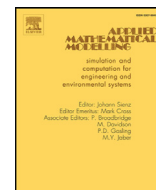




Listes de contenus disponibles sur [ScienceDirect](#)

Modélisation mathématique appliquée

page d'accueil Journal: www.elsevier.com/locate/apm



Modèle mathématique de lutte contre les ravageurs et les insectes utilisant la confusion sexuelle et le piégeage



Roumen Anguelov^a, Claire Dufourd^{a,*}, Yves Dumont^{b,c}

^aDépartement de mathématiques et de mathématiques appliquées, Université de Pretoria, Pretoria, Afrique du Sud

^bCIRAD, UMR AMAP, F-34398 Montpellier, France

^cAMAP, Univ Montpellier, CIRAD, CNRS, INRA, IRD, Montpellier, France

informations sur l'article

Historique des articles :

Reçu le 16 juin 2016 Révisé le 20
juillet 2017 Accepté le 31 juillet 2017
Disponible en ligne le 7 août 2017

Mots clés:

Analyse de stabilité du
système par morceaux
Antiparasitaire
Pièges à phéromones
Confusion sexuelle
Piégeage d'insectes

abstrait

La lutte contre les insectes ravageurs est un défi de première importance pour préserver la production végétale. Dans le cadre des programmes de lutte antiparasitaire intégrée (IPM), nous développons un modèle générique pour étudier l'impact du contrôle de la confusion sexuelle en utilisant une phéromone femelle artificielle pour confondre les mâles et nuire à leurs opportunités d'accouplement. Par conséquent, le taux de reproduction est diminué, ce qui entraîne une diminution de la taille de la population. Pour un contrôle plus efficace, le piégeage est utilisé pour capturer les mâles attirés par la phéromone artificielle. Le modèle, dérivé d'hypothèses biologiques et écologiques, est régi par un système lisse par morceaux d'ODE. Une analyse théorique du modèle sans contrôle est d'abord effectuée pour établir les propriétés de l'équilibre endémique. Puis, le contrôle est ajouté et l'analyse théorique du modèle permet d'identifier des valeurs seuils de phéromones pratiquement intéressantes pour des applications de terrain. En particulier, nous montrons qu'il existe un seuil au-delà duquel la stabilité asymptotique globale de l'équilibre trivial est assurée, c'est-à-dire que la population va jusqu'à l'extinction. Enfin, nous illustrons les résultats théoriques par des expériences numériques.

© 2017 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

1. Introduction

Les insectes ravageurs sont responsables de dégâts considérables sur les cultures partout dans le monde. Leur présence peut expliquer des pertes de production élevées ayant des répercussions sur le commerce et les exportations ainsi que sur la pérennité des petits agriculteurs dont les revenus dépendent entièrement de leur production. Les ravageurs exotiques peuvent être particulièrement nuisibles car ils peuvent présenter un potentiel d'invasion élevé en raison du manque d'ennemis naturels et de leur capacité à s'adapter à un large éventail d'hôtes et/ou de conditions climatiques. Par conséquent, la lutte antiparasitaire est essentielle pour prévenir les effets dévastateurs sur l'économie, la sécurité alimentaire, la vie sociale, la santé et la biodiversité.

Les pesticides chimiques sont utilisés depuis longtemps pour lutter contre les populations de ravageurs. Cependant, leur utilisation intensive peut avoir des effets secondaires indésirables sur le milieu environnant, tels que la réduction des ennemis naturels du ravageur et la pollution. De plus, le développement de la résistance des insectes au produit chimique a conduit à la nécessité d'utiliser des pesticides plus puissants et plus toxiques pour maintenir leur efficacité. Ainsi, l'utilisation intensive de pesticides n'est pas une solution durable pour lutter contre les ravageurs. Des efforts constants sont déployés pour réduire la toxicité des pesticides pour les applicateurs et les consommateurs, et des méthodes alternatives sont développées ou améliorées pour répondre à la charte des programmes de lutte intégrée (IPM).^[1] L'IPM vise à maintenir la population de ravageurs

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail: claire.dufourd@gmail.com (C.Dufourd).

à faible risque économique et épidémiologique tout en respectant des exigences spécifiques écologiques et toxicologiques respectueuses de l'environnement.

La confusion sexuelle (MD), la technique de l'insecte stérile (SIT) et la technique d'annihilation de masse (MAT) sont des exemples de méthodes faisant partie des stratégies IPM. La SIT consiste à relâcher un grand nombre de mâles stérilisés pour concurrencer les mâles sauvages pour l'insémination femelle, réduisant ainsi le nombre de descendants viables, tandis que la MAT consiste à réduire le nombre d'un ou des deux sexes en piégeant à l'aide d'un attractif spécifique à l'espèce. MD consiste à introduire un stimulus artificiel, comme des phéromones ou des paraphéromones[2,3], confondre les individus[4]et, ainsi, perturber la localisation des partenaires, conduisant à une réduction à long terme de la population[5]. Dans cet article, nous nous concentrons principalement sur le MD, éventuellement couplé au piégeage.

MD a été largement étudié et utilisé pour contrôler différents types de ravageurs sur différents types de cultures. Il s'est avéré efficace pour le contrôle de: *Tuta absoluta* sur les cultures de tomates dans les serres italiennes[6]; le ver rose de la capsule *Pectinophora gossypiella* qui attaque le coton, le carpocapse de la pomme *Cydia pomonella*[7]; la cochenille rouge de Californie, *Aonidiella aurantii*, et la mineuse des agrumes, *Phyllocnistis citrella*, dans le verger d'agrumes[8,9].

Cependant, la DM a parfois été un échec quant à la lutte contre la mineuse du caféier *Leucoptera coffeella*[dix]ou pour le contrôle du ravageur de la tomate *Tuta absoluta* mentionné ci-dessus dans des conditions de plein champ[11]où la confusion sexuelle n'a pas réussi à réduire la population de ravageurs. Selon[10,11], l'échec de la méthode peut être attribué à la composition et au dosage de la phéromone et/ou à une forte abondance d'insectes.

Pour réussir la confusion sexuelle, il est important de comprendre les mécanismes d'attraction du ravageur vers la phéromone, comme le niveau minimum de réponse, la distance d'attraction ou la formulation de la phéromone utilisée. Les contraintes environnementales sont également des facteurs cruciaux à prendre en compte. Ceux-ci incluent le climat, le vent, le feuillage de la culture, etc. De plus, la taille de la population doit être prise en compte afin de concevoir des stratégies de contrôle appropriées. Ainsi, planifier un contrôle efficace et rentable est un véritable défi qui peut expliquer l'échec des expériences mentionnées ci-dessus. La modélisation mathématique peut être très utile pour mieux comprendre la dynamique de la population de ravageurs, et diverses stratégies de contrôle peuvent être étudiées pour optimiser le contrôle. Ici, nous combinons la perturbation de l'accouplement en utilisant des leurres à phéromones sexuelles femelles pour éloigner les mâles des femelles afin de réduire les opportunités d'accouplement affectant négativement le taux de reproduction. Pour un contrôle plus efficace, des leurres peuvent être placés dans des pièges pour réduire la population de mâles.

Dans cet article, nous avons construit un modèle générique pour le contrôle d'une population de ravageurs en utilisant la confusion sexuelle et le piégeage pour étudier l'effort requis pour réduire la taille de la population en dessous du niveau nocif. Le modèle est dérivé de connaissances générales ou d'hypothèses sur la biologie et l'écologie des insectes. Nous considérons une approche compartimentée basée sur le cycle de vie et le comportement d'accouplement pour modéliser la dynamique temporelle de la population qui est régie par un système lisse par morceaux (PWS) d'équations différentielles ordinaires.[12,13]. Une analyse théorique du modèle est réalisée pour discuter de l'efficacité du contrôle par pièges à phéromones en fonction de la force du leurre et de l'efficacité de piégeage. La principale question d'importance pratique est de savoir quelles valeurs de ces paramètres fournissent un contrôle efficace conduisant à l'extinction. De manière équivalente, en termes mathématiques, la question est de savoir pour quelles valeurs des paramètres la solution du modèle converge vers l'équilibre trivial du modèle où tous les compartiments sont égaux à zéro. Nous étudions les propriétés des équilibres en utilisant la quantité de phéromone comme paramètre de bifurcation. Nous identifions deux valeurs seuils d'importance pratique. L'un correspond à la quantité minimale de leurre nécessaire pour affecter l'équilibre de la population féminine, tandis que le second est le seuil au-dessus duquel l'extinction de la population est atteinte. Nous montrons également que sur des populations suffisamment petites, au stade de l'invasion par exemple, l'extinction peut être obtenue avec une petite quantité de leurre. Nous montrons également que la combinaison de la confusion sexuelle avec le piégeage réduit considérablement la quantité de phéromone nécessaire pour obtenir un contrôle total de la population. Mentionnons que le contrôle MD a été envisagé dans[14–16]à l'aide de modèles discrets dépendant de la densité. Dans ce dernier, les auteurs ont identifié une valeur seuil pour la quantité de phéromone au-dessus de laquelle le contrôle d'une population d'insectes est possible.

L'article est organisé de la manière suivante. DansSection 2, nous donnons une description du modèle sans contrôle et l'analysons théoriquement. Puis dansSection 3, nous décrivons le modèle avec MD et fournissons une analyse théorique, où nous identifions deux valeurs seuils qui déterminent les changements dans la dynamique de la population de ravageurs et l'efficacité du contrôle. DansSection 4, nous effectuons des simulations numériques pour illustrer les résultats théoriques et discuter de leur pertinence biologique. Enfin, dansArticle 5, nous concluons et discutons des perspectives et extensions possibles.

2. Modélisation mathématique de la population naturelle d'insectes

2.1. Modèle compartimenté de la population d'insectes

Nous considérons un modèle générique pour décrire la dynamique d'une population d'insectes nuisibles sur la base d'hypothèses biologiques et comportementales. Pour de nombreuses espèces de ravageurs, telles que les mouches des fruits ou les papillons nocturnes, deux principaux stades de développement peuvent être considérés : le stade immature, noté e , qui regroupe les œufs, les larves et les pupes, et le stade adulte. En règle générale, la femelle adulte est celle qui cause des dommages directs à l'hôte lors de la ponte de ses œufs. Nous divisons les femelles adultes en deux compartiments, les femelles disponibles pour l'accouplement notées O_{ui} , et les femelles fécondées notées F . Nous supposons qu'une femelle accouplée a besoin de s'accoupler avec un mâle pour passer dans le compartiment des femelles fécondées et pouvoir déposer ses œufs. Par conséquent, nous ajoutons également un compartiment mâle, noté M , pour étudier l'impact de l'abondance des mâles sur le taux de transfert O_{ui} pour F . Nous rendons le modèle suffisamment générique pour que des accouplements multiples puissent se produire, ce qui implique que les femelles fécondées peuvent redevenir des femelles s'accouplant.

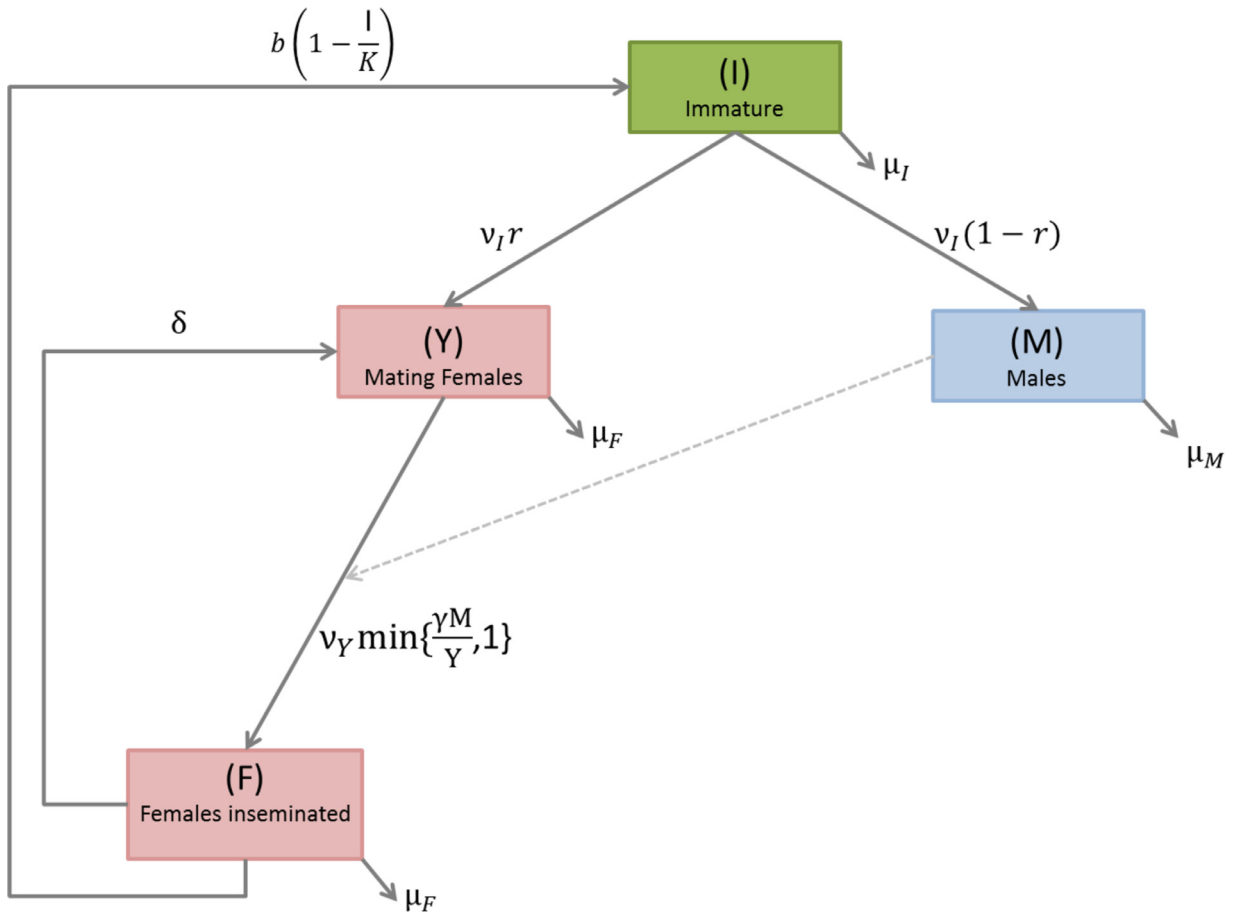


Fig. 1. Cycle de vie de l'insecte.

On note la proportion de femelles sortant du stade immature et entrant dans le compartiment des femelles d'accouplement. Ainsi une proportion de $(1-r)$ sur l'immature entrant dans le compartiment mâle après l'émergence. Nous supposons que le temps nécessaire à un œuf pondu pour émerger est de $1/v_{je}$, donc le taux de transfert de *je* pour *Oui* ou *Mest* v_{je} . Ensuite, lorsque les mâles sont en abondance suffisante pour assurer la fécondation de toutes les femelles disponibles pour l'accouplement, le taux de transfert de *Oui* pour *Fest* v_{Oui} . Cependant, si les mâles sont rares, et si Y est le nombre de femelles qui peuvent être fécondées par un seul mâle, alors seulement une proportion $v_{Oui} \frac{Y_M}{Y}$ de *Oui* les femelles peuvent passer dans *F* compartiment femelles. Par conséquent, le taux de transfert de *Oui* pour *Fest* modélisé par le non-linéaire terme $v_{Oui} \min\{\frac{Y_M}{Y}, 1\}$. De plus, les femelles fécondées retournent à l'accouplement (femelle) es compartiment avec un taux de δ . Plus loin, les femelles fécondées alimentent le compartiment immature avec un taux $b(1 - \frac{I}{K})$, où b est le taux de ponte intrinsèque, pendant que K est la capacité de charge des hôtes. Enfin, les paramètres μ_I, μ_F, μ_M sont respectivement les taux de mortalité des immatures (compartiment *je*), les femelles (*Oui* et *F*) et les hommes (*M*). L'organigramme de la dynamique des insectes est représenté dans Fig. 1.

Le modèle est régi par le système d'ODE suivant :

$$\begin{cases}
 \frac{dI}{dt} = b(1 - \frac{I}{K})F - (v_{je} + \mu_I)I, \\
 \frac{dY}{dt} = v_{je}v_{Oui} \min\{\frac{Y_M}{Y}, 1\}I + \delta F - \mu_Y Y, \\
 \frac{dF}{dt} = v_{Oui} \min\{\frac{Y_M}{Y}, 1\}I - \delta F - \mu_F F, \\
 \frac{dM}{dt} = (1-r)v_{je}I - \mu_M M
 \end{cases} \quad (1)$$

La liste des paramètres utilisés dans le modèle est résumée dans Tableau 1. Ils sont tirés de [17] afin de réaliser des expériences numériques.

Plus précisément, (1) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = \text{eff}(t) = \begin{cases} F_1(X) & \text{si } Y \leq Y_M \\ F_2(X) & \text{si } Y > Y_M \end{cases} \quad (2)$$

Tableau 1

Liste des paramètres et leurs valeurs utilisées dans les simulations numériques.

Paramètre	La description	Unité	Valeur
b	Taux de ponte intrinsèque	Femelle-journée ⁻¹	9.272
r	Ratio femelles/mâles	–	0,57
K	Capacité de charge	–	1000
γ	Femelles fécondées par un seul mâle Taux de	–	4
μ_{je}	mortalité dans la je compartment Taux de mortalité	Jour ⁻¹	1/15
μ_F	dans le Oui et F compartiments Taux de mortalité	Jour ⁻¹	1/75.1
μ_M	dans le M compartment Taux de transfert de je pour	Jour ⁻¹	1/86,4
ν_{je}	Oui Taux de transfert de Oui pour F Taux de transfert	Jour ⁻¹	1/24,6
ν_{oui}	de F pour Oui	Jour ⁻¹	0,5
δ		Jour ⁻¹	0,1

où $X = (I, Y, F, M) \in \mathbb{R}^4_+$ et

$$F_1(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (\nu_{je} + \mu_{je})F \\ r\nu_{je} + \delta F - (\nu_{oui} + \mu_F)O \\ \nu_{oui}(\delta + \mu_F)F \\ (1-r)\nu_{je} - \mu_M M \end{pmatrix}, \quad F_2(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{I}{K})F - (\nu_{je} + \mu_{je})F \\ r\nu_{je} + \delta F - \nu_{oui}YM - \mu_F Oui \\ \nu_{oui}YM - (\delta + \mu_F)F \\ (1-r)\nu_{je} - \mu_M M \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Par morceaux – lisse

Considérant le contexte du modèle (1), nous nous référons à la région définie via $Oui < YM$ comme une *région d'abondance masculine* et la région définie par $O > YM$ comme *région de pénurie d'hommes* avec les systèmes respectifs donnés via

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (4)$$

et

$$\frac{dx}{dt} = F_2(X). \quad (5)$$

Tous les deux (4) et (5) sont des systèmes usuels d'ODE à droite lisse. Leurs propriétés peuvent être étudiées en utilisant des techniques standard pour de tels systèmes. Cependant, en déduire les propriétés de (1) n'est pas un processus simple. Il appartient généralement à la théorie des systèmes dynamiques lisses par morceaux. Dans la section suivante, nous fournissons quelques bases de cette théorie qui sont pertinentes pour dériver les résultats de cet article. Voir également [12, 13] pour un aperçu complet.

2.2. Systèmes dynamiques par morceaux

Définition 1 ([12], Définition 2.2.2, p. 73). Un flux régulier par morceaux est donné par un ensemble fini d'ODE

$$X = F_{je}(X, \mu), \quad X \in S_{je},$$

où $\bigcup_{je} S_{je} = \mathbb{R}^n$, chaque S_{je} a un intérieur non vide, et \mathbb{R}^n est un domaine. Le carrefour $\sum_{je} S_{je}$ est soit un \mathbb{R}^{n-1} -variété dimensionnelle incluse dans les frontières ∂S_{je} et ∂S_{je} , ou est l'ensemble vide. Chaque champ vectoriel F_{je} est lisse dans les deux états X et paramètre μ , et définit un flux régulier $j \in \mathcal{A}, \eta$ dans n'importe quel ensemble ouvert $U \subset S_{je}$. En particulier, chaque flux je est bien défini de part et d'autre de la frontière ∂S_{je} .

Une frontière non vide entre deux régions S_{je} sera appelé un ensemble de discontinuité, une limite de discontinuité ou une commutation multiples.

Dans la suite de l'article, nous considérerons principalement le système suivant avec un seul ensemble de discontinuité

$$X = \begin{cases} F_1(X, \mu), & \text{si } X \in S_1, \\ F_2(X, \mu), & \text{si } X \in S_2 \end{cases} \quad (6)$$

où $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}^n$, F_1 génère un flux 1, F_2 un flux 2. Lorsque $F_1(X) = F_2(X)$ à un moment donné $X \in$, mais il y a une différence dans les dérivés jacobiens $F_{1,X} \neq F_{2,X}$, alors le degré de lissage est dit égal à 2.

Définition 2. Les systèmes avec une régularité de degré 2 ou plus sont appelés *systèmes continus lisses par morceaux* (PWCS).

En effet selon la définition générale suivante

Définition 3 ([13], Définition 2.1, p. 638). Une frontière de discontinuité est dite uniformément discontinue dans certains domaines principaux si le degré de lissage du champ vectoriel à travers est le même partout. De plus, on dit que la discontinuité est uniforme de degré $m+1$ si le premier $m-1$ dérivés de $F_1 - F_2$, évalués sur , sont nuls.

le collecteur de commutation est uniforme de degré de lissage 2. Considérons que le système (6) réécrit comme suit

$$\dot{X} = \begin{cases} F_1(X, \mu), & \text{si } H(x, \mu) > 0 \\ F_2(X, \mu), & \text{si } H(x, \mu) < 0 \end{cases}, \quad (7)$$

où H définit le collecteur de commutation par

$$\Sigma := \{X \in \mathbb{R}^n : H(X) = 0\}.$$

Pour le système PWCS (7), il est possible d'identifier différents types d'équilibres, conduisant à la définition suivante

Définition 4 ([13], Définition 2.2, p. 640). Nous appelons un point $X \in \Sigma$ comme un *équilibre régulier* de (7) si X est telle que soit

$$F_1(X, \mu) = 0 \text{ et } H(x, \mu) > 0$$

ou alors

$$F_2(X, \mu) = 0 \text{ et } H(x, \mu) < 0.$$

Alternativement, on dit qu'un point $y \in \Sigma$ est un *équilibre virtuel* de (7) si soit

$$F_1(y, \mu) = 0 \text{ et } H(y, \mu) < 0$$

ou alors

$$F_2(y, \mu) = 0 \text{ et } H(y, \mu) > 0.$$

Pour un système continu autonome standard, c'est-à-dire $\dot{X} = f(X)$, avec $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continu, et g un ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n , selon une théorie bien connue, pour toute condition initiale donnée $x_0 \in g$, on a existence d'une solution unique $tu(t, x_0)$. Laissez aussi V un ensemble compact dans \mathbb{R}^n . Ensuite pour étudier la stabilité asymptotique locale ou globale des équilibres, on considère les définitions générales suivantes

Définition 5 ([18], Définition 7.1, p. 32). Un ensemble compact $V \subset g$ est dit être *écurie*, si on lui donne un quartier t de V , il y a un quartier O de V tel que $X \in O$ implique $tu(t, x) \in t$ pour tous $t \geq 0$.

Définition 6 ([18], Définition 7.5, p. 32). Un ensemble compact $V \subset g$ est un *attracteur* s'il y a un voisinage t de V tel que $X \in t$ implique $tu(t, x) \rightarrow V$ comme $t \rightarrow \infty$. Si $tu(t, x) \rightarrow V$ pour chaque $X \in g$, V s'appelle *attracteur mondial*. Si V est à la fois stable et attracteur, V est dit être *asymptotiquement stable*. V est dit être *globalement asymptotiquement stable* s'il est stable et un attracteur global.

2.3. Analyse théorique du modèle

L'analyse théorique du modèle est effectuée en considérant (2) en tant que système PWS, sur \mathbb{R}^4_+ . Ici la commutation collecteur est $\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^4_+ : Ou = \gamma M\}$. Depuis qu'on a ça $F_1(X) = F_2(X)$, $X \in \Sigma$ est un système PWCS. Les dérivés de F_1 et F_2 existent sur la Σ , mais, en général, ils ne sont pas égaux. En termes de la terminologie précédente pour les systèmes PWS, le tinité à travers Σ discon est uniforme avec un degré de lissage égal à 2. Pour ce type particulier de systèmes, l'existence locale et l'unicité des solutions découle de la théorie ODE standard puisque F est Lipschitz, qui est le minimum requis. De plus, il est facile de voir que le système (2) est dissipatif, ce qui prévoit l'existence globale des solutions sur l'intervalle de temps $[0, +\infty)$.

Dans un premier temps, nous étudierons les systèmes (4) et (5) séparément, puis les résultats obtenus seront fusionnés en un théorème pour le système (1). Selon Définition 4, dans notre cadre, un point $X = (I, Y, F, M)$ s'appelle un *équilibre virtuel* de (2) si $F_1(X) = 0$, $O > \gamma M$ ou alors $F_2(X) = 0$, $O < \gamma M$.

2.3.1. Cas 1 : abondance masculine

L'analyse de (4) utilise la théorie des systèmes coopératifs [19]. Un système autonome d'ODE

$$\frac{dx}{dt} = f(X) \quad (8)$$

où $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^n$, est dit *coopératif* si f est monotone croissant par rapport à X_j , $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$. Une fonction avec la monotonie indiquée est appelée *quasi-monotone*.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons deux théorèmes principaux que nous utiliserons dans la suite de l'article :

Théorème 7. [19, Théorème 3.1, p. 18], [20, Théorème 6] Soient $a, b \in D$, tel qu'un $a \leq b$, $[a, b] \subseteq D$ et $f(b) \leq f(a)$. Puis (8) définit un système dynamique positif sur $[a, b]$. De plus, si $[a, b]$ contient un équilibre unique p alors, p est globalement asymptotiquement stable (GAS) sur $[a, b]$.

Théorème 8. Soit $a, b \in D$, tel qu'un $a \leq b$, $[a, b] \subseteq D$ et $f(a) = f(b) = 0$ pour (8). Puis

(un) (8) définit un système dynamique positif sur $[a, b]$.

(b) Si a et b sont les seuls équilibres du système dynamique sur un B_j , alors toutes les solutions initiées à l'intérieur de B_j convergent vers l'un d'eux, c'est-à-dire, soit tous convergent vers a , soit tous convergent vers b .

La persistance d'une population est généralement liée à son nombre de descendants de base. Pour les modèles de population simples, le nombre de descendants de base est défini comme le nombre de descendants produits par un seul individu au cours de sa vie, à condition que des ressources abondantes soient disponibles. En général, la définition pourrait être plus compliquée et sa valeur est calculée en utilisant la méthode de génération suivante. Pour le modèle en (4), des calculs simples conduisent au nombre de descendants de base suivant

$$N_0 = \frac{BrV_{je}V_{oui}}{(\mu_{je} + V_{je})(V_{oui} + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta V_{oui}}. \quad (9)$$

Dans cet article, nous utiliserons N_0 uniquement comme paramètre de seuil. La persistance quand $N_0 > 1$ et l'extinction quand $N_0 < 1$ reçoivent des preuves directes. Par conséquent, nous ne discuterons pas des détails sur les propriétés spécifiques du nombre. La persistance ou l'extinction d'une population sont généralement représentées dans un cadre de modèle via le concept de *stabilité asymptotique globale* de l'équilibre endémique ou trivial (zéro), respectivement.

Théorème 9.

- (un) Le système ODE (4) définit un système dynamique positif sur R_+^4 .
 (b) Si $N_0 \leq 1$ puis $TE = (0, 0, 0, 0)$ est un équilibre globalement asymptotiquement stable (GAS).
 (c) Si $N_0 > 1$ alors TE est un équilibre instable et le système admet un équilibre positif $EE = (j_e^*, O_{ui}^*, F^*, M^*)$, où

$$\begin{aligned} j_e^* &= \left(1 - \frac{1}{N_0}\right) K, \\ O_{ui}^* &= \frac{rV_{je}(\delta + \mu_F)}{(V_{oui} + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta V_{oui}} \left(1 - \frac{1}{N_0}\right) K, \\ F^* &= \frac{rV_{je}V_{oui}}{(V_{oui} + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta V_{oui}} \left(1 - \frac{1}{N_0}\right) K, \\ M^* &= \frac{(1-r)V_{je}}{\mu_M} \left(1 - \frac{1}{N_0}\right) K, \end{aligned}$$

qui est un GAS globalement asymptotiquement stable sur $R_+^4 \setminus \{X \in R_+^4 : j_e = O_{ui} = F = 0\}$.

Preuve. Résoudre $F_1(X) = 0$ donne deux solutions TE et EE , où $EE > 0$ si $N_0 > 1$. Les propriétés d'existence des solutions et les propriétés de stabilité asymptotique des équilibres TE et EE sont établis via des méthodes standard d'analyse des systèmes d'ODE. Nous en déduisons ici la preuve de l'attractivité globale des équilibres qui utilise une approche peu courante basée sur la théorie des systèmes coopératifs. Il est facile de voir que (4) est coopératif sur $K = \{X \in R_+^4 : j_e \leq K\}$ car F_1 est quasi monoton sur K .

Laisser $q \in R, q \geq K$. Dénoter

$$y_q = \begin{pmatrix} K \\ \frac{rV_{je}(\delta + \mu_F)}{(V_{oui} + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta V_{oui}} q \\ \frac{rV_{je}V_{oui}}{(V_{oui} + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta V_{oui}} q \\ \frac{(1-r)V_{je}}{\mu_M} q \end{pmatrix} \quad (dix)$$

Nous avons $F_1(0) = 0$ et $F_1(y_q) \leq 0$. Puis, de Théorème 7 il s'ensuit que (4) définit un système dynamique positif sur $[0, y_q]$.

Laisser $N_0 \leq 1$ (point b). Dans ce cas TE est le seul équilibre sur $[0, y_q]$ et il découle de Théorème 7 que c'est du GAZ sur $[0, y_q]$. Par conséquent, TE est également GAZ sur $\bigcup_{q \geq K} [0, y_q] = K$.

Laisser $N_0 > 1$ (point c). Tout d'abord, en utilisant la même approche que pour (b), nous obtenons que EE est GAZ allumé $\{X \in R_+^4 : X \geq EE\}$. Deuxièmement, nous considérons Théorème 8 appliqué à l'intervalle $[TE, EE]$. Depuis pour $N_0 > 1$ l'équilibre TE n'est pas asymptotiquement stable, le théorème implique que EE attire toutes les solutions à l'intérieur de l'intervalle. En associant les deux résultats on obtient que EE est GAZ à l'intérieur de R_+^4 . Le comportement asymptotique des solutions au bord de R_+^4 peut être vérifié directement à obtenir la propriété GAZ de EE en (c). -

2.3.2. Cas 2 : pénurie masculine

On considère ensuite le système (5). Il est facile de voir que la deuxième équation peut être découplée. Le système des trois équations restantes est de la forme

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= g(u), \\ \text{où } u &= \begin{pmatrix} j_e \\ O_{ui} \\ M \end{pmatrix} \text{ et } g(u) = \begin{pmatrix} (1 - j_e) F - (V_{je} + \mu_{je}) E \\ V_{oui} \gamma M - (\delta + \mu_F) F \\ (1 - r) V_{je} j_e - \mu_{MM} M \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Le numéro de progéniture de base pour le système(11)est

$$N_0 = \frac{bY(1-r)V_{je}V_{Oui}}{(V_{je}+\mu_{je})(\delta+\mu_F)\mu_M}. \quad (12)$$

Le théorème suivant décrit les propriétés du système(11).

Théorème 10.

(un)Le système ODE(11)définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}_+^3 .

(b)Si $N_0 \leq 1$ puis $TE_3 = (0,0,0)$ est un équilibre GAS.

(c)Si $N_0 > 1$ puis TE_3 est un équilibre instable et le système admet un équilibre positif $EE = (\hat{I}, \hat{F}, \hat{M})$, où

$$\begin{aligned} \hat{I} &= 1 - \frac{1}{N_0} K, \\ \hat{F} &= \frac{Y(1-r)V_{je}V_{Oui}}{(\delta+\mu_F)\mu} \left(1 - \frac{1}{N_0} K \right), \\ \hat{M} &= \frac{(1-r)V_{je}}{\mu_M} \left(1 - \frac{1}{N_0} K \right), \end{aligned}$$

qui est GAS sur $\mathbb{R}_+^3 \setminus \{TE_3\}$.

Utiliser cette fonction g est quasi-monotone et donc le système(11)est coopératif sur \mathbb{R}_+^3 , le Global propriétés d'attractivité énoncées dans leThéorème 10sont prouvées en utilisant la même méthode que dansThéorème 9.

On peut en déduireThéorème 10que la valeur d'équilibre non triviale de Oui est

$$\hat{Oui} = \frac{rV_{je}(\delta+\mu_F)\mu_M - V_{Oui}Y(1-r)V_{je}\mu_F}{\mu_F(\delta+\mu_F)\mu_M} \left(1 - \frac{1}{N_0} K \right) \quad (13)$$

Notons que la valeur de \hat{Y} en général la valeur de la variable Oui peut être négatif. On a donc le corollaire suivant.

Corollaire 11.

(un)Le système ODE(5)définit un système dynamique positif sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(b)Si $N_0 \leq 1$ puis $TE = (0,0,0,0)$ est un équilibre GAS.

(c)Si $N_0 > 1$ alors TE est un équilibre instable et $EE = (\hat{I}, \hat{Y}, \hat{F}, \hat{M})$ est un équilibre positif, qui est GAZ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \setminus \{X \in \mathbb{R}_+^4 : j \in F = M = 0\}$.

2.3.3. Conclusions pour le modèle(1)

Dans ce qui suit nous supposons que la population a un équilibre endémique. Sinon, aucun contrôle ne serait nécessaire. De plus, il est naturel de supposer qu'à l'équilibre, il y a abondance de mâles. En termes de paramètres du modèle, ces hypothèses peuvent être écrites comme suit :

$$1. N_0 > 1, \quad (14)$$

$$2. \hat{Oui} < \gamma M. \quad (15)$$

Sous les hypothèses(14)et(15)on a ça $EE > 0$ et $\hat{Y} < \gamma M$. En effet, quand $N_0 > 1$, l'inégalité

$$\frac{N_0}{N_0} > 1$$

est équivalent à

$$Y > \frac{r(\delta+\mu_F)\mu_M}{(1-r)(V_{Oui}+\mu_F)(\delta+\mu_F)-\delta V_{Oui}},$$

qui est assuré par(15). Donc sous des hypothèses(14)et(15)on a ça $N_0 > 1$, et parThéorème 10, on a ça le système(5)a un équilibre non trivial EE , qui est GAS sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \setminus \{(I, Y, F, M) : j \in F = M = 0\}$.

De plus, sous(15), on a

$$\begin{aligned} \hat{Oui} - \gamma M &= \frac{rV_{je}(\delta+\mu_F)\mu_M - V_{Oui}Y(1-r)V_{je}\mu_F}{\mu_F(\delta+\mu_F)\mu_M} - Y \frac{(1-r)V_{je}}{\mu_M} \\ &= \frac{V_{je}}{\mu_M} \frac{r\mu_M - Y(1-r)Oui}{\mu_F} - \frac{V_{je}\mu_F + \mu_F(\delta+\mu_F)}{\mu_F(\mu_F+\delta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& < \frac{V_{je}E}{\mu_M} \left(\frac{r\mu_M}{\mu_F} - \frac{r(\delta+\mu_F)M}{((V_{Oui}+\mu_F)(\delta+\mu_F)-\delta V_{Oui})} - \frac{V_{Oui}\mu_F+\mu_F(\delta+\mu_F)}{\mu_F(\delta+\mu_F)} \right) \\
& < \frac{V_{je}E}{\mu_M} \left(\frac{r\mu_M}{\mu_F} - \frac{r\mu_M}{\mu_F} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Pour résumer, sous des hypothèses (14) et (15), les équilibres globalement asymptotiquement stables EE et EE^* de (4) et (5), respectivement, sont dans la région d'abondance des mâles définie par $Oui < YM$. Donc, EE est un équilibre régulier de (1), pendant que EE^* est un virtuel. De plus, on a le théorème suivant

Théorème 12. *Donné (14) et (15), le modèle (1) définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}_+^4 et a deux équilibres dans ce domaine:*

(un) TE , qui est instable, et

(b) EE , qui est GAS sur $\mathbb{R}_+^4 \setminus \{(I, Y, F, M) \in \mathbb{R}_+^4 : j_e = Oui = F = 0 \text{ ou } j_e = F = M = 0\}$.

Preuve. Le fait que (1) définit un système dynamique sur \mathbb{R}_+^4 ainsi que les propriétés locales de TE et EE suivent de Théorème 9, Théorème 10 et la discussion qui précède Théorème 12. Il reste à prouver que EE est GAS comme indiqué en (b). L'équilibre EE attire des solutions qui sont entièrement dans la région d'abondance masculine, à l'exclusion de la M -axe. Les solutions dans la région de pénurie masculine sont attirées par $EE^* = (I^*, Y^*, F^*, M^*)$. Par conséquent, ils quittent la région de pénurie masculine et entrent dans la région d'abondance masculine. Dans la région d'abondance des mâles, ils sont régis par (4) et donc attiré par EE . En général, ce raisonnement n'exclut pas la possibilité qu'une solution puisse quitter la région d'abondance masculine, entrer dans la région de pénurie masculine puis la quitter. Par conséquent, nous allons prouver la propriété GAZ de EE en utilisant une approche différente. On considère le système (1) sous la transformation

$$(I, Y, F, M) \mapsto (I, W, F, M) \quad J, \quad (16)$$

où $O = F = Oui$. On obtient le nouveau système

$$\begin{cases}
j_e \frac{dI}{dt} = b(1 - j_e) F - (V_{je} + \mu_{je}) I E, \\
\frac{dW}{dt} = r V_{je} - \mu W, \\
\frac{dF}{dt} = V_{Oui} \min\{YM, F - \beta\} - \delta F - \mu_F F, \\
\frac{dM}{dt} = (1 - r) V_{je} - (\mu_M) M.
\end{cases} \quad (17)$$

Depuis (17) est obtenu à partir de (1) par transformation linéaire, le système (17) définit un système dynamique positif sur $\{(I, W, F, M) \in \mathbb{R}_+^4 : O \leq F\}$ avec des équilibres l'origine et $EE^* = (I^*, W^*, F^*, M^*)$, où $O = Oui + M$. Formulation de la modèle sous forme de (17) est utile car (17) est un système coopératif. Laisser gd désigne le côté droit de (17). Il est facile de voir que gd est quasi-monotone sur le domaine considéré. Alors la propriété GAZ de EE^* est obtenu en utilisant la méthode dans la preuve de Théorème 9 en utilisant la pointe γ_q dont l'image γ_q sous la transformation (16).

3. Modélisation de la confusion sexuelle et du piégeage

3.1. Confusion sexuelle et piégeage

Afin de maintenir la population de ravageurs à un niveau bas, nous envisageons un contrôle utilisant des pièges à phéromones femelles pour perturber le comportement d'accouplement des mâles. Plus précisément, nous prenons en compte deux aspects pour le contrôle. Le premier aspect consiste à perturber l'accouplement entre mâles et femelles pour réduire les opportunités de fécondation, ce qui à son tour réduit le nombre de descendants. Cela se fait à l'aide de pièges qui libèrent un leurre à phéromone femelle vers lequel les mâles sont attirés. Cela conduit à une réduction du nombre de mâles disponibles pour l'accouplement à proximité des femelles et diminue les possibilités de fécondation. L'efficacité de la confusion sexuelle dépend de la force du leurre ou du nombre de pièges dans une zone. Le deuxième aspect du contrôle est le potentiel de piégeage du piège.

3.2. Le modèle

Afin de prendre en compte l'effet des leurres, nous considérons l'approche proposée par Barclay et Van den Driessche [14], et Barclay et Hendrichs [21]. C'est-à-dire que la force du leurre est représentée par la quantité de phéromones libérées par un nombre équivalent de femelles sauvages. Ainsi, dans le modèle l'effet du leurre correspond à l'attraction

de Oui et femelles supplémentaires. Dans un tel cadre, le nombre total de « femelles » attirant les mâles est $Oui + Ouis$ [14]. En particulier, ce signifie que les hommes ont une probabilité de $\frac{Ouis}{Ouis + Ouis}$ être attiré par les femelles sauvages, et une probabilité de $\frac{Ouis}{Ouis + Ouis}$ être attiré

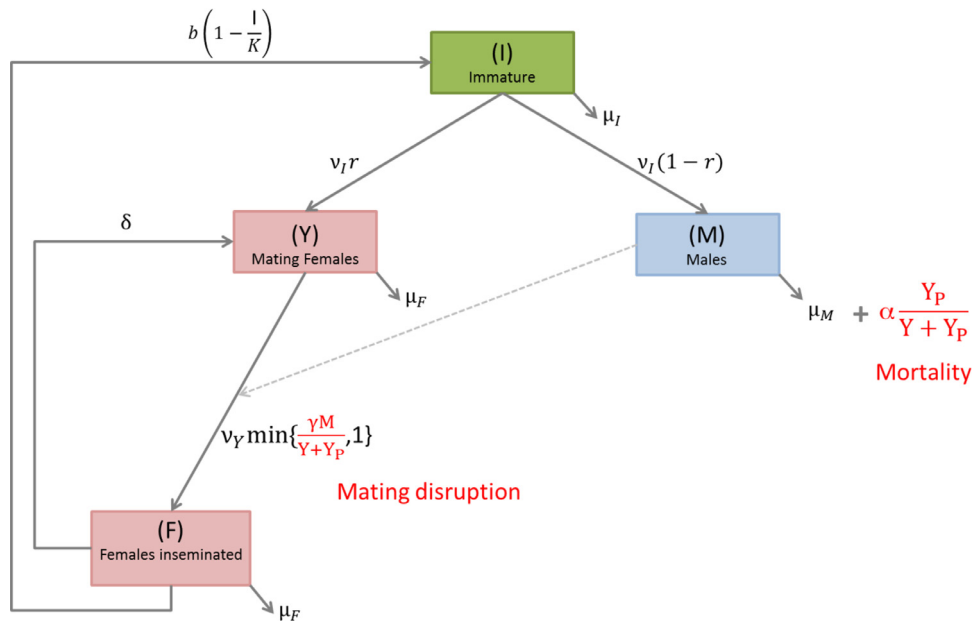


Fig. 2. Modèle de contrôle utilisant la confusion sexuelle et le piégeage.

aux pièges à phéromones. Dénoter Y le nombre de femelles pouvant être inséminées par un seul mâle. Ensuite, le taux de transfert depuis O_{ui} pour F ne dépasse pas $v_{O_{ui}} \frac{YM}{O_{ui} + O_{uiP}}$. Lorsque $\frac{YM}{O_{ui} + O_{uiP}} > 1$ la population est dans un état d'abondance mâle et le taux de transfert est $v_{O_{ui}}$. Cependant, lorsque $\frac{YM}{O_{ui} + O_{uiP}} \leq 1$, alors la population est dans un état de pénurie d'hommes et le taux de transfert est $v_{O_{ui}} \frac{YM}{O_{ui} + O_{uiP}}$. Tout à fait, le taux de transfert est $v_{O_{ui}} \min\{\frac{YM}{O_{ui} + O_{uiP}}, 1\}$.

Le paramètre α représente le taux de mortalité ou de capture pour la fraction $\frac{O_{uiP}}{O_{ui} + O_{uiP}}$ des mâles qui sont attirés par leurs. Le diagramme de flux est représenté dans Figure 2 ce qui donne le système d'ODE suivant :

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = b \left(1 - \frac{1}{K}\right) F - (v_I r + \mu) I \\ \frac{dY}{dt} = r v_I j_e v_{O_{ui}} \min\left\{\frac{YM}{O_{ui} + O_{uiP}}, 1\right\} O_{ui} + \delta F - \mu Y \\ \frac{dF}{dt} = v_{O_{ui}} \min\left\{\frac{YM}{O_{ui} + O_{uiP}}, 1\right\} O_{ui} - \delta F - \mu F \\ \frac{dM}{dt} = (1-r) v_I j_e - (\mu + \alpha \frac{Y_P}{Y+Y_P}) M \end{cases} \quad (18)$$

3.3. Analyse théorique du modèle de contrôle

Modèle (18) est un système PWS, où le collecteur de commutation sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = g(x, Y_P) = \begin{cases} g_1(x, Y_P) & \text{si } O_{ui} + O_{uiP} \leq YM \\ g_2(x, Y_P) & \text{si } O_{ui} + O_{uiP} > YM \end{cases} \quad (19)$$

où $x = (I, Y, F, M)$ et

$$g_1(x, Y_P) = \begin{pmatrix} b \left(1 - \frac{1}{K}\right) F - (v_I r + \mu) I \\ r v_I j_e + \delta F - (v_{O_{ui}} + \mu) O_{ui} \\ v_{O_{ui}} O_{ui} - (\delta + \mu) F \\ (1-r) v_I j_e - (\mu + \alpha \frac{Y_P}{Y+Y_P}) M \end{pmatrix}, \quad g_2(x, Y_P) = \begin{pmatrix} b \left(1 - \frac{1}{K}\right) F - (v_I r + \mu) I \\ r v_I j_e + \delta F - v_{AA+O_{uiP}} \frac{YM}{Y+Y_P} - \mu O_{ui} \\ v_{AA+O_{uiP}} \frac{YM}{Y+Y_P} - (\delta + \mu) F \\ (1-r) v_I j_e - (\mu + \alpha \frac{Y_P}{Y+Y_P}) M \end{pmatrix} \quad (20)$$

Similaire à (2), le système (19) est un système PWS continu. L'existence de solutions suit comme pour (2). Notons que la région d'abondance masculine $\{x \in \mathbb{R}_+^4 : O_{ui} + O_{uiP} < YM\}$ et la région de pénurie d'hommes $\{x \in \mathbb{R}_+^4 : O_{ui} + O_{uiP} > YM\}$ dépendent de la paramètre de contrôle O_{uiP} . Comme O_{uiP} augmente la région d'abondance des mâles est réduite tandis que la région de pénurie des mâles est agrandie. Comme

dans Section 2, nous étudions séparément les propriétés des systèmes associés à l'abondance et à la rareté des mâles, puis nous tirons des conclusions pour (18).

3.3.1. Cas 1 : abondance masculine

La dynamique de la population dans la région d'abondance des mâles $O_{ui} + O_{uiP} < YM$ sont régis par le système d'ODE suivant :

$$\begin{cases} \frac{dj_e}{dt} = b \left(1 - \frac{j_e}{K} \right) F - (v_{je} + \mu_{je}) j_e E, \\ \frac{dY}{dt} = r v_{je} j_e - v_{O_{ui}} \delta F - \mu_F O_{ui}, \\ \frac{dF}{dt} = v_{O_{ui}} O_{ui} - (\delta + \mu_F) F, \\ \frac{dM}{dt} = (1-r) v_{je} j_e - (\mu_M + \alpha \frac{O_{uiP}}{O_{ui} + O_{uiP}}) M \end{cases} \quad (21)$$

Notons que les trois premières équations de (21) sont les mêmes que dans (4), tandis que la quatrième équation dans les deux systèmes peut être découplée. Ensuite, en utilisant exactement la même méthode que dans Théorème 9 on obtient le théorème suivant.

Théorème 13.

- (un) Le système des ODE (21) définit un système dynamique positif sur R_+^4 .
 (b) Sous hypothèses (14) et (15), le système a un équilibre positif $EE_{\#} = (j_e^*, O_{ui}^*, F^*, M_{\#}(O_P))$, où

$$M_{\#}(O_P) = \frac{(1-r) v_{je} (O_{ui} + O_{uiP}) \mu_{je}}{M(O_{ui} + O_{uiP}) + \alpha O_{uiP}} j_e^* = \frac{M^*}{1 + \frac{\alpha O_{ui}}{\mu_M (O_{ui} + O_{uiP})}},$$

qui est globalement asymptotiquement stable sur $R_+^4 \setminus \{X \in R_+^4 : j_e = O_{ui} = F = 0\}$.

L'équilibre $EE_{\#}$ est un équilibre régulier de (18) si et seulement si

$$O_{ui}^* + O_{uiP} < YM^{\#}(O_P)$$

ou équivalent,

$$O_{uiP} < O^* := \frac{YM^* - O_{ui}^*}{1 + \alpha \frac{O_{ui}}{\mu_M}} = \frac{1}{\mu_M + \alpha} \left(Y(1-r) v_{je} - \frac{r v_{je} (\delta + \mu_F) \mu_M}{(v_{O_{ui}} + \mu_F)(\delta + \mu_F) - \delta v_{O_{ui}}} \right) \left(1 - \frac{1}{N_0} \right) K \quad (22)$$

Donc,

- si $O_{uiP} < O_P$ alors $EE_{\#}$ est un équilibre régulier de (18);
 si $O_{uiP} > O_P$ alors $EE_{\#}$ est un équilibre virtuel de (18). (23)

La valeur seuil O_{ui}^* détermine le niveau maximal de contrôle en dessous duquel le contrôle n'a pratiquement aucun effet sur une population de ravageurs établie. Plus précisément, l'effet se limite à réduire le nombre de mâles, alors que tous les autres compartiments restent dans leur équilibre naturel.

3.3.2. Cas 2 : pénurie masculine

Dans la région de pénurie masculine $YM \leq O_{ui} + O_{uiP}$ la dynamique de la population est régie par le système :

$$\begin{cases} \frac{dj_e}{dt} = b \left(1 - \frac{j_e}{K} \right) F - (v_{je} + \mu_{je}) j_e E, \\ \frac{dY}{dt} = r v_{je} j_e - v_{O_{ui}} \frac{YMA}{O_{ui} + O_{uiP}} + \delta F - \mu_F O_{ui}, \\ \frac{dF}{dt} = v_{O_{ui}} \frac{YMA}{O_{ui} + O_{uiP}} - (\delta + \mu_F) F, \\ \frac{dM}{dt} = (1-r) v_{je} j_e - (\mu_M + \alpha \frac{O_{uiP}}{O_{ui} + O_{uiP}}) M \end{cases} \quad (24)$$

Le théorème suivant montre les différents comportements du modèle selon la valeur de O_{uiP} qui peut être interprété comme l'effort du contrôle de confusion sexuelle.

Théorème 14.

- (un) Le système des ODE (24) définit un système dynamique positif sur R_+^4 .
 (b) TE est un équilibre asymptotiquement stable de ce système pour tout $Y_P > 0$.
 (c) Il existe une valeur seuil Y_{**} de Y_P tel que
 (i) si $O_P > O_{ui}^*$ le seul équilibre du système sur R_+^4 est TE ;
 (ii) si $O_{uiP} < O_{ui}^*$ le système a trois équilibres sur R_+^4 , TE et deux équilibres positifs.

Preuve. (a) et (b) sont obtenus par des considérations standard déjà discutées.

(c) Réglage $j_e = 0$ dans (24) donne

$$F = \frac{(V_e + \mu_{je})JE}{b(1 - j_e)K}$$

Puis, de (14), on a

$$M = \frac{(1-r)V_{je}JE}{\mu_M + a \frac{O_{uiP}}{O_{uiO} + O_{uiP}}}$$

De plus, considérant que $dY + dF = 0$, on en déduit

$$O_{ui} = \frac{rV_{je}JE}{\mu_F} = \frac{rV_{je}JE}{\mu_F} - \frac{\mu_F(V_{je} + \mu_{je})}{\mu_F b(1 - j_e)K} \quad j_e = \frac{\varphi(JE)}{\mu_F b(1 - j_e)K} JE.$$

avec $\varphi(JE) = rV_{je}b(1 - j_e)K - \mu_F(V_{je} + \mu_{je})$. En substituant les expressions de O , F et M dans l'équation pour $d=0$, on obtient une équation pour j_e sous la forme

$$\psi(JE) = j_e \xi(I) \varphi(I) = \eta(Y_P, JE), \quad (25)$$

où

$$\xi(JE) = V_{Oui} \gamma (1-r) V_{je} b(1 - j_e)K - (\delta + \mu_F)(V_{je} + \mu_{je}) \mu_M, \quad (26)$$

$$\eta(O_{uiP}, JE) = \mu_F (\delta + \mu_F)(V_{je} + \mu_{je})(\mu_M + a) b(1 - j_e)K - O_{uiP}. \quad (27)$$

Par conséquent, les équilibres non triviaux de (24) sont de la forme

$$O_{ui}^{jEMARYLAND} = \frac{rV_{je}}{\mu_F} - \frac{\mu_F(V_{je} + \mu_{je})}{\mu_F b(1 - j_e)K} \quad jEMARYLAND, \quad (28)$$

$$F^{jEMARYLAND} = \frac{(V_{je} + \mu_{je})}{b(1 - j_e)K} \quad jEMARYLAND, \quad (29)$$

$$M^{jEMARYLAND} = \frac{(1-r)V_{je}}{\mu_M + a \frac{O_{uiP}}{O_{uiO} + O_{uiP}}} \quad jEMARYLAND. \quad (30)$$

avec $jEMARYLAND$ une racine positive de (25). De plus, nous notons que pour assurer $O_{ui}^{jEMARYLAND} > 0$, il résulte de (28) que $jEMARYLAND$ doit remplir la condition

$$jEMARYLAND < K1 - \frac{\mu_F(V_{je} + \mu_{je})}{rV_{je}b}. \quad (31)$$

Ainsi, pour obtenir des équilibres biologiquement viables, $jEMARYLAND$ doit appartenir à l'intervalle $[0, K(1 - \frac{\mu_F(V_{je} + \mu_{je})}{rV_{je}b})]$.

Les racines de (25) correspondent aux valeurs de j_e où le graphique du polynôme cubique ψ et la ligne droite $\eta(O_{uiP}, \cdot)$ se coupent. Il est clair que la ligne droite $\eta(O_{uiP}, \cdot)$ croise le j_e -axe à $j_e = K$. De la factorisation de $\psi(j_e)$ dans (25), il est clair que les racines de ψ sont

$$j_{e0} = 0, j_{e1} = K1 - \frac{(\delta + \mu_F)(V_{je} + \mu_{je})\mu_M}{V_{Oui} \gamma (1-r) V_{je} b}, \text{ et } j_{e2} = K \left(1 - \frac{\mu_F(V_{je} + \mu_{je})}{rV_{je}b} \right). \quad (32)$$

Notez que les racines j_{e1} et j_{e2} sont positifs et plus petits que K , soit $0 < j_{e1}, j_{e2} < K$, à condition de

$$\frac{(\delta + \mu_F)(V_{je} + \mu_{je})\mu_M}{V_{Oui} \gamma (1-r) V_{je} b} < 1, \quad (33)$$

et respectivement,

$$\frac{\mu_F(V_{je} + \mu_{je})}{rV_{je}b} < 1. \quad (34)$$

Inégalité (33) est satisfaite sous les hypothèses (15) et (14), et l'inégalité (34) est équivalente à $\mu_0 > 1$. C'est pour (14). Par conséquent, sous des hypothèses (14) et (15), on a $j_{e1}, j_{e2} \in [0, K]$. Par conséquent, le graphique du polynôme cubique ψ est tel qu'indiqué sur Figure 3.

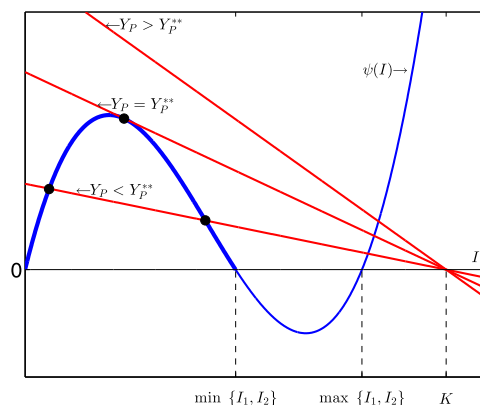


Fig. 3. Intersections entre les graphiques de $\eta(Y_P, \cdot)$ (en rouge) et $\psi(I)$ (en bleu) pour différentes valeurs de Y_P . Les points noirs représentent les points d'intersection sur l'intervalle $[0, \min\{j_{e1}, j_{e2}\}]$. (Pour l'interprétation des références à la couleur dans la légende de cette figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article.)

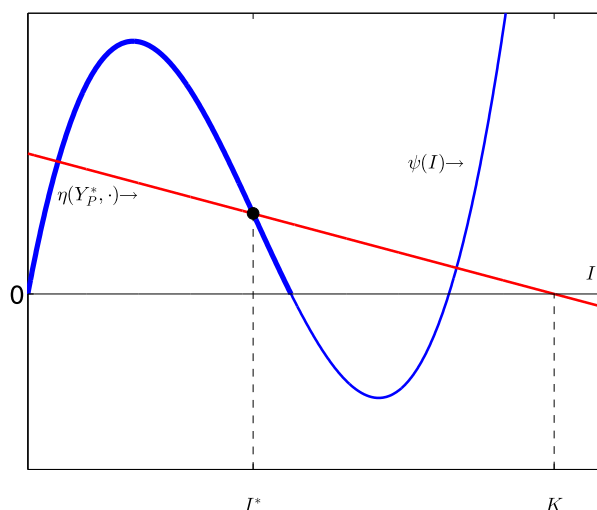


Fig. 4. Intersections entre les graphiques de $\eta(Y_P^*, \cdot)$ (en rouge) et $\psi(I)$ (en bleu). Le point noir représente l'intersection pour $j_e = j_e^*$. (Pour l'interprétation de la références à la couleur dans la légende de cette figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article.)

Compte tenu de l'inégalité (31), seuls les points d'intersection de la droite $\eta(Y_P, \cdot)$ avec la section du graphique de ψ pour $0 \leq j_e \leq \min\{j_{e1}, j_{e2}\}$, indiqué par une ligne plus épaisse sur Figure 3, sont pertinents pour les équilibres du modèle. Notons que ψ est indépendant de Y_P tandis que le gradient de la ligne η est un multiple de Y_P . On note par Y_P^* la valeur de Y_P tel que la ligne $\eta(Y_P^*, \cdot)$ est tangente à la section indiquée du graphique de ψ , voir Figure 3. Il est alors clair que pour $Y_P > Y_P^*$ il n'y a pas intersection entre $\eta(Y_P, \cdot)$ et ψ sur $[0, \min\{j_{e1}, j_{e2}\}]$ tandis que si $0 < Y_P < Y_P^*$ il y a deux tels points d'intersection. Cela prouve les points (i) et (ii) dans (c). -

3.4. Conclusions pour le modèle (18)

Laisser $E(1)$ et $E(2)$ être les racines de (25) quand $0 < Y_P < Y_P^*$ et notons les équilibres respectifs par $E(1)$ et $E(2)$.

On a déjà vu dans (23) que $E(1)$ est un équilibre régulier ou virtuel selon que $Y_P < Y_P^*$ ou alors $Y_P > Y_P^*$. Pour $Y_P = Y_P^*$ on a $E(1) = E(2)$. C'est $E(1)$ est un équilibre aux limites. En raison de la continuité de $\deg(X, Y_P)$, $E(1)$ est un équilibre de (24). Ainsi, $E(1) = E(2)$ pour $Y_P = Y_P^*$.

On peut voir de Figure 4 que pour $0 < Y_P < Y_P^*$, on a

$$j_{e1} < j_e^* < j_{e2} \quad (35)$$

tandis que pour $Y_P < Y_P^*$, on a

$$j_{e1} < j_{e2} < j_e^*. \quad (36)$$

Nous étudions quand les équilibres de (24) sont des équilibres réguliers de (18), c'est-à-dire lorsqu'ils appartiennent à la zone de pénurie masculine. Après quelques manipulations techniques nous avons

$$\begin{aligned} & O_{ui}^{M+} - Y_{M^{MARYLAND}}^{MARYLAND} \left(\frac{\mu_M}{\mu_M + \alpha} \frac{r v_{je}}{\mu_F} - \frac{\mu(v_{je} + \mu_{je})}{\mu_F(1 - j_e)} \right) - \gamma(1-r)v_{je} j_e^{MARYLAND+} (\mu_M + a) Y_P. \\ & = \frac{\mu_M}{\mu_M + \alpha} \frac{r v_{je}}{\mu_F} - \frac{\mu(v_{je} + \mu_{je})}{\mu_F(1 - j_e)} - \gamma(1-r)v_{je} j_e^{MARYLAND+} (\mu_M + a) Y_P. \end{aligned}$$

Laissant $O_{ui}^P < O_{ui}^P < O_{ui}^P$. Puis en utilisant aussi (36) on a

$$\begin{aligned} & O_{ui}^{MARYLAND+} - Y_{M^{MARYLAND}}^{MARYLAND} \left(\frac{\mu_M}{\mu_M + \alpha} \frac{r v_{je}}{\mu_F} - \frac{\mu(v_{je} + \mu_{je})}{\mu_F(1 - j_e)} \right) - \gamma(1-r)v_{je} j_e^{MARYLAND+} (\mu_M + a) Y_P \\ & \geq \frac{\mu_M}{\mu_M + \alpha} \frac{r v_{je}}{\mu_F} - \frac{\mu(v_{je} + \mu_{je})}{\mu_F(1 - j_e)} - \gamma(1-r)v_{je} j_e^{MARYLAND+} (\mu_M + a) Y_P \\ & = \frac{\mu_M}{\mu_M + \alpha} \frac{r v_{je}(\delta + \mu_F)}{\mu_F + \delta \mu_F} - \gamma(1-r)v_{je} j_e^{MARYLAND+} (\mu_M + a) Y_P \quad (\text{en utilisant (22)}) \\ & = -(\mu_M + a) \frac{Q_{ui}}{j_e} j_e^{MARYLAND+} (\mu_M + a) Y_P \\ & = \frac{\mu_M + a}{j_e} (\gamma_P^* - \frac{*}{O_{ui}^{MARYLAND+}}) > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Donc, dans ce cas $EE^{(1)}$ et $EE^{(2)}$ sont tous deux dans la région de pénurie masculine. Ce sont donc des équilibres réguliers de (18). Si $O_{ui}^P < Q_{ui}$ et $j_e^{MARYLAND+} > j_e$, considérant (35) et en utilisant la même méthode que dans (37) on obtient

$$O_{ui}^P + O_{ui}^{MARYLAND+} - Y_{M^{MARYLAND}}^{MARYLAND} < 0. \quad (38)$$

Donc, $EE^{(1)}$ n'est pas dans la région de pénurie masculine. Il s'agit donc d'un équilibre virtuel de (18).

En tenant compte des résultats ci-dessus concernant $EE^{(1)}$, $EE^{(2)}$ et $EE^{(1)}$ et $EE^{(2)}$ (18), on obtient le théorème suivant pour

Théorème 15. Soit $Y_P > 0$. Ce qui suit vaut pour le modèle (18):

- (un) TE est un équilibre asymptotiquement stable.
- (b) Si $0 < O_{ui}^P < O_{ui}^P$, il y a deux équilibres positifs $EE^{(1)}$ et $EE^{(2)}$, où $EE^{(1)}$ est asymptotiquement stable.
- (c) Si $O_{ui}^P < O_{ui}^P < O_{ui}^P$, il y a deux équilibres positifs $EE^{(1)}$ et $EE^{(2)}$.
- (ré) Si $O_{ui}^P > O_{ui}^P$, il n'y a pas d'équilibre positif.

Remarques. 1. Dans la théorie des systèmes PWS, la bifurcation à $O_{ui}^P = O_{ui}^P$ est appelée une bifurcation de franchissement de frontière induite par la discontinuité. Comme O_{ui}^P augmente et traverse O_{ui}^P , l'équilibre régulier $EE^{(1)}$ entre en collision avec l'équilibre virtuel sur la frontière (O_{ui}^P) et ils échangent des propriétés, c'est-à-dire $EE^{(1)}$ devient virtuel tandis que $EE^{(2)}$ devient régulier.

2. La bifurcation à $O_{ui}^P = O_{ui}^P$ n'est pas induite par la discontinuité puisque pour $O_{ui}^P = O_{ui}^P$ les deux équilibres réguliers $EE^{(1)}$ et $EE^{(2)}$ sont tous deux à l'intérieur de la région de pénurie masculine. Nous avons une bifurcation en point selle : comme O_{ui}^P augmente à travers O_{ui}^P , les équilibres $EE^{(1)}$ et $EE^{(2)}$ entrent en collision et disparaissent.

Obtention théorique des propriétés de stabilité des équilibres $EE^{(1)}$ et $EE^{(2)}$ n'est pas facile compte tenu de la complexité du système. Les simulations numériques indiquent que $EE^{(1)}$ est instable alors que $EE^{(2)}$ est asymptotiquement stable, et que les équilibres sont le seul ensemble invariant du système sur R_+ . De plus, quand $O_{ui}^P > O_{ui}^P$, TE est globalement asymptotiquement stable. Les équilibres et leurs propriétés sont présentés sur le diagramme de bifurcation dans Figure 5. Les valeurs d'équilibre de O_{ui}^P sont donnés en fonction du paramètre de bifurcation O_{ui}^P . La ligne pleine représente les équilibres stables, tandis que la ligne pointillée représente les équilibres instables.

3.4.1. Stabilité asymptotique globale de l'équilibre trivial pour suffisamment grand O_{ui}^P

Théorème 15 montre que pour $O_{ui}^P < O_{ui}^P$ la population d'insectes persiste à un niveau endémique substantiel. Plus précisément, et comme illustré dans Figure 5, le contrôle n'a pratiquement aucun effet ($O_{ui}^P < O_{ui}^P$) on ne prévoit qu'une réduction mineure ($O_{ui}^P < O_{ui}^P < O_{ui}^P$) d'une population établie, par exemple à son équilibre naturel. Par conséquent, la stabilité asymptotique globale observée numériquement de TE , c'est-à-dire l'extinction éventuelle de la population, pour $O_{ui}^P > O_{ui}^P$ revêt une grande importance pratique. Cette section traite de la démonstration mathématique de ce résultat. Plus précisément, nous établirons la stabilité asymptotique globale de TE dans un état légèrement plus solide $O_{ui}^P > Y_{P^*} > Y_{P^*} > O_{ui}^P$ et montre aussi que Y_{P^*} est une approximation proche de O_{ui}^P . L'analyse asymptotique pour système (18) ne peut pas être menée de la même manière que pour les autres systèmes considérés jusqu'à présent, puisqu'il ne s'agit pas d'un processus collaboratif.

Plus précisément en raison du terme $-V_{O_{ui}} \frac{Y_M}{P}$ dans l'équation de la O_{ui}^P compartiment, le côté droit de (18) n'est pas O_{ui}^P quasi-monotone. Afin d'obtenir le résultat pratiquement important mentionné ci-dessus, nous considérons un système auxiliaire qui

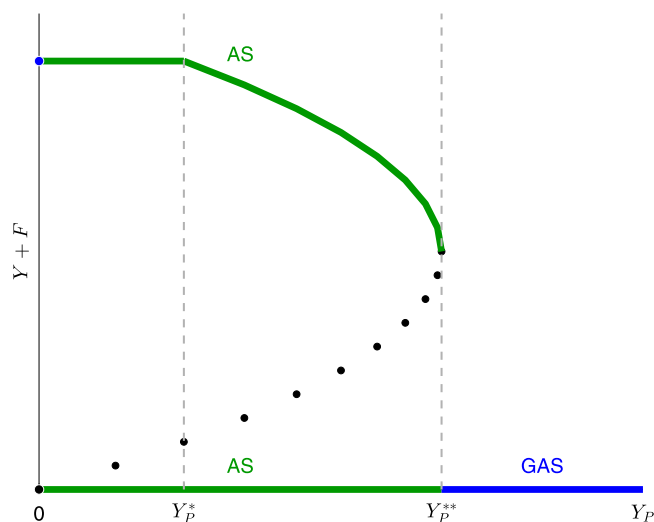


Fig. 5. Diagramme de bifurcation des valeurs de $Ouip$ à l'équilibre par rapport aux valeurs de $Ouip$ pour le système (18).

est collaboratif et fournit des bornes supérieures pour les solutions de (18). Le système est obtenu en supprimant le terme mentionné dans la deuxième équation et en remplaçant $\min \left\{ \frac{YM}{Ouip + Ouip}, 1 \right\}$ par $\frac{YM}{Ouip + Ouip}$ dans la troisième équation. Sous forme vectorielle, il est donné par

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{h}(X), \quad (39)$$

où $X = (I, Y, F, M)$ et

$$\tilde{h}(X) = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{je}{K}) - F - (V_{je} + \mu_{je})JE \\ rV_{je} - \mu_F Ouip + \delta F \\ V_{je} + \mu_{je} - \delta F - \mu_F F \\ (1 - r)V_{je} - (\mu_M + a)M \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Il est facile de voir cette fonction \tilde{h} est quasi-monotone sur $K = \{X \in \mathbb{R}^4_+ : j \leq K\}$.

Théorème 16.

(un) Le système des ODE (39) définit un système dynamique positif sur \mathbb{R}^4_+ .

(b) TE est un équilibre asymptotiquement stable.

(c) Il existe une valeur seuil \tilde{Y}^* tel que

(i) si $Ouip > \tilde{Y}^*$, \tilde{T}_F est globalement asymptotiquement stable sur \mathbb{R}^4_+ ;

(ii) si $0 < Ouip < \tilde{Y}^*$, le système a trois équilibres, TE et deux équilibres positifs $\tilde{E}(1)$ et $\tilde{E}(2)$ tel que $\tilde{E}(1) < \tilde{E}(2)$. Le

bassin d'attraction de TE contient l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}^4_+ : 0 \leq x < \tilde{E}(1)\}$. Le bassin d'attraction de $\tilde{E}(2)$ contient l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}^4_+ : x \geq \tilde{E}(2), j \leq K\}$.

Preuve. (a) et (b) se prouvent de la même manière que Théorème 14 sont obtenus par des techniques classiques.

(c) Réglage des premier, deuxième et quatrième composants de \tilde{h} à zéro, nous avons

$$Ouip = \frac{rV_{je} + \delta F}{\mu_F}, \quad F = \frac{V_{je} + \mu_{je}}{b(1 - \frac{je}{K})} JE, \quad M = \frac{(1 - r)V_{je}}{\mu_M Ouip + (\mu_M + a)Y_P} JE.$$

Définition de la troisième composante de \tilde{h} à zéro et en remplaçant les expressions par O , F et M ci-dessus et en suivant la méthode de la preuve du point (c) dans Théorème 14, on obtient une équation pour je qui est semblable à (25) mais avec un cubique différent. Plus précisément, l'équation de je est sous la forme

$$\tilde{\psi}(je) = je \xi(I) \tilde{\varphi}(I) = \eta(Y_P, JE), \quad (41)$$

où $\xi(je)$ et $\eta(Ouip, JE)$ sont l'expression linéaire donnée dans (26) et (27) et

$$\tilde{\varphi}(je) = rV_{je}b \left(1 - \frac{je}{K} \right) + \delta(V_{je} + \mu_{je}). \quad (42)$$

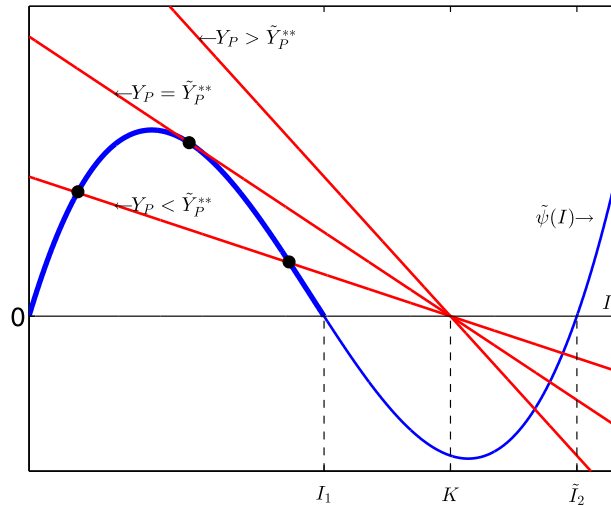


Figure 6. Intersections entre les graphiques de $\eta(Ouip, \cdot)$ (en rouge) et $\tilde{\psi}$ (en bleu) pour différentes valeurs de $Ouip$. Les points noirs représentent les points d'intersection sur l'intervalle $[0, j_{e1}]$. (Pour l'interprétation des références à la couleur dans la légende de cette figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article.)

Par conséquent, les équilibres non triviaux de (39) sont de la forme

$$\begin{aligned} Ou\bar{r} &= \frac{1}{\mu_F} r v_{je+} \frac{\delta(v_{je+} \mu_{je})}{b(1 - JE \bar{K})} E, \\ F &= \frac{(v_{je+} \mu_{je})}{b(1 - JE \bar{K})} E, \\ M &= \frac{(1-r)v_{je}}{\mu_M + \alpha_{Ouip} \frac{v_{je}}{\tilde{Y}_* Ouip}} JE, \end{aligned} \quad (43)$$

avec E une racine positive de (41). Les racines de (41) correspondent aux valeurs de je où le graphique du polynôme cubique $\tilde{\psi}$ et la ligne droite $\eta(Ouip, \cdot)$ coupent. Il est clair que la droite $\eta(Ouip, \cdot)$ croise l'axe à $je = K$. Notez que l'état où je plus grand est que K n'est pas durable, et donc biologiquement non pertinent. De la factorisation de $\tilde{\psi}$ dans (41), il est clair que je_1 et je_2 donné en (32) et

$$JE_2 = 1 + \frac{\delta(v_{je+} \mu_{je})}{r v_{je} b} K \quad (44)$$

sont des racines de $\tilde{\psi}$. Clairement, nous avons

$$0 < je_1 < K < je_2. \quad (45)$$

Par conséquent, le graphique du polynôme cubique $\tilde{\psi}$ est tel qu'indiqué dans Figure 6.

Compte tenu de l'inégalité (45), seuls les points d'intersection de la droite $\eta(Ouip, \cdot)$ avec la section du graphique de $\tilde{\psi}$ pour $0 < je < je_1$ sont pertinents pour les équilibres du modèle. Notez que $\tilde{\psi}$ est indépendant de $Ouip$ tandis que le gradient de $\eta(Ouip, \cdot)$ est un multiple de $Ouip$. On note par \tilde{Y}_*^P la valeur de $Ouip$ telle que la ligne η est tangente à la section indiquée de la graphique de $\tilde{\psi}$, voir Figure 6. Ensuite, il est clair que pour $Ouip > \tilde{Y}_*^P$ il n'y a pas d'intersection entre $\eta(Ouip, \cdot)$ et $\tilde{\psi}$ sur $[0, je_1]$ tandis que si $0 < Ouip < \tilde{Y}_*^P$ il y a deux tels points d'intersection.

(je laisse $Ouip > \tilde{Y}_*^P$. Considérez le point

$$\tilde{y}_q = \begin{pmatrix} K \\ \left(\frac{1}{\mu_F} r v_{je+} \left(\delta \frac{v_{je+} (1-r) v_{je}}{\mu_F \mu_M} + \mu_{je} \right) q \right) \\ \frac{v_{je+} (1-r) v_{je}}{(\delta + \mu_F) \mu_M} q \\ \frac{(1-r) v_{je}}{\mu_M} q \end{pmatrix}, \quad (46)$$

où $q \in \mathbb{R}, q \geq K$. Il est facile de voir que $\tilde{h}(\tilde{y}_q) \leq 0$. Puis par Théorème 7, E Test GAZ sur $[0, \tilde{y}_q]$. Donc, E Test GAZ allumé $\cup_{q \geq K} [0, \tilde{y}_q] = \mathcal{K}$ aussi bien. Similaire à Théorème 9, \mathcal{K} est un ensemble absorbant. Ainsi E Test GAZ allumé \mathbb{R}_+^4 .

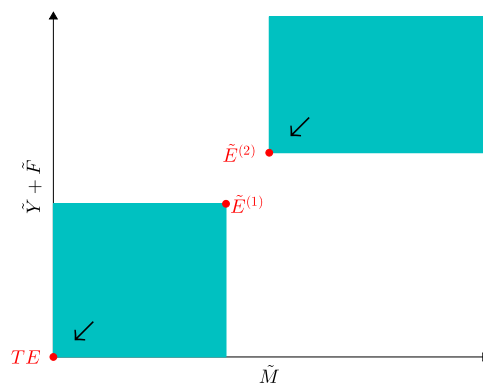


Fig. 7. Ensembles invariants positifs, quand $0 < O_{ui} < \tilde{Y}_{**}$.

(ii) Soit $0 < O_{ui} < \tilde{Y}_{**}$. Notons les deux équilibres par $\tilde{E}(j) = (\tilde{I}(j), \tilde{Y}(j), F(j), M(j))$, $j=1,2$, où $E(1) < E(2)$. Depuis \tilde{Y} , F , M comme donné en (43) sont des fonctions croissantes de E , nous avons $0 < \tilde{E}(1) < \tilde{E}(2)$ (Figure 7). En utilisant ça $\tilde{h}(\tilde{y})$ $q \leq 0 = \tilde{h}(2)$, par Théorème 7 $\tilde{E}(2)$ est GAZ sur $[\tilde{E}(2), \tilde{y}_q]$. Donc, $\tilde{E}(2)$ est GAZ allumé $U_{q \in K}[\tilde{E}(2), \tilde{y}_q] = \{X \in R_+ : X \geq \tilde{E}(2), j \in K\}$. Nous obtenons les déclarations sur la bassin d'attraction de ET en utilisant Théorème 8. En effet, ET , étant asymptotiquement stable, attire certaines solutions initiées en $[TE, \tilde{E}(1)]$. Il découle alors de Théorème 8 que toutes les solutions initiées en $\{X \in R_+ : X < \tilde{E}(1)\}$ converger vers ET .

Rappelons que nous considérons le système (39) comme une approximation de (18) dans le but de créer des conditions propices à l'extinction des insectes nuisibles – le résultat le plus souhaitable d'une stratégie de lutte. Un système dynamique à quatre dimensions comme (18) peuvent, en général, avoir des ensembles d'invariants de nature différente. Le résultat en Théorème 15 que pour $Y > Y_{**}$ ET est le seul équilibre de (18) et qu'il est asymptotiquement stable, n'exclut pas la possibilité d'existence d'autres ensembles invariants du système dans R_+ . En utilisant Théorème 16 pour le système auxiliaire (18) nous prouvons le théorème suivant qui fournit des déclarations pour le bassin d'attraction de ET et comprend en particulier une condition suffisante pour l'extinction des populations de ravageurs, c'est-à-dire que TE est GAS.

Théorème 17. Soit $Y > 0$. Puis la prise suivante pour le modèle (18).

- (un) Si $0 < O_{ui} < \tilde{Y}_{**}$, alors le bassin d'attraction de TE contient $\{X \in R_+ : X < \tilde{E}(1)\}$.
 (b) Si $O_{ui} > \tilde{Y}_{**}$, alors TE est GAZ sur R_+ .

Preuve. Utilisation du théorème de monotonie [22, 8.XI] avec X étant la solution de (39) et y étant la solution de (18) on obtient que toute solution de (39) est une borne supérieure de la solution de (18) avec le même point initial. Ceci implique que le bassin d'attraction de ET comme un équilibre de (18) contient les ensembles indiqués dans Théorème 16 (c) (i) et (ii), prouvant ainsi (a) et (b), respectivement.

Théorème 17 caractérise le bénéfice de l'effort de contrôle représenté par O_{ui} comme suit:

- Augmenter les efforts O_{ui} dans la gamme $0 < O_{ui} < \tilde{Y}_{**}$ ne conduit pas à l'élimination d'une population établie. En fait, comme montré sur Figure 5, la réduction n'est pas proportionnelle à l'effort. Cependant, $\tilde{E}(1)$ augmente au moins linéairement avec $E(1)$. Par conséquent, l'augmentation O_{ui} agrandit le bassin d'attraction de ET , offrant une meilleure opportunité de contrôler une population envahissante.
- Effort O_{ui} plus fort que \tilde{Y}_{**} élimine toute population établie ou envahissante.

4. Simulation numérique et discussion

Nous utilisons des simulations numériques pour illustrer les résultats de Théorèmes 15 et 17 et discuter de la signification biologique des résultats. Les simulations numériques sont faites à l'aide de `ode23ts` solveur de Matlab [23] qui résout le système d'ODE rigides en utilisant une règle trapézoïdale et un schéma de différenciation arrière du second ordre (TR-BDF2) [24, 25]. Les valeurs des paramètres utilisés pour les simulations numériques sont celles de Tableau 1.

En utilisant (9), nous calculons le nombre de descendants de base, $M_0 = 122$. $M_0 > 1$, donc, la population s'établit au positif équilibre endémique EE dont nous avons montré qu'il s'agit de GAZ sur $R_+ \setminus \{ET\}$ (Théorème 9(c)). Figure 8 représente les trajectoires de un ensemble de solutions de système (1), ou de manière équivalente système (18) avec $O_{ui} = 0$ et $\alpha = 0$, dans le $M \times (O_{ui} + F)$ avion. Les points représentent les points où les solutions sont initiées. Les solutions initiées le $R_+ \setminus \{ET\}$ convergent tous vers le point $EE = (992, 319, 1407, 1498)$, représenté par le carré vert. Ici, ET est aussi un équilibre, mais il est instable (Théorème 9(c)), et donc il n'est pas représenté dans Figure 8.

Dans ce qui suit, nous confirmons numériquement les résultats théoriques de Théorèmes 15 et 17 par rapport aux valeurs des seuils de confusion sexuelle mentionnés dans ces théorèmes, O_{ui} et O_{ui}^{**} . Nous étudions également l'impact de l'effort de piégeage,

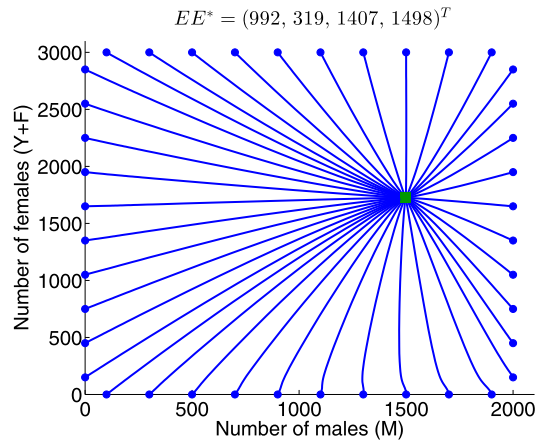


Figure 8. Trajectoires d'un ensemble de solutions de système(1) dans le $M^*(Ou+ F)$ -plan initié aux points. Le carré vert représente l'équilibre stable EE^* . (Pour l'interprétation des références à la couleur dans la légende de cette figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article.)

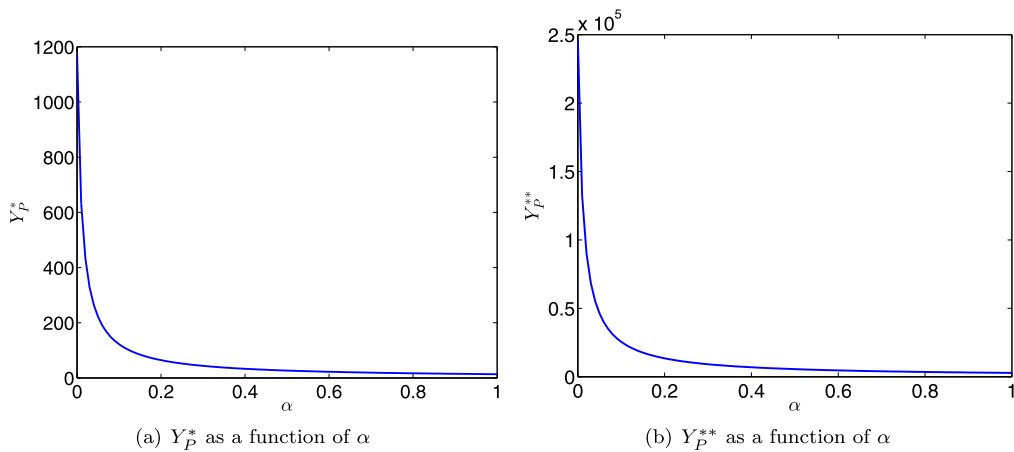


Fig. 9. Seuils de confusion sexuelle en fonction du paramètre de piégeage α .

α , sur la population. En utilisant(22)et résoudre numériquement le système

$$\begin{cases} \psi(E) = \eta(Y_P, E) \\ \frac{r\psi}{je}(E) = \frac{r\eta}{je}(O_P, je) \end{cases}$$

avec ψ et $\eta(Ou; \cdot)$ tel que défini dans(25), on obtient respectivement les valeurs seuils Ou_{i-p}^* et Ou_{i-p}^{**} en fonction de α comme représentant envoyé dansFigure 9.

On peut observer qu'un petit effort de piégeage réduit les seuils de confusion sexuelle de manière non linéaire. Ajouter du piégeage à la confusion sexuelle permet de réduire la quantité de leurre pour une efficacité de contrôle équivalente. En particulier, pour $\alpha=0$, on a $Ou_{i-p}^* = 5673$ et $Ou_{i-p}^{**} = 987,735$, tandis que pour $\alpha=0.1$, on a $Ou_{i-p}^* = 588$ et $Ou_{i-p}^{**} = 102,462$. Ainsi, l'augmentation de la l'effort de piégeage de 10 % réduit à la fois Ou_{i-p}^* et Ou_{i-p}^{**} de 90 %.

Figure 10 illustre les trajectoires des solutions du système(18) lorsque le niveau de confusion sexuelle est inférieur au seuil O_P pour $\alpha=0$ et $\alpha=0.1$. Les points représentent les points initiaux et les carrés verts représentent les asymptotiquement stables équilibres. Dans ce cas, le système a un équilibre positif, EE^* (Théorème 15(b)), avec la valeur donnée dans la figure. On peut observer que lorsqu'il n'y a pas de piégeage, $EE^* = EE^*$ (Figure 10(un)). Cela signifie que l'équilibre endémique positif de la population n'est pas affecté par le contrôle. Lorsque le piégeage se produit, on observe dansFigure 10(b) que l'équilibre positif est déplacé vers la gauche. En effet, le contrôle permet de réduire le nombre de mâles mais pas suffisamment pour perturber la fécondation des femelles. Par conséquent, le contrôle n'est pas efficace sur une population établie car le nombre de femelles à l'équilibre n'est pas réduit.

Cependant, lorsque $Ou_{i-p} > 0$, E est asymptotiquement stable, ce qui signifie qu'une population peut être contrôlée si elle est suffisamment petite. Figure 11(a), représente le bassin d'attraction de E (les points rouges) pour une petite population dans le même cadre que pour les expériences enFigure 10(un). On observe qu'il existe un ensemble de solutions, pour lesquelles la population initiale est suffisamment petite, qui convergent

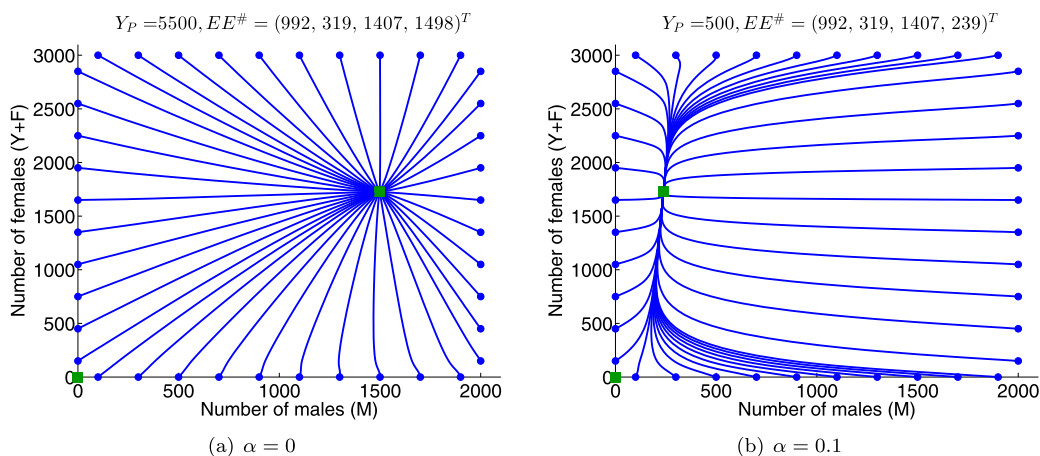


Fig. 10. Trajectoires d'un ensemble de solutions de système (18) dans le $M \times (O+ F)$ -plan initié aux points. Les carrés verts représentent les équilibres asymptotiquement stables ET et $EE\#$. (Pour l'interprétation des références à la couleur dans la légende de cette figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article.)

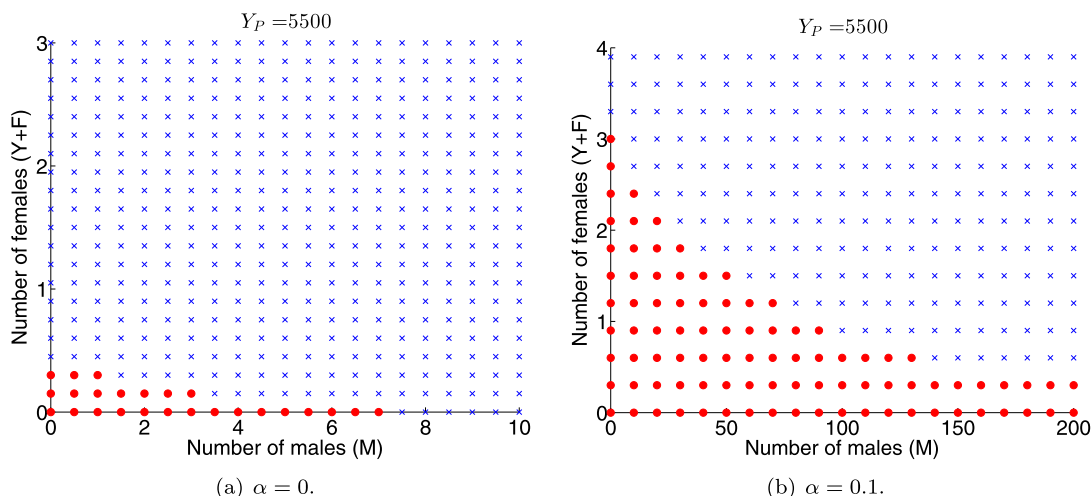


Fig. 11. Effet de α sur le bassin d'attraction de ET . Les solutions initiées aux points représentés par les points rouges convergent vers ET tandis que les croix bleues représentent les points initiaux pour lesquels la solution converge vers $EE\#$. (Pour l'interprétation des références à la couleur dans la légende de cette figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article.)

pour ET , par conséquent, une petite population peut être éradiquée pour $O_{ui}p > 0$. En outre, comme indiqué dans Figure 11(b), en ajoutant un piégeage ($\alpha = 0.1$) avec le même effort de confusion sexuelle que pour Figure 11(a), agrandit le bassin d'attraction de ET . En d'autres termes, pour un effort de perturbation de l'accouplement identique, des populations plus importantes peuvent être attirées vers l'extinction lorsque le piégeage se produit.

Afin d'observer une réduction du nombre de femelles, l'effort de confusion sexuelle doit être augmenté au-dessus du seuil $O_{ui}p > P.C$ est le cas dans Figure 12((a) et (b)), où $O_{ui}p = 0.9999 \times O_{ui}p$ pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 0.1$, respectivement. Nous pouvons voir qu'il existe un équilibre positif asymptotiquement stable, $EE(2)$, représenté par un carré vert (Théorème 15(c)).

Les lignes bleues représentent les trajectoires des solutions de (18) initiées aux points bleus qui convergent vers $EE(2)$, pendant que les lignes rouges représentent les trajectoires des solutions initiées aux points rouges qui convergent vers ET . Avec $O_{ui}p > O_{ui}p$, la le nombre de femelles à l'équilibre est réduit, cependant l'impact du contrôle n'est pas proportionnel à l'effort. En effet, en comparant les expériences de Figures. dixet12, on observe que pour réduire de 49% le nombre de femelles à l'équilibre, il faut augmenter la quantité de leurre de 17,857% quand $\alpha = 0$ et par 20,390% quand $\alpha = 0.1$.

De plus, en comparant les points rouges dans Figure 11 et les trajectoires rouges dans Figure 12, on voit que le bassin d'attraction de l'équilibre trivial devient plus grand avec la valeur de $O_{ui}p$ augmente.

Pour terminer, $O_{ui}p > O_{ui}p$ permet un contrôle total de la population la conduisant à l'extinction, quelle que soit sa taille. Dans Figure 13, $O_{ui}p$ est au dessus de $O_{ui}p$ de 0,01 %, et nous pouvons voir que toutes les trajectoires convergent vers ET . Cela montre la nature GAZ de ET lorsque $O_{ui}p > O_{ui}p$.

Notez que dans Théorème 17, le GAZ de ET est établi pour $O_{ui}p > \tilde{Y}_{**}$, cependant, nous montrons numériquement que la propriété GAS de ET tient pour $O_{ui}p > O_{ui}p$. Depuis Figure 14 nous pouvons voir que l'erreur entre \tilde{Y}_{**} et $O_{ui}p$ est d'ordre 10^4 ce qui est petit par rapport aux valeurs de \tilde{Y}_{**} et $O_{ui}p$ qui sont d'ordre 10^6 .

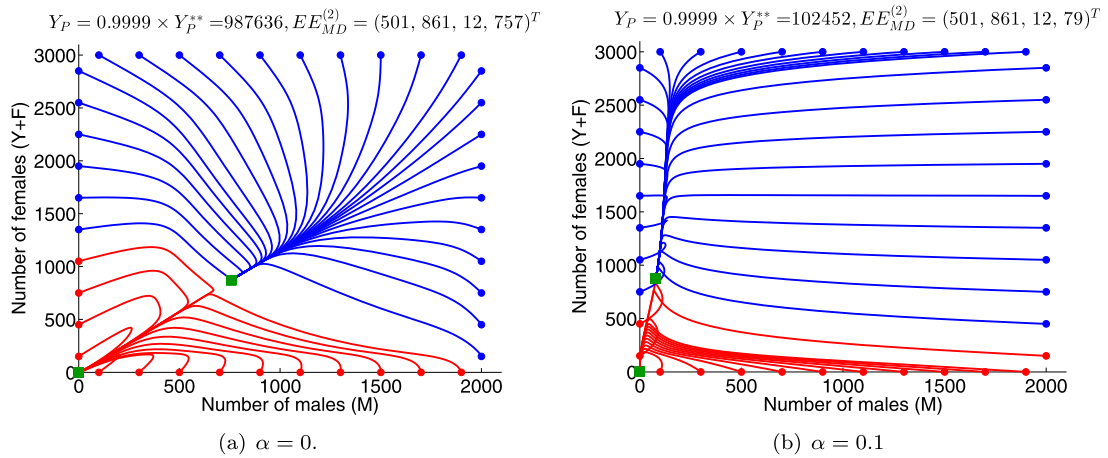


Fig. 12. Trajectoires d'un ensemble de solutions de système (18) dans le $M^*(Ou+F)$ -plan initié aux points. Les carrés verts représentent les équilibres asymptotiquement stables. (Pour l'interprétation des références à la couleur dans la légende de cette figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article.)

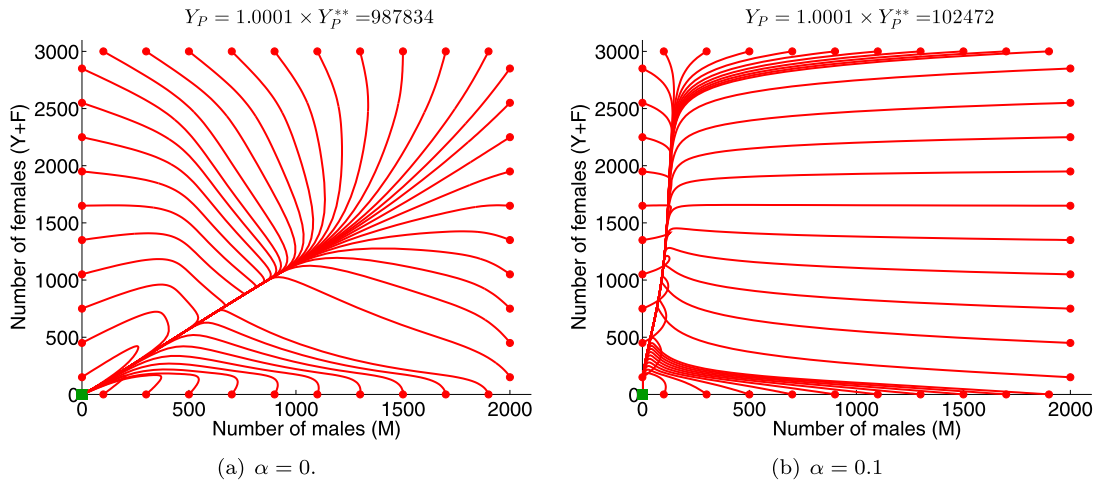


Fig. 13. Trajectoires d'un ensemble de solutions de système (18) dans le $M^*(Ou+F)$ -plan initié aux points. Les carrés verts représentent les équilibres asymptotiquement stables. (Pour l'interprétation des références à la couleur dans la légende de cette figure, le lecteur est renvoyé à la version Web de cet article.)

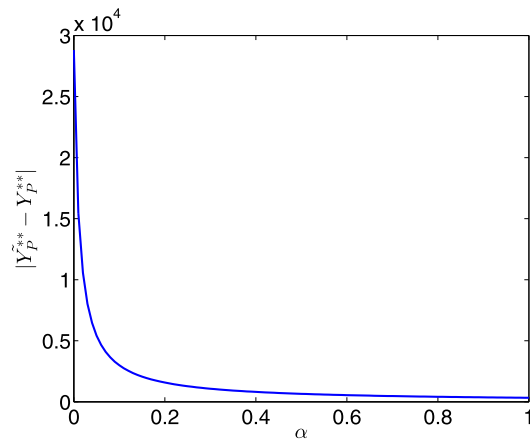


Figure 14. Erreur entre les seuils Y_P^{**} et Y_P^{*} en fonction de α .

5. Conclusion et perspectives

Le contrôle des populations d'insectes nuisibles dans le respect de l'environnement est un défi majeur dans les programmes de LAI. La confusion sexuelle à l'aide de leurres à base de phéromones sexuelles femelles relève des exigences de l'IPM car elle est spécifique à l'espèce et ne laisse aucun résidu toxique dans les produits cultivés. Dans ce travail, nous construisons un modèle générique, régi par un système d'ODE continus par morceaux, pour simuler la dynamique d'une population de ravageurs et sa réponse au contrôle de la confusion sexuelle avec piégeage. A partir de l'analyse théorique du modèle, nous identifions deux valeurs seuils d'intérêt biologique pour la force de leurre. Le premier seuil, O_{ui}^* , correspond à une quantité minimale de phéromone nécessaire pour que la confusion sexuelle ait un effet sur la population. Cependant, nous montrons que le contrôle ne peut être pleinement efficace, c'est-à-dire conduire une population établie à l'extinction, que pour une quantité de phéromone supérieure à un second seuil, O_{ui}^{**} . Nous montrons également la stabilité asymptotique de l'équilibre trivial, ET , chaque fois que $O_{ui}^* > 0$. En d'autres termes, une petite quantité de phéromone peut être efficace sur une très petite population, comme au stade de l'invasion. Ces résultats théoriques sont cohérents avec l'observation de terrain, où l'échec de la confusion sexuelle est souvent attribué à un mauvais dosage de la phéromone et/ou à une densité de population excessive [10,11].

De plus, nous montrons que l'augmentation de l'efficacité de capture des pièges peut réduire considérablement ces valeurs seuils. D'un point de vue pratique, cela suggère qu'il existe une combinaison optimale de la force de la phéromone attractive et de l'efficacité de capture des pièges pour optimiser le contrôle des ravageurs en termes de contrôle de la population et de coût. Ces résultats appuient les conclusions de Yamanaka [26] stipulant que dans le cas où le leurre utilisé pour la confusion sexuelle est suffisamment puissant, alors un piégeage supplémentaire n'est pas nécessaire, alors que dans le cas contraire, l'auteur conseille de concentrer plutôt l'effort sur l'efficacité du piégeage. Dans un cadre plus réaliste, ce contrôle optimisé correspond à un réglage optimal des pièges libérant la phéromone. Des approches alternatives, telles que des modèles basés sur l'individu, ont été envisagées pour étudier l'impact de la confusion sexuelle, incorporant une composante spatiale où l'attraction des mâles est régie par le panache de phéromones [27], soit par le rayon d'attraction effectif qui correspond à la probabilité de trouver la source [28]. Une prochaine étape de ce travail consiste à ajouter une composante spatiale pour étudier comment les pièges doivent être installés, combien doivent être utilisés et à quelle distance les uns des autres ils doivent être positionnés. L'investigation des réglages des pièges et de leurs interactions a été étudiée dans un travail parallèle portant sur l'estimation des paramètres [29] et prolongé dans [30], où les modèles de piégeage spatio-temporels sont régis par des processus d'advection-diffusion-réaction. Enfin, des expériences de terrain seraient les bienvenues pour valider les paramètres de seuil et le modèle.

Remerciements

Ce travail a été soutenu par le ministère français des Affaires étrangères et du Développement international et la Fondation nationale sud-africaine pour la recherche dans le cadre de l'appel PHC PROTEA 2015, PHC no 38879RD. Le soutien du Centre d'excellence DST/NRF en sciences mathématiques et statistiques (CoE-MaSS) et de la Chaire DST/NRF SARCHI en méthodes et modèles mathématiques en biosciences et en bioingénierie pour cette recherche est reconnu. Les opinions exprimées et les conclusions tirées sont celles des auteurs et ne doivent pas nécessairement être attribuées au CdE ou à la Chaire SARCHI.

Les auteurs remercient les relecteurs anonymes et le rédacteur en chef pour leurs commentaires fructueux qui améliorent grandement le manuscrit initial.

Références

- [1] L. Apple, RFE Smith, Integrated Pest Management, Plenum Press, New-York, 1976.
- [2] P. Witzgall, P. Kirsch, A. Cork, Les phéromones sexuelles et leur impact sur la lutte antiparasitaire, J. Chem. Écol. 36 (1) (2010) 80–100.
- [3] PE Howse, ID Stevens, OT Jones, Phéromones d'insectes et leur utilisation dans la lutte antiparasitaire, Chapman & Hall, 1998.
- [4] R. Bartell, Mécanismes de perturbation de la communication par les phéromones dans le contrôle des lépidoptères : une revue, Physiol. Entomol. 7 (4) (1982) 353–364.
- [5] RT Carde, Principes de confusion sexuelle, Produits chimiques modificateurs de comportement pour la lutte antiparasitaire : Applications des phéromones et autres attractifs, Marcel Dekker, New York, 1990, pp. 47–71.
- [6] A. Cocco, S. Deliperi, G. Delrio, Contrôle de *Tuta absoluta* (Meyrick) (Lepidoptera : Gelechiidae) dans des cultures de tomates sous serre en utilisant la technique de confusion sexuelle, J. Appl. Entomol. 137 (1–2) (2013) 16–28.
- [7] RT Carde, AK Minks, Lutte contre les papillons de nuit par confusion sexuelle : réussites et contraintes, Ann. R. Entomol. 40 (1) (1995) 559–585.
- [8] S. Vacas, C. Alfaro, J. Primo, V. Navarro-Llopi, Déploiement de distributeurs de confusion sexuelle avant et après les premiers vols saisonniers des mâles pour le contrôle d'aonidiella aurantii dans les agrumes, J. Pest Sci. 88 (2) (2015) 321–329.
- [9] LL Stelinski, JR Miller, ME Rogers, Interruption sexuelle de la mineuse des agrumes médiée par un mécanisme non compétitif à un taux de libération de phéromone remarquablement faible, J. Chem. Écol. 34 (8) (2008) 1107–1113.
- [10] BG Ambrogio, ER Lima, L. Sousa-Souto, Efficacité de la confusion sexuelle pour le contrôle de la mineuse du café *Leucoptera Coffeella* (Guérin-Méneville) (Lépidoptères : Lyonetiidae), BioAssay 1 (8) (2006) 1–5.
- [11] M. Michereff Filho, EF Vilela, GN Jham, A. Attygalle, A. Svatos, J. Meinwald, Études initiales sur la confusion sexuelle de la teigne de la tomate, *Tuta absoluta* (Lepidoptera : Gelechiidae) à l'aide de phéromones sexuelles synthétiques, J. Braz. Chim. Soc. 11 (6) (2000) 621–628.
- [12] M. di Bernardo, AR Champneys, CJ Budd, P. Kowalczyk, Théorie qualitative des systèmes dynamiques non lisses, Springer London, Londres, 2008.
- [13] M. di Bernardo, CJ Budd, AR Champneys, P. Kowalczyk, AB Nordmark, GO Tost, PT Piiroinen, Bifurcations in nonsmooth dynamical systems, SIAM Rev. 50 (4) (2008) 629–701.
- [14] H. Barclay, P. Van den Driessche, Modèles de piégeage aux phéromones pour la lutte contre les insectes nuisibles, Res. Popul. Écol. 25 (1) (1983) 105–115.
- [15] H. Barclay, GJ Judd, Modèles de confusion sexuelle au moyen de phéromones pour la lutte contre les insectes nuisibles, Res. Popul. Écol. 37 (2) (1995) 239–247.
- [16] M. Fisher, P. Van Den Driessche, H. Barclay, Un modèle dépendant de la densité de piégeage des phéromones, Theor. Popul. Biol. 27 (1) (1985) 91–104.
- [17] S. Ekesi, P. Nderitu, I. Rwomushana, Infestation des champs, cycle biologique et paramètres démographiques de la mouche des fruits *Bactrocera invadens* (Diptera : Tephritidae) en Afrique, Bull. Entomol. Rés. 96 (04) (2006) 379–386.
- [18] La Salle, La stabilité des systèmes dynamiques, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.

- [19] H.L. Smith, *Systèmes dynamiques monotones : une introduction à la théorie des systèmes compétitifs et coopératifs*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 41, Société mathématique américaine, 2008.
- [20] R. Anguelov, Y. Dumont, J. Lubuma, *Modélisation mathématique de la technologie des insectes stériles pour le contrôle du moustique anophèle*, *Comput. Math. Appl.* 64 (3) (2012) 374–389, faites : [10.1016/j.camwa.2012.02.068](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.02.068).
- [21] H.J. Barclay, J. Hendrichs, *Modèles d'évaluation de l'annihilation mâle de Bactrocera spp. avec des appâts au méthyleugénol*, *Ann. Entomol. Soc. Un m.* 107 (1) (2014) 81–96.
- [22] W. Walter, *Inégalités différentielles et intégrales*, vol. 55, Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] MATLAB, Version 7.14.0.739 (R2012a), The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2012.
- [24] R.E. Bank, W.M. Coughran Jr, W. Fichtner, E.H. Grosse, D.J. Rose, R.K. Smith, *Simulation transitoire de dispositifs et circuits en silicium*, *IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst.* 4 (4) (1985) 436–451.
- [25] M. Hosea, L. Shampine, *Analyse et mise en œuvre de TR-BDF2*, *Appl. Numéro. Math.* 20 (1) (1996) 21–37.
- [26] T. Yamanaka, *Confusion sexuelle ou piégeage de masse ? analyse par simulation numérique d'une stratégie de lutte contre les lépidoptères nuisibles*, *Popul. Écol.* 49 (1) (2007) 75–86.
- [27] T. Yamanaka, S. Tatsuki, M. Shimada, *Un modèle individuel pour les modèles de vol orientés vers les phéromones sexuelles des papillons mâles dans une zone locale*, *Ecol. Modèle.* 161 (1) (2003) 35–51.
- [28] J.A. Byers, *Simulation de confusion sexuelle et de piégeage de masse avec attraction compétitive et camouflage*, *Environ. Entomol.* 36 (6) (2007) 1328–1338.
- [29] C. Dufourd, C. Weldon, R. Anguelov, Y. Dumont, *Parameter identification in population models for insects using trap data*, *BioMath* 2 (2) (2013) 1312061.
- [30] R. Anguelov, C. Dufourd, Y. Dumont, *Simulations et estimation des paramètres d'un modèle piège-insecte par une approche par éléments finis*, *Math. Calcul. Simul.* 133 (2017) 47–75.