Rappel. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est $det(A - \lambda I)$ (c'est un polynôme en λ).

Exemple : Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cd = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc\ .$$

§7.7 Trace, déterminant et valeurs propres

Rappel. Les valeurs propre d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique.

Définition. On appelle la trace de A la somme des éléments sur la diagonale.

Définition. On appelle la trace de A la somme des éléments sur la diagonale.

Exemples. $tr\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$, $tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =??$

$$tr\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} =??$$

Théorème. La trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A et le déterminant de A est le produit des valeurs propres de A.

Proof. Dans le cas $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $det(A) = ad - bc$, $tr(A) = a + d$ et $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda_1\lambda - \lambda_2\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$.

Donc $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d = tr(A)$ et $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc = det(A)$. Le cas général se démontre de manière similaire.

§7.8. Théorème de Caylay-Hamilton, calcul de A^{-1}.

Théorème. Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

§7.8. Théorème de Caylay-Hamilton, calcul de A^{-1}.

Théorème. Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors
$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$

§7.8. Théorème de Caylay-Hamilton, calcul de A^{-1}.

Théorème. Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors
$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$.

Le Théorème de Caylay-Hamilton affirme que $A^2 - 5A - 2I$ doit être

§7.8. Théorème de Caylay-Hamilton, calcul de A^{-1}.

Théorème. Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors
$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$

Le Théorème de Caylay-Hamilton affirme que $A^2 - 5A - 2I$ doit être la matrice zéro, c'est-à-dire $\boxed{A^2 - 5A - 2I = 0\ .}$ Vérifier-le !

§7.8. Théorème de Caylay-Hamilton, calcul de A^{-1}.

Théorème. Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors
$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$

Le Théorème de Caylay-Hamilton affirme que $A^2 - 5A - 2I$ doit être la matrice zéro, c'est-à-dire $\boxed{A^2 - 5A - 2I = 0\ .}$ Vérifier-le !

A quoi ça sert ?

§7.8. Théorème de Caylay-Hamilton, calcul de A^{-1}.

Théorème. Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors
$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$

Le Théorème de Caylay-Hamilton affirme que $A^2 - 5A - 2I$ doit être la matrice zéro, c'est-à-dire $\boxed{A^2 - 5A - 2I = 0\ .}$ Vérifier-le !

A quoi ça sert ? Ca aide a calculer
1. la matrice inverse A^{-1} : Puisque $A^2 - 5A - 2I = 0$, on a $A^2 - 5A = 2I$, et $A(A - 5I) = 2I$. Donc $A \cdot \frac{1}{2}(A - 5I) = I$. Donc $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I)$.
2. les puissances : $A^3 = A^2 \cdot A = (5A + 2I)A = 5A^2 + 2A =$

§7.8. Théorème de Caylay-Hamilton, calcul de A^{-1}.

Théorème. Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors
$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$.

Le Théorème de Caylay-Hamilton affirme que $A^2 - 5A - 2I$ doit être la matrice zéro, c'est-à-dire $\boxed{A^2 - 5A - 2I = 0\ .}$ Vérifier-le !

A quoi ça sert ? Ca aide a calculer
1. la matrice inverse A^{-1} : Puisque $A^2 - 5A - 2I = 0$, on a $A^2 - 5A = 2I$, et $A(A - 5I) = 2I$. Donc $A \cdot \frac{1}{2}(A - 5I) = I$. Donc $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I)$.
2. les puissances : $A^3 = A^2 \cdot A = (5A + 2I)A = 5A^2 + 2A =$
$= 5(5A + 2I) + 2A = 27A + 10I$, et

§7.8. Théorème de Caylay-Hamilton, calcul de A^{-1}.

Théorème. Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors
$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$

Le Théorème de Caylay-Hamilton affirme que $A^2 - 5A - 2I$ doit être la matrice zéro, c'est-à-dire $\boxed{A^2 - 5A - 2I = 0\ .}$ Vérifier-le !

A quoi ça sert ? Ca aide a calculer
1. la matrice inverse A^{-1} : Puisque $A^2 - 5A - 2I = 0$, on a $A^2 - 5A = 2I$, et $A(A - 5I) = 2I$. Donc $A \cdot \frac{1}{2}(A - 5I) = I$. Donc $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I)$.
2. les puissances : $A^3 = A^2 \cdot A = (5A + 2I)A = 5A^2 + 2A =$
$= 5(5A + 2I) + 2A = 27A + 10I$, et $A^4 = \cdots$

§7.8. Théorème de Caylay-Hamilton, calcul de A^{-1}.

Théorème. Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors
$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$

Le Théorème de Caylay-Hamilton affirme que $A^2 - 5A - 2I$ doit être la matrice zéro, c'est-à-dire $\boxed{A^2 - 5A - 2I = 0\ .}$ Vérifier-le !

A quoi ça sert ? Ca aide a calculer
1. la matrice inverse A^{-1} : Puisque $A^2 - 5A - 2I = 0$, on a $A^2 - 5A = 2I$, et $A(A - 5I) = 2I$. Donc $A \cdot \frac{1}{2}(A - 5I) = I$. Donc $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I)$.
2. les puissances : $A^3 = A^2 \cdot A = (5A + 2I)A = 5A^2 + 2A =$
$= 5(5A + 2I) + 2A = 27A + 10I$, et $A^4 = \cdots = 145A + 52I$.

Retour à la diagonalisation

A quoi ça sert de diagonaliser une matrice ? c'est-à-dire exprimer A sous la forme PMP^{-1} avec M diagonale ?

Retour à la diagonalisation

A quoi ça sert de diagonaliser une matrice ? c'est-à-dire exprimer A sous la forme PMP^{-1} avec M diagonale ?

Ça sert en particulier de faciliter le calcul d'une puissance de la matrice, par exemple $A^3 = PM^3P^{-1}$.

A quoi ça sert de calculer des puissances d'une matrice ?

Ça sert par exemple de calculer le cumul d'intérêt :

Avec n euros de capital, et $0,3\%$ d'intérêt annuel, comment calculer le capital au bout de 3 ans, de 10 ans ?

Avec x euros d'action A et y euros d'action B, les valeurs après un an sont $x + 0,3y$ et $0,25x + y$ respectivement. Comment calculer les valeurs après 3 ans, après 10 ans ?

Critères de diagonalisabilité

Théorème 1 (facile) Si toutes les racines du polynôme caractéristique de A sont simples, alors A est diagonalisable. (sinon, A peut être ou ne pas être diagonalisable).

Théorème 2 (difficile) Si A est une matrice réelle et symétrique, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles et A est diagonalisable.

Exo. Pour chacune des trois matrices suivantes, déterminer si elle est diagonalisable, et la diagonaliser si possible :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on voit qu'elle est symétrique, donc par le théorème 2, elle est diagonalisable. On peut aussi calculer son polynôme caractéristique $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. De là on voit qu'il y a deux valeurs propres distinctes. On peut donc appliquer Théorème 1 pour conclure que la matrice est diagonalisable. On peut bien sur commencer à chercher les vecteurs propres...

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on voit qu'elle est symétrique, donc par le théorème 2, elle est diagonalisable. On peut aussi calculer son polynôme caractéristique $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)$. De là on voit qu'il y a deux valeurs propres distinctes. On peut donc appliquer Théorème 1 pour conclure que la matrice est diagonalisable. On peut bien sur commencer à chercher les vecteurs propres...

Pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on n'a qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$. Calculer une base de son sous espace propre : $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve $Ker(A-I) = \langle \vec{\mathbf{e}}_1 \rangle$. Donc $P = \left(\vec{\mathbf{e}}_1\right)$ n'est pas une matrice carrée. A n'est pas diagonalisable.

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on voit qu'elle est symétrique, donc par le théorème 2, elle est diagonalisable. On peut aussi calculer son polynôme caractéristique $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. De là on voit qu'il y a deux valeurs propres distinctes. On peut donc appliquer Théorème 1 pour conclure que la matrice est diagonalisable. On peut bien sur commencer à chercher les vecteurs propres...

Pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on n'a qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$. Calculer une base de son sous espace propre : $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve $Ker(A - I) = \langle \vec{\mathbf{e}}_1 \rangle$. Donc $P = \left(\vec{\mathbf{e}}_1 \right)$ n'est pas une matrice carrée. A n'est pas diagonalisable.

Pour $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on voit qu'elle est symétrique, donc par le théorème 2, elle est diagonalisable. On peut aussi calculer son polynôme caractéristique $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. De là on voit qu'il y a deux valeurs propres distinctes. On peut donc appliquer Théorème 1 pour conclure que la matrice est diagonalisable. On peut bien sur commencer à chercher les vecteurs propres...

Pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on n'a qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$. Calculer une base de son sous espace propre : $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve $Ker(A - I) = \langle \vec{\mathbf{e}}_1 \rangle$. Donc $P = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice carrée. A n'est pas diagonalisable.

Pour $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est $(\lambda - 4)^2$. Donc 4 est une valeur propre double. Son sous espace propre est de dimension un. A n'est pas diagonalisable.

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est
$(2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\Big)$.

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est $(2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\Big)$. Il faut surtout garder le facteur $(2-\lambda)$, on obtient que les valeurs propres sont 2 et les racines de $(3-\lambda)(1-\lambda)-8$. Donc les valeurs propres sont

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est $(2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\Big)$. Il faut surtout garder le facteur $(2-\lambda)$, on obtient que les valeurs propres sont 2 et les racines de $(3-\lambda)(1-\lambda)-8$. Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$.

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est $(2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\Big)$. Il faut surtout garder le facteur $(2-\lambda)$, on obtient que les valeurs propres sont 2 et les racines de $(3-\lambda)(1-\lambda)-8$. Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$. Pour trouver les vecteurs propres correspondants,

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est $(2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\Big)$. Il faut surtout garder le facteur $(2-\lambda)$, on obtient que les valeurs propres sont 2 et les racines de $(3-\lambda)(1-\lambda)-8$. Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$. Pour trouver les vecteurs propres correspondants,

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Donc

$A = PMP^{-1}$, avec $M =$

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est $(2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\Big)$. Il faut surtout garder le facteur $(2-\lambda)$, on obtient que les valeurs propres sont 2 et les racines de $(3-\lambda)(1-\lambda)-8$. Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$. Pour trouver les vecteurs propres correspondants,

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & 0 & \color{blue}{0} \\ 0 & 0 & \color{blue}{1} \\ -\frac{1}{3} & -1 & \color{blue}{2} \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \color{blue}{1} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \color{blue}{-\frac{1}{3}} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \color{blue}{-\frac{2}{3}} \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & 0 & \color{blue}{0} \\ 0 & 0 & \color{blue}{1} \\ \frac{1}{3} & -1 & \color{blue}{-4} \end{array}\right)$$

Donc
$A = PMP^{-1}$, avec $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P =$

Pour $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est $(2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\Big)$. Il faut surtout garder le facteur $(2-\lambda)$, on obtient que les valeurs propres sont 2 et les racines de $(3-\lambda)(1-\lambda)-8$. Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$. Pour trouver les vecteurs propres correspondants,

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Donc
$A = PMP^{-1}$, avec $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Pour $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est $(-1-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\Big)$.

Pour $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est $(-1-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\Big)$. Il faut surtout garder les facteurs, ici $(-1-\lambda)$, on obtient que les valeurs propres sont 5, -1 et -1.

$$\lambda_1 = 5 : \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ \hline \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -1 & 2 \end{array}\right), \quad \lambda_2 = -1 : \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Par chance, la valeur λ_2 qui compte double, a deux vecteurs propres libres dans $Ker(A - \lambda_2 I)$. On peut donc former P et $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ telles que $A = PMP^{-1}$. Ici $P =$??

D'autres cas de valeurs propres multiples

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

A est déjà diagonale, 5 est une valeur propre double.

D'autres cas de valeurs propres multiples

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

A est déjà diagonale, 5 est une valeur propre double.

B a pour valeurs propres

D'autres cas de valeurs propres multiples

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

A est déjà diagonale, 5 est une valeur propre double.

B a pour valeurs propres $2, -1, -1$, une base de $Ker(B - 2I)$ est

D'autres cas de valeurs propres multiples

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

A est déjà diagonale, 5 est une valeur propre double.

B a pour valeurs propres $2, -1, -1$, une base de $Ker(B - 2I)$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et une base de $Ker(B - (-1)I)$ est

D'autres cas de valeurs propres multiples

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

A est déjà diagonale, 5 est une valeur propre double.

B a pour valeurs propres $2, -1, -1$, une base de $Ker(B - 2I)$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et une base de $Ker(B - (-1)I)$ est $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$. Donc B est diagonalisable.

La matrice C a pour valeurs propres

D'autres cas de valeurs propres multiples

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

A est déjà diagonale, 5 est une valeur propre double.

B a pour valeurs propres $2, -1, -1$, une base de $Ker(B - 2I)$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et une base de $Ker(B - (-1)I)$ est $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$. Donc B est diagonalisable.

La matrice C a pour valeurs propres $2, 2, 1$. Mais il nous manque de vecteurs propres libres pour former la matrice P. Cette matrice n'est donc pas diagonalisable, voir Exo. 6 de TD 6.

Epilogue : Base du noyau après échelonnement suivant les lignes :

Epilogue : Base du noyau après échelonnement suivant les lignes :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les pivôts doivent être égales à 1).

Epilogue : Base du noyau après échelonnement suivant les lignes :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les pivôts doivent être égales à 1).
- On permutes les lignes de 0 afin de mettre les pivots sur la diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Epilogue : Base du noyau après échelonnement suivant les lignes :

- $\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & ① & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les pivôts doivent être égales à ①).
- On permutes les lignes de 0 afin de mettre les pivots sur la diagonale : $\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ① & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On remplace les 0 sur la diagonale par -1 et on extrait ces vecteurs colonnes : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Epilogue : Base du noyau après échelonnement suivant les lignes :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les pivôts doivent être égales à 1).
- On permutes les lignes de 0 afin de mettre les pivots sur la diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On remplace les 0 sur la diagonale par -1 et on extrait ces vecteurs colonnes : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. C'est la base recherchée !

Epilogue : Base du noyau après échelonnement suivant les lignes :

- $\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & ① & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les pivôts doivent être égales à ①).
- On permutes les lignes de 0 afin de mettre les pivots sur la diagonale : $\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ① & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On remplace les 0 sur la diagonale par -1 et on extrait ces vecteurs colonnes : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. C'est la base recherchée !

Preuve : Ces vecteurs sont clairement libres et de bon nombre par le théorème du rang. Il reste plus qu'à vérifier manuellement qu'ils sont dans le noyau.

Epilogue : Base du noyau après échelonnement suivant les lignes :

- $\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & ① & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les pivôts doivent être égales à ①).
- On permutes les lignes de 0 afin de mettre les pivots sur la diagonale : $\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ① & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On remplace les 0 sur la diagonale par -1 et on extrait ces vecteurs colonnes : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. C'est la base recherchée !

Preuve : Ces vecteurs sont clairement libres et de bon nombre par le théorème du rang. Il reste plus qu'à vérifier manuellement qu'ils sont dans le noyau. Tester sur un autre exemple !