

article de recherche

Modélisation mathématique de la technique de l'insecte stérile à l'aide de différentes stratégies de libération

Anis Ben Dhahbi,^{1,2}Yassine Chargui,^{1,2}Salah Mahmoud Boulaaras,^{3,4}
Sana Ben Khalifa,^{1,5}Walid Koko,⁶et Fayçal Alresheedi⁷

¹Département de physique, Collège des sciences et des arts à Ar Rass, Université Qassim, PO Box 53, Ar Rass 51921, Arabie saoudite

²Université de Tunis El Manar, Faculté des Sciences de Tunis, Unité de Recherche en Physique Nucléaire et Physique des Hautes Énergies, Tunis 2092, Tunisie

³Département de mathématiques, Collège des sciences et des arts à Ar Rass, Université Qassim, PO Box 53, Ar Rass 51921, Arabie saoudite

⁴Laboratoire de Mathématiques Fondamentales et Appliquées d'Oran (LMFAO), Université d'Oran Ahmed Benbella, Oran, Algérie

⁵Laboratoire de l'Energie et des Matériaux (LabEM), ESSTHS, Université de Sousse, 4011 H., Sousse, Tunisie

⁶Département de biologie, Collège des sciences et des arts à ArRass, Université Qassim, PO Box 53, ArRass 51921, Arabie saoudite

⁷Département de physique, Collège des sciences, Université Qassim, PO 6644, Buryadh 51452, Arabie saoudite

La correspondance doit être adressée à Sana Ben Khalifa; sana.benkhaliifa19@gmail.com

Reçu le 25 septembre 2020 ; Révisé le 22 octobre 2020 ; Accepté le 27 octobre 2020 ; Publié le 7 novembre 2020

Éditeur académique : Sundarapandian Vaidyanathan

Copyright © 2020 Anis Ben Dhahbi et al. + est un article en libre accès distribué sous la licence Creative Commons Attribution, qui permet une utilisation, une distribution et une reproduction sans restriction sur tout support, à condition que l'œuvre originale soit correctement citée.

Nous étudions des modèles mathématiques simples pour la dynamique de populations interactives d'insectes sauvages et stériles. En plus d'être mathématiquement traitables, ces modèles peuvent être utilisés comme premières approximations de situations réelles se produisant avec la technique de l'insecte stérile (SIT) dans laquelle des mâles stériles sont relâchés pour réduire ou éradiquer une population de ravageurs. +is est une méthode de lutte biologique qui peut aider efficacement à contenir la propagation de nombreux insectes nuisibles tels que le charançon rouge du palmier (RPW). Les modèles formulés dans cet article sont en temps continu, incluent un fort effet Allee qui capture les événements d'extinction et intègrent différentes stratégies de libération d'insectes stériles. Nous effectuons des études de base des caractéristiques dynamiques de ces modèles, en mettant l'accent sur la condition d'excitation, et l'impact des différentes méthodes de libération est étudié.

1. Introduction

Ces dernières années, il y a eu une augmentation rapide de l'utilisation de méthodes biologiques pour le contrôle des insectes nuisibles. Un outil, qui s'est avéré efficace dans le contrôle de divers insectes à l'échelle de la zone, est le SIT. Cette méthode, introduite initialement par Knipling [1], consiste à relâcher un grand nombre de mâles stérilisés dans l'environnement. Une telle technique constitue un procédé de lutte biologique qui perturbe la reproduction naturelle des insectes ravageurs. + est réalisé en utilisant des procédures chimiques ou physiques ou d'autres procédures radicales pour traiter les insectes nuisibles mâles afin de les rendre stériles, de sorte qu'ils deviennent incapables de se reproduire, quelle que soit leur libido. +e

les mâles stériles sont ensuite introduits dans l'environnement et rivalisent pour s'accoupler avec les mâles fertiles, de sorte que l'interaction entre les mâles stérilisés et les insectes nuisibles sauvages femelles ne conduira à aucune reproduction d'insectes, perturbant ainsi le processus de reproduction naturel de la population. Malgré le fait que la libération fréquente d'insectes nuisibles traités en grandes quantités finira par éradiquer complètement la population d'insectes nuisibles sauvages, il est plus pratique de contrôler la population d'insectes nuisibles sauvages au lieu de l'éliminer complètement. +fr, si le nombre de mâles stériles lâchés est suffisamment élevé et se répète sur une période de temps suffisante, la fertilité moyenne de la population cible pourrait être réduite conduisant au contrôle voire à l'éradication de la population de ravageurs de grandes

domaines. La première opération SIT réussie a été menée contre la population de vers à vis en Floride à la fin des années 1950. Plus tard, cette technique a été appliquée pour lutter contre un certain nombre de ravageurs et de vecteurs de maladies, tels que la mouche méditerranéenne des fruits (mouche méditerranéenne), le RPW dans les cocotiers et les palmiers dattiers, et la mouche tsé-tsé en Afrique (voir [2] pour une vue d'ensemble). examen du SIT et de ses applications). De plus, des maladies comme la dengue et le paludisme qui sont transmises à l'homme par les moustiques se nourrissant de sang présentent un problème de santé important pour les gens. Selon l'Organisation mondiale de la santé (OMS), environ un à trois millions de personnes succombent chaque année au paludisme. Le paludisme frappe énormément l'Afrique et l'Amérique du Sud, tuant principalement des enfants et des femmes enceintes. Comme il n'existe pas de vaccins disponibles pour prévenir les maladies transmises par les moustiques,

D'autre part, pour la lutte antivectorielle en particulier, de nouvelles approches avec des principes de fonctionnement similaires à la SIT ont été développées. +ose comprennent, d'une part, les méthodes de lutte génétiquement modifiées, telles que la technique RIDL (Release of Insects with Dominant Lethality) et, d'autre part, la *Wolbachia* technique. +e premiers impliquent la libération d'insectes génétiquement modifiés (qui ont un gène létal dans leur génome dans la stratégie RIDL), tandis que le second utilise la propriété d'incompatibilité cytoplasmique (CI) du *Wolbachia* bactérie [3–5]. En effet, ces bactéries ont la propriété d'altérer le sperme des mâles infectés le rendant incapable de féconder les ovules non infectés. +est le principe de la Technique des Insectes Incompatibles (IIT) [6–11]. De plus, la propriété CI élève considérablement la descendance des femelles infectées. Et depuis *Wolbachia* est hérité de la mère, la libération d'un grand nombre de femmes *W* dans une population cible peut conduire à un remplacement de la population (RP) par *Wolbachia*-insectes infectés et éventuellement à l'élimination de la population sauvage (voir, par exemple, [12] pour une revue récente de la *Wolbachia* basée sur une stratégie de relations publiques). A noter que des PR et des invasions ont été observées dans des populations naturelles, comme chez le Californien *Culex pipiens* [13] et l'Australien *Aedes aegypti* [14].

Motivées par la problématique du contrôle d'une population de ravageurs au moyen d'une méthode de type SIT, de nombreuses études théoriques, notamment sur la modélisation mathématique de la SIT classique, de l'IIT, et de la *Wolbachia*-PR, ont été menées (voir, par exemple, [15–26] pour SIT/IIT et [27–30] pour PR et leurs références). En fait, les modèles mathématiques se sont avérés précieux pour comprendre divers problèmes importants de la dynamique des populations, tels que les mécanismes de suppression et le succès ou l'échec de différentes stratégies. +us, diverses classes de modèles ont été formulées, y compris des approches déterministes, stochastiques, en temps continu, en temps discret, hybrides et des modèles temporels et spatio-temporels.

Dans cet article, nous étudions la dynamique des insectes sauvages et stériles interactifs avec un accent particulier sur l'impact de la stratégie adoptée dans la libération des individus stériles. +ree méthodes de libération sont ensuite incorporées sur la base des travaux [25, 31, 32]. +e l'interaction stérile-fertile est supposée être une compétition unilatérale qui n'affecte que la population de type sauvage. Pour refléter le besoin d'un seuil de densité critique pour

la persistance de la population sauvage, un fort effet Allee est inclus. De plus, pour garder le modèle raisonnablement simple, nous considérons des populations d'insectes homogènes telles qu'aucune distinction mâle-femelle ou stade n'est faite et les taux de mortalité pour les insectes stériles et fertiles sont supposés être indépendants de la densité et égaux.

+ e papier est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présenter nos hypothèses générales de modélisation. Dans les sections 3, 4 et 5, respectivement, nous considérons trois sous-modèles, chacun avec une stratégie de lâcher différente : le premier implique un taux de lâcher constant, le second suppose un taux de lâcher proportionnel à la taille de la population sauvage, et le troisième utilise un taux de libération de type Holling-II. Nous effectuons une analyse mathématique détaillée de ces modèles et discutons leurs caractéristiques dynamiques, en particulier l'existence d'équilibres et leur stabilité. Nous illustrons également nos résultats analytiques par des calculs numériques. Dans la dernière section, nous donnons une brève conclusion.

2. Le modèle général

Nous considérons un modèle bidimensionnel à une étape qui implique la dépendance à la densité uniquement dans le terme de croissance des insectes nuisibles. Nous supposons que le taux de natalité des insectes stériles est leur taux de lâcher et que la compétition stérile-fertile n'affecte que la population sauvage.

Laisser M être le nombre d'insectes sauvages à la fois. En l'absence d'insectes stériles, M est supposée évoluer selon l'équation suivante :

$$\frac{dM}{dt} = g(M) - \mu M \geq 0, \quad (1)$$

où $g(M)$ est la fonction de croissance de la population sauvage et μ est son taux de mortalité considéré comme indépendant de la densité. De plus, considérant que la subsistance de la population sauvage nécessite une certaine densité de seuil critique, nous supposons un effet Allee tel que la fonction de naissance prend la forme [33, 34]

$$g(M) = arM(K-M)(N-\epsilon), \quad (2)$$

où K est la capacité de charge de la niche et ϵ est le paramètre de l'effet Allee ($\epsilon < K$), et nous avons posé $a = 4/(K-\epsilon)^2$, de sorte que le paramètre rest la valeur maximale du taux de croissance comme dans le modèle logistique habituel. Notons que l'effet Allee a suscité beaucoup d'intérêt récemment en raison de son fort impact potentiel sur la dynamique des populations (voir, par exemple, [35]). Cet effet peut provenir de différentes causes, mais la plus évidente d'entre elles est la difficulté de trouver des partenaires dans des populations de faible taille [36].

$$\frac{dM}{dt} = arM(K-M)(N-\epsilon) - \mu M \quad (3)$$

+ est l'équation a un point d'équilibre trivial à $M = 0$, qui est localement asymptotiquement stable. Un équilibre positif de l'équation (3) devrait être un zéro de la fonction $Q(M)$ Défini par

$$Q(M) = (K-M)(N-\epsilon) - \mu r^{-1}, \quad (4)$$

avec $\mu r^{-1} = \mu / ar$. La fonction + a deux racines :

$$N_{\pm} = \frac{K + \varepsilon \pm (K - \varepsilon) \sqrt{1 - \mu/r}}{2}, \quad (5)$$

qui sont réels sous la condition $r > \mu$, c'est-à-dire à condition que le taux de mortalité reste inférieur au taux de croissance maximal. Par conséquent, le modèle donné par l'équation (3) peut avoir aucun, un ou deux équilibres positifs selon que $r > \mu$, $\mu < r$, ou alors $r < \mu$, respectivement.

Dans le cas où la condition $r > \mu$ est remplie, à un équilibre positif N_+ on a

$$\frac{r}{N} [arN(K - M)(N - \varepsilon) - \mu M] (N - \varepsilon) - arN_+ (K + \varepsilon - 2N_+), \quad (6)$$

+ nous,

$$\frac{r}{N} [arN(K - M)(N - \varepsilon) - \mu M] (N - \varepsilon) - arN_+ (K + \varepsilon - 2N_+) = 0, \quad (7)$$

ce qui signifie que l'équilibre N_+ est instable, alors que l'équilibre N_- est asymptotiquement stable. A partir de maintenant, nous supposons que la condition $r > \mu$ est satisfait.

Désormais, une fois que les insectes stériles auront été relâchés dans la population sauvage, son succès reproducteur sera réduit. Nous supposons que le taux de natalité des insectes sauvages est affecté de sorte qu'il suit la moyenne harmonique. D'autre part, comme l'interaction stérile-fertile est admise comme une compétition unilatérale (pour les partenaires), les insectes stériles ne sont pas affectés par la présence d'individus fertiles. + nous, si nous désignons par $M(t)$ le nombre d'insectes stériles à la fois t , la dynamique interactive est alors régie par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{r}{N} \frac{dN}{dt} &= ar \frac{N_2}{N + M} (K - M)(N - \varepsilon) - \mu N, \\ \frac{r}{M} \frac{dM}{dt} &= R(M) - \mu M, \end{aligned} \quad (8)$$

où nous avons supposé que les insectes stériles ont la même capacité de survie que les insectes sauvages. $R(M)$ est une fonctionnelle caractérisant la stratégie de libération, supposée indépendante de t . Par la suite, nous considérerons trois formes différentes de $R(M)$, avec l'hypothèse $r > \mu$.

3. Taux de libération constant

Nous considérons ici la situation où des insectes stériles sont constamment relâchés afin que $R(M) = c$, avec c , une constante positive. + fr, le système (8) prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{r}{N} \frac{dN}{dt} &= ar \frac{N_2}{N + M} (K - M)(N - \varepsilon) - \mu N, \\ \frac{r}{M} \frac{dM}{dt} &= c - \mu M \end{aligned} \quad (9)$$

Pour ce modèle, il est facile de vérifier que le rectangle du plan de phase

$$\Omega_1 = \{(N, M) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq N \leq N_+, 0 \leq M \leq \eta\}, \quad (\text{dix})$$

avec $\eta = c/\mu$, est un invariant positif, et nous supposons dans cette section que $(N, M) \in \Omega_1$.

Le système (9) a un premier équilibre $E_{c0} = (0, \eta)$ couché sur la frontière de Ω_1 . Elle correspond à la situation d'absence d'insectes sauvages, mais seule une population constante d'individus stériles est présente. De plus, s'il existe, un équilibre positif devrait être une solution de l'équation cubique :

$$NQ(N) - c = 0, \quad (11)$$

avec $c = c/\mu$. Selon la règle des signes de Descartes, cette équation a toujours une solution négative réelle (que nous négligerons) et soit aucune, soit une, soit deux solutions positives réelles. Et une ou deux racines positives se produisent si la courbe de la fonction $Q(N) = NQ(N)$ intercepte le c -axe une ou deux fois, respectivement. Par ailleurs, une étude élémentaire des variations de $Q(N)$ montre que $Q(N) < 0$ pour $N < N_+$. + fr, comme N augmente de N_- , cette fonction augmente également de zéro à atteindre un certain maximum au point

$$N_h = \frac{K + \varepsilon + K\varepsilon + (K - \varepsilon)^2(1 - 3\mu/4r)}{3}, \quad (12)$$

avant de baisser indéfiniment. Notez ici que N_h est toujours réel et positif car nous avons supposé que $r > \mu$. On en déduit alors que la condition d'existence de deux solutions positives pour l'équation (11) est

$$N_h Q(N_h) > c. \quad (13)$$

+ est défini une valeur seuil du taux de relâchement c comme

$$c_c = arN_h Q(N_h), \quad (14)$$

à laquelle l'équation (11) admet une unique racine positive. Noter que cette définition de c_c exige tacitement que $Q(N_h)$ être positif, et nous pouvons facilement montrer que c'est toujours le cas car $r > \mu$.

+ nous, on en déduit que le modèle donné par l'équation (9) n'ont pas, un ou deux équilibres positifs si $c < c_c$, $c = c_c$, ou alors $c > c_c$, respectivement. Remarquons également que tous les équilibres du modèle se trouvent sur la frontière du rectangle Ω_1 auquel $M = \eta$.

Ensuite, nous abordons la stabilité des équilibres. + e Matrice jacobienne à un point d'équilibre (N_*, η) a la forme

$$J_c = \begin{bmatrix} \mu \frac{N_*}{N_* + \eta} - \mu & -\mu \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (15)$$

A l'équilibre aux frontières E_{c0} , on a $J_c = \begin{bmatrix} -\mu & -\mu \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$. Donc, E_{c0} est toujours asymptotiquement stable. De plus, dans le cas où aucun équilibre positif n'existe en tant que Ω_1 est un invariant positif, on conclut par le point-

théorème de caré-Bendixson selon lequel E_{c0} est globalement asymptotiquement écurie. + nous, pour un taux de lâcher d'insectes stériles $c > c_c$, le sauvage population évolue vers l'extinction quel que soit son nombre initial. + est un résultat très important du modèle puisque l'estimation du nombre optimal d'insectes stériles à

libérés afin d'éradiquer la population de ravageurs reste l'un des objectifs ultimes de la modélisation SIT.

A un équilibre positif (N^*, η) , l'élément de matrice J_{c11} peut être écrit comme

$$J_{c11} = \frac{r}{r-1} \frac{arN^*}{(N^*+\eta)^2} [\alpha(N^*) - c] \quad (16)$$

+ fr, en gardant à l'esprit que $\alpha(N^*) > c$, on peut re-expresser comme

$$J_{c11} = \frac{arN^*}{(N^*+\eta)^2} \alpha'(N^*), \quad (17)$$

avec $\alpha'(N^*) = \frac{d\alpha(N^*)}{dN^*}$. D'autre part, si l'on note par N_{c1} et N_{c2} les deux équilibres positifs du modèle (avec $N_{c2} < N_{c1}$), on peut déduire du comportement précité de la fonction $\alpha(N)$ que $N_{c1} < N_h$ et $N_{c2} > N_h$. De plus, depuis $\alpha(N)$ est strictement croissante sur (N_0, N_h) , puis, en particulier, $\alpha(N_{c1})$ est strictement positif et donc $J_{c11}(N_{c1}) > 0$. De même, comme $\alpha(N)$ est strictement décroissante pour $N > N_h$, il s'ensuit que, notamment, $\alpha'(N_{c2})$ est strictement négatif et ainsi de suite $J_{c11}(N_{c2}) < 0$. + est implique finalement que l'équilibre $E_{c1} = (N_{c1}, \eta)$ est un point sellier et que $E_{c2} = (N_{c2}, \eta)$ est un nœud localement asymptotiquement stable.

+ e les résultats ci-dessus sont résumés dans ce qui suit théorème.

Théorème 1. Supposons que $\mu < r$; alors, le système (9) possède un équilibre aux limites $E_{c0} = (0, \eta)$, qui est globalement asymptotiquement stable si aucun équilibre positif ne se produit et localement asymptotiquement stable si ce n'est pas le cas. Le système (9) a soit aucun, soit un, soit deux équilibres positifs selon qu'il s'agisse de $c < c_p$, $c = c_p$ ou alors $c > c_p$, respectivement, où c_p est défini par l'équation (14). Dans ce cas où deux positifs équilibres existent, $E_{c1} = (N_{c1}, \eta)$ et $E_{c2} = (N_{c2}, \eta)$ avec $N_{c2} < N_{c1} < N_h$ et $N_{c2} > N_h$, E_{c1} est un point de selle, et E_{c2} est un nœud localement asymptotiquement stable.

+ Ces résultats sont illustrés par des exemples numériques présenté à la figure 1.

4. Taux de lâcher proportionnel à la population sauvage

En général, un taux de lâcher constant d'insectes stériles n'est pas optimal et de meilleures stratégies peuvent être adoptées en ajustant le taux de lâcher à la taille de la population sauvage [37–39]. Un choix est de laisser le taux de libération être proportionnel au nombre d'insectes nuisibles si ce dernier est relativement faible [25, 31]. Bien sûr, une surveillance étroite de la population de ravageurs sera nécessaire, et surtout, sa faible taille reste critique pour l'économie de ce choix. Dans cette stratégie, la fonction de libération est donnée par $R(N) = cN$, où c est une constante positive (appelée ci-après vitesse de libération relative). + fr, le système (8) prend la forme

$$\frac{rN}{r-1} \frac{arN}{N+M} (K-M)(N-\varepsilon) - \mu N, \quad (18)$$

$$\frac{rM}{r-1} \frac{cN}{N+M} - \mu M.$$

Définir la région du plan de phase Ω_2 comme

$$\Omega_2 = \{(N, M) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq N \leq N^*, 0 \leq M \leq \eta N^*, (19)$$

et alors on peut facilement vérifier que Ω_2 est un invariant positif défini pour le système (18), et nous ne considérons que $(N, M) \in \Omega_2$ dans ce section.

+ e modèle (18) a un équilibre trivial à l'origine $(0,0)$, et il est toujours localement asymptotiquement stable. Un éventuel équilibre positif vérifie l'équation quadratique

$$(K-M)(N-\varepsilon) - (\mu\eta + c)N = 0. \quad (20)$$

Il convient de noter que l'équation (20) est complètement similaire à l'équation $\alpha(N) = 0$, donnant les équilibres positifs du modèle en l'absence d'insectes stériles, mais avec μ remplacé maintenant par $\mu\eta + c$. + Ce terme met en évidence l'effet de l'interactivité stérile-fertile dans le présent modèle et peut être considéré comme le taux de mortalité effectif après stérilisation. les insectes sont lâchés. + fr, l'équation (4) a deux racines :

$$N_{\pm} = \frac{K + \varepsilon \pm (K - \varepsilon) \sqrt{1 - \frac{\mu\eta + c}{r}}}{2}. \quad (21)$$

+ nous, si $\mu\eta + c < r$, les deux solutions N_{\pm} sont réels et système (18) a deux équilibres positifs. Mais si $\mu\eta + c > r$, c'est-à-dire que le taux de mortalité effectif dépasse le taux de croissance maximal, aucun équilibre positif ne se produit. + est définit clairement un valeur seuil du taux de rejet relatif : $c_p = r - \mu$, tel que le modèle (18) a soit aucun, soit un, soit deux positifs équilibres si soit $c < c_p$, $c = c_p$ ou alors $c > c_p$, respectivement.

De plus, pour $c > c_p$ d'équilibre unique $(0,0)$ est globalement asymptotiquement stable puisque Ω_2 est un ensemble d'invariants positifs pour le système (18). + nous, si le taux de libération relatif de stérile insectes est supérieur à $c > c_p$, la population sauvage finit être éradiquée quelle que soit sa taille initiale.

Dans le cas où $c < c_p$, les équilibres sont donnés par $E_p = (N_{c,p}, \eta N_{c,p})$ et $E_p = (N_{s,p}, \eta N_{s,p})$. + la stabilité de ces équilibres est étudié ci-dessous.

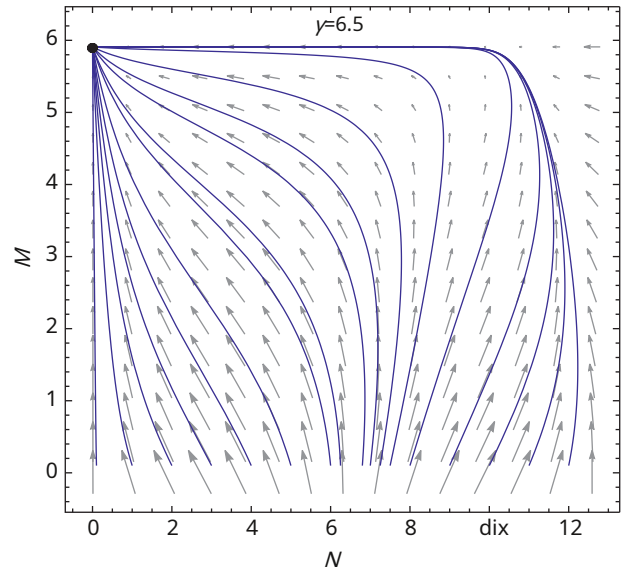
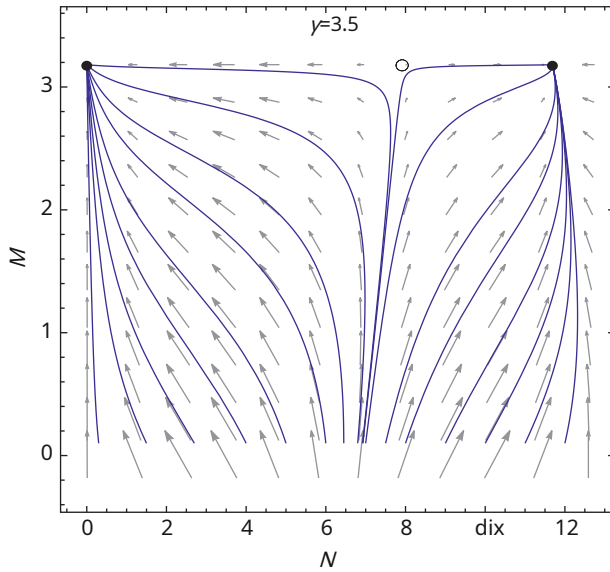
+ e forme générale de la matrice jacobienne à l'équilibre le rium est

$$J_p = \begin{pmatrix} J_{p11} & J_{p12} \\ J_{p21} & J_{p22} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

A un équilibre positif $(N^*, cN^*/\mu)$, la matrice élémentaire peut être écrit comme

$$J_{p11} = \frac{z}{zN^*} \frac{arN^*}{(N^*+M)^2} [\alpha(N^*) - \mu\eta M] \frac{N^*, cN^*}{\mu}. \quad (23)$$

+ fr, puisque $\alpha(N^*) > c$, on trouve facilement



Chiffre 1 : Trajectoires et équilibres du système (9) pour des valeurs de paramètres choisies comme $K=14.7$, $\epsilon=4.3$, $r=1.7$, et $\mu=1.1$. Le seuil est $c_{cc}=5.843$. Pour $c > c_{cc}$, l'unique équilibre est $E_c = (0.5, 91)$ et il est globalement stable (toutes les solutions se rapprochent de ce point). Pour $c < 3.5 < c_{cc}$, deux équilibres positifs se produisent : $E_{c1} = (7.915, 3.182)$ et $E_{c2} = (11.686, 5.909)$, avec E_{c1} un point de selle et E_{c2} un nœud stable.

$$J_{p1} = \frac{ar}{1+\eta} \quad (24)$$

$$J_{p2} = \frac{ar}{1+\eta} \quad (25)$$

+ e calcul de l'élément J_p est aussi simple et donne

$$J_{p2} = \frac{\mu}{1+\eta} \quad (25)$$

+ est conduit à

$$\det J_p = \frac{ar\mu}{1+\eta} N^* (K + \epsilon - 2N^*), \quad (26)$$

où N^* est soit $N_{*,p}$ ou alors $N_{*,p}$. Il découle de l'équation (26) que

$$\det J_p(N_{*,p}) = \frac{ar\mu N_{*,p}}{1+\eta} (K - \epsilon) \frac{1 - \mu}{r} \quad (27)$$

+ signifie d'abord que l'équilibre E_p est une selle indiquée. Pour l'équilibre E_c , il nous faut une fois le plus à voir le signe de $\det J_p$. +fr, on vérifie facilement que

$$\det J_p(N_{*,p}) = \frac{ar\mu N_{*,p}}{1+\eta} (K - \epsilon) \frac{1 - \mu}{r} > 0. \quad (28)$$

L'équation (27) et l'équation (28) permettent de conclure que E_p est un nœud localement asymptotiquement stable ou spirale.

Nous résumons les résultats de cette section dans le théorème.

Théorème 2. L'origine $(0,0)$ est un nœud localement asymptotiquement stable pour le système (18). De plus, le cul

$c > c_{cc}$ ou $c < 3.5$, l'origine est l'équilibre unique et il est globalement asymptotiquement stable. Et si $c < c_{cc}$, le système (9) possède deux équilibres positifs, $E_p = (N_{*,p}, \eta N_{*,p})$ et $E_c = (N_{*,p}, \eta N_{*,p})$, avec $N_{*,p}$ donnée par l'équation (21). En outre, E_p est un point sellier et E_{c2} est une asymptote ou spirale totalement stable.

Nous illustrons les résultats ci-dessus avec des exemples numériques comme indiqué dans la figure 2.

5. Taux de libération proportionnel saturant

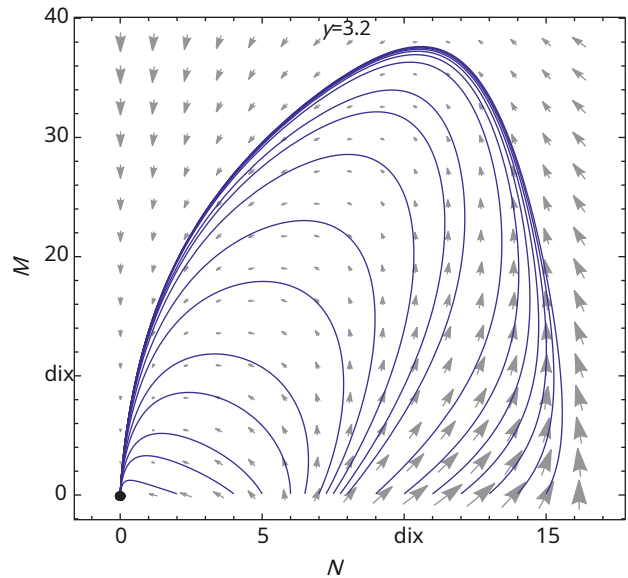
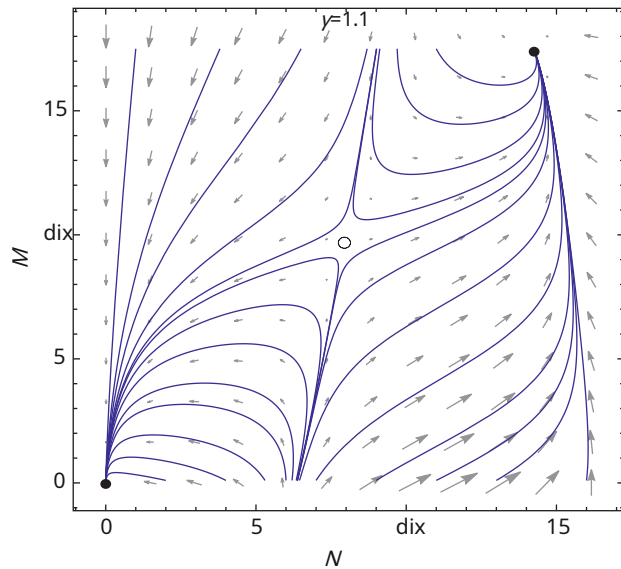
Comme indiqué dans la section précédente, le taux de lâcher proportionnel peut s'avérer être un processus très coûteux si la population sauvage devient importante, car le nombre de lâchers devrait également être important. +fr, une nouvelle stratégie, compromettant les deux stratégies précédentes, a été proposée dans [31]. Ce consiste à ajuster le taux de libération pour qu'il soit proportionnel pour un petit M mais tend vers la saturation pour suffisamment grand N . Suivant [31], dans cette section nous considérons une fonction de déclenchement de type Holling-II : $R(N) = cN/(1+N)$ avec une constante positive. +fr, système (8) prend la forme

$$\frac{dN}{dt} = ar \frac{N_2}{N+M} (K - M(N - \epsilon) - \mu N, \quad (29)$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{cN}{1+N} - \mu M$$

+ fr, on vérifie facilement que Ω_1 défini dans l'équation (19) est un ensemble d'invariants positifs pour le système (29), et nous supposons

+ e modèle (29) a un équilibre trivial à l'origine $(0,0)$, qui est toujours localement asymptotiquement stable. Pour un



Chiffre2 : Trajectoires et équilibres du système (18) pour des valeurs de paramètres choisies comme $K=17.3$, $\epsilon=4.9$, $r=2.7$, et $\mu=0.9$. Le seuil est $c_{cc}=1.9$. Pour $c > c_{cc}$, l'équilibre unique est l'origine (0,0) et il est globalement stable (toutes les solutions se rapprochent de l'origine). Pour $c < 1.1 < c_{cc}$, il existe deux équilibres positifs : $E_{p-} = (7.943, 9.708)$ et $E_{p+} = (14.257, 17.425)$, où E_{p-} est un point sellier et E_{p+} est une écurie nœud.

équilibre positif, l'équation cubique suivante doit être satisfaite :

$$(N+1)Q(N) - c = 0, \quad (30)$$

ou équivalent

$$N^3 - (K+\epsilon-1)N^2 - (K+\epsilon-K\epsilon-\mu)N - (K\epsilon + \mu\eta + c) = 0. \quad (31)$$

+ La situation ici est très similaire à celle de constant taux de libération. Selon la règle des signes de Descartes, l'équation (31) peut avoir soit aucune, soit une, soit deux solutions positives réelles. Notez que la non-existence de racines positives nécessite les deux conditions $K+\epsilon < 1$ et $K+\epsilon < -K\epsilon + \mu$, qui ne peuvent pas être remplies simultanément car $r > \mu$. De plus, une racine positive se produit lorsque la courbe de la fonction $P(N) = (N+1)Q(N)$ intercepte le c-axe. Par ailleurs, l'étude des variations de $P(N)$ montre que $P(N) < 0$ pour $N < N_*$. + fr, comme N augmente de N_* , la fonction $P(N)$ augmente pour atteindre un maximum au point

$$N_{ht} = \frac{K+\epsilon-1 + (K+1)(\epsilon+1) + (K-\epsilon)(1-3\mu/4r)}{3}, \quad (32)$$

avec N_{ht} toujours réel et positif depuis $r > \mu$. Et pour $r > \mu$, $P(N)$ est strictement décroissante. Par conséquent, la condition fou la cooccurrence de deux solutions positives pour eq (30) est

$$(N_{ht} - 1)Q(N_{ht}) > c. \quad (33)$$

+ définit clairement une valeur seuil de c comme

$$c_s = ar(N_{ht} + 1)Q(N_{ht}). \quad (34)$$

telle que l'équation (30) n'admette qu'une seule racine positive si $c < c_s$. + par conséquent, nous concluons que le système (29) n'a pas, un, ou deux équilibres positifs si $c > c_s$ ou $c < c_s$, ou alors $c < c_s$ concernant respectivement. De plus, pour $c < c_s$ d'origine (0,0) est globalement asymptotiquement stable en Ω_1 est un ensemble d'invariants positifs pour système (29). Pour $c < c_s$, les équilibres positifs supplémentaires de le modèle est donné par $E_{s1} = [N_{*,s1}, \eta N_{*,s1}/(1+N_{*,s1})]$ et $E_{s2} = [N_{*,s2}, \eta N_{*,s2}/(1+N_{*,s2})]$, où $N_{*,s1}$ et $N_{*,s2}$ sont solutions positives de l'équation (30).

Ensuite, nous étudions la stabilité des équilibres E_{s1} et E_{s2} . + La matrice jacobienne à un point d'équilibre a la forme

$$J_s = \begin{bmatrix} J_{s1}, & -\frac{\mu(1+N_{*,s1})}{N_{*,s1}+1+\eta} \\ \frac{c}{(1+N_{*,s1})^2}, & -\mu, \end{bmatrix}, \quad (35)$$

où N_* est soit $N_{*,s1}$ ou alors $N_{*,s2}$. De plus, en utilisant le relation $Q(N_*) = c/(N_*(N_+1))$, J_{s1} peut être écrit comme

$$J_{s1} = \frac{ar(N_{*,s1}+1)}{N_{*,s1}+1+\eta} Q(N_{*,s1}). \quad (36)$$

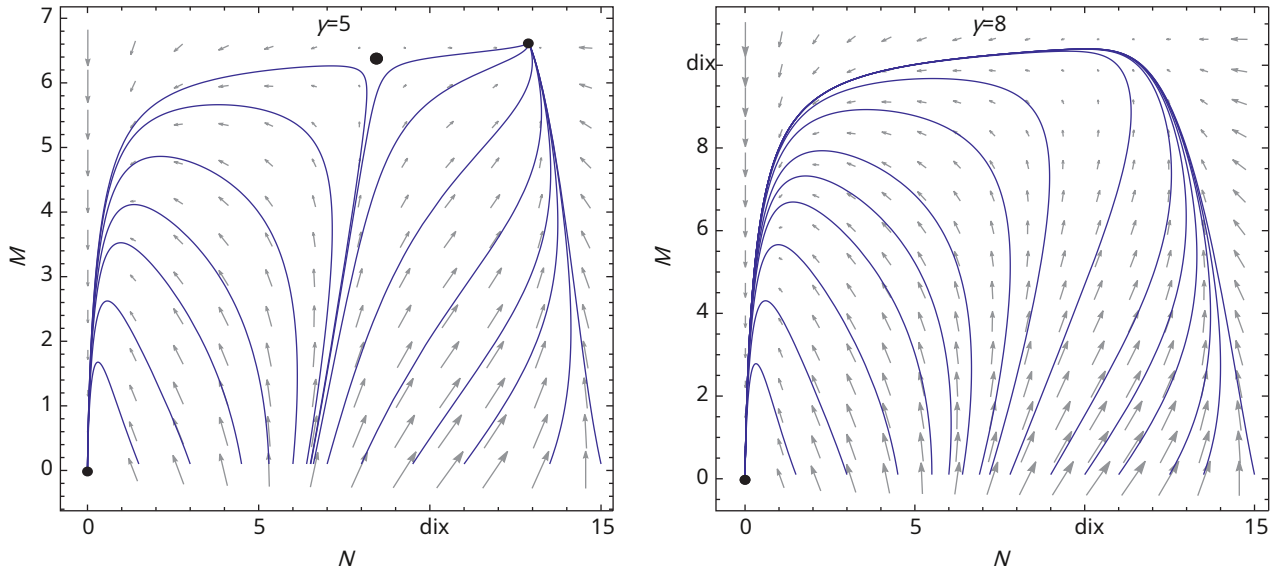
+ est implique

$$\det J_s = \frac{\mu ar}{N_{*,s1}+1+\eta} Q(N_{*,s1}) < 0. \quad (37)$$

D'autre part, il résulte de t il relation $Q(N) < 0$ et le fait que $P(N_*) < 0$ que

$$Q(N_{*,s1}) < \frac{N_{*,s1}}{N_{*,s1}+1} P(N_{*,s1}) + \frac{c}{(N_{*,s1}+1)^2}. \quad (38)$$

+ est conduit à



Chiffre3 : Trajectoires et équilibres du système (29) pour des valeurs de paramètres choisies comme $K=16.7$, $\epsilon=3.7$, $r=1.3$, et $\mu=0.7$. Le seuil est $c_{sc}=6.862$. Pour $c > c_{sc}$, l'origine $E_0(0,0)$ est l'unique équilibre et il est globalement stable (toutes les solutions se rapprochent de ce point). Pour $c < c_{sc}$, deux équilibres positifs se produisent : $E_1(8.441, 6.386)$ et $E_2(12.877, 6.628)$, avec E_1 un point de selle et E_2 un nœud.

$$\det J|_{E_0} = -\mu r \frac{N_0(N_0+1)}{N_0+1+\eta} P(N_0). \quad (39)$$

De plus, à partir des variations de la fonction $P(N)$, on peut en déduire que $N_0 < N_{sc} < N_h$ et $N_2 > N_h$. Sous-rapidement, comme $P(N)$ est strictement croissante sur (N_0, N_h) , alors $P(N_{sc})$ est certainement strictement positif et donc $\det J|_{E_1} > 0$. De même, comme $P(N)$ est strictement décroissante pour $N > N_h$, $P(N_2)$ est par conséquent strictement négatif et donc $\det J|_{E_2} < 0$. Cela implique d'abord que l'équilibre E_1 est un point de selle. Ensuite, pour identifier la nature de l'équilibre E_2 , écrivons $\text{tr} J|_{E_2}$. Nous avons

$$\text{tr} J|_{E_2} = r \frac{N_2+1}{N_2+1+\eta} - \mu \frac{c}{N_2+1}. \quad (40)$$

En fait, en utilisant l'équation (38) on trouve N

$$\text{tr} J|_{E_2} = r \frac{N_2+1}{N_2+1+\eta} - \mu \frac{c}{N_2+1} = \frac{\mu(c(N_2+1) - (N_2+1+\eta))}{N_2+1}. \quad (41)$$

Et depuis $P(N_2) < 0$, nous concluons que E_2 est un nœud localement asymptotiquement stable.

Les résultats de cette section sont des sommes dans le théorème de bas.

Théorème 3. Le système (29) a un nœud localement asymptotiquement stable à l'origine $(0,0)$. De plus, supposons que $c > c_{sc}$ ou $c < c_{sc}$ est donnée dans l'équation (34), l'origine est la seule équilibre et il est globalement asymptotiquement stable. Et si $c < c_{sc}$, le système a deux équilibres positifs E_1 et E_2 : $E_1 = [N_1, \eta N_1 / (1 + N_1)]$ et $E_2 = [N_2, \eta N_2 / (1 + N_2)]$, avec $N_0 < N_1 < N_h$ et $N_2 > N_h$. Dans

une addition, E_1 est un point selle et E_2 est une asymptote locale-nœudiquement stable.

Les résultats de ce modèle sont illustrés par des exemples illustrés à la figure 3.

6. Conclusion

En résumé, ce travail étudie des modèles mathématiques relativement simples décrivant la dynamique des populations interactives d'insectes sauvages et stériles, se produisant au sein du SIT. Le dernier est une méthode de lutte biologique, dans laquelle des mâles stériles sont libérés pour réduire ou éradiquer une population de ravageurs, ce qui peut aider efficacement à contenir la propagation de nombreux insectes ravageurs tels que le charançon rouge du palmier (RPW). Les hypothèses de modélisation adoptées dans cet article permettent des simplifications substantielles de la dynamique de la SIT, mais en attendant produisent un modèle qui peut biaiser les résultats par rapport aux situations biologiques réelles. En fait, nous avons supposé des populations d'insectes homogènes telles que la distinction des stades a été faite. Ici, la comparaison faite entre les modèles homogènes et de structure d'étape a révélé qu'ils ont des caractéristiques dynamiques [25]. De plus, les insectes morts et fertiles sont supposés à densité-indépendant et égale. Cela semble raisonnable puisqu'il s'agit d'adultes si bien que la concurrence entre les ressources est relativement faible. Sur l'autre part, le pétition pour les potes se trouve le mécanisme de compétition unilatérale qui affecte la population. De plus, pour tenir compte de

seuil de densité afin que la population sauvage puisse persister, un fort effet Allee a été inclus dans le terme de croissance de la population sauvage. Par la suite, nous avons considéré trois sous-modèles, chacun caractérisé par une stratégie de lâcher différente : le premier implique un taux de lâcher constant, le second suppose un taux de lâcher proportionnel à la taille de la population sauvage, et le troisième utilise un taux de lâcher de Holling-II. taper. Nous avons effectué une analyse mathématique complète de ces sous-modèles et discuté de leurs caractéristiques dynamiques, en particulier l'existence d'équilibres et leur stabilité. En particulier, nous avons démontré l'existence d'un seuil de libération pour les trois stratégies. +us, si le taux de relâchement est inférieur à la valeur seuil, chaque sous-modèle admet deux équilibres intérieurs positifs : un point selle et un nœud stable (ou spirale pour le deuxième sous-modèle). Cependant, dès que le taux de libération dépasse la valeur seuil, les équilibres positifs n'existent plus. Chacun des trois sous-modèles possède un équilibre unique avec un nombre décroissant d'insectes sauvages. Dans cette situation, la population sauvage évolue vers l'extinction quel que soit son effectif initial. Enfin, nos résultats analytiques pour tous les sous-modèles ont été illustrés par des exemples numériques.

Disponibilité des données

Aucune donnée n'a été utilisée pour étayer cette étude.

Les conflits d'intérêts

+ Les auteurs déclarent qu'il n'y a pas de conflits d'intérêts concernant la publication de cet article.

Contributions des auteurs

+ L'étude a été réalisée en collaboration entre tous les auteurs. Tous les auteurs ont lu et approuvé le manuscrit final.

Remerciements

+ Le troisième auteur tient à remercier ses Professeurs/Scientifiques Prof. Mohamed Haiour, Prof. Ahmed-Salah Chibi, et Prof. Azzedine Benchettah à l'Université d'Annaba en Algérie pour le contenu important des cours de Master et de Doctorat en mathématiques pures et appliquées qu'il reçu pendant ses études. De plus, il les remercie pour l'aide supplémentaire qu'ils lui ont apportée pendant les heures de bureau dans leur bureau concernant les quelques concepts/difficultés qu'il avait rencontrés, et il apprécie leur talent et leur dévouement pour leurs étudiants de troisième cycle actuellement et auparavant. En outre, les auteurs remercient l'Université Qassim, représentée par le Dénat de la Recherche Scientifique, pour le soutien matériel de cette recherche sous le numéro 6766-alrassac-bs-2019-2-2-1 au cours de l'année universitaire 1441 AH/2019 AD .

Références

[1] EF Knipling, "Possibilités de contrôle ou d'éradication des insectes grâce à l'utilisation de mâles sexuellement stériles¹", *Journal d'entomologie économique*, vol. 48, non. 4, p. 459–462, 1955.

[2] VA Dyck, J. Hendrichs et AS Robinson, *Technique des insectes stériles, principes et pratique de la lutte antiparasitaire intégrée à l'échelle de la zone*, Springer, Dordrecht, Pays-Bas, 2006.

[3] K. Bourtzis, *Technologies basées sur Wolbachia pour le contrôle des populations d'insectes nuisibles : avancées en médecine expérimentale et en biologie*, Springer, New York, NY, États-Unis, 2008.

[4] SP Sinkins, "Wolbachia et incompatibilité cytoplasmique chez les moustiques", *Biochimie des insectes et biologie moléculaire*, vol. 34, non. 7, p. 723–729, 2004.

[5] S. Zabalou, M. Riegler, M. +eodorakopoulou, C. Savakis, et K. Bourtzis, "L'incompatibilité cytoplasmique induite par Wolbachia comme moyen de contrôle des populations d'insectes nuisibles", *Actes de l'Académie nationale des sciences*, vol. 101, non. 42, pages 15042–15045, 2004.

[6] M. Marranzano, R. Ragusa, M. Platania, G. Faro, et MA Coniglio, « Connaissances, attitudes et pratiques à l'égard des patients atteints du VIH/sida chez les infirmières du personnel d'un hôpital universitaire de Sicile », *Ital. Revue de santé publique*, vol. 10, non. 1, p. 1–23, 2013.

[7] K. Nikolouli, F. Sassù, L. Mouton, C. Stauffer et K. Bourtzis, "Combiner des techniques d'insectes stériles et incompatibles pour la suppression de la population de *Drosophila suzukii*", *Journal of Pest Science*, vol. 93, non. 2, p. 647–661, 2020.

[8] R. Ragusa, S. Russo, L. Villari et G. Schilirò, "La maladie de Hodgkin comme seconde tumeur maligne chez l'enfant: rapport d'un cas et revue de la littérature", *Hématologie et oncologie pédiatrique*, vol. 18, non. 6, p. 407–414, 2001.

[9] G. Reale, GI Russo, M. Di Mauro et al., « Association entre l'apport alimentaire en flavonoïdes et le risque de cancer de la prostate : une étude cas-témoin en Sicile », *Thérapies complémentaires en médecine*, vol. 39, p. 14–18, 2018.

[10] D. Stauffer, RS Lees, Z. Xi et al., "Combiner la technique des insectes stériles avec des approches basées sur Wolbachia : II une approche plus sûre pour *Aedes albopictus* programmes de suppression de la population, conçus pour minimiser les conséquences de la libération involontaire de femelles », *PLoS One*, vol. 10, non. 8, p. 1–26, 2015.

[11] D. Zhang, X. Zheng, Z. Xi, K. Bourtzis et JR Gilles, « Combiner la technique de l'insecte stérile avec la technique de l'insecte incompatible : I-impact de l'infection à wolbachia sur la solidité des triples et doubles souches infectées de *Aedes albopictus* », *PLoS One*, vol. 10, non. 4, p. 1–15, 2015a.

[12] P.-S. Yen et A.-B. Failloux, « Une revue : le remplacement de la population par la wolbachia pour le contrôle des moustiques partage des points communs avec les approches de contrôle génétiquement modifiées », *Agents pathogènes*, vol. 9, non. 5, p. 404–421, 2020.

[13] JL Rasgon et TW Scott, "Wolbachia et incompatibilité cytoplasmique dans le complexe d'espèces de moustiques culex pipiens de Californie: estimations des paramètres et dynamique de l'infection dans les populations naturelles", *La génétique*, vol. 165, non. 4, pages 2029–2038, 2003.

[14] AA Hoffmann, BL Montgomery, J. Popovici et al., "Etablissement réussi de wolbachia dans les populations d'aedes pour supprimer la transmission de la dengue", *Nature*, vol. 476, non. 7361, p. 454–457, 2011.

[15] S. Boulaaras et M. Haiour, « +e finite element approximation of evolutionary Hamilton-Jacobi-Bellman equations with nonlinear source Terms », *Indagationes Mathematicae*, vol. 24, non. 1, p. 161–173, 2013.

[16] S. Boulaaras et M. Haiour, « L[∞]-comportement asymptotique pour une approximation par éléments finis dans des inégalités quasi-variationnelles paraboliques liées au problème de contrôle des impulsions », *Mathématiques appliquées et calcul*, vol. 217, non. 14, pages 6443– 6450, 2011.

- [17] S. Boulaaras, « Quelques résultats d'existence pour une nouvelle classe d'équations de Kirchhoff elliptiques à termes sources logarithmiques », *Journal des systèmes intelligents et flous*, vol. 37, non. 6, pages 8335–8344, 2019.
- [18] S. Boulaaras, "Quelques nouvelles propriétés d'algorithmes asynchrones de schéma thêta combinés avec des méthodes d'éléments finis pour un problème d'obstacle évolutif implicite à 2 côtés," *Méthodes mathématiques en sciences appliquées*, vol. 40, non. 18, p. 7231–7239, 2017.
- [19] S. Boulaaras, « Une estimation d'erreur optimale de la méthode des éléments finis pour les inégalités quasi-variationnelles paraboliques avec des termes sources non linéaires », *Analyse asymptotique*, vol. 100, non. 3-4, p. 193–208, 2016.
- [20] S. Boulaaras, « Existence de solutions positives pour une nouvelle classe de systèmes paraboliques de Kirchhoff », *Rocky Mountain Journal de mathématiques*, vol. 50, non. 2, p. 445–454, 2020.
- [21] C. Dufourd et Y. Dumont, « Modélisation et simulations de la dispersion des moustiques. l'affaire de *Aedes albopictus* », *Biomath*, vol. 1, non. 2, 7 pages, article ID 1209262, 2012.
- [22] C. Dufourd et Y. Dumont, « Impact des facteurs environnementaux sur la dispersion des moustiques dans la perspective du contrôle de la technique des insectes stériles », *Informatique et mathématiques avec applications*, vol. 66, non. 9, p. 1695–1715, 2013.
- [23] Y. Dumont et JM Tchuenche, « Etudes mathématiques sur la technique de l'insecte stérile pour le chikungunya et *Aedes albopictus* », *Journal de biologie mathématique*, vol. 65, non. 5, p. 809–855, 2012.
- [24] M. Huang, X. Song et J. Li, "Modélisation et analyse des lâchers impulsifs de moustiques stériles", *Journal de la dynamique biologique*, vol. 11, non. 1, p. 147–171, 2017.
- [25] J. Li, L. Cai et Y. Li, "Modèles de population de moustiques sauvages et stériles structurés par étapes et leur dynamique", *Journal de la dynamique biologique*, vol. 11, non. 1, p. 79–101, 2017.
- [26] J. Li et Z. Yuan, "Modélisation des lâchers de moustiques stériles avec différentes stratégies", *Journal de la dynamique biologique*, vol. 9, non. 1, p. 1–14, 2015.
- [27] JZ Farkas et P. Hinow, "Modèles continus structurés et non structurés pour les infections à wolbachia", *Bulletin de biologie mathématique*, vol. 72, non. 8, pages 2067–2088, 2010.
- [28] A. Fenton, KN Johnson, JC Brownlie et GDD Hurst, "Résoudre le paradoxe du wolbachia : modéliser l'interaction tripartite entre l'hôte, le wolbachia et un ennemi naturel", *7e naturaliste américain*, vol. 178, non. 3, p. 333–342, 2011.
- [29] JZ Farkas, SA Gourley, R. Liu et A.-A. Yakubu, "Modélisation de l'infection à Wolbachia dans une population de moustiques à structure sexuelle porteuse du virus du Nil occidental", *Journal de biologie mathématique*, vol. 75, non. 3, p. 621–647, 2017.
- [30] G. Nadin, M. Strugarek et N. Vauchelet, "Hindrances to bistable front propagation: application to wolbachia invasion", *Journal de biologie mathématique*, vol. 76, non. 6, p. 1489–1533, 2018.
- [31] A. Bendhabbi, Y. Chargui, S. Boulaaras et S. Ben Khalifa, « Un modèle mathématique de compétition unilatérale pour la technique de l'insecte stérile », *Complexité*, vol. 2020, Article ID 6246808, 12 pages, 2020.
- [32] J. Li, "Nouveaux modèles simples révisés pour les populations interactives de moustiques sauvages et stériles et leur dynamique", *Journal de la dynamique biologique*, vol. 11, non. 2, p. 316–333, 2017.
- [33] F. Courchamp, T. Clutton-Brock et B. Grenfell, « Dépendance à la densité inverse et effet Allee », *Tendances en écologie et évolution*, vol. 14, non. 10, pages 405 à 410, 1999.
- [34] Y. Gruntfest, R. Arditi et Y. Dombrovsky, « Une population fragmentée dans un environnement variable », *Journal de biologie théorique*, vol. 185, non. 4, pages 539–547, 1997.
- [35] JA Walter, KL Grayson et DM Johnson, "Variation in allee effects: evidence, unknowns, and directions forward," *Écologie de la population*, vol. 59, non. 2, p. 99–107, 2017.
- [36] F. Courchamp, L. Berec et J. Gascoigne, *Effets Allee en écologie et conservation*, Oxford University Press, Oxford, Royaume-Uni, 2008.
- [37] CP Ferreira, HM Yang et L. Esteva, "Évaluer l'adéquation de la technique des insectes stériles appliquée aux *toaes aegypti*", *Journal des systèmes biologiques*, vol. 16, non. 04, p. 565–577, 2008.
- [38] J. Kim, H. Lee, C. Lee et S. Lee, « Évaluation des stratégies optimales dans un modèle de transmission de la dengue à deux patchs avec saisonnalité », *PLoS One*, vol. 12, non. 3, p. 1–21, 2017.
- [39] L. Multerer, T. Smith et N. Chitnis, « Modeling the impact of stérile males on an *Aedes aegypti* population avec un contrôle optimal », *Biosciences mathématiques*, vol. 311, p. 91–102, 2019.