^*} \cdot C(F^*) = \frac{M^* + \epsilon \eta S^*}{k + M^* + \eta S^*} \cdot \frac{1}{1 + (\beta' M^*)} = \frac{\mu_F}{(1 - p)r} = \frac{1}{R} \quad (9)$$

Or $S^* = \frac{\phi}{\mu_S}$ d'après (4), ce qui permet d'obtenir une équation en fonction de ϕ .

$$\frac{RM^* - (1 + \beta' M^*)(k + M^*)}{1 + \beta' M^* - R\epsilon} = \frac{\eta}{\mu_S} \phi \quad (10)$$

3.2 Modèle 3

Pour trouver les équilibres, il faut trouver les solutions S, M et F lorsque les équations constituant le modèle 3 sont égales à 0.

- Isocline nulle en S :

S est considérée déjà à l'équilibre, ce qui permet d'étudier le système M et F

$$\dot{S} = 0 \iff S^* = \frac{\phi(1 - \delta)}{\mu_S} \quad (11)$$

- Isocline nulle en F :

$$\begin{aligned} \dot{F} = 0 &\iff F^*(-\mu_F + (1 - p)X(M^*) \cdot C(F^*) \cdot r) = 0 \\ F^* = 0 &\text{ ou } \mu_F = (1 - p)X(M^*) \cdot C(F^*) \cdot r \end{aligned}$$

$$\frac{\mu_F}{(1 - p)r} = X(M^*) \cdot C(F^*) \quad (12)$$

- Isocline nulle en M :

$$\dot{M} = 0 \iff \mu_M M^* = pX(M^*) \cdot C(F^*) \cdot r F^* + \phi \cdot \delta$$

D'après (12)

$$\mu_M M^* = p \frac{\mu_F}{(1 - p)} \cdot F^* + \phi \cdot \delta \iff F^* = \frac{\mu_M(1 - p)}{\mu_F p} \cdot M^* - \frac{\phi \cdot \delta(1 - p)}{p\mu_F}$$

- Fonction de compétition

$$C(F^*) = C\left(\frac{\mu_M(1 - p)}{\mu_F p} \cdot M^* - \frac{\phi \cdot \delta(1 - p)}{p\mu_F}\right) = C(\omega M^* - \omega') \quad (13)$$

$$C(F^*) = \frac{1}{1 + \beta \cdot F^*} = \frac{1}{1 + \beta' \cdot (\omega M^* - \omega')}$$

avec $\omega = \frac{\mu_M(1-p)}{\mu_F p}$ et $\omega' = \frac{\phi \cdot \delta(1-p)}{\mu_F p}$

L'équation (12) devient :

$$X(M^*) \cdot C(F^*) = \frac{M^*}{k + M^* + \eta \cdot S^*} \cdot \frac{1}{1 + \beta' \cdot (\omega M^* - \omega')} = \frac{\mu_F}{(1-p)r} = \frac{1}{R} \quad (14)$$

Or $S^* = \frac{\phi(1-\delta)}{\mu_S}$ d'après (11), ce qui permet d'obtenir une équation en fonction de ϕ .

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right) \left(\frac{RM^*}{1 + \beta' M^*} - k - M^*\right) = \frac{\eta}{\mu_S} \phi \quad (15)$$

4 Existence des équilibres

Plusieurs équilibres existent dans le cas des 3 modèles étudiés, dont l'équilibre trivial $(S^*, 0, 0)$. Les conditions d'existence des deux autres équilibres doivent être étudiées en fonction des paramètres des modèles.

D'après (7), (9) et (14), les équilibres sont les solutions de l'équation :

$$X(M^*) \cdot C(F^*) = \frac{\mu_F}{(1-p)r} = \frac{1}{R}$$

avec $R = \frac{(1-p)r}{\mu_F}$, R étant le taux de reproduction
 $R > 1$ est une condition nécessaire pour qu'il y ait des solutions $M^* > 0$

4.1 Modèle 1

Les équilibres positifs sont les solutions de l'équation $X(M^*) \cdot C(F^*) = \frac{\mu_F}{(1-p)r} = \frac{1}{R}$ de la forme :

$$\frac{M^*}{k + M^* + \eta \cdot S^*} \cdot \frac{1}{1 + (\beta' M^*)} = \frac{\mu_F}{(1-p)r} = \frac{1}{R} \quad (7)$$

Il y a soit deux équilibres M^* soit aucun comme représenté sur la figure 1 (a). En effet quand on s'intéresse à l'intersection entre la courbe $f(M^*) = X(M^*) \cdot C(F^*)$ et la droite $y = \frac{\mu_F}{(1-p)r}$, la droite coupe la courbe en deux points M^* , ou en aucun point, suivant la valeur attribuée aux paramètres du modèle.

L'expression des équilibres M^* peut être déterminée en résolvant l'équation du second degré suivante :

$$X(M^*) \cdot C(F^*) = \frac{1}{R} \Leftrightarrow \beta' (M^*)^2 + (1 + k\beta' + \eta S^* \beta' - R) M^* + (k + \eta S) = 0$$

Si existence des racines :

$$\Delta = (1 + \beta'(k + \eta S) - R)^2 - 4\beta'(k + \eta S) > 0$$

$$M^* = -\frac{(1 + k\beta'S - R) \pm \sqrt{(1 + \beta'(k + \eta S) - R)^2 - 4\beta'(k + \eta S)}}{2\beta'}$$

Ainsi pour le modèle 1, il existe selon la valeur des paramètres du modèle, soit l'équilibre trivial $(S^*, 0, 0)$ seul, soit l'équilibre trivial $(S^*, 0, 0)$ et deux équilibres non triviaux : (S^*, F_1^*, M_1^*) et (S^*, F_2^*, M_2^*) .

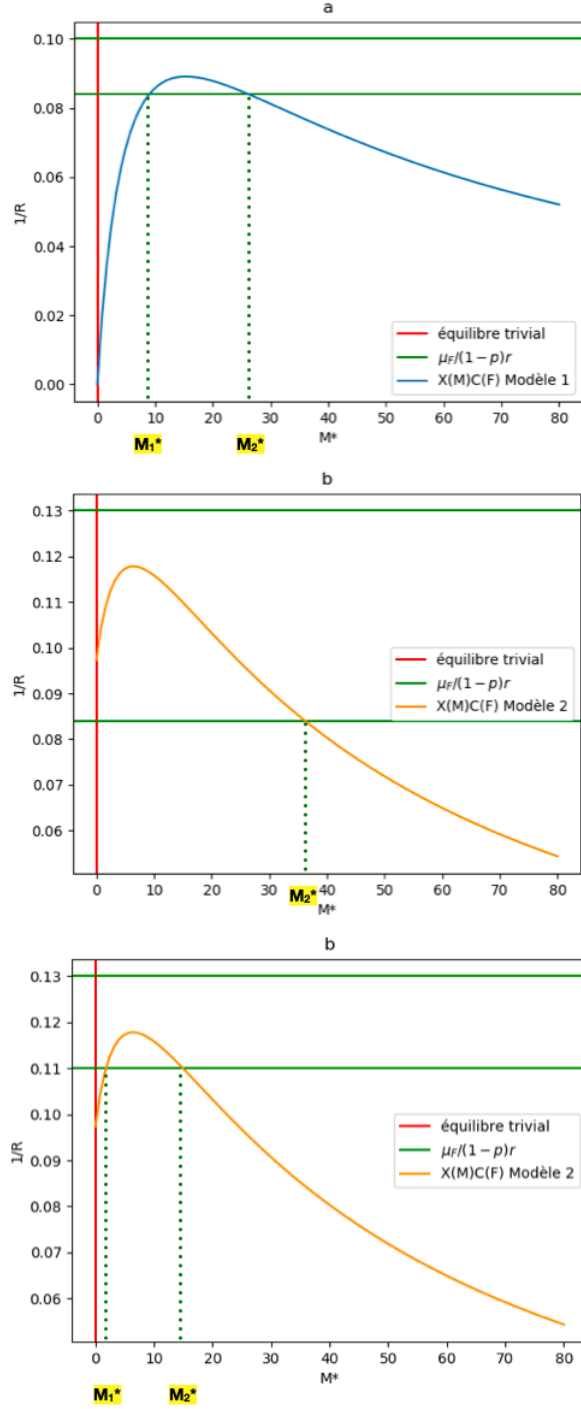


FIGURE 1: Représentation graphique de l'existence des points d'équilibre pour les modèles 1 (a) et 2 (b)

4.2 Modèle 2

Les équilibres positifs sont les solutions de l'équation $X(M^*) \cdot C(F^*) = \frac{\mu_F}{(1-p)r} = \frac{1}{R}$ de la forme :

$$\frac{M^* + \epsilon \eta S^*}{k + M^* + \eta S^*} \cdot \frac{1}{1 + (\beta' M^*)} = \frac{\mu_F}{(1-p)r} = \frac{1}{R} \quad (9)$$

Il y a soit deux équilibres M^* , soit un équilibre M^* , soit aucun. Ces 3 cas sont représentés sur la figure 1 (b).

Ainsi pour le modèle 2, il existe 3 cas selon les valeurs attribuées aux paramètres. Soit les équilibres sont l'équilibre trivial $(S^*, 0, 0)$ seul, soit l'équilibre trivial $(S^*, 0, 0)$ et un équilibre non trivial (S^*, F_2^*, M_2^*) , soit l'équilibre trivial $(S^*, 0, 0)$ et deux équilibres non triviaux (S^*, F_1^*, M_1^*) et (S^*, F_2^*, M_2^*) .

4.3 Modèle 3

Les équilibres positifs sont les solutions de l'équation $X(M^*) \cdot C(F^*) = \frac{\mu_F}{(1-p)r} = \frac{1}{R}$ de la forme :

$$\frac{M^*}{k + M^* + \eta \cdot S^*} \cdot \frac{1}{1 + \beta' \cdot (\omega M^* - \omega')} = \frac{\mu_F}{(1-p)r} = \frac{1}{R} \quad (14)$$

Il y a soit deux équilibres M^* , soit aucun. Ces 2 cas sont représentés sur la figure 2.

Ainsi pour le modèle 3, il existe 2 cas selon les valeurs attribuées aux paramètres. Soit les équilibres sont l'équilibre trivial $(S^*, 0, 0)$ seul, soit l'équilibre trivial $(S^*, 0, 0)$ et deux équilibres non triviaux : (S^*, F_1^*, M_1^*) et (S^*, F_2^*, M_2^*) .

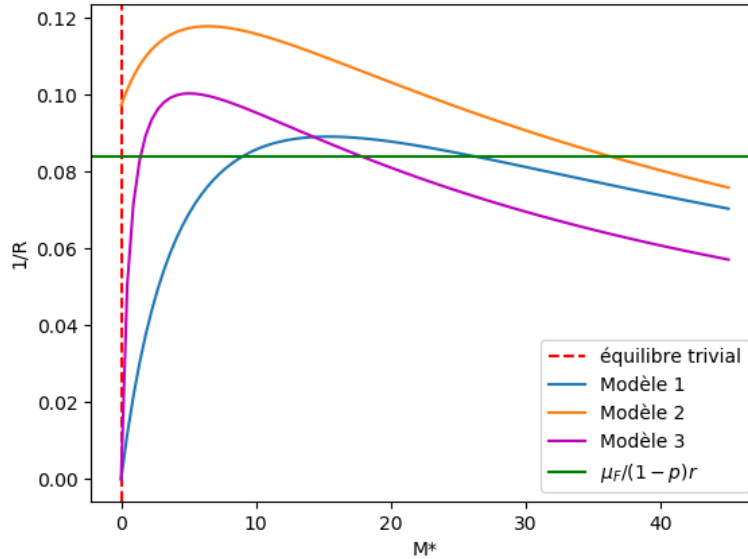


FIGURE 2: Représentation graphique de l'existence des points d'équilibre pour les 3 modèles

L'existence des équilibres peut être aussi mise en évidence pour les 3 modèles en passant par les équations (8), (10), (15) (Figure 3). Cela permet de mettre en évidence l'influence du paramètre ϕ dans l'existence des équilibres. Ce paramètre représente le nombre d'individus stériles lâchés, et étudier l'influence de sa variation sur les équilibres c'est-à-dire à quel taux le fixer pour qu'il n'y ait plus existence d'équilibres positifs, est primordial dans le cadre de la TIS.

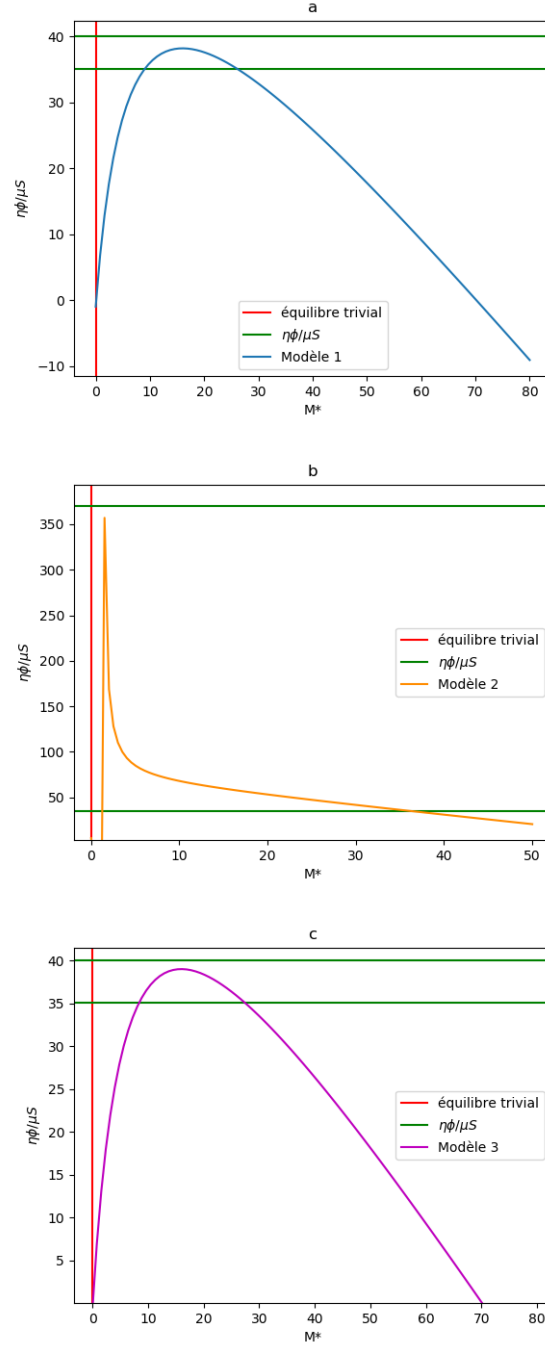


FIGURE 3: Représentation graphique de l'existence des points d'équilibre pour les modèles 1 (a), 2 (b) et 3 (c) en fonction du paramètre ϕ

5 Stabilité des équilibres

La stabilité des équilibres est étudiée en calculant la matrice jacobienne associée au modèle. Pour l'ensemble des modèles étudiés la matrice jacobienne suivante est obtenue :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} & \frac{\partial \dot{F}}{\partial M} \\ \frac{\partial \dot{M}}{\partial F} & \frac{\partial \dot{M}}{\partial M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_F + (1-p)X(M^*)r(C'(F^*)F^* + C(F^*)) & (1-p)C(F^*)rF^*X'(M^*) \\ pX(M^*)r(C'(F^*)F^* + C(F^*)) & -\mu_M + pC(F^*)rF^*X'(M^*) \end{pmatrix}$$

5.1 Etude de l'équilibre $(S^*, 0, 0)$:

$$J(S^*, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu_F & 0 \\ 0 & -\mu_M \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres associées sont sur la diagonale de la matrice $J(S^*, 0, 0)$, elles sont négatives donc l'équilibre $(S^*, 0, 0)$ est asymptotiquement stable.

5.2 Etude de stabilité des autres équilibres :

Simplification de la matrice jacobienne à l'aide des isoclines en 0 :

$$(1-p)rX(M^*)C(F^*) = \mu_F \text{ et } prX(M^*)C(F^*)F^* = \mu_M M^*$$

$$J(S^*, F^*, M^*) = J^* = \begin{pmatrix} (1-p)X(M^*)rC'(F^*)F^* & (1-p)C(F^*)rF^*X'(M^*) \\ pX(M^*)r(C'(F^*)F^* + C(F^*)) & -\frac{pX(M^*)C(F^*)rF^*}{M^*} + pC(F^*)rF^*X'(M^*) \end{pmatrix}$$

5.2.1 Trace

Calcul de la trace :

$$Tr(J^*) = (1-p)X(M^*)rC'(F^*)F^* - \frac{pX(M^*)C(F^*)rF^*}{M^*} + pC(F^*)rF^*X'(M^*)$$

$$Tr(J^*) = (1-p)X(M^*)rC'(F^*)F^* + pC(F^*)rF^*(X'(M^*) - \frac{X(M^*)}{M^*})$$

Etude du signe de $Tr(J^*)$:

$$C'(F^*) < 0$$

donc

$$(1-p)X(M^*)rC'(F^*)F^* < 0$$

de plus

$$pC(F^*)rF^* > 0$$

Donc le signe de la trace dépend du signe de $(X'(M^*) - \frac{X(M^*)}{M^*})$ qu'il est nécessaire d'étudier :

$$X(M^*) - X(0) = \int_0^{M^*} X'(M)dM$$

or $X(0) = 0$ pour les modèles 1 et 3

$$X(M^*) - 0 > \int_0^{M^*} X'(M^*) dM$$

$$X(M^*) > X'(M^*)M^*$$

car la fonction $X(M)$ est concave, la dérivée est donc inférieure d'où

$$X'(M^*) - \frac{X(M^*)}{M^*} < 0$$

Dans le cas du modèle 2, $X(0) = \frac{\epsilon\eta S}{k+\eta S}$ donc on a :

$$X(M^*) - \frac{\epsilon\eta S}{k+\eta S} > X'(M^*)M^*$$

$$X'(M^*) - \frac{X(M^*)}{M^*} < -\frac{\epsilon\eta S}{M^*(k+\eta S)} < 0$$

Finalement dans tous les cas :

$$Tr(J^*) < 0$$

5.2.2 Déterminant

Calcul du déterminant :

$$Det(J^*) = \left((1-p)X(M^*)rC'(F)F \right) \cdot \left(-\frac{pX(M^*)C(F^*)rF^*}{M^*} + pC(F^*)rF^*X'(M^*) \right)$$

$$- \left(((M^*)r(C'(F^*)F^* + C(F^*))) \right) \cdot \left((1-p)C(F^*)rF^*X'(M^*) \right)$$

$$Det(J^*) = -(1-p)p\frac{X(M^*)^2}{M^*}r^2F^{*2}C'(F^*)C(F) + (1-p)pX(M)r^2F^{*2}C'(F^*)X'(M^*)C(F^*)$$

$$- \left(((1-p)pX(M^*)C(F^*)r^2F^{*2}C'(F^*)X'(M^*) + (1-p)pX(M^*)C(F^*)^2r^2F^*X'(M^*)) \right)$$

$$Det(J^*) = -(1-p)p\frac{X(M^*)^2}{M}r^2F^{*2}C'(F^*)C(F^*) - \left((1-p)pX(M^*)(C(F^*)^2)r^2F^*X'(M^*) \right)$$

$$Det(J^*) = (1-p)pX(M^*)C(F^*)r^2F^* \left(-\frac{F^*}{M^*}X(M^*)C'(F^*) - X'(M^*)C(F^*) \right) \quad (16)$$

Pour les modèles 1 et 2 : $F^* = \gamma M^*$ (6), ce qui permet de remplacer $\frac{F^*}{M^*}$ par γ dans (16).

$$Det(J^*) = (1-p)pX(M^*)C(F^*)r^2F^* \left(-X(M^*)\gamma C'(F^*) - X'(M^*)C(F^*) \right)$$

Le signe du déterminant dépend ainsi du signe de $\left(-X(M^*)\gamma C'(F^*) - X'(M^*)C(F^*)\right)$

Or :

$$(X(M^*)C(\gamma M^*))' = X'(M^*) \cdot C(\gamma M^*) + X(M^*)\gamma C'(\gamma M^*) = X'(M^*) \cdot C(F^*) + X(M^*)\gamma C'(F^*)$$

$$Det(J^*) = (1-p)pX(M^*)C(F^*)r^2F^* \cdot \left(-X'(M^*)C(F^*) - X(M^*)\gamma C'(F^*)\right)$$

$$Det(J^*) = (1-p)pX(M^*)C(F^*)r^2F^* \cdot \left(-(X(M^*)C(\gamma M^*))'\right)$$

Le déterminant est du signe opposé de la dérivée $(X(M^*)C(\gamma M^*))'$.

Pour le plus petit M^* , noté M_1^* , la fonction $X(M^*)C(\gamma M^*)$ est croissante (Fig.1), le déterminant est donc négatif, la trace de la matrice jacobienne est également négative donc M_1^* **est un équilibre instable**.

Pour le plus grand M^* , noté M_2^* , la fonction $X(M^*)C(\gamma M^*)$ est décroissante (Fig.1), le déterminant est donc positif, la trace de la matrice jacobienne est négative donc M_2^* **est un équilibre stable**.

Pour le modèle 3 : $F^* = \omega M^* - \omega'$ (13), ce qui permet de remplacer $\frac{F^*}{M^*}$ par $\omega - \frac{\omega'}{M^*}$ dans (16)

$$Det(J^*) = (1-p)pX(M^*)C(F^*)r^2F^* \left(-X(M^*)C'(\omega M^* - \omega')\left(\omega - \frac{\omega'}{M^*}\right) - X'(M^*)C(F^*)\right)$$

Or :

$$(X(M^*)C(\omega M^* - \omega'))' = X(M^*) \cdot C'(\omega M^* - \omega') \cdot \omega + X'(M^*) \cdot C(\omega M^* - \omega') = X(M^*) \cdot C'(F^*) \cdot \omega + X'(M^*) \cdot C(F^*)$$

Le déterminant est du signe opposé de la dérivée $(X(M^*)C(\omega M^* - \omega'))'$. Le déterminant est négatif puis positif comme dans le cas des modèles 1 et 2.

Si on se trouve dans le cas de l'existence des deux équilibres :

M_1^* est un point selle car $Tr(J^*) < 0$ et $Det(J^*) < 0$

M_2^* est un noeud stable car $Tr(J^*) < 0$ et $Det(J^*) > 0$

Ce qui permet de construire les diagrammes de bifurcation associés aux 3 modèles (Fig.4).

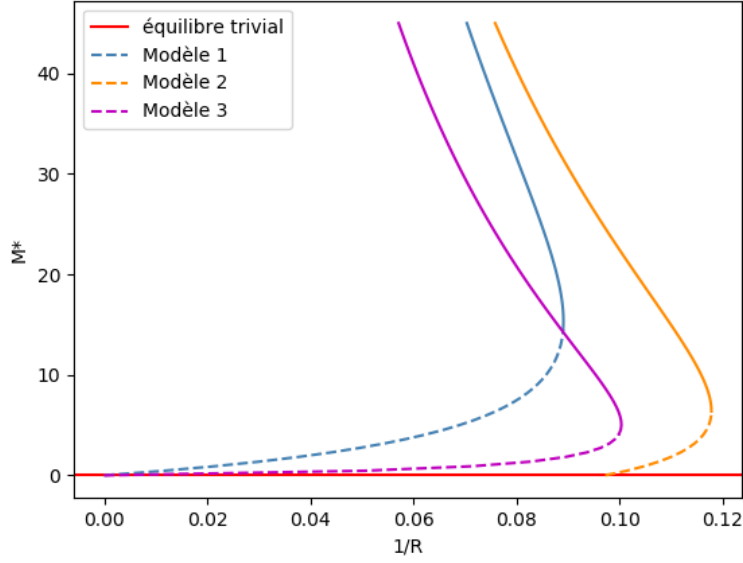


FIGURE 4: Diagramme de bifurcation en fonction de $1/R$, comparaison des 3 modèles (trait plein pour les équilibres stables et trait pointillé pour les équilibres instables)

6 Diagrammes de bifurcation

6.1 Diagramme de bifurcation en fonction de $1/R$

Les diagrammes de bifurcation en fonction du paramètre R pour les 3 modèles ont été représentés sur la figure 4. En comparant les 3 modèles, il n'existe plus que l'équilibre trivial lorsque $1/R > 0.12$ c'est-à-dire lorsque $R < 8$. R étant le taux de reproduction c'est-à-dire le nombre de descendants viables engendrés par une femelle. Donc pour que la population de cératites soit régulée ou s'éteigne, il faut que les femelles produisent moins de 8 descendants viables.

6.2 Diagramme de bifurcation en fonction de ϕ

Les diagrammes de bifurcation en fonction du paramètre ϕ pour les 3 modèles ont été représentés sur la figure 5. Les autres paramètres des modèles ont été fixés avec les valeurs répertoriées dans le tableau 1. Pour que la méthode de l'insecte stérile soit efficace, c'est-à-dire qu'elle entraîne une baisse de la population de cératites considérable pouvant aller jusqu'à l'extinction, il faut lâcher suffisamment de mâles stériles pour que l'équilibre M_2^* stable n'existe plus.

Pour les modèles 1 et 2, l'équilibre M_2^* stable n'existe pas lorsque ϕ est supérieur à environ 11 individus (Fig. 5 (a)).

Pour le modèle 3, l'équilibre M_2^* stable n'existe pas lorsque ϕ est supérieur à environ 225 individus (Fig. 5 (b)). Ces résultats supposent que dans le cas des modèles 1 et 2, un lâché de seulement plus de 11 individus par piège permettrait de contrôler la population de cératites. C'est presque 20 fois moins que pour le modèle 3 (Fig. 5 (c)). Ce qui paraît peu, comparé à d'autres modèles montrant qu'il faudrait presque une centaine d'individus stériles au minimum pour entraîner l'extinction de la population de cératites [5].

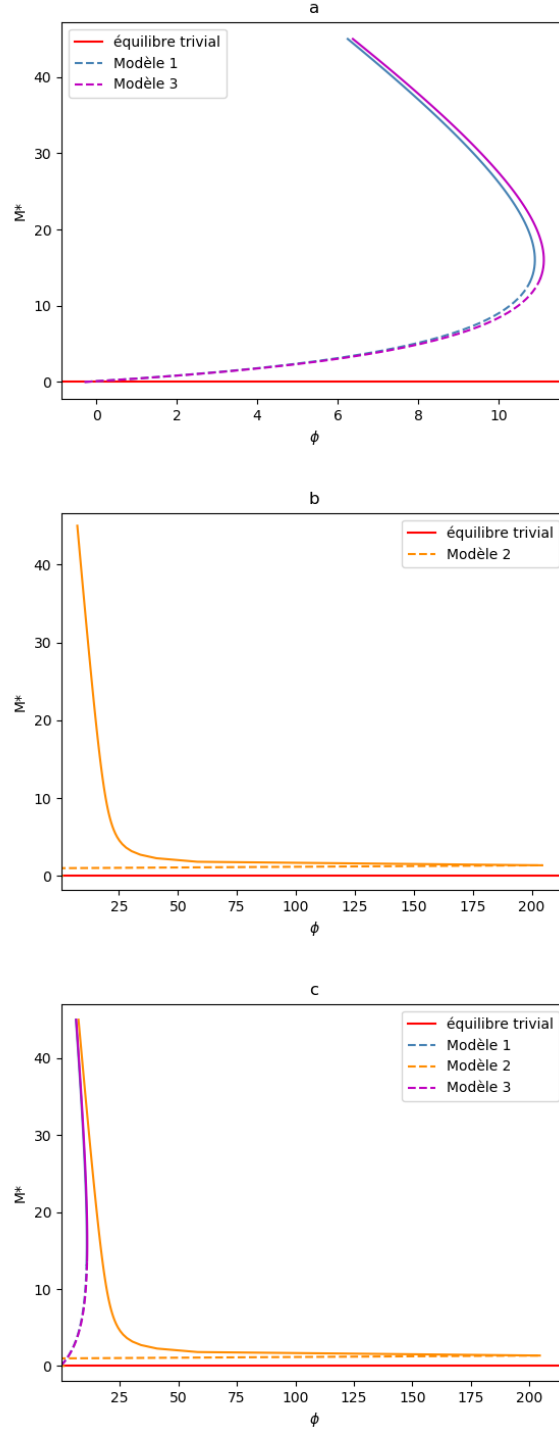


FIGURE 5: Diagramme de bifurcation pour les modèles 1 (a), 2 (b) et 3 (c) en fonction du paramètre ϕ (les équilibres stables sont représentés en trait plein et les équilibres instable en pointillé)

7 Conclusion

Ce stage avait pour objectif de modéliser la dynamique des populations de *Ceratitis capitata* dans le cadre de la technique de l'insecte stérile (TIS), c'est-à-dire en considérant un paramètre ϕ représentant le nombre de mâles stériles lâchés dans les différents modèles établis. L'étude des modèles a permis de donner accès à un seuil ϕ minimal entraînant un déclin de la population de cératites pour chacun des modèles. Ce seuil diffère considérablement pour le modèle prenant en compte l'erreur de stérilisation dans la probabilité de fécondation par rapport aux deux autres modèles, dont l'un considère que tous les mâles irradiés sont stériles, et l'autre ajoute les mâles irradiés non stériles au compartiment des mâles fertiles. Ces résultats suggèrent que la prise en compte de l'erreur de stérilisation dans les modèles peut encore être affinée, notamment avec les données de laboratoire pour préciser le taux de stérilité résiduelle. Cependant, dans le cas de la TIS des lâchers inondatifs sont effectués, il vaut donc mieux lâcher trop de mâles stériles que pas assez, ainsi le seuil trouvé pour le modèle 2, modèle tenant compte de l'erreur de stérilisation des mâles en impactant la probabilité de fécondation, semble être le plus adapté. En effet, le seuil obtenu dans le cas de ce modèle permettrait de lâcher suffisamment de mâles stériles pour qu'un effet soit significatif sur la population de cératites, tout en limitant le nombre d'individus lâchés pour limiter le coût de cette technique biologique. De plus dans cette étude, des lâchers continus ont été considérés, il pourrait être intéressant de faire une comparaison en considérant des lâchers périodiques pour déterminer la stratégie la plus optimale dans le cadre de la technique de l'insecte stérile.

Articles consultés pour cette étude :

- modèles sur la technique de l'insecte stérile [3, 2, 1]
- modèle sur *Ceratitis capitata* [4]

8 Remerciements

Je tenais à remercier mes encadrants pour leur disponibilité, leurs conseils et leur gentillesse. J'ai adoré découvrir la modélisation au travers du projet CeraTIS, merci pour cette belle opportunité.

Je tenais également à remercier mes collègues stagiaires de l'équipe M2P2 ainsi que mes colocalitaires : Sanaa Apoulfadl, Clément Bourgade, Martin Bernet, Lucas Browet, Chaima Chammakhi, Alexia Danné, Audrey Dempsey, Juliette Dufour, Léa Humbert, Mathias Launay, François Mallordy, Kévan Rastello et Coraly Soto, sans qui ce stage n'aurait pas été aussi enrichissant.

Références

- [1] Roumen Anguelov, Yves Dumont, and Ivric Valaire Yatat Djeumen. Sustainable vector/pest control using the permanent sterile insect technique. 43(18) :10391–10412. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/mma.6385>.
- [2] M. Soledad Aronna and Yves Dumont. On nonlinear pest/vector control via the sterile insect technique : Impact of residual fertility. 82(8) :110.
- [3] Pierre-Alexandre Bliman, Daiver Cardona-Salgado, Yves Dumont, and Olga Vasilieva. Implementation of control strategies for sterile insect techniques. 314 :43–60.
- [4] Dorian Chikbouni, Audrey Bouet, and Huiyu Han. Mathematics and informatics modeling of the sterile insect technique (SIT).
- [5] Kévan Rastello. Mathematical model of ceratitidis capitata population dynamics in corsica in a context of control with the sterile insect technique (SIT).