



**Sur l'utilisation de la technique des insectes stériles ou de la
technique des insectes incompatibles pour réduire ou éliminer
populations de moustiques**

Martin Strugarek, Hervé Bossin, Yves Dumont

► **Pour citer cette version :**

Martin Strugarek, Hervé Bossin, Yves Dumont. Sur l'utilisation de la technique des insectes stériles ou de la technique des insectes incompatibles pour réduire ou éliminer les populations de moustiques. 2018. "hal-01799954"

Identifiant HAL : hal-01799954

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01799954>

Prépublication soumise le 25 mai 2018

HAL est une archive pluridisciplinaire en libre accès pour le dépôt et la diffusion de documents de recherche scientifique, publiés ou non. Les documents peuvent provenir d'établissements d'enseignement et de recherche en France ou à l'étranger, ou de centres de recherche publics ou privés.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau de recherche, publiés ou non, émis par des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur l'utilisation de la technique des insectes stériles ou de la technique des insectes incompatibles pour réduire ou éliminer les populations de moustiques

Martin Strugarek^{1,2}, Herve Bossin³, et Yves Dumont^{4,5,6}

¹AgroParisTech, 16 rue Claude Bernard, 75231 Paris Cedex 05 - France

²Sorbonne Université, Université Paris-Diderot SPC, CNRS, INRIA,
Laboratoire Jacques-Louis Lions, équipe Mamba, F-75005 Paris

³Institut Louis Malardé, Unité des Maladies Infectieuses Emergentes, Papeete 98713, Tahiti, Polynésie française

⁴CIRAD, Umr AMAP, Pretoria, Afrique du Sud

⁵AMAP, Univ Montpellier, CIRAD, CNRS, INRA, IRD, Montpellier, France

⁶Université de Pretoria, Département de mathématiques et mathématiques appliquées,
Pretoria, Afrique du Sud

25 mai 2018

Abstrait

La lutte antivectorielle est essentielle pour limiter la circulation des maladies à transmission vectorielle comme le chikungunya, la dengue ou le zika qui sont devenues des problèmes importants dans le monde. Parmi elles, la Technique de l'Insecte Stérile (SIT) et la Technique de l'Insecte Incompatible (IIT) ont récemment suscité un regain d'intérêt. Dans cet article, nous dérivons et étudions un modèle mathématique minimaliste conçu pour Aedes élimination de la population de moustiques par SIT/IIT. Contrairement à la plupart des modèles précédents, il est en général bistable, permettant à la fois l'élimination de la population et sa survie. Nous considérons différents types de rejets (constants, périodiques ou impulsifs) et montrons les conditions nécessaires pour atteindre l'élimination dans chaque cas. Nous estimons également des durées de traitement suffisantes et minimales. Les paramètres biologiques sont estimés à partir d'une étude de cas d'un Aedes polynésien population, pour laquelle des investigations numériques approfondies illustrent les résultats analytiques. Les applications de ce travail sont doubles : pour aider à identifier certains paramètres clés qui peuvent nécessiter des investigations plus poussées sur le terrain, et pour aider à concevoir des protocoles de libération.

Mots clés: Lutte antivectorielle, élimination, technique des insectes stériles, système dynamique monotone, bassin d'attraction, simulation numérique, Espèces d'Aedes

Classement MSC : 34A12; 34C12; 34C60; 34K45; 92D25

Introduction

La technique des insectes stériles (SIT) est une technique prometteuse qui a été étudiée pour la première fois par E. Knippling et ses collaborateurs et expérimentée avec succès au début des années 50 en éradiquant presque la population de vers à vis en Floride. Depuis lors, la SIT a été appliquée sur différents vecteurs de ravageurs et de maladies, comme les mouches des fruits ou les moustiques (voir [11] pour une présentation générale du SIT et de ses applications). L'ITS classique repose sur des lâchers massifs de mâles stérilisés par rayonnements ionisants. Les mâles stériles lâchés transfèrent leurs spermatozoïdes stériles aux femelles sauvages, ce qui entraîne une réduction progressive de la population cible. Pour la démoustication en particulier, de nouvelles approches issues de la SIT ont vu le jour, à savoir la technique RIDL, et la Wolbachia technique. Wolbachia est une bactérie

qui infecte de nombreux arthropodes, et parmi eux certaines espèces de moustiques dans la nature. Il a été découvert en 1924 [17]. Depuis, des propriétés particulières de ces bactéries ont été dévoilées. L'une de ces propriétés est particulièrement utile pour la lutte antivectorielle : la propriété d'incompatibilité cytoplasmique (CI) [32, 5]. CI peut servir deux stratégies de contrôle différentes :

- Incompatible Insect Technique (IIT) : le sperme des mâles W (mâles infectés par des *Wolbachia*) est altéré de sorte qu'il ne peut plus féconder avec succès des œufs non infectés. Cela peut entraîner une réduction progressive de la population cible. Ainsi, lorsque seuls les mâles W sont relâchés, l'IIT peut être considérée comme une ITS classique. Cela suppose également que des lâchers soient effectués régulièrement jusqu'à l'extinction (lorsque cela est possible) ou jusqu'à ce qu'un certain seuil soit atteint (afin de réduire l'exposition aux piqûres de moustiques et le risque épidémiologique).
- Remplacement de la population : lorsque les mâles et les femelles W sont relâchés dans une population sensible (non infectée), en raison de l'IC, les femelles W produiront généralement plus de descendants que les femelles non infectées. Car *Wolbachia* est hérité de la mère, cela entraînera un remplacement de la population par *Wolbachia* moustiques infectés (de tels remplacements ou invasions ont été observés dans la population naturelle, voir [28] pour l'exemple du californien *Culex pipiens*). Il a été montré que cette technique peut être très intéressante avec *Aedes aegypti*, raccourcir leur durée de vie (voir par exemple [31]), ou plus important encore, réduire leur compétence pour la transmission du virus de la dengue [24]. Cependant, il est également reconnu que *Wolbachia* l'infection peut avoir des coûts de remise en forme, de sorte que l'introggression de *Wolbachia* sur le terrain peut échouer [31].

Sur la base de ces propriétés biologiques, les SIT et IIT classiques (voir [7,9,8,23,18] et ses références) ou le remplacement de la population (voir [13,14,31,19,12,25,34] et leurs références) ont été modélisées et étudiées théoriquement dans un grand nombre d'articles afin d'en déduire des résultats expliquant le succès ou non de ces stratégies à l'aide d'approches de modélisation discrètes, continues ou hybrides, de modèles temporels et spatio-temporels. Récemment, la théorie des systèmes dynamiques monotones a été appliquée efficacement pour étudier le SIT [1] ou remplacement de la population [30,4] systèmes.

Ici, nous dérivons un système dynamique monotone pour modéliser le processus de libération et d'élimination pour SIT/IIT. L'étude analytique de ce modèle est complétée par une paramétrisation détaillée pour décrire les paramètres de la vie réelle, et une étude approfondie des scénarios numériques.

Le plan de la thèse est le suivant. Tout d'abord, nous expliquons dans la section 1 la situation biologique que l'on considère et les questions pratiques auxquelles on veut répondre, à savoir : comment quantifier l'effort de rejet nécessaire pour éliminer une *Aedes* population utilisant SIT/IIT, avec un accent particulier sur le moment et la taille des rejets. Nous justifions également nos choix de modélisation et donnons des intervalles de valeurs déduits des résultats expérimentaux pour la plupart des paramètres biologiques dans le tableau 1. Ensuite, nous effectuons l'analyse théorique d'un modèle de population simple et compartimenté présentant un effet Allee et une population masculine stérilisante constante dans la section 2. Proposition 2.4 donne le comportement asymptotique bistable du système, et introduit la séparatrice cruciale entre l'extinction et la survie de la population. Nous fournissons également des inégalités analytiques sur le temps d'entrée d'une trajectoire dans l'ensemble d'extinction (Proposition 2.6), ce qui est extrêmement utile pour comprendre quels paramètres sont vraiment pertinents et comment ils interagissent. Nous analysons ensuite le modèle comme un système de contrôle, après avoir ajouté un terme de libération. Enfin, rubrique 3 expose des investigations numériques des différents modèles, et les applique à une étude de cas spécifique (un essai pilote sur le terrain dirigé par l'un des auteurs).

En général, tous les résultats mathématiques sont immédiatement interprétés biologiquement. Afin de garder l'exposé aussi lisible que possible, nous rassemblons tous les développements techniques des preuves dans des annexes.

1 Modélisation et estimation des paramètres biologiques

1.1 Contexte de modélisation

Notre effort de modélisation est orienté vers une compréhension de la dynamique temporelle à grande échelle d'une population de moustiques dans le *Aedes* genre exposé à des lâchers artificiels de stérilisation des mâles. Ces mâles peuvent être soit stérilisés par irradiation (approche de la Technique de l'Insecte Stérile), soit simplement issus d'un croisement stérile avec des femelles sauvages en raison, par exemple, de souches incompatibles de *Wolbachia* bactéries (approche Incompatible Insect Technique). Dans les deux techniques (SIT ou IIT), les mâles relâchés sont effectivement stérilisés par les femelles sauvages avec lesquelles ils s'accouplent.

Oufs de moustiques de diverses espèces dans le *Aedes* genre résistent à la dessiccation et peuvent attendre des mois avant d'éclore. En raison de la dépendance à la pluie de la disponibilité des sites de reproduction naturels, cette caractéristique permet de maintenir un important stock d'œufs au repos pendant la saison sèche, ce qui déclenche une explosion de l'abondance des moustiques lorsque la saison des pluies reprend. Pour les populations que nous modélisons ici, les sites de reproduction naturels sont considérés comme prédominants, et il est donc absolument nécessaire que nos modèles prennent en compte le stock d'œufs.

Nous utilisons une approche de biologie systémique pour modéliser la dynamique des populations. Dans le présent travail, nous négligeons les variations saisonnières et supposons que tous les paramètres biologiques sont constants dans le temps.

Notre premier modèle compartimenté présente des populations d'œufs, de larves, de mâles adultes et de femelles adultes (fertiles ou stériles). La plupart des transitions entre les compartiments sont supposées être linéaires. Seuls trois effets non linéaires sont pris en compte.

Premièrement, la taille de la population est limitée en raison d'une capacité de charge environnementale pour les œufs, que nous modélisons par un terme logistique. Deuxièmement, l'effet stérilisant crée deux sous-populations parmi les femelles inséminées. Certaines sont inséminées par des mâles sauvages et deviennent fertiles tandis que les autres sont inséminées par des mâles stérilisants et deviennent stériles. Ainsi l'abondance relative (ou plus précisément le pouvoir d'accouplement relatif) des mâles stérilisants par rapport aux mâles sauvages doit apparaître dans le modèle, et est naturellement un rapport non linéaire. De nombreux autres paramètres peuvent interférer avec le processus d'accouplement pour *Aedes* les moustiques, mais ce processus n'est actuellement pas totalement compris notamment du point de vue masculin [22,27], et on s'en tient ici à la modélisation la plus simple possible. Troisièmement, à la suite de la stérilisation des accouplements, nous nous attendons à ce que la population masculine puisse tomber à un niveau très bas. Nous introduisons un effet Allee qui entre en jeu dans ce régime de quasi-élimination. Cet effet réduit le taux d'insémination à faible densité de mâles, en raison de la difficulté à trouver un partenaire. Il peut également être interprété comme une quantification de la taille de la zone d'accouplement par rapport à la taille totale du domaine, et compense en quelque sorte les limites intrinsèques d'un modèle de champ moyen pour une population petite et dispersée (cf. [dix] et voir Remarque 1.1). En effet, nous modélisons ici la dynamique temporelle en négligeant les variations spatiales et en supposant une répartition spatiale homogène des populations. Dans la nature, la distribution de *Aedes* les moustiques est principalement hétérogène, en fonction de facteurs environnementaux tels que la couverture végétale, la disponibilité de conteneurs de reproduction et d'hôtes sanguins. Le modèle homogène simplifié proposé sera ainsi exposé à d'éventuelles critiques.

1.2 Modèles et leurs propriétés de base

On note par E les œufs, L les larves, M les mâles fertiles, F les femelles fertiles et F_s les femelles stériles (soit inséminées par des mâles stérilisants, soit pas inséminées du tout, faute de mâles). La population masculine stérilisante variant dans le temps est notée M_j . Nous utilisons des lettres grecques μ pour les taux de mortalité, ν pour les taux de transition et notons la fécondité par b (œufs viables pondus par femelle et par unité de

temps) et la capacité de charge des œufs par K Le modèle complet se lit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= bF(1 - \frac{E}{K}) - (\tilde{\nu} + \mu)E, \\
 \frac{dL}{dt} &= \tilde{\nu}E - (\nu_L + \mu_L)L, \\
 \frac{dM}{dt} &= (1-r)\nu_L L - \mu_M M, \\
 \frac{dF}{dt} &= r\nu_L(1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})}) \frac{M}{M + \gamma_{je}M_{je}} - \mu_F F, \\
 \frac{dF_{St}}{dt} &= r\nu_L e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})} + \frac{\gamma_{je}M_{je}}{M + \gamma_{je}M_{je}} (1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})}) - \mu_F F_{St}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dynamique du système complet (1) n'est pas différente de celle du système simplifié à trois populations suivant. Nous ne gardons que des populations d'œufs, de mâles fertiles et stérilisants et de femelles fertiles. La valeur du paramètre d'éclosion $\tilde{\nu}$ doit être mis à jour pour tenir compte de la survie et du temps de développement au stade larvaire.

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= bF(1 - \frac{E}{K}) - (\nu + \mu)E, \\
 \frac{dM}{dt} &= (1-r)\nu E - \mu_M M, \\
 \frac{dF}{dt} &= r\nu E(1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})}) \frac{M}{M + \gamma_{je}M_{je}} - \mu_F F
 \end{aligned} \tag{2}$$

Le lemme simple suivant signifie que (1) et (2) sont bien adaptés à la modélisation de la dynamique des populations puisque toutes les populations, dans ces systèmes, restent positives et bornées.

Lemme 1 Soit M_{je} être une fonction continue non négative par morceaux sur \mathbb{R}_+ . La solution aux problèmes de Cauchy associés à (1), (2) et les données initiales non négatives sont uniques, existent sur \mathbb{R}_+ , est continue et continuellement dérivable par morceaux. Cette solution est également majorée et reste non négative. Il est positif pour tous les temps positifs si $F(0) > 0$ ou alors $E(0) > 0$ (ou aussi $L(0) > 0$) dans le cas de (1) est positif.

De plus, ces systèmes sont monotones au sens de la théorie des systèmes monotones (voir [33]).

Lemme 2 Le système (2) est monotone sur le plateau $E_3 := \{E \leq K\} \subset \mathbb{R}_3 +$ pour la commande induite par $R_3 +$ et la restriction du système (1) aux quatre premières coordonnées (en omettant F_{St} , ce qui ne fait pas apparaître dans n'importe quel autre compartiment) est monotone sur le plateau $E_4 := \{E \leq K\} \subset \mathbb{R}_4 +$ pour la commande induit par $R_4 +$.

En outre, E_3 (respectivement E_4) est invariant vers l'avant pour (2) (respectivement pour la restriction de (1) aux quatre premières coordonnées), et toute trajectoire y pénètre en temps fini.

Preuve. Nous calculons la matrice jacobienne du système (2):

$$J = \begin{pmatrix}
 -b\frac{E}{K} - (\nu + \mu) & bF & 0 & 0 \\
 (1-r)\nu & -(\nu + \mu) & -\mu_M & 0 \\
 r\nu(1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})}) \frac{M}{M + \gamma_{je}M_{je}} & -r\nu e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})} \frac{M}{M + \gamma_{je}M_{je}} & -\mu_F & 0 \\
 0 & \frac{\gamma_{je}M_{je}}{M + \gamma_{je}M_{je}} (1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})}) & 0 & -\mu_F
 \end{pmatrix}.$$

Il a des coefficients extra-diagonaux non négatifs sur E_3 , ce qui prouve que le système est bien monotone sur cet ensemble. De plus, si $E(t_0) > K$ puis laissez $T[t_0] := \{t \geq t_0, \forall t \in [t_0, t), E(t) > K\} \subset \mathbb{R}$

Laisser $J+[t_0] := \sup T[t_0]$. Pour tout $t \in T[t_0]$ nous avons $\dot{E}(t) \leq -(v_E + \mu_E)E(t)$. Donc par intégration nous trouvons que $J+[t_0] \leq t_0 + v \frac{1}{E + \mu_E} \text{Journal}(K/E(t_0)) < +\infty$, ce qui prouve le lemme 2 (la preuve étant similaire pour les créances sur (1)). □

Remarque 1.1 Le terme d'effet Allee $1 - \exp(-\beta M)$ peut également être interprété à la lumière de [dix]. C'est la probabilité qu'une femelle émergente trouve un mâle avec qui s'accoupler dans son voisinage.

L'utilisation d'un modèle "champ moyen" d'équations différentielles ordinaires ici est certainement discutable, car dans le cas d'une extinction de population, les individus peuvent éventuellement être très dispersés et l'hétérogénéité jouerait un rôle très important. Cependant, nous pensons qu'obtenir une analyse mathématique soignée La compréhension du système le plus simple que nous étudions ici est une première étape nécessaire avant de passer à des systèmes plus complexes. Le terme d'Allee compense, en ce qui concerne le comportement qualitatif, ce qui manque structurellement au modèle. Ici, nous sommes en mesure d'effectuer des preuves et des analyses. Cela donne un point de départ pour évaluer ce à quoi s'attendre en tant que résultat des programmes de libération utilisant des mâles stérilisés, selon les modèles.

1.3 Estimation des paramètres à partir de données expérimentales

Symbole	Nom	Intervalle de valeurs	La source
r_{viable}	Proportion d'œufs viables	95 - 99%	Collecte sur le terrain, [21, p. 121]
$N_{des\ œufs}$	d'œufs pondus par ponte	55 - 75	[29]
τ_{gono}	cycle gonotrophique	4 - 7 jours	[20,35,29]
τ_E	œufs	15 - 30 jours	Estimation (à déterminer)
τ_L	Délai entre l'éclosion et l'émergence	8 - 11 jours	Données de laboratoire, [21, p. 104]
r_L	du premier stade larvaire à la pupe	67 - 69%	Données de laboratoire, [21, p. 106]
r	(mâle:femelle)	49%	Données de fabrication (ILM)
τ_M	Demi-vie de l'homme adulte	5 - 9 jours	Données de laboratoire, [21, p. 50]
τ_F	Demi-vie de la femme adulte	15 - 21 jours	Données de laboratoire, [21, p. 51-53]
γ_{je}	Compétitivité d'accouplement des mâles stérilisants	1	Labo [21, p. 51-53], champ [26]

Tableau 1 : Valeurs des paramètres pour certaines populations de *Aedes polynesiensis* en Polynésie française à une température de 27°C

Pour les simulations numériques, nous utilisons des valeurs expérimentales (laboratoire et terrain) des paramètres biologiques dans (1)-(2). Nous considérons spécifiquement une population de *Aedes polynesiensis* en Polynésie française qui a été étudiée en [20,35,29], et plus récemment dans [6,15,16,21].

Les valeurs de la plupart des paramètres sont données dans le tableau 2, et sont déduites des données expérimentales rassemblées dans le tableau 1. Certaines données proviennent de résultats inédits obtenus à l'Institut Louis Malardé lors de l'élevage de *Aedes polynesiensis* pour un programme pilote IIT. Ils sont étiquetés comme "Données de production (ILM)". Notez que nous ne donnons pas de valeurs pour β et \tilde{v}_E car ils sont très difficiles à estimer. Les expériences en cours de l'un des auteurs peuvent aider à les rapprocher à l'avenir pour cette *Aedes polynesiensis* population. Enfin, lorsqu'elle existe, nous utilisons les connaissances sur la taille de la population (mâle et femelle) accordées par les expériences de marquage-lâcher-recapture pour ajuster la capacité de charge du milieu. K pour la population et la saison.

Symbole	Nom	Formule	Intervalle de valeurs
b	Fécondité effective	$\frac{r_{viable} N_{des\text{ œufs}}}{\tau_{gono}}$	7.46 – 14.85
μ_L	Taux de mortalité des larves	$\frac{\tau_l}{\tau_{gonal}(r)}$	0,034 – 0,05
ν_L	Taux de transition de la larve à l'adulte	$\frac{\tau_l}{\tau_L}$	0,09 - 0,125
$\frac{\nu_E}{\tilde{\nu}_E}$	Coefficient larvaire pour le taux d'éclosion effectif	$\frac{\nu_L + \mu_L}{\tau_L}$	0,64 - 0,79
μ_E	Taux de mortalité des œufs	$\frac{\tau_E}{\tau_{gonal}(2)}$	0,023 – 0,046
μ_M	Taux de mortalité des hommes adultes	$\frac{\tau_M}{\tau_{gonal}(2)}$	0,077 – 0,139
μ_F	Taux de mortalité des femmes adultes	$\frac{\tau_F}{\tau_{gonal}(2)}$	0,033 – 0,046

Tableau 2 : Conversion du paramètre biologique du tableau 1 en paramètres mathématiques pour les systèmes (1) et (2)

2 Etude théorique du modèle simplifié

Pour une utilisation ultérieure, nous introduisons les relations usuelles \ll , \leq sur \mathbb{R}^3 (où $\mathbb{R} \geq 1$) comme coordonnées-sages commandes partielles sur \mathbb{R}^3 induite par le cône \mathbb{R}^3_+ . Plus précisément, pour $x, y \in \mathbb{R}^3$,

- $X \leq y$ si et seulement si pour tout $1 \leq j \leq 3$, $x_j \leq y_j$,
- $x < y$ si et seulement si $X \leq y$ et $X \neq y$,
- $X \ll y$ si et seulement si pour tout $1 \leq j \leq 3$, $x_j < y_j$.

2.1 Densité masculine incompatible constante

Nous étudions d'abord le système (2) avec une densité masculine incompatible constante $M_{je}(t) \equiv M_{je}$.

On introduit les trois scalaires

$$N := \frac{b_E}{\mu_F(\nu_E + \mu_E)}, \lambda := \frac{\mu_M}{(1-r)\nu_E K}, \psi := \frac{\lambda}{\beta} \quad (3)$$

et définir la fonction $F: \mathbb{R}^3_+ \rightarrow \mathbb{R}$, avec les deux paramètres N et ψ :

$$f(x, y) := x(1 - \psi X)(1 - e^{-(x+y)}) - \frac{1}{N}(x + y). \quad (4)$$

Les deux nombres agrégés, N et ψ contiennent essentiellement toutes les informations sur le système (2): N est le nombre de descendants de base classique, ψ est le rapport entre la taille de la population mâle typique à laquelle l'effet Allee entre en jeu et la taille de la population mâle à l'équilibre sauvage, telle que prescrite par la capacité de charge des œufs.

Le système ODE (2) a des propriétés dynamiques simples car il est monotone et on peut compter ses états stationnaires et même connaître leur stabilité locale. Laisser $M_{je} \geq 0$. Il est simple de montrer que le système (2) admet toujours un état stationnaire trivial $(0, 0, 0)$ et éventuellement un (au moins) non trivial régime permanent $(E^*, M^*, F^*) \in \mathbb{R}^3_+$ solution de

$$E = \frac{b}{\nu_E + \mu_E} F \left(1 - \frac{E}{K}\right), \quad E = \frac{\mu_M}{(1-r)\nu_E} M, \quad F = \frac{rE(1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je} M_{je})})}{\mu_F} \left(\frac{M}{M + \gamma_{je} M_{je}}\right).$$

L'utilisation des deux premières équations dans la troisième donne

$$\frac{\mu_F(\nu_E + \mu_E)}{b r_E} (M + \gamma_{je} M_{je}) = M \left(1 - \frac{\mu_M}{(1-r)\nu_E K} M \right) (1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je} M_{je})}),$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} -E^* &= K \lambda M^*, \\ F^* &= \frac{K(\nu_E + \mu_E)}{b} \frac{\lambda M^*}{1 - \lambda M^*}, \\ f(\beta M^*, \gamma_{je} \beta M_{je}) &= 0. \end{aligned}$$

Donc pour une valeur donnée $M_{je} \geq 0$, le nombre d'états stationnaires de (2) est égal au nombre de solutions positives M^* pour $f(\beta M^*, \gamma_{je} \beta M_{je}) = 0$, plus 1. L'état stationnaire trivial $(0, 0, 0)$ est également localement asymptotiquement stable (LAS). Le lemme suivant nous donne des informations supplémentaires sur le(s) régime(s) stationnaire(s) positif(s) :

Lemme 3. Soit $\theta_0 \in (0, 1)$ être la solution unique pour $1 - \theta_0 = -4\psi \pm \log(\theta_0)$, et

$$M_{je}^{critique} := \frac{1}{\gamma_{je} \beta} \max_{\theta \in [0, 1]} \left(-\log(\theta) - \frac{1}{2\psi} \left(1 - 1 + \sqrt{1 + \frac{4\psi \log(\theta)}{N}} \right) \right).$$

Si $M_{je}^{critique} > 0$ alors (2) possède :

- 0 régime permanent positif si $M_{je} > M_{je}^{critique}$,
- 2 états stationnaires positifs si $M_{je} \in [0, M_{je}^{critique})$,
- 1 régime permanent positif si $M_{je} = M_{je}^{critique}$.

En outre, E^* est instable et E^+ est localement asymptotiquement stable. Si $M_{je}^{critique} < 0$ alors (2) n'a pas régime permanent positif, et si $M_{je}^{critique} = 0$ alors il existe un unique état stationnaire positif. En particulier, si $N \leq 1$ alors $M_{je}^{critique} \leq 0$.

Au contraire, si $N \geq 4\psi$ alors il n'y a pas d'état stationnaire positif.

Preuve. Donnons un rapide aperçu de la suite de la preuve, qui est détaillée en annexe UN, pages 23. Nous allons étudier en détail les solutions (x, y) pour $f(x, y) = 0$. Premièrement, nous prouvons que $x < 1/\psi$. Ensuite, nous vérifions que pour tout $x > 0$, $x \mapsto f(x, y)$ est soit concave, soit convexe-concave. De plus, il est clair que $f(0, y) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) = -\infty$, de sorte que pour tout $y > 0$, on en déduit qu'il y a soit 0, 1 ou 2 nombres réels $x > 0$ tels que $f(x, y) = 0$.

Ensuite, nous introduisons $\xi = 4\psi/N$. En effet, pour déterminer $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $f(x, y) = 0$ on peut introduire $\theta = e^{-(x+y)}$ puis vérifier facilement que $y = h_{\pm}(\theta)$, où

$$h_{\pm}(\theta) = -\log(\theta) - \frac{1}{2\psi} \pm \frac{1}{2\psi} \sqrt{1 + \xi \frac{\log(\theta)}{1 - \theta}}. \quad (5)$$

Soit $\theta_0(\xi)$ être l'unique solution dans $(0, 1)$ pour $1 - \theta_0(\xi) = -\xi \log(\theta_0(\xi))$, et

$$\alpha_{critique}(\xi, N) := \max_{\theta \in [\theta_0(\xi), 1]} -\log(\theta) - \frac{1}{2\psi} \left(1 - \sqrt{1 + \xi \frac{\log(\theta)}{1 - \theta}} \right). \quad (6)$$

Recueillir les faits précédents et étudier la fonction h_{\pm} (voir l'annexe A.2, pages 24), on peut prouver que le point suivant du lemme 3 tient au seuil $M_{je}^{critique} = \frac{N}{4\psi\beta} \alpha_{critique}(\xi, N)$.

Nous remarquons que si $N \leq 1$ alors on vérifie facilement que $M_{critique,je} < 0$, en utilisant le fait que si $\alpha \in (0, 1)$ alors $\sqrt{1-\alpha} \leq (1-\alpha)/2$. Si $\theta \in (\theta_0, 1)$ alors $4\psi \log(\theta) \leq 1$, et donc

$$-\log(\theta) - \frac{1}{4\psi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\psi \log(\theta)}{N-1-\theta}} \right) \leq -\log(\theta) \left(1 - \frac{1}{N} \right) - \frac{1}{4\psi} < 0.$$

Dans la dernière partie de la preuve, nous montrons que 0 est toujours localement stable puis traiter séparément les cas $M_{je}=0$ et $M_{je}>0$, montrant que, lorsqu'ils existent, le plus grand état stationnaire positif est localement stable tandis que le plus petit est instable. □

Remarque 2.1 Dans le lemme 3, la condition d'avoir au moins un équilibre positif, $N > 4\psi$, est très intéressant et prend tout son sens lorsqu'il est réécrit comme $\frac{N}{\lambda} > \frac{4}{\beta}$. En effet $\frac{N}{\lambda}$ peut être vu comme le descendance mâle théorique à la prochaine génération, à partir de l'équilibre sauvage. Si ce montant est suffisamment important (supérieur à des fois constants la taille de la population à laquelle l'effet Allee entre en jeu), la population peut alors se maintenir. Dans tous les cas, si cette condition n'est pas satisfaite, alors la population s'effondre. Pour la population à entretenir : soit la condition physique est bonne et donc N est très grand, ou la probabilité qu'une femelle s'accouple est élevée et donc $1/\beta$ est petite. Cependant, quelles que soient les valeurs prises par N et β , si, pour une raison quelconque, la population masculine à l'équilibre décroît, la population peut être contrôlée et éventuellement s'effondrer.

Remarque 2.2 Si β n'est pas trop petit, alors l'état stationnaire "sauvage" est approximativement donné par $M_*(M_{je}=0) \approx \frac{1}{\lambda(1-\frac{1}{N})}$ et le niveau de stérilisation critique est d'environ $M_{critique,je} \approx \tilde{y} = \frac{N-1}{4\lambda y_{je} - N}$ (voir la définition en annexe UN, on sait notamment que $M_{critique,je} \leq \tilde{y}$). En conséquence, l'objectif d'une densité constante minimale de mâles stérilisants par rapport aux mâles sauvages afin d'obtenir une extinction inconditionnelle (c'est-à-dire de faire $(0, 0, 0)$ globalement asymptotiquement stable, voir Proposition 2.3, pages 9) est bien approximée par la formule simple

$$\rho^* := \frac{M_{critique,je}}{M_*(M_{je}=0)} \approx \frac{N-1}{4y_{je}}.$$

Avec les valeurs des tableaux 1 et 2, pour $y_{je}=1$ (cela signifie que les mâles introduits sont aussi compétitifs que les sauvages pour s'accoupler avec des femelles sauvages), on trouve

$$\rho^* \in \left(\frac{7.46 \cdot 0.46 \cdot v_E}{4 \cdot 0.046 \cdot (v_E + 0.046)} - 0.25, \frac{14.85 \cdot 0.48 \cdot v_E}{4 \cdot 0.033 \cdot (v_E + 0.023)} - 0.25 \right)$$

Par exemple, si $v_E=0.01$ alors cet intervalle vaut $(3.5, 22, 7)$, si $v_E=0.05$ alors cet intervalle est $(10.6, 51.7)$ et si $v_E=0.1$ alors cet intervalle vaut $(14.1, 61.4)$. Comme v_E va à $+\infty$, l'intervalle va à $(20.7, 75.7)$. Cet exemple est conforme au protocole SIT standard qui indique de libérer au moins dix fois plus de mâles stériles que de mâles sauvages, rappelant qu'il s'agit ici d'une espèce hautement reproductrice (avec les valeurs ci-dessus, le nombre de reproduction de base estimé le plus bas est 14.9, obtenu pour $v_E=0.01$).

La dynamique asymptotique se déduit facilement de la caractérisation des états stationnaires et du comportement local du système (lemme 3), à cause de la monotonie (voir [33]).

Proposition 2.3 Si (2) n'a que l'état stationnaire (0, 0, 0) alors il est globalement asymptotiquement stable.

S'il existe deux autres états stationnaires $E_- < E_+$ alors presque toutes les orbites convergent vers E_+ ou alors (0, 0, 0). Laisser $K_+ := [(0, 0, 0), E_+]$. L'ensemble compact K_+ est globalement attractif et positivement invariant. Le bassin d'attraction de (0, 0, 0) contient $[0, E_-]$ et le bassin d'attraction de E_+ contient (E_-, ∞) .

Maintenant que nous avons établi que le système est typiquement bistable, l'objet principal à étudier est la séparatrice entre les deux bassins d'attraction. C'est le but de la proposition suivante.

Proposition 2.4 Présumer $M_{critique} > 0$ et $M_{je} \in [0, M_{critique}]$.

Alors il existe une séparatrice $\Sigma \subset \mathbb{R}_+^3$, qui est une sous-variété de dimension 2, telle que pour tout $X \in \Sigma$, $X_6 \leq 0$ et $X_6 \geq 0$, et pour tout $X \in \Sigma$, $X_0 > X_1$ implique que $X(t)$ converge vers E_+ , et $X_0 < X_1$ implique que $X(t)$ converge vers 0. En particulier, $\{E_- \in \Sigma\}$.

Soit $\Sigma_+ := \{X \in \mathbb{R}_+^3, \exists X \in \Sigma, X > X \text{ et } \Sigma_- := \{X \in \mathbb{R}_+^3, \exists X \in \Sigma, X < X\}$. Puis $R_3 = \Sigma_- \cup \Sigma \cup \Sigma_+$, Σ_+ est le bassin d'attraction de E_+ et Σ_- est le bassin d'attraction de 0. De plus, il existe $E_M, F_M > 0$ tel que

$$\Sigma_- \subset \{X \in \mathbb{R}_+^3, X_1 \leq E_M, X_3 \leq F_M\}$$

Remarque 2.5 Pour atteindre l'extinction, le dernier point de la proposition 2.4 stipule que les populations d'œufs et de femelles fertiles doivent se tenir simultanément en dessous de seuils donnés. Cette évidence reçoit ici une quantification mathématique. Avec des mots simples : peu importe à quel point la population féminine fertile est faible F_a chuté, s'il reste au moins E_M œufs, la population sauvage se rétablira.

Preuve. [Proposition 2.4] Nous énonçons un fait préliminaire : Pour tout $v_0 \in \{v \in \mathbb{R}_+^3, \forall j \in \{1, 2, 3\}, v_j > 0\}$, $\sum_{j \in \{1, 2, 3\}} v_j = 1$: S_2 , il existe un unique $p_0(v_0)$ telle que la solution de (2) avec des données initiales p_0 converge pour 0 si $p < p_0(v_0)$ et à E_+ si $p > p_0(v_0)$.

Ce fait vient de la stricte monotonie du système, et de l'estimation $p_0(v_0) \leq \frac{v_0}{\max_{j \in \{1, 2, 3\}} v_j} < +\infty$, combiné avec proposition 2.3.

Alors nous affirmons que $\Sigma = \{p_0(v_0)v_0, v_0 \in S_2\}$. L'inclusion directe est un corollaire de la précédente fait. La réciproque découle du fait que Σ_\pm , étant les bassins d'attraction des points d'attraction, sont des ensembles ouverts.

Le reste de la preuve consiste en un calcul simple montrant que si F_0 ou alors E_0 est assez grand alors pour certains $t > 0$ on a $(E, M, F)(t) > E_-$. Dans les détails, on peut prouver que si F_0 est assez grand pour tout E_0, M_0 et $q > 0$, on peut avoir $E(s) \geq (1-q)K$ pour $s \in (t_0(q, E_0, F_0), t_1(q, E_0, F_0))$, où t_0 diminue en F_0 et t_1 augmente dans F_0 et illimité comme F_0 va à $+\infty$. Puis si $E > (1-q)K$ pour q assez petit sur un intervalle de temps assez grand, on en déduit $M(t) > (1-q)^2(1-r)_{VE}$ pour certains $t > 0$. Au moment de choisir q assez petit et F_0 assez grand on obtient enfin $(E, M, F)(t) > E_-$. Le schéma est similaire lors de la prise E_0 assez large. \square

A ce stade, on sait qu'en partant de l'équilibre positif, et en supposant que le population de mâles stériles M_{je} est supérieur à $M_{critique}$, la solution atteindra le bassin d'attraction de l'équilibre trivial en un temps fini, $\tau(M_{je})$. Nous obtenons maintenant des estimations quantitatives sur la durée de ce régime transitoire. Rigoureusement, nous définissons

$$\tau(M_{je}) := \inf_{t \geq 0, (E, M, F)(t) \in \Sigma_- (M_{je} = 0), \text{ où } (E, M, F)(0) = E_+ (M_{je} = 0) \text{ et } (E, M, F) \text{ satisfait (2). (7)}}$$

Nous obtenons des bornes supérieures et inférieures simples pour $\tau(M_{je})$ en fonction de divers paramètres :

Proposition 2.6 Laisser $M_{je} > M_{critique}$, et $Z = Z(\psi)$ être le nombre réel unique dans $(0, 1)$ tel que

$$e^{-Z} = \frac{\psi}{1 + \psi - \psi Z},$$

et $Z_0 := 1 + \psi - \psi Z$ Puis

$$\tau(M_{je}) \geq \frac{1}{\mu_F} \left(1 + \frac{N_2(1 - \psi Z)^3}{\psi Z Z_0} - \frac{N(1 - \psi Z)}{\psi Z Z_0} \right). \quad (8)$$

Soit $\sigma = \text{sgn}(v_E + \mu_E - \mu_F)$, $\sigma_E := \mu_M / (v_E + \mu_E)$ et $\sigma_F := \mu_M / \mu_F$. Si $\sigma := \frac{M_+}{M_+ + M_{je}} < 1/N$, laisser

$$g(\varepsilon) := 1 + \frac{4N\sigma\sigma_E\varepsilon}{(\sigma_F - \sigma_E)^2}.$$

Supposons que $\sigma_F, \sigma_E > 1$,

$$g(\varepsilon)\sigma(\sigma_F - \sigma_E) < \max((2N-1)\sigma_F + \sigma_E, (2\sigma_E - 1)\sigma_F, (\sigma_F - 1)(\sigma_E - 1)) > \varepsilon N$$

Puis

$$\tau(M_{je}) \leq \frac{(2\sigma_E)}{\mu_F \sigma_F + \sigma_E - g(\varepsilon)\sigma(\sigma_F - \sigma_E)} + \frac{(N-1)((N-1)\sigma_F + 1 - \varepsilon N)}{\psi((\sigma_F - 1)(\sigma_E - 1) - \varepsilon N)} + \frac{\sigma_E g(\varepsilon)\sigma(\sigma_F - \sigma_E) + (2N-1)\sigma_F + \sigma_E}{2\sigma_E \sigma_F - (\sigma_E + \sigma_F) + \sigma(\sigma_F - \sigma_E)g(\varepsilon)g(\varepsilon)\sigma(\sigma_F - \sigma_E)}. \quad (9)$$

Preuve. La preuve repose sur le calcul explicite de sous- et super-solutions, détaillé dans l'appendice B. □

Remarque 2.7 La dépendance en ψ de la proposition 2.6 l'estimation supérieure de τ est approximativement égale à $\frac{1}{\min(v_E + \mu_E, \mu_F)}$. Un ordre de grandeur de ψ (le rapport entre la taille de la population sauvage et la

La taille de la population d'Allee) correspond donc généralement à la durée de vie maximale d'une femelle adulte et d'un œuf en termes de durée de libération nécessaire pour obtenir l'extinction.

Remarque 2.8 A ce stade, on obtient un majorant analytique uniquement dans le cas des rejets massifs (pas de rejet petit). Une borne supérieure plus raffinée pourrait théoriquement être obtenue, voir la dérivation en annexe B, en particulier le lemme 12.

2.2 Ajouter un champ au moyen de releases

Dans un modèle un peu plus réaliste, le niveau de stérilisation de la population masculine devrait varier dans le temps, en fonction des sorties $7 \rightarrow \text{Utah}$ et sur un taux de mortalité fixe μ_{je} . Ce modèle lit

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= bF(1 - \frac{E}{K}) - (v_E + \mu_E)E, \\ \frac{dM}{dt} &= (1-r)v_E E - \mu_M M, \\ \frac{dM_{je}}{dt} &= u(t) - \mu M_{je} \\ \frac{dF}{dt} &= r_E E(1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je} M_{je})}) \frac{M}{M + \gamma_{je} M_{je}} - \mu_F F. \end{aligned} \quad (\text{dix})$$

Dans (dix), le nombre de mâles stérilisants relâchés entre les instants t_1 et $t_2 > t_1$ est simplement égal à $\int_{t_1}^{t_2} u(t) dt$.

Premièrement, si la libération est constante, dire $U_{\text{tah}} \equiv t_{u0}$, alors $M_{je}(t) = e^{-\mu_{je}t} M_{0je} + \mu_{je} t_{u0} (1 - e^{-\mu_{je}t})$. Le cas spécial $M_{0je} = \mu_{je} t_{u0}$ mène au système (2), avec $M_{je} \equiv M_{0je}$. Pour le général $M_{0je} \geq 0$, nous remarquons que $M_{je}(t)$ converge vers t_{u0} et M_{je} converge vers t_{u0} .

Proposition 2.9. Préluder $U_{\text{tah}} \equiv t_{u0}$.

Si $t_{u0} > \mu_{je} M_{je}^{\text{critique}}$ (défini dans le lemme 3) alors 0 est globalement asymptotiquement stable.

Si $t_{u0} < \mu_{je} M_{je}^{\text{critique}}$, alors il existe des ouverts $\Sigma^-(t_{u0}), \Sigma^+(t_{u0}) \subset \mathbb{R}_+$, respectivement les bassins de attraction de 0 et E^+ (défini pour (2) avec $M_{je} = t_{u0}$) séparés par un ensemble $\Sigma(t_{u0})$ qui apprécie la mêmes propriétés que celles de $\Sigma(0)$, répertorié dans la proposition 2.4.

(Nous ne traitons pas le cas $t_{u0} = \mu_{je} M_{je}^{\text{critique}}$).

Preuve. Puisque le système (dix) est monotone par rapport au contrôle u (avec motif de signe $(-, -, -, +)$), on peut utiliser le lemme 3 et proposition 2.4 avec une sous- et une super-solution pour obtenir ce résultat de manière simple. \square

Nous nous limiterons désormais à des contrôles périodiques (éventuellement tronqués), ce qui signifie que nous supposons qu'il existe $N_r \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ (le nombre de périodes de libération), une période $T > 0$ et une fonction $u_0: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t - nT) & \text{si } nT \leq t < (n+1)T \text{ pour certains } N_r > n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (11)$$

Nous utilisons la notation $u \equiv [T, t_{u0}, N_r]$ pour décrire ce contrôle u .

Comme précédemment, on peut calculer dans le cas (11)

$$\begin{aligned} M_{je}(t) &= e^{-\mu_{je}t} M_{0je} + \int_0^t U_{\text{tah}}(t') e^{-\mu_{je}(t-t')} dt' \\ &= e^{-\mu_{je}t} M_{0je} + \frac{e^{-\mu_{je}t} - 1}{e^{-\mu_{je}T} - 1} \int_0^T u_0(t') e^{\mu_{je}t'} dt' + \int_{T(L_t \wedge N_r)}^t U_{\text{tah}}(t') e^{-\mu_{je}(t-t')} dt' \end{aligned}$$

(Ici pour un $B \in \mathbb{Z}$, on laisse $\bigwedge_{n \in B} = \min(n \in B)$).

Si $N_r = +\infty$, pour tout $t_{u0} \geq 0$ il existe une unique solution périodique M_{je} , défini uniquement par sa valeur initiale

$$M_{0je}^{\text{par}} = \frac{1}{1 - e^{-\mu_{je}T}} \int_0^T u_0(t') e^{\mu_{je}t'} dt',$$

et que nous désignons par $M_{je}^{\text{par}}[t_{u0}]$.

Lemme 4. Solutions à (dix) avec $u \equiv [T, t_{u0}, N_r]$ sont tels que M_{je} converge vers $M_{je}^{\text{par}}[t_{u0}]$, et le compartiments convergent vers une solution de

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= bF(1 - \frac{E}{K}) - (v_E + \mu_E)E, \\ \frac{dM}{dt} &= (1-r)v_E E - \mu_M M, \\ \frac{dF}{dt} &= rE E - (1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je} M_{je}^{\text{par}}[t_{u0}])}) \frac{M}{M + \gamma_{je} M_{je}^{\text{par}}[t_{u0}]} - \mu_F F \end{aligned} \quad (12)$$

La convergence a lieu dans le sens où la L^∞ norme sur $(t, +\infty)$ de la différence converge vers 0 comme t va à $+\infty$.

Preuve. Convergence de M_{je} découle directement de la formule précédente. Alors, comme pour la proposition 2.9 la monotonie du système implique la convergence. \square

Laisser $\overline{M_{je}}[t_0] := \max M_{par_{je}}[t_0]$ et $\underline{M_{je}}[t_0] := \min M_{par_{je}}[t_0]$.

Proposition 2.10 Si $\overline{M_{je}}[t_0] > M_{critique_{je}}$ alors 0 est globalement asymptotiquement stable pour (12).

Au contraire, si $\underline{M_{je}}[t_0] < M_{critique_{je}}$ alors (12) a (comme au moins une orbite périodique positive). Dans ce cas le bassin d'attraction de 0 contient l'intervalle $[0, E - (M_{je} = \underline{M_{je}}[t_0])]$, et toute donnée initiale ci-dessus $E + (M_{je} = \overline{M_{je}}[t_0])$ converge vers $\overline{X_{par}}[t_0]$.

Preuve. Système (12) est un système dynamique périodique monotone. Il admet un unique non négatif Solution $X = (E, M, F)$. En fait, on considère le modèle de population stérile constante

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= b F_m \left(1 - \frac{E_m}{K} \right) - (v_E + \mu_E) E_m, \\ \frac{dM}{dt} &= (1 - r) v_E E_m - \mu_M M_m, \\ \frac{dF}{dt} &= r \frac{M_m}{M_m + \underline{M_{je}}[t_0]} \left(1 - e^{-\beta(M_m + \gamma_{je} \underline{M_{je}}[t_0]) E_m} \right) - \mu_F F_m. \end{aligned} \quad (13)$$

tel que, en utilisant un principe de comparaison, la solution $X_m = (E_m, M_m, F_m)$ vérifie $X_m \geq X$ pour tout $t > 0$. Ainsi si X_m converge vers 0, de même X . Le comportement du système (13) découle des résultats obtenus dans la section précédente. Une condition suffisante pour avoir 0 globalement asymptotiquement stable en (12) est donc donné par $\overline{M_{par}} > M_{critique_{je}}$.

Le reste de l'affirmation se voit mieux au niveau du système dynamique discret défini par (12). Les orbites périodiques sont en correspondance biunivoque avec les points fixes du monotone mappage $\Phi[t_0] : \mathbb{R}_{3+} \rightarrow \mathbb{R}_{3+}$ défini comme l'application Poincaré de (12) (mappage d'une donnée initiale sur la solution à l'heure $t = T$). Maintenant si $X_* = (E_*, M_*, F_*)$ est le plus grand (c'est à dire stable) état stable de (2) au niveau $\underline{M_{je}} = \underline{M_{je}}[t_0] < M_{critique_{je}}$, alors pour tout $(E, M, F) \gg (E_*, M_*, F_*)$ et $\underline{M_{je}} \leq M_{je}$, en écrivant le membre de droite comme $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ on a

$$\Psi_1(E_*, M, F, \underline{M_{je}}) > 0,$$

$$\Psi_2(E, M_*, F, \underline{M_{je}}) > 0,$$

$$\Psi_3(E, M, F_*, \underline{M_{je}}) > 0.$$

En d'autres termes, le $(\text{intervalle } X_*, +\infty)$ est un ensemble positivement invariant. Donc, $\Phi[t_0](X_*) > X_*$. Ainsi la suite $\Phi[t_0]^k(X_*)$ est croissante et bornée \mathbb{R}_{3+} : il doit converger vers certains $\underline{X_*} > X_*$. Le même raisonnement (avec inégalités inversées) s'applique avec la séquence commençant à l'équilibre stable associé à $\underline{M_{je}} = \underline{M_{je}}[t_0]$: elle doit décroître, et donc converger vers $\overline{X_*} > X_*$.

Par notre démonstration, nous avons montré que l'intervalle ouvert $(\underline{X_*}, \overline{X_*})$ appartient à la bassin d'attraction de $\overline{X_{par}}$, et on peut aussi affirmer que $(E - (M_{je} = \underline{M_{je}}[t_0]), E + (M_{je} = \overline{M_{je}}[t_0]))$ appartient au bassin d'attraction de $\overline{X_{par}}$, alors que comme d'habitude $[0, E - (M_{je} = \underline{M_{je}}[t_0])]$ est dans le bassin d'attraction de 0. \square

Par une application directe des résultats précédents

Lemme 5 Si $M_{je}[t_0] > M_{critique}$, puis le contrôle $u \equiv [T, t_0, n]$ (avec $n \in \mathbb{Z}^+$) conduit à l'extinction (c'est-à-dire la solution avec les données initiales $E + \Lambda \rightarrow 0$ et $M \rightarrow +\infty$) dès que

$$n \geq \frac{\tau(M_{je}[t_0])}{J}. \quad (14)$$

Un cas particulier de (dix)-(12) s'obtient en choisissant $t_0 = t_0^* = 0 = \Lambda \cdot \tau[0, \varphi]$ pour certains $\Lambda > 0$ et laisser φ aller à 0. Alors il existe une unique limite telle que $\varphi \rightarrow 0$, qui est donné par le système différentiel impulsif suivant dérivé de (dix):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= bF(1 - \frac{E}{K}) - (v_E + \mu_E)E, \\ \frac{dM}{dt} &= (1-r)v_E E - \mu_M M, \\ \frac{dM_{je}}{dt} &= -\mu_{je} M_{je} \\ M_{je}(nT) &= M_{je}(nT) + \Lambda \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ avec } 0 \leq n < N_r, \\ \frac{dF}{dt} &= rEE(1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})}) \frac{M}{M + \gamma_{je}M_{je}} - \mu_F F. \end{aligned} \quad (15)$$

Dans (15), M_{je} converge vers la solution périodique

$$M_{je}^{lutin}(t) := \lim_{\varphi \rightarrow 0} M_{je}^{par}[t_0] = \frac{\Lambda e^{-\mu_{je}(t - \lfloor t \rfloor T)}}{1 - e^{-\mu_{je}T}}$$

On peut calculer explicitement $M_{je}^{lutin} := \Lambda e^{-\mu_{je}t}$ et $M_{je}^{lutin} := \frac{\Lambda}{1 - e^{-\mu_{je}T}}$, respectivement le minimum et le maximum de M_{lutin} . Nous définissons également le système monotone périodique suivant comme un cas particulier de (12):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= bF(1 - \frac{E}{K}) - (v_E + \mu_E)E, \\ \frac{dM}{dt} &= (1-r)v_E E - \mu_M M, \\ \frac{dF}{dt} &= rEE(1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je}^{lutin})}) \frac{M}{M + \gamma_{je}M_{je}^{lutin}} - \mu_F F. \end{aligned} \quad (16)$$

Le côté droit du système (15) est localement continue de Lipschitz sur \mathbb{R}_3 . Ainsi, en utilisant un classique théorème d'existence (Théorème 1.1, p. 3 dans [3]), il existe $\epsilon > 0$ et une solution unique définie depuis $(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}_3$. En utilisant des arguments standard, il est simple de montrer que l'orthant positif \mathbb{R}_3^+ est une région invariante pour le système (15).

Nous estimons la taille (minimale) des rejets Λ et la périodicité T , telle que la population sauvage va à l'extinction.

Proposition 2.11 Laisser $S := \frac{(1 - rE)(1 - \frac{1}{N})}{4\mu_M \gamma_{je}} KSi$

$$J \leq \frac{1}{\mu_{je}} \left(1 + \frac{\Lambda}{S} \right) \quad (17)$$

alors 0 est globalement asymptotiquement stable dans (16). État (17) est équivalent à $\Lambda \geq S e^{\mu_{je} - 1}$.

Preuve. On sait (voir annexe UN et Remarque 2.2) que $M_{critique_je} \leq \frac{N}{4\lambda y_{je}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$. D'où la suite est une condition suffisante pour la stabilité asymptotique globale de 0 :

$$\underline{M}_{je}^{lutin} \geq \frac{N}{4\lambda y_{je}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 = \frac{(1-r) v_E N}{4\mu y_{je}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 K$$

C'est

$$\frac{\Lambda e^{-\mu_{je}\tau}}{1 - e^{-\mu_{je}\tau}} \geq \frac{(1-r) v_E N}{4\mu y_{je}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 K,$$

et le résultat est prouvé. \square

Remarque 2.12 Dans la continuité de la remarque 2.2, on note que la proposition 2.11 donne une estimation très simple du ratio cible de mâles stérilisants par lâcher sur la population initiale de mâles sauvages en fonction de la période entre les lâchers impulsifs sous la forme

$$\rho(T) := \frac{\Lambda}{M^*(M_{je}=0)} \approx e^{-(\mu_{je}-1)T} \frac{N-1}{4y_{je}}.$$

On peut spécifier le lemme 5 pour les impulsions et combinez-le avec Proposition 2.6 pour obtenir une condition suffisante d'extinction dans les cas impulsifs :

Proposition 2.13 Le contrôle impulsif d'amplitude $\Lambda > 0$ et période $T > 0$ satisfaisant $\Lambda \geq S e^{\mu_{je}-1}$ conduit à l'extinction dans n impulsions si

$$n \geq \frac{\tau(\underline{M}_{lutin_je})}{J}, \text{ où } \underline{M}_{lutin_je} = \frac{\Lambda e^{-\mu_{je}}}{1 - e^{-\mu_{je}}}. \quad (18)$$

3 Etude numérique

3.1 Méthode numérique et paramétrisation

Afin de préserver la positivité des solutions et le principe de comparaison, nous utilisons un schéma de différences finies non standard (NSFD) pour intégrer les systèmes différentiels (voir par exemple [2] pour un aperçu).

Pour le système (dix), ça lit

$$\begin{aligned} \frac{E_{n+1} - E_n}{\Phi(\Delta t)} &= b F_{nS} \left(1 - \frac{E_{n+1}}{K}\right) - (v_E + \mu_E) E_n, \\ \frac{M_{n+1} - M_n}{\Phi(\Delta t)} &= (1-r) v_E E_n - \mu_M M_n, \\ \frac{M_{n+1je} - M_{nje}}{\Phi(\Delta t)} &= -\mu_{je} M_{nje} + t_{un}, \\ \frac{F_{n+1} - F_n}{\Phi(\Delta t)} &= r \frac{M_{n+1}}{E_{n+1} + M_{n+1}} \left(\frac{E_{n+1}}{(M_{n+1} + M_n) E_n} - \mu_F F_n \right), \end{aligned} \quad (19)$$

où Δt est le paramètre de discrétisation du temps, $\Phi(\Delta t) = 1 - e^{-\Delta t Q}$, $Q = \max\{\mu_M, \mu_F, v_E + \mu_E, \mu_{je}\}$ et $X_n(t)$ (respectivement t_{un}) est l'approximation de $X(n\Delta t)$ (respectivement $ONU(\Delta t)$) pour $n \in \mathbb{N}$

Paramètre	β	b	r	μ_E	v_E	μ_F	μ_M	γ_{je}	μ_{je}	Δt
Valeur	10^{-4}	10	0,49	0,03	0,001	0,25	0,04	0,1		

Tableau 3 : Valeurs numériques fixées pour les simulations.

Nous fixons la valeur de certains paramètres en utilisant les valeurs des tables 1 et 2 (Voir le tableau 3). Ensuite, afin d'obtenir des résultats pertinents pour une île de 74 ha avec une population masculine estimée à environ 69 Ha⁻¹, on laisse v_E et β varier, et fixe K_{tel} que

$$M_{\frac{1}{2}} = 69 \cdot 74 = 5106,$$

C'est

$$K = \frac{5106 \cdot \mu_M}{(1-r)v_E \left(1 - \frac{1}{N(1-e^{-\beta \cdot 5106})}\right)}.$$

Rappelons que pour le choix du tableau 3, pages 15, on a

$$N = 117,5 \frac{v_E}{v_E + 0,03}.$$

Remarque 3.1 Ainsi selon les valeurs prises par v_E dans le tableau 3, pages 15, on a les bornes suivantes pour N :

$$29 \leq N \leq 105.$$

L'autre valeur agrégée d'intérêt, $\psi = \frac{\mu_M}{(1-r)v_E K} = \frac{\mu_M}{N(1-e^{-\beta \cdot 5106})} \cdot \frac{1}{NM + \beta}$, qui va de $1,4 \cdot 10^{-4}$ pour 2, environ.

Tous les calculs ont été effectués à l'aide du langage de programmation Python (version 3.6.2). L'opération la plus coûteuse était l'approximation séparatrice, qui devait être effectuée une fois pour chaque ensemble de valeurs de paramètres. Nous calculons d'abord les points proches de la séparatrice (voir détails dans la section 3.3), à partir d'un maillage triangulaire régulier avec 40 points de chaque côté, puis nous réduisons les points si des paires comparables sont apparues. Parmi ceux-ci (au plus 861) points dispersés on construit récursivement un arbre de comparaison en sélectionnant le point P qui minimise la distance à tous les autres points, et répartit les points restants en six sous-arbres, correspondant à chaque orthant affine dont le sommet est P . Chaque arbre a été sauvegardé à l'aide de `cornichon` module, et chargé si nécessaire. Cela a été fait pour réduire le nombre d'opérations pour vérifier si un point est en dessous de la séparatrice, car cela doit être fait plusieurs fois le long de chaque trajectoire calculée. En effet, en utilisant le fait que deux points sur la séparatrice ne peuvent pas être liés par l'ordre partiel, il suffit d'étudier 3 des 6 orthants restants pour déterminer si le point candidat est en dessous de l'un des points dispersés ou non. Pour toute entrée donnée de mâles stérilisants lâchés, le calcul d'une trajectoire s'est terminé soit lorsque le nombre maximal d'itérations a été atteint (ici, nous avons fixé cette valeur à $3 \cdot 10^5$) ou lorsqu'il a été trouvé sous la séparatrice, à l'aide de l'arbre de comparaison. Temps CPU d'essai (sur un ordinateur portable avec Intel®

`RCore` MT CPU i5-2410M @ processeur 2,30 GHz x 4) pour toutes ces opérations sont indiquées dans le tableau 4.

Opération	Points	Réduction	Construction d'arbres	Sauver	Charge	Trajectoire complète	Trajectoire arrêtée
Temps CPU (s)	267	12	6.8	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	17	0,25

Tableau 4 : Temps CPU pour les simulations numériques

3.2 Équilibres et ratio d'effort

Nous calculons d'abord la position des équilibres pour une plage de valeurs de β et v_E . Cela nous permet de calculer le rapport d'effort ρ^* , défini dans la Remarque 2.2 comme le rapport entre la population mâle sauvage à l'état d'équilibre $M_*(M_{je}=0)$ et la valeur constante critique de la stérilisation des mâles $M_{critique}$ nécessaire pour faire 0 globalement asymptotiquement stable. Les valeurs sont indiquées dans le tableau 5.

v_E	0,005	0,010	0,020	0,030	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250	
ρ^*	16	30	48	60	76	93	101	106	108	

Tableau 5 : Rapport d'effort $\rho^* = M_{critique} / M_*(M_{je}=0)$ pour différentes valeurs de v_E . Pour cette gamme de paramètres, ρ^* est pratiquement indépendant de $\beta \in [dix^{-4}, 1]$.

On note que ρ^* ne dépend pratiquement que de v_E , car l'Allee (avec le paramètre β) ne s'applique pas aux niveaux de population élevés. En fait, le rapport (et donc l'effort de contrôle) augmente avec l'augmentation des valeurs de v_E , qui favorisent le maintien de la population sauvage (plus la valeur de v_E , plus la valeur de Net plus la période dans le compartiment à œufs est courte).

3.3 Calcul du bassin d'attraction de 0 pour (2)

On part d'un maillage triangulaire régulier du triangle $\{(E, M, F) \in \mathbb{R}_+^3, E + M + F = 1\}$, avec 40 points de chaque côté. Données $\eta > 0$, pour chaque sommet V de ce maillage on calcule $\lambda \in (0, +\infty)$ tel que $\lambda V \in \Sigma$ et $(1 + \eta)\lambda V \in \Sigma_+$. Les points λV (qui sont numériquement à distance au plus η de la séparatrice Σ) sont ensuite tracés.

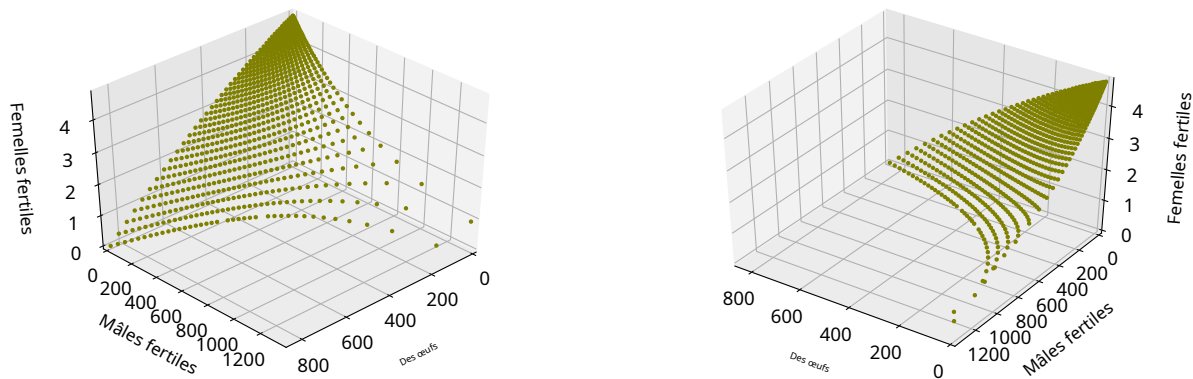


Figure 1 : Deux points de vue de points dispersés situés autour de la séparatrice ($\epsilon = dix^{-2}$) pour $v_E = 0,1$ et $\beta = dix^{-4}$. Dans ce cas, 5 femelles ou 900 œufs suffisent à empêcher l'élimination de la population.

Chiffre 1 est généralement le type de figure que nous pouvons dessiner pour chaque ensemble de paramètres. En fonction des valeurs des paramètres, le bassin d'attraction de 0 peut être minuscule ou non. Sa forme souligne le rôle important des œufs et même de l'abondance des mâles dans le maintien de la population sauvage. En effet, même si presque toutes les femelles ont disparu, le contrôle doit se poursuivre afin de réduire encore le stock d'œufs avant d'atteindre éventuellement la séparatrice.

3.4 Rejets constants et temps d'entrée dans le bassin

Pour le même jeu de paramètres que précédemment, on calcule le temps d'entrée dans le bassin de 0.

Premièrement, nous utilisons la proposition 2.6 entrer dans le tableau 6 une sous-estimation du temps d'entrée, quel que soit l'effort de relâchement, ces temps d'entrée représentent le temps minimal sous lequel le contrôle SIT ne peut aboutir (en fait, cette sous-estimation correspond à la situation où $M_{je} = +\infty$, c'est un effort de libération infini).

$v_e \backslash \beta$	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0
0,005	63	151	204	253	303	323	445	571	697	824	258	351	448	545	642
0,010	93	180	232	281	331	361	475	592	708	825	286	374	464	553	643
0,020	118	203	256	304	354	381	485	590	695	800	301	381	462	544	625
0,030	130	215	267	315	365	391	488	587	685	783	307	383	461	538	615
0,050	141	226	278	327	377	440	530	621	713	804	332	404	477	550	623
0,100	152	236	289	337	387	N/AN	N/AN	N/AN	N/AN	N/AN	N/AN	N/AN	N/AN	N/AN	N/AN
0,150	156	240	293	341	391	AN/AN	AN/AN	AN/AN	AN/AN	AN/AN	AN/AN	AN/AN	AN/AN	AN/AN	AN/AN
0,200	158	242	295	343	393	AN/AN	A				AN/AN	A			
0,250	160	244	296	344	395										

Tableau 6 : A gauche : sous-estimation du temps d'entrée dans le bassin de 0 de la formule analytique (8).

Milieu et droite : surestimation du temps d'entrée dans le bassin de 0 de la formule (9) avec

$$\varepsilon = \frac{M_{je}}{M_{je} + \varphi M_{critique}}, \text{ le cas échéant, pour } \varphi = 8 \text{ (milieu) et } \varphi = 4 \text{ (à droite).}$$

Ensuite, nous calculons numériquement le temps d'entrée pour une gamme d'efforts de relâchement. calculs ont été effectués pour $M_{je} = \varphi M_{critique}$ avec $\varphi \in \{1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 4, 8\}$. indiqué dans le tableau 7 pour $\varphi = 1.2$, $\varphi = 2$ et $\varphi = 8$.

En détails,
Les résultats sont

$v_e \backslash \beta$	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0
0,005	168	286	363	435	504	148	262	338	409	478	128	237	311	380	449
0,010	200	305	376	441	505	180	283	352	417	480	160	258	326	391	454
0,020	219	313	377	437	495	199	292	355	415	473	180	270	333	392	450
0,030	225	314	375	434	492	207	295	355	413	471	188	274	334	392	450
0,050	228	314	373	431	488	212	297	355	413	470	194	278	336	394	452
0,100	231	314	372	430	488	215	298	356	414	472	200	282	340	398	456
0,150	232	315	373	431	489	217	300	358	416	474	202	285	343	401	459
0,200	233	316	375	433	491	219	302	360	418	476	205	287	345	403	462
0,250	234	318	376	434	493	220	303	362	420	478	206	289	347	406	464

Tableau 7 : Temps d'entrée dans le bassin de 0 (en jours) pour différentes valeurs de (v_e, β) , avec $M_{je} = 1.2 M_{critique}$ (la gauche), $M_{je} = 2 M_{critique}$ (milieu) et $M_{je} = 8 M_{critique}$ (à droite).

On remarque que les temps d'entrée correspondant au plus grand rapport d'effort sont du même ordre de grandeur que la sous-estimation analytique de la formule (8).

Une autre sortie intéressante de Table 7 est que le rapport d'effort de déclenchement n'est pas si important en termes de durée de la commande : en fonction des valeurs prises par v_e et β , le ratio le plus faible a besoin de 4 à 7 semaines de plus pour atteindre le bassin, que le ratio le plus élevé. Contrairement à ce à quoi on aurait pu s'attendre, il n'y a pas de relation linéaire. Cela peut s'expliquer par le fait qu'une femelle ne s'accouple qu'une seule fois. Ainsi, si les mâles sont en abondance, toutes les femelles se sont accouplées, et alors de nombreux mâles relâchés deviennent inutiles en ce qui concerne la stérilisation. Bien sûr, cela doit être atténué en tenant compte du fait que notre modèle suppose implicitement une distribution homogène, alors qu'en réalité, des paramètres environnementaux (comme la végétation, le climat, etc.) doivent être pris en compte [8]. Enfin et surtout,

$v_E \backslash \beta$	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0
0,005	399	680	863	1034	1199	587	1036	1338	1619	1893	2024	3749	4920	6027	7115
0,010	854	1302	1603	1880	2154	1283	2009	2499	2962	3416	4548	7343	9257	11112	12912
0,020	513	2156	2603	3022	3423	0,030	2296	3367	4092	4782	5452	8317	12451	15331	18040
0,030	2726	3253	3761	4264	0,050	2482	2989	4260	5132	5976	6815	10862	15871	19319	22691
0,050	3421	4059	4686	5315	0,100	3100	3837	5381	6434	7483	8529	14058	20188	24395	28588
0,100	5000	5777	6553	0,150	3383	4581	4817	6675	7975	9268	10563	17891	25266	30457	35640
0,150	6278	7122	0,200	3545	4806	5694	5274	7268	8688	10095	11502	19651	27618	33285	38913
0,200	7461	0,250	3649	4956	5869	6779	7638	9117	10588	12060	13571	20757	29073	34979	40865
0,250															
0,300															
0,350															
0,400															
0,450															
0,500															
0,550															
0,600															
0,650															
0,700															
0,750															
0,800															
0,850															
0,900															
0,950															
1,000															

Tableau 8 : Ratio d'effort total pour entrer dans le bassin de 0 pour différentes valeurs de (v_E, β) , avec $M_{je}=1.2M_{critique}$ (la gauche), $M_{je}=2M_{critique}$ (milieu) et $M_{je}=8M_{critique}$ (à droite). Le rapport d'effort total dans ce cas est défini comme M_{je}/M_+ , multiplié par μ_{je} fois le temps d'entrée, et correspond au nombre de mâles qui devrait être libéré à un niveau constant, divisé par la population masculine initiale.

Table 8, pages 18, souligne clairement qu'un ratio d'effort important, c'est-à-dire $\varphi = 8$, signifie l'utilisation (puis la production) d'un grand nombre de mâles stériles avec un gain de temps très faible par rapport au cas $\varphi = 2$. Par exemple avec $v_E = 0,05$ et $\beta = \text{dix-2}$, le rapport d'effort total pour $\varphi = 8$ est d'environ 6 fois plus grand que pour $\varphi = 2$ (24395 contre 4059), avec un gain de temps de 37 jours, soit environ un dixième de la durée totale du protocole (336 jours contre 373).

En d'autres termes, lâcher un grand nombre de mâles stériles n'est pas forcément une bonne stratégie, du point de vue économique, mais aussi du point de vue du contrôle.

Dans la sous-section suivante, nous considérons un scénario plus réaliste, où les mâles stériles sont libérés périodiquement et instantanément (système (16)).

3.5 Versions périodiques

Dans le cas de déclenchements périodiques par impulsions $u = [T, \Lambda\delta_0, \infty]$, pour un couple donné (v_E, β) nous calculons la première fois $t > 0$ tel que $(E, M, F)(t)$ est en dessous d'un point de la séparatrice précédemment calculée.

Nous avons effectué les calculs avec $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, choisir

$$\Lambda = K \frac{\varphi(1-r)v_EN}{4\mu M} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{2(e^{\mu_{je}} - 1)}$$

pour $\varphi \in \{1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 4, 8\}$.

Pour toutes les combinaisons de (v_E, β) , nous indiquons dans le tableau 9 le maximum et le minimum (par rapport à (T, φ)) rapport d'effort total p_{tot} défini comme le nombre de moustiques relâchés au moment où le bassin de 0 est atteint, divisé par la population masculine initiale qui est :

$$p_{tot} = n_{tot}/M^* + , n_{tot} = \min\{ \lfloor t/T \rfloor, (E, M, F)(t) \in \Sigma^- \}.$$

Ces valeurs extrêmes sont obtenues pour une période J et avec une heure d'entrée t qui sont indiqués entre parenthèses. Nous indiquons également dans le tableau dix les temps d'entrée maximaux et minimaux, obtenus pour une période J et un rapport d'effort p_{tot} qui sont indiqués entre parenthèses. Notez que de manière cohérente, le temps d'entrée minimal est toujours obtenu pour $\varphi = 8$ et correspond au rapport d'effort maximal. Le temps d'entrée maximal est obtenu pour $T = 1$ (période minimale testée) et le temps d'entrée minimal est obtenu pour $T = \text{dix}$ (période maximale testée). Cependant, le rapport d'effort minimal est parfois obtenu avec $T = 2$.

Comparer des tableaux 8 et 9 montre qu'en général, un contrôle périodique atteint l'objectif d'amener la population dans Σ^- à un coût moindre que le contrôle constant (en termes de nombre total de moustiques lâchés, comptés par rapport à la population sauvage).

$v_e \backslash \beta$	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0
0,005	282 (2 287)	384 (2 491)	448 (1 608)	502 (1 682)	554 (1 752)	1095 (10, 135)	1838 (10, 248)	2450 (10, 323)	2986 (10 393)	3522 (10, 462)
0,010	547 (1 344)	698 (2 497)	796 (1 602)	884 (1 669)	969 (2 805)	2317 (10, 168)	3575 (10 268)	4536 (10, 337)	5499 (10, 402)	6323 (10 466)
0,020	900 (1 357)	1112 (1 519)	1253 (1 585)	1386 (1 647)	1504 (2 771)	4139 (10, 188)	6015 (10, 280)	7573 (10 343)	8909 (10, 402)	10246 (10, 460)
0,030	1125 (3 363)	1371 (1 510)	1538 (1 572)	1696 (2 693)	1839 (2 752)	5448 (10, 196)	7829 (10, 283)	9506 (10 343)	11183 (10, 402)	12581 (10, 460)
0,050	1383 (2 379)	1669 (1 496)	1875 (1 556)	2066 (2 672)	2238 (2 730)	7155 (10, 201)	9818 (10, 286)	11921 (10 344)	14025 (10, 402)	15778 (10, 460)
0,100	1655 (2 370)	1997 (1 480)	2238 (1 539)	2458 (2 650)	2678 (2 708)	8794 (10, 206)	12114 (10 289)	14709 (10, 347)	17305 (10, 405)	19900 (10 463)
0,150	1772 (1 388)	2134 (1 473)	2394 (2 583)	2632 (2 641)	2871 (2 699)	9522 (10, 209)	13603 (10, 291)	15948 (10, 350)	18762 (10, 408)	21576 (10, 466)
0,200	1834 (1 384)	2213 (1 470)	2482 (2 578)	2731 (2 636)	2979 (1 738)	10431 (10, 211)	14201 (10, 293)	17138 (10, 352)	19586 (10, 410)	22524 (10 468)
0,250	1873 (1 382)	2263 (1 468)	2531 (2 575)	2787 (2 633)	3043 (2 692)	10709 (10, 212)	14584 (10, 295)	17601 (10, 353)	20618 (10, 412)	23133 (10, 470)

Tableau 9 : Rapport d'effort total minimal (à gauche) et maximal (à droite) pour entrer dans le bassin de0 (en jours) pour différentes valeurs de (v_e , β), le minimum et le maximum étant pris par rapport à (T , ϕ), avec une période et une heure d'entrée indiquées entre parenthèses. Le ratio d'effort total est défini comme le nombre total de moustiques mâles relâchés divisé par la population initiale (sauvage) de moustiques mâles.

$v_e \backslash \beta$	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0
0,005	135 (10, 1095)	248 (10, 1838)	323 (10, 2450)	393 (10, 2986)	462 (10, 3522)	456 (1 317)	667 (1 420)	752 (1 474)	826 (1 521)	896 (1 565)
0,010	168 (10, 2317)	268 (10, 3575)	337 (10, 4536)	402 (10, 5499)	466 (10, 6323)	528 (1 629)	661 (1 749)	735 (1 833)	803 (1 909)	868 (1 982)
0,020	188 (10, 4139)	280 (10, 6015)	343 (10, 7573)	402 (10, 8909)	460 (10, 10246)	534 (1 1012)	642 (1 1179)	708 (1, 1300)	771 (1 1414)	830 (1 1522)
0,030	196 (10, 5448)	283 (10, 7829)	343 (10, 9506)	402 (10, 11183)	460 (10, 12581)	527 (1, 1246)	627 (1, 1445)	690 (1 1 588)	749 (1 1724)	807 (1 1860)
0,050	201 (10, 7155)	286 (10, 9818)	344 (10, 11921)	402 (10, 14025)	460 (10, 15778)	514 (1, 1513)	605 (1 1749)	666 (1, 1925)	724 (1 2090)	782 (1 2257)
0,100	206 (10, 8794)	289 (10, 12114)	347 (10, 14709)	405 (10, 17305)	463 (10, 19900)	494 (1 1787)	581 (1 2072)	640 (1 2279)	698 (1 2485)	755 (1 2692)
0,150	209 (10, 9522)	291 (10, 13603)	350 (10, 15948)	408 (10, 18762)	466 (10, 21576)	483 (1er 1896)	569 (1, 2200)	628 (1 2428)	686 (1 2652)	744 (1 2877)
0,200	211 (10, 10431)	293 (10, 14201)	352 (10, 17138)	410 (10, 19586)	468 (10, 22524)	477 (1, 1953)	563 (1 2272)	622 (1, 2510)	680 (1 2745)	738 (1 2979)
0,250	212 (10, 10709)	295 (10, 14584)	353 (10, 17601)	412 (10, 20618)	470 (10, 23133)	473 (1, 1988)	559 (1 2317)	618 (1 2562)	676 (1 2802)	734 (1 3043)

Tableau 10 : Temps d'entrée minimal (à gauche) et maximal (à droite) dans le bassin de0 (en jours) pour différentes valeurs de (v_e , β), le minimum et le maximum étant pris par rapport à (T , ϕ), avec une période et un ratio d'effort total indiqués entre parenthèses.

3.6 Étude de cas : Onetahi motu

$v_e \backslash \beta$	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	$v_e \backslash \beta$	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0	$v_e \backslash \beta$	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0
0,001	39	200	295	376	453	0,001	34	181	272	352	430	0,001	30	171	261	341	418
0,002	142	310	402	480	555	0,002	111	262	350	428	503	0,002	97	241	327	404	480
0,005	877	1094	1178	1252	1323	0,005	350	471	554	627	697	0,005	260	381	462	535	605
0,008	N/AN/AN/AN/A	0,010	N/AN/AN/	0,008	167	109	1168	1238	1305	0,010	N/	0,008	443	541	618	687	754
AN/AN/A	0,015	N/AN/AN/AN/A	AN/AN/AN/AN/A	0,015	N/AN/AN/AN/AN/	AN/AN/AN/AN/A	0,015	N/AN/AN/AN/AN/	0,010	676	728	802	870	935			
						A						0,015	N/AN/AN/AN/AN/A				

Tableau 11 : Temps d'entrée dans le bassin de0 (en jours) pour différentes valeurs de (v_e , β) avec constante hebdomadaire ($T=7$ jours) sorties à $p=4$ (la gauche), $p=6$ (centre) ou $p=8$ (à droite).

Nous paramétrons maintenant explicitement notre modèle au cas du motu Onetahi dans l'atoll de Tetiaroa (Polynésie française), où chaque semaine ($T=7$ jours) les sorties ont été réalisées sur une année. Population masculine a été estimée à $69 \cdot 74 \approx 5000$ individus, et le ratio d'effort initial $p := \Lambda/M^*$ a été estimé à 8.

Pour $p \in \{4, 6, 8\}$, les heures d'entrée (en jours) sont indiquées dans le tableau 11 et ratio féminin total final dans le tableau 12. Cette dernière quantité est importante à des fins pratiques pour aider à répondre à la question : quand est-il temps d'arrêter les rejets ? Les comptages de pièges au cours de l'expérience doivent être comparés aux comptages de pièges initiaux (avant les lâchers), et grosso modo, le processus peut être arrêté une fois que le rapport entre les comptages passe en dessous des valeurs du tableau 12. Fait intéressant, β détermine l'ordre de grandeur de ce rapport final.

Table 11 nous fournit des informations intéressantes sur le temps d'entrée en fonction du taux de transition v_e et le paramètre d'accouplement β . Si le rapport d'effort p n'est pas assez grand, le traitement SIT peut échouer, et même s'il est assez grand (disons $p=8$) le temps d'atteindre le bassin de0 peut être très grand.

Dans l'espace d'état dimensionnel (E , M , F) nous dessinons la trajectoire complète pour la même valeur d'échantillon

$v_E \backslash \beta$	dix-4	dix-3	dix-2	dix-1	dix0
0,0010	0,943252	0,147678	0,020134	0,002495	0,000283
0,0050	0,567382	0,071552	0,009875	0,001247	0,000141
0,0100	0,205116	0,031070	0,004439	0,000568	0,000069
0,0200	0,133889	0,021388	0,003170	0,000425	0,000052
0,0400	0,111803	0,018284	0,002779	0,000380	0,000047
AN/AN	AN/AN/A				

Tableau 12 : Ratio féminin total final $\frac{F_{\infty}}{F_0}$ au moment où la trajectoire entre dans le bassin de β pour différentes valeurs de (v_E, β) avec constante hebdomadaire ($T = 7$ jours) sorties à $p = 8$.

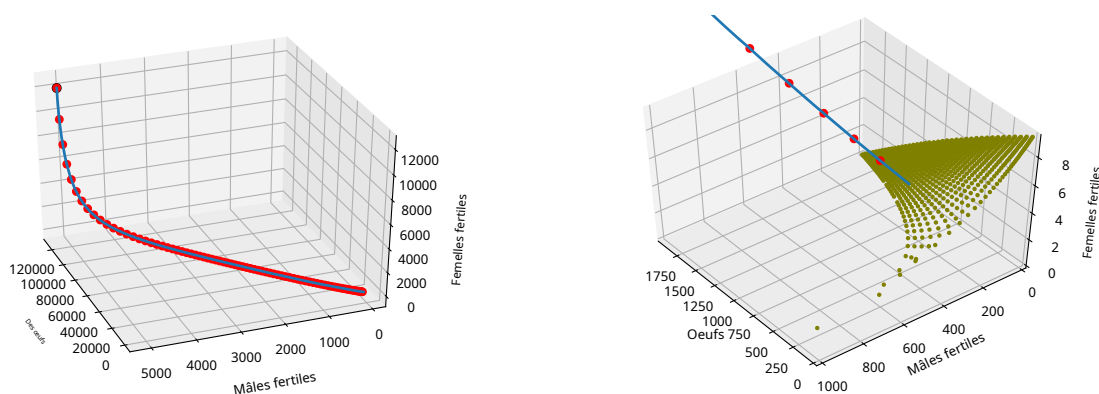
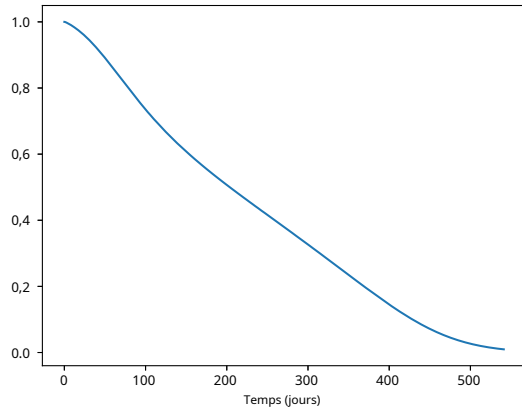


Figure 2 : Trajectoire $7 \rightarrow (E(t), M(t), F(t))$ pour $v_E = 0,008$ et $\beta = \text{dix-3}$ (gauche) et un zoom dans le dernier 30 jours de traitement affichant également la séparatrice sous forme de points (à droite).

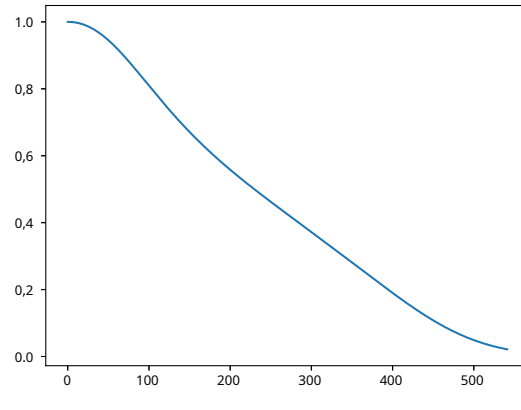
($v_E = 0,008$, $\beta = 10^{-3}$, $p = 8$) accompagné d'un zoom sur la dernière 30 jours de traitement montrant aussi la séparatrice entre les bassins de E et 0 sous forme de points sur la figure 2. Selon le tableau 11, pages 19, l'heure d'entrée est 541, ce qui justifie que le contrôle dure plus d'un an. Notre système étant monotone, la trajectoire est monotone décroissante (voir Figure 2 (à gauche), page 20). Cependant, le taux de diminution est relativement important au début du traitement, puis devient faible et presque constant. Nous montrons également la dynamique temporelle de quatre grandeurs normalisées pertinentes, pour la même valeur d'échantillon ($v_E = 0,008$, $\beta = 10^{-3}$, $p = 8$) en chiffres 3.

4. Conclusion

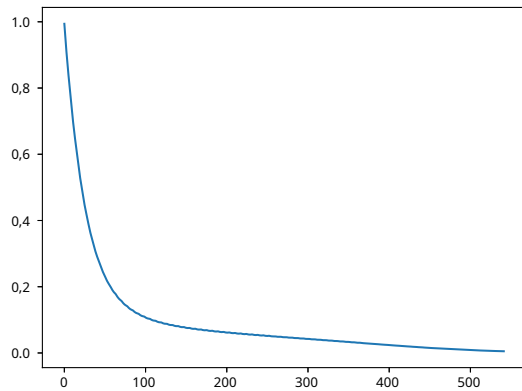
Dans cet article, nous avons dérivé un modèle minimaliste pour contrôler la population de moustiques par la technique de l'insecte stérile, en utilisant soit l'irradiation, soit l'incompatibilité cytoplasmique de Wolbachia libérant des mâles stérilisants. Nous nous concentrons particulièrement sur les chances d'effondrement de la population sauvage, à condition que la zone sélectionnée permette l'élimination. Ainsi, contrairement aux modèles SIT et IIT précédents, l'équilibre trivial, 0, est toujours localement asymptotiquement stable, au moins. Nous considérons différents types de rejets (constants, continus ou périodiques et instantanés) et montrons les conditions nécessaires pour atteindre l'élimination, dans chaque cas. Nous avons également dérivé le temps minimal sous lequel l'élimination ne peut pas se produire, (c'est à dire l'entrée dans le bassin d'attraction de 0 est impossible), quel que soit l'effort de contrôle. Évidemment, les connaissances sur les paramètres des moustiques sont très importantes, notamment la durée de la ponte



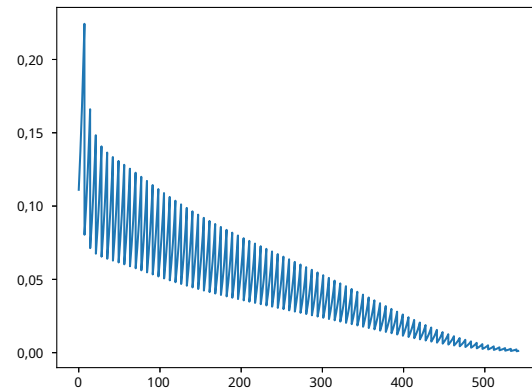
(a) Nombre relatif d'œufs $F_e(t)$



(b) Nombre total relatif de femelles $F_+(t) + F_{st,+}(t)$



(c) Proportion de femelles fertiles $\frac{F(t)}{F_+(t)}$



(d) Ratio hommes fertiles $\frac{M(t)}{M_e(t)}$

Figure 3 : Dynamique temporelle de différents rapports pour $v_E=0,008$ et $\beta = \text{dix}-3$.

compartiment, $\frac{1}{\mu_E + v_E}$ et le paramètre d'accouplement, β . Étonnamment, les entomologistes des moustiques ont n'ont pas encore vraiment focalisé leurs expérimentations sur β ou la probabilité de rencontre/ accouplement entre un mâle et une femelle selon la taille des domaines. Notre modèle illustre l'importance de ce paramètre (et d'autres) dans la durée du contrôle SIT. En général, les entomologistes SIT recommandent de relâcher au minimum dix fois plus de mâles stériles que de mâles sauvages (estimés) : cela peut être nécessaire si la compétitivité du mâle stérile est faible par rapport aux sauvages (cela peut être le cas avec l'irradiation SIT approcher). Notre approche peut aider à normaliser et à quantifier ce ratio estimé.

Enfin, nous nous concentrons sur un scénario de cas réel, le motu Onetahi, où un *Wolbachia* expérience a été menée par Bossin et ses collaborateurs, chassant le moustique local, *Aedes polynesiensis*, à la quasi-élimination. Nos résultats préliminaires montrent un bon accord avec l'observation sur le terrain (principalement le piégeage).

Nos résultats montrent également l'importance des œufs dans la survie de la population sauvage. Si le stock d'œufs est suffisamment important et en fonction des paramètres météorologiques, la population sauvage peut réapparaître après l'arrêt du contrôle. C'est pourquoi, d'après notre modèle et nos résultats numériques, il est

recommandé de poursuivre le lâcher de mâles stérilisants même après que les femelles de moustiques sauvages ne sont plus collectées dans les pièges de surveillance.

Enfin, nous espérons que nos résultats théoriques seront utiles pour améliorer les futures expériences SIT et en particulier pour prendre en compte la dynamique à long terme des œufs.

Remerciements : Cette étude s'inscrivait dans le cadre du « Projet de faisabilité Phase 2 SIT contre *Aedes albopictus* à La Réunion », financé conjointement par le Conseil Régional de La Réunion et le Fonds Européen de Développement Régional (FEDER) dans le cadre du Programme Opérationnel 2014-2020. YD a été (partiellement) soutenu par la subvention DST/NRF SARCHI Chair M3B2 82770. YD et MS reconnaissent également les soutiens partiels du STIC AmSud "MOSTICAW Project", Process No. 99999.007551/2015- 00.

UN Preuve du lemme 3

A.1 Étude de F

On étudie d'abord la fonction F définie dans (4). Pour toute $x \geq 0$, si $x \geq 1 - \psi$ alors $f(x, y) < -1 - \psi(x + y)$ donc dans particulier $f(x, y) < 0$. Par conséquent, tous les états stationnaires doivent satisfaire $\beta M^* < 1 - \psi$. De même,

$$y \geq 0, 0 \leq x < \frac{1}{\psi} \Rightarrow (1 - \psi x)(1 - e^{-(x+y)}) < 1.$$

Donc pour tout $x < 1 - \psi$ nous trouvons $f(x, y) < (1 - \psi x)^{x-1} - \psi y$. En conséquence, si $N \leq 1$ alors $f(x, y) < 0$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, et système (2) n'a pas d'état stationnaire positif. A partir de maintenant on suppose que $N > 1$.

On calcule aussi directement $F(0, y) = -1 - \psi y < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) = -\infty$.

Remarque A.1 Pour tous $x \in (0, 1/\psi)$, nous remarquons que

$$f(x, y) < Q_y(x) = -\psi x^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)x - \frac{y}{N}.$$

Le discriminant du polynôme du second ordre Q_y est

$$\Delta_y = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 - \frac{4y\psi}{N}.$$

Soit $\tilde{y} := \frac{N\psi}{4} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$. Si $y \geq \tilde{y}$ alors $\Delta_y \leq 0$. Par conséquent $f < 0$. A ce stade on sait que si $\beta y \in M_{je} \geq \tilde{y}$ alors il n'y a pas d'état stationnaire positif.

La quantité \tilde{y} est utilisée dans Remarque 2.2 pour obtenir une approximation au premier ordre de la ration de libération cible.

Nous calculons maintenant les dérivées de F :

$$\begin{aligned} \partial_x f &= (1 - 2\psi x)(1 - e^{-(x+y)}) - \frac{1}{N} + x(1 - \psi x)e^{-(x+y)}, \\ \partial_y f &= -2\psi(1 - e^{-(x+y)}) + e^{-(x+y)} - \frac{1}{N}, \\ \partial_{xx} f &= e^{-(x+y)} - 6\psi - 3 + (6\psi + 1)x - \psi x^2 =: e^{-(x+y)} Q_3(x) \\ \partial_{yy} f &= x(1 - \psi x)e^{-(x+y)} - \frac{1}{N}, \\ \partial_{xy} f &= -x(1 - \psi x)e^{-(x+y)} < 0 \text{ pour } x \in (0, 1/\psi). \end{aligned}$$

Évidemment, $\partial_x f(x, y) < 0$ si $x \geq 1 - \psi$ et $\partial_x F(0, y) = 1 - e^{-y} - \frac{1}{N}$, qui est positif si et seulement si $y > -\log(1 - \frac{1}{N}) = \log(1 + \frac{1}{N-1})$.

Pour connaître les variations de ∂_3 on étudie le polynôme du second ordre

$$Q_3(x) = -6\psi - 3 + x(6\psi + 1) - \psi x^2.$$

Son discriminant est

$$\Delta_3 = (6\psi + 1)^2 - 4\psi(6\psi + 3) = 1 + 12\psi^2,$$

qui est positif. Donc ∂_3 est négatif-positif-négatif. Plus précisément, Q_3 est positif sur

$$(w_-, w_+) := \left(\frac{6\psi + 1 - \sqrt{1 + 12\psi^2}}{2\psi}, \frac{6\psi + 1 + \sqrt{1 + 12\psi^2}}{2\psi} \right).$$

Pour aller plus loin, nous devons connaître les signes de $\partial^2_{xx} f(w_+, y)$ et $\partial^2_{yy} f(0, y)$. Nous écrivons

$$\partial^2_{xx} f(x, y) > 0 \Leftrightarrow e^{-(x+y)^2} + 2\psi - (4\psi + 1)x + \psi x^2 > 2\psi$$

Ainsi $\partial^2_{xx} f(0, y) > 0$ si et seulement si $y < \log(1 + \frac{1}{\psi})$. De la même manière, $\partial^2_{xx} f(w_+, y) < 0$ si et seulement si

$$y > \log(1 + \frac{1}{\psi} - (2 + \frac{1}{2\psi})w_+ + \frac{1}{2}w_+^2).$$

C'est toujours vrai :

Lemme 6 Pour tout $\psi > 0$,

$$\log(1 + \frac{1}{\psi} - (2 + \frac{1}{2\psi})w_+ + \frac{1}{2}w_+^2) < 0.$$

Preuve. Pour le prouver, nous introduisons $y = 1 + 2\psi$ de sorte qu'il nous reste

$$\log(7 + 3y + y^2 + (4 + y)\sqrt{3 + y^2} - (3 + y + \sqrt{3 + y^2})) < 0.$$

Pour vérifier cela, nous introduisons

$$g(x) := \log(7 + 3x + x^2 + (4 + x)\sqrt{3 + x^2} - (3 + x + \sqrt{3 + x^2})),$$

et nous voulons prouver que g est négatif. On calcule que le signe de $g'(x)$ est égal à celui de

$$-(4 + x)(3 + x^2) - 2x\sqrt{3 + x^2} - (8 + 2x + x^2) < 0.$$

Il reste à vérifier que $g(0) = \log(7 + 4\sqrt{3}) - \sqrt{3} < 0$, ce qui est vrai puisque

$$e^{3 + \sqrt{3}} > e^{4 + 2\sqrt{3}} > 7 + 8 > 7 + 4\sqrt{3},$$

où nous avons utilisée $2e^1 < 3 < 2$.

Ainsi on obtient que $X \mapsto \partial^2_{xx} f(x, y)$ est soit positif-négatif (si $y < \log(1 + \frac{1}{\psi})$) ou toujours négatif (autrement). □

La conclusion de tous ces calculs est que dans les deux cas (f est soit convexe-concave, soit simplement concave), pour tout y , $f(0, y) < 0$, $f(+\infty, y) = -\infty$ de sorte que dans l'ensemble il y a soit 0, 1 ou 2 solutions à $f(x, y) = 0$, dépendant uniquement du signe du maximum de $X \mapsto f(x, y)$.

A.2 Etude des fonctions h_{\pm}

On passe à l'étape suivante de la preuve, en étudiant les fonctions h_{\pm} définies dans (5). Rappelons que la résolution $f(x, y) = 0$ (pour $x, y > 0$) est équivalente à choisir $\theta = e^{-(x+y)} \in (0, 1)$ et $y = h_{\pm}(\theta)$.

Tout d'abord, pour vérifier que h_{\pm} et θ sont bien définis, nous devons vérifier que $1 + \xi \log(\theta) > 0$ pour certains $\theta \in (0, 1)$. On vérifie facilement que c'est le cas sur $(\theta_0(\xi), 1)$, et $\theta_0(\xi)$ est bien définie dès que $\xi < 1$.

Donc si $\xi \geq 1$ alors il n'y a pas d'état stationnaire non nul. Supposons donc que $\xi < 1$. Alors il existe un unique $\theta_0(\xi) \in (0, 1)$ tel que $1 - \theta - \xi \log(\theta)$ est de même signe que $\theta - \theta_0$ sur $(0, 1)$, que est, $1 - \theta_0 = 4\psi \log(\theta_0)$.

On peut vérifier que h_{\pm} décroît, $h_- < h_+$ sur $(\theta_0, 1]$,

$$h_{\pm}(\theta_0) = -\frac{1}{2\psi} - \log(\theta_0),$$

et

$$h_-(1) < h_+(1) = \frac{1}{2\psi} - 1 + \sqrt{\frac{1}{1-\xi}} < 0.$$

En effet (rappelons que $N\xi = 4\psi$),

$$h_-(\theta) = -\frac{1}{\theta} \frac{\frac{1}{1-\theta} + \frac{\log(\theta)}{(1-\theta)^2}}{N \sqrt{\frac{1}{1-\theta} + \frac{\log(\theta)}{(1-\theta)^2}}} < 0,$$

puisque

$$-\frac{\log(\theta)}{1-\theta} < \frac{1}{\theta}$$

Laisserycritique:=maximum $\theta \in [\theta_0(\xi), 1]$ $h_+(\theta)$. Si $y = y_{critique}$ alors il y a exactement une solution pour $f(x, y) = 0$.

Pour toute $y \in [0, y_{critique})$, il existe au moins deux solutions. Par les calculs précédents, nous savons qu'il y a au plus deux solutions. Donc dans ce cas il y a exactement deux solutions. Pour les décrire, il faut considérer $je_1 := [0, h_-(\theta_0(\xi))]$, si $h_-(\theta_0(\xi)) > 0$ ($je_1 = \emptyset$ sinon), et $je_2 = (\max(\theta_0(\xi), 0), y_{critique})$. Si $y \in je_1$ alors il existe une solution de la forme $h_-(\theta_-)$ et une de la forme $h_+(\theta_-)$. Si $y \in je_2$ alors les deux solutions sont de la forme $h_+(\theta)$, pour deux valeurs de θ dont l'intervalle contient l'argument de $y_{critique}$. Et pour $y > y_{critique}$ il n'y a pas de solution.

A ce stade nous avons prouvé que si $\xi \geq 1$ alors il n'y a pas d'état stationnaire positif ; si $\xi < 1$ puis si $y_{critique} > 0$ alors il y a deux états stationnaires positifs pour $\beta y_{je} M_{je} \in [0, y_{critique})$, 1 pour $\beta y_{je} M_{je} = y_{critique}$ et 0 pour $\beta y_{je} M_{je} > y_{critique}$. Si $y_{critique} = 0$ alors il existe un unique état stationnaire positif et si $y_{critique} < 0$ alors il n'y a pas d'état stationnaire positif pour tout $M_{je} \geq 0$.

A.3 Stabilité

Enfin, pour calculer la stabilité linéarisée des états stationnaires, on décompose $J = M_0 + N_0$, où M_0 est non négatif et N_0 est diagonale non positive. Puis J (étant Metzler, puisque $E < K$ en régime permanent) est stable si et seulement si $\rho(-N_0^{-1} M_0) < 1$. Nous calculons

$$N_0 = \begin{pmatrix} -\frac{bE}{K} - (v_E + \mu_E) & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_M & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_F \end{pmatrix}$$

et

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b(1 - \frac{E}{K}) \\ \frac{rEM}{M+y_{je}M_{je}} - e^{-\beta(M+y_{je}M_{je})} & \frac{rEE}{je} \left(\beta M e^{-\beta(M+y_{je}M_{je})} + \frac{y_{je}M_{je}}{M+y_{je}M_{je}} (1 - e^{-\beta(M+y_{je}M_{je})}) \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que pour certains $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$ (que nous calculons ci-dessous à des états stables) nous avons

$$-N_0^{-1} M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b(1-\frac{E}{K})}{bE+K} \\ \frac{\mu_M}{\mu_F} \frac{X_1}{\mu_F} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{X_2}{\mu_F} & 0 \end{pmatrix}.$$

A l'état d'équilibre $(0, 0, 0)$, nous avons une stabilité directement inconditionnelle comme

$$J = \begin{pmatrix} -(v_E + \mu_E) & 0 & b \\ (1-r)v_E & -\mu_M & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_F \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont $-(v_E + \mu_E)$, $-\mu_M$ et $-\mu_F$.

A un état stationnaire non nul on rappelle que

$$\begin{aligned} bF &= \frac{(v_E + \mu_E)E}{1 - \lambda M}, \\ E &= \lambda KM, \\ rE(1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})}) \frac{M}{M + \gamma_{je}M_{je}} &= \mu_F \frac{F}{E} = \frac{\mu_F(v_E + \mu_E)}{b} \frac{1}{1 - \lambda M}, \\ e^{-\beta(M + \gamma_{je}M_{je})} &= 1 - \frac{1}{N(1 - \lambda M)} \frac{M + \gamma_{je}M_{je}}{M}, \end{aligned}$$

pour que

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{rE}{N(1 - \lambda M)}, \\ X_2 &= \frac{r\lambda KM}{M + \gamma_{je}M_{je}} \left(\beta M \left(1 - \frac{M + \gamma_{je}M_{je}}{NM(1 - \lambda M)} \right) + \frac{\gamma_{je}M_{je}}{M} \frac{1}{N(1 - \lambda M)} \right). \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de $-N^{-1}dM_0$ est

$$P(z) = -z^3 + \frac{b(1 - \lambda M)^2((1 - r)v_E)}{v_E + \mu_E} \frac{X_2 + z}{\mu_M \mu_F} \frac{X_1}{\mu_F},$$

qui est égal à

$$P(z) = -z^3 + N(1 - \lambda M)^2 \left(\frac{M}{M + \gamma_{je}M_{je}} \left(\beta M \left(1 - \frac{M + \gamma_{je}M_{je}}{NM(1 - \lambda M)} \right) + \frac{\gamma_{je}M_{je}}{MN(1 - \lambda M)} \right) + \frac{z}{N(1 - \lambda M)} \right),$$

et on le réécrit comme

$$P(z) = -z^3 + (1 - \lambda M) \left(\beta N \frac{M^2(1 - \lambda M)}{M + \gamma_{je}M_{je}} - \beta M + \frac{\gamma_{je}M_{je}}{M + \gamma_{je}M_{je}} + z \right)$$

Nous trouvons $P(0) > 0$ (puisque $X_2 > 0$) et

$$P'(z) = -3z^2 + (1 - \lambda M),$$

pour que P est stable si et seulement si $P(1) < 0$. (P est croissante puis décroissante sur $(0, +\infty)$). Cette condition se lit

$$(1 - \lambda M) \left(1 + \frac{\gamma_{je}M_{je}}{M + \gamma_{je}M_{je}} + \beta M \left(1 + N \frac{M}{M + \gamma_{je}M_{je}} (1 - \lambda M) \right) \right) < 1. \quad (20)$$

Traitons d'abord le cas où $M_{je} = 0$. La condition de stabilité se réécrit

$$(1 - \lambda M) \left(1 + \beta M(-1 + N(1 - \lambda M)) \right) < 1,$$

c'est-à-dire, pour un état stationnaire non nul,

$$-\lambda + \beta(-1 + N(1 - \lambda M)) - \lambda \beta M(-1 + N(1 - \lambda M)) < 0.$$

Si $M_{critique} > 0$, on sait qu'il y a exactement deux états stationnaires entre 0 et $1/\lambda$ pour $M_{je} = 0$, que nous désignons par $0 < M_- < M_+ < 1/\lambda$. Soit $\varphi(x) = 1 - \lambda x + e^{-\beta x}(\lambda x - 1)$. Nous avons $\varphi(M_{\pm}) = 0$ et $\varphi'(M_{\pm}) > 0$.

En particulier, $\varphi'(M_+) > 0$ alors

$$M_+ > \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\beta} - e^{\beta M} \right)^+ = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\beta(1 - \lambda M_+)N - 1}.$$

En multipliant cette inégalité par $\lambda\beta(1 - \lambda M_+)N - 1$ donne exactement la stabilité de M_+ , puisque $(1 - \lambda M_+)N > 1$. En effet,

$$N(1 - \lambda M_\pm) = \frac{e^{\beta M_\pm}}{e^{\beta M_\pm} - 1} > 1.$$

Par un calcul similaire, on peut montrer que le plus petit état stationnaire M_- est instable.

Passons maintenant au cas général $M_{je} \geq 0$, présupposons $M_{je} < M_{je}^{critique}$ et écris $\partial \chi_f < 0$ (qui s'est avéré tenir à l'état d'équilibre le plus élevé) équivaut à

$$(1 - 2\lambda M)(1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je} M_{je})}) + \beta M(1 - \lambda M) e^{-\beta(M + \gamma_{je} M_{je})} < \frac{1}{N}.$$

En utilisant comme avant le fait que M est un état stationnaire nous permet de réécrire cette dernière inégalité comme

$$(1 - 2\lambda M) \frac{1M + \gamma_{je} M_{je}}{NM(1 - \lambda M)} + \beta M(1 - \lambda M) \frac{1 - e^{-\beta(M + \gamma_{je} M_{je})}}{N(1 - \lambda M)M} < \frac{1}{N}.$$

En multipliant cette inégalité par $N(1 - \lambda M)$ donne

$$(1 - 2\lambda M) + \beta(1 - \lambda M)NM \left(\frac{-\lambda M}{M + \gamma_{je} M_{je}} - 1 \right) < (1 - \lambda M) \frac{M}{M + \gamma_{je} M_{je}},$$

C'est

$$(1 - \lambda M) \left(2 - \frac{M}{M + \gamma_{je} M_{je}} + \beta M \left(1 + NM \frac{1 - \lambda M}{M + \gamma_{je} M_{je}} \right) \right) < 1,$$

d'où la stabilité du plus grand état stationnaire, puisque l'on récupère (20). De même, à l'état stationnaire plus petit, nous avons $\partial \chi_f > 0$, et l'inégalité inverse tient. Ceci conclut la preuve.

B Approximation du temps d'entrée du bassin

B.1 Bornes sur les équilibres sauvages

Pour $M_{je} = 0$, sous les hypothèses du lemme 3 tel qu'il existe deux états stationnaires positifs $E_- \ll E_+$ pour (2), nous obtenons des bornes explicites sur ces états. En particulier, nous supposons $N > 4\psi$. Rappelons que les équilibres positifs peuvent être exprimés comme une fonction croissante de leur seconde coordonnée $M \in (0, 1/\lambda)$:

$$E(M) := - \frac{K\lambda M}{\frac{V_E + \mu_E}{b} \frac{\lambda M}{(1 - \lambda M)}},$$

et $E(M)$ est un équilibre si et seulement si $f(M) = 0$, où

$$f(x) = (1 - \psi x)(1 - e^{-x}) - \frac{1}{N}. \quad (21)$$

Lemme 7 La fonction F (défini dans (21)) est concave sur $[0, 1/\psi]$. Il atteint sa valeur maximale sur cet intervalle à $Z(\psi) \in (0, 1/\psi)$, où l'on définit

$$e^{-Z(\psi)} = \frac{\psi}{1 + \psi - \psi Z(\psi)}, \quad F(\psi) := \frac{1 + \psi - \psi Z(\psi)}{(1 - \psi Z(\psi))^2}. \quad (22)$$

Puis F sur $[0, 1/\psi]$ n'a pas de zéro si $N < F(\psi)$, exactement 1 zéro si $N = F(\psi)$ et exactement 2 des zéros si $N > F(\psi)$.

En outre, Z a les asymptotiques suivantes :

$$Z(\psi) \sim_{\psi \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\psi}, \quad Z(\psi) \sim_{\psi \rightarrow 0} \log \left(\frac{1}{\psi} \right), \quad F(\psi) \sim_{\psi \rightarrow +\infty} 4\psi, \quad F(\psi) \rightarrow 1 \text{ as } \psi \rightarrow 0.$$

Preuve. Nous calculons

$$F(x) = e^{-x} \left(1 + \psi - \psi x - \psi \right), \quad F'(x) = e^{-x} \psi (x - 1 - 2\psi).$$

Par conséquent $F' < 0$ sur $[0, 1/\psi]$. Depuis $F(0) = F(1/\psi) = -1/N < 0$, F atteint un maximum unique au point (nécessairement unique) $Z(\psi) \in (0, 1/\psi)$ tel que $F(Z(\psi)) = 0$. L'affirmation selon laquelle $Z(\psi) < 1/(2\psi)$ découle de l'inégalité $e^x > 1 + x$, ce qui implique que

$$\frac{1}{\psi} F' \left(\frac{1}{2\psi} \right) = e^{-1/2\psi} \left(\frac{1}{2\psi} - 1 \right) < 0.$$

De plus, le signe de $F(Z(\psi))$ est exactement celui de $N - F(\psi)$. Les équivalents et la limite découlent de calculs simples. \square

Remarque B.1 Nous remarquons que Z est liée à une fonction spéciale bien connue : introduisons la (branche principale de la) fonction spéciale W de Lambert, c'est-à-dire :

$$W(y) = z, \quad z \geq -1 \iff z e^z = y.$$

Puisque si $y > 1$ alors $z > 0$, on obtient

$$Z(\psi) = \text{Journal} \left(N \psi (1 + 1/\psi) \right).$$

Présumer $N > F(\psi)$ (défini dans (22)), et notons par $X_- < X_+$ les deux zéros positifs de F .

Lemme 8 Nous avons $X_- > 1/N$

$$\frac{1}{N} < X_- < \frac{1}{\psi} \left(1 - \frac{\kappa_*}{N} \right) < Z(\psi) < \frac{1}{\psi} \left(1 - \frac{\kappa_*}{N} \right) < X_+,$$

où

$$\kappa_* = 1 + \frac{\psi}{1 - \psi Z(\psi)}, \quad \kappa_* = N - \frac{\psi Z(\psi)(1 + \psi - \psi Z(\psi))}{(1 - \psi Z(\psi))^2}.$$

Si en plus $N > 2$ alors $X_+ < 1$

Preuve. La première inégalité est obtenue en utilisant les inégalités $1 - e^{-x} \leq x$ et $1 - \frac{\sqrt{x}}{2} > x/2$ pour $x \in (0, 1)$. La première implique que $f(x) \leq X(1 - \psi(x)) - \sqrt{1/N}$, qui est du second ordre polynôme égal à $\frac{1}{2}\psi^2$ et $\frac{1}{2\psi}$, avec des racines situées à $1 \pm \sqrt{1 - 4\psi/N}$ (rappeler que $N > 4\psi$). Ainsi $X \rightarrow 1 - \frac{1}{2\psi}$ par la seconde inégalité.

La borne supérieure sur X vient du fait que si $N > 2$ puis par lemme 7

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{\psi} > \frac{1}{2\psi}.$$

Enfin pour obtenir les deux autres bornes, on introduit

$$H(\kappa) := \frac{1}{\psi} \left(1 - \frac{\kappa}{N}\right) = \kappa \frac{1 - e^{-\psi(1-\kappa/N)}}{1 - e^{-\psi}} - 1.$$

Par Lemme 7, il est concave sur $[0, N]$, égal à -1 à 0 et N atteint son maximum à $\hat{\kappa} := N(1 - \psi Z(\psi))$. Pour obtenir κ^* et κ_* , on utilise simplement le fait que le graphe de H est au-dessus des segments de $(0, -1)$ à $(\hat{\kappa}, H(\hat{\kappa}))$ d'une part, et de $(\hat{\kappa}, H(\hat{\kappa}))$ pour $(N, 0)$ d'autre part, de sorte que

nous définissons

$$-1 + \frac{H(\hat{\kappa}) + 1}{\hat{\kappa}} \kappa^* = 0 = -1 - (\kappa_* - N) \frac{H(\hat{\kappa}) + 1}{N - \hat{\kappa}},$$

et les expressions de $\kappa^* < \hat{\kappa} < \kappa_*$ résulter d'un simple calcul. □

Retour aux états stationnaires de (2), on déduit du lemme 8 les bornes suivantes, en supposant $N > 2$:

$$\hat{E}_- := \frac{\frac{\lambda K}{N\beta}}{\frac{1}{N\beta} + \frac{VE + \mu EK}{b}} \leq E \leq \left(1 - \frac{\kappa^*}{N}\right) \frac{K}{\frac{1}{N\beta} + \frac{VE + \mu EK}{b\kappa^*}} =: \hat{E}_- \quad (23)$$

$$\hat{E}_+ := \left(1 - \frac{\kappa_*}{N}\right) \frac{K}{\frac{1}{N\beta} + \frac{VE + \mu EK}{b\kappa_*}} \leq E \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{K}{\frac{1}{N\beta} + \frac{KN(VE + \mu E)}{b}} =: \hat{E}_+ \quad (24)$$

B.2 Résultats

Une borne inférieure. Tout d'abord, nous donnons une borne inférieure sur les temps d'entrée. Nous considérons le fait que pour une solution à (2) avec des données initiales données par E_+ , grâce à la surestimation de (24),

$$F(t) \geq \hat{F}_+ e^{-\mu F t} =: \hat{F}_b(t).$$

Cela implique

$$E(t) \geq e^{-(VE + \mu E)t} \left(\frac{bF_+}{K} (1 - e^{-\mu F t}) \hat{E}_+ + bF_+ \int_0^t e^{-\mu F t'} e^{-(VE + \mu E)(t-t')} e^{-\frac{bF_+(e^{-\mu F t'} - e^{-\mu F t})}{K}} dt' \right) =: \hat{E}_b(t),$$

et

$$M(t) \geq e^{-\mu M t} M_+ + (1 - r) \nu \int_0^t e^{-\mu((t-t')\hat{E}_b(t'))} dt' =: \hat{M}_b(t).$$

En utilisant la sous-estimation de E depuis (23), nous définissons $\hat{z}_b := \min\{t \geq 0, \hat{z}_b(t) \leq \hat{z}_- \}$ pour $Z \in \{E, M, F\}$.

Lemme 9 On a la borne inférieure suivante : $\tau(M_{je}) \geq \min(t_{b, t_{M_b}}, t_F)$.

On trouve explicitement, avec $Z = Z(\psi)$ et $Z_0 = 1 + \psi - \psi Z$:

$$t_b^F = \frac{1}{\mu_F} \frac{(K^*(N - K))^*}{K^*(N - K^*)} = \frac{1}{\mu_F} \left(\frac{N_2(1 - \psi Z)^3}{\psi Z Z_0} - \frac{N(1 - \psi Z)}{\psi Z Z_0} \right).$$

Cependant, il faut s'attendre à ce que $\min(t_{b, t_{M_b}}) > t_F$, et nous pouvons donner des approximations explicites de $t_{b, t_{M_b}}$.

Une première borne supérieure. On compare la solution de (2) avec la solution du système linéaire

$$\begin{aligned} \frac{dE_e}{dt} &= bF - (v_E + \mu_E)E_e \\ \frac{dM_e}{dt} &= (1 - r)v_E E_e - \mu_M M_e \\ \frac{dF_e}{dt} &= r v_E \varphi(M_e) E_e - \mu_F F_e \end{aligned} \quad (25)$$

où $\varphi(M_{je}) = \frac{M(t)}{M_+} < 1$, typiquement $\varphi(M_{je}) = \frac{M_+ - M_{je}}{M_+}$. La propriété suivante découle de fait que (2) est coopératif :

Lemme 10 Solutions de (2) et (25) avec des données initiales telles que $(E_0, M_0, F_0) \leq (E_e, M_e, F_e)$ satisfaire :

$$\forall t \geq 0, (E(t), M(t), F(t)) \leq (E_e(t), M_e(t), F_e(t)).$$

Nous utilisons la sous-estimation de E donné par (23), pour définir, pour $X = (X_{je})_{je} = (E, M, F)$ et $je \in \{1, 2, 3\}$,

$$t_{\min}^{X_{je}} := \inf\{t \geq 0, X_{je}(t) \leq [\hat{E}]_{je}\}.$$

Lemme 11 Pour toute solution X_e pour (25) satisfaire l'ânesse de Lemme dix, on a la borne supérieure sur le temps d'entrée : $\tau(M_{je}) \leq \max(t_{\min}^{E_e}, t_{\min}^{M_e}, t_{\min}^{F_e})$.

Les calculs analytiques sont effectués dans la section B.3.

Une deuxième limite supérieure en deux étapes. Soit $\rho_* = M_{je}/\bar{M}_+$ être le ratio d'effort sous-estimé. Lorsque nous utilisons l'approche en une étape ci-dessus, nous concluons avec une borne supérieure finie pour $\tau(M_{je})$ si et seulement si $\bar{M}_+/(M_{je} + \bar{M}_+) < 1/N$, C'est

$$\rho_* > N - 1. \quad (26)$$

En développant la même idée que pour la borne inférieure, nous posons $\bar{\varphi} = \bar{M}_+/(M_{je} + \bar{M}_+)$ alors

$$F(t) \leq \bar{F}_+ e^{-\mu_F t} + \hat{E}_+ \bar{\varphi} (1 - e^{-\mu_F t}) =: \bar{F}_\#.$$

Ensuite, nous construisons la solution explicite $(E, M) = (\hat{E}_\#, \overline{M}_\#)$ pour

$$\begin{aligned}\dot{E} &= bF_\# - (v_E + \mu_E)E + \frac{\lambda}{K} E, \quad E(0) = \hat{E}_+, \\ \dot{M} &= (1-r)v_E E - \mu_M M, \quad M(0) = \overline{M}_+.\end{aligned}$$

En détails:

$$\begin{aligned}\overline{F}_\#(t) &= \hat{E}_+ - r_E q + e^{-\mu_F t} F_+ - r_E q \hat{E}_+, \\ \hat{E}_\#(t) &= e^{-(v_E + \mu_E)t} \left(\hat{E}_+ + \frac{r_E v_E q}{K} t - \frac{\hat{E}_+ - r_E v_E q \hat{E}_+}{K \mu_F} (1 - e^{-\mu_F t}) \right) \\ &\quad + e^{-\mu_F t} \left(\overline{F}_+ - r_E v_E q \hat{E}_+ \right) e^{(v_E \mu_F + \frac{r_E v_E q}{K})t} - \frac{\hat{E}_+ + r_E v_E q \hat{E}_+}{K \mu_F} (1 - e^{-\mu_F t}) \\ &\quad + e^{-\mu_F t} \left(\overline{F}_+ - r_E v_E q \hat{E}_+ \right) e^{(v_E \mu_F + \frac{r_E v_E q}{K})t} - \frac{\hat{E}_+ + r_E v_E q \hat{E}_+}{K \mu_F} (1 - e^{-\mu_F t}) dt', \\ \overline{M}_\#(t) &= e^{-\mu_M t} \overline{M}_+ (1 - r)v_E \int_0^t \mu_F \hat{E}_\#(t') dt' .\end{aligned}$$

Nous utilisons cette super-solution sur $[0, t_0]$ (pour certains $t_0 > 0$ à déterminer), puis coller la solution sur $[t_0, +\infty)$ de

$$\begin{aligned}- & \\ \vdots & \dot{E} = bF - (v_E + \mu_E)E \text{ et } E(t_0) = \hat{E}_\#(t_0), \\ \vdots & \\ - & \dot{M} = (1-r)v_E E - \mu_M M, \quad M(t_0) = \overline{M}_\#(t_0), \\ \vdots & \\ - & \dot{F} = r_E q_0 E - \mu_F F, \quad F(t_0) = F_\#(t_0), \\ - & \end{aligned}$$

avec $q_0 = \overline{M}_\#(t_0) / (\overline{M}_\#(t_0) + M_{je}) < q$.

Pour $Z \in \{E, M, F\}$ on laisse

$$t_{\#}^Z(t_0) := \min\{t \geq t_0, \hat{Z} \leq \tilde{Z}\}.$$

Puis comme avant :

Lemme 12 Pour tout $t_0 > 0$, $\tau(M_{je}) \leq t_{\#}^E(t_0) := \max(t_{E_{\#}}^E(t_0), t_{M_{\#}}^E(t_0), t_{F_{\#}}^E(t_0))$.

En utilisant le lemme 12, on peut théoriquement obtenir une borne supérieure finie pour $\tau(M_{je})$ (lors du choix d'un t_0) dès que $q_0 < 1/N$ pour t_0 suffisamment grand, c'est-à-dire si et seulement si

$$\rho_*(\rho_* + 1) \left(\frac{\mu_M}{(1-r)v_E} + N - 1 \right) > N - 1. \quad (27)$$

État (27) est plus faible que (26) (et en général beaucoup plus faible). Il tient si et seulement si

$$\rho_* > \frac{-(N-1 + \varphi) + \sqrt{(N-1 + \varphi)^2 + 4\varphi(N-1)}}{2\varphi}, \quad \varphi := \lambda K = \frac{\mu_M}{(1-r)v_E},$$

ce qui est vrai par exemple si $\rho_* > \sqrt{(N-1)/\varphi}$. Cependant, nous ne développons pas davantage ces analytiques dans le présent article.

B.3 Calculs analytiques

Application du lemme 11, pour exprimer analytiquement la solution $X_e := (E_e, M_e, F_e)$ de (25), il suffit de diagonaliser la matrice

$$R_e = \begin{pmatrix} -(v_E + \mu_E) & b \\ r_{EQ} & -\mu_F \end{pmatrix}.$$

Rea une trace négative, et un déterminant positif si et seulement si est $\lambda > 0$. Donc si $N_Q(M_{je}) < 1$ alors 0 globalement asymptotiquement stable pour (25).

Dans ce cas les valeurs propres sont réelles, négatives et égales à κ_{\pm} associés respectivement à vecteurs propres $\frac{1}{X_{\pm}}$, où

$$\kappa_{\pm} := \frac{-(v_E + \mu_E + \mu_F) \pm \sqrt{(v_E + \mu_E - \mu_F)^2 + 4br_{EQ}}}{2},$$

$$X_{\pm} := \frac{v_E + \mu_E - \mu_F \pm \sqrt{(v_E + \mu_E - \mu_F)^2 + 4br_{EQ}}}{2b}.$$

On en déduit alors que pour certains nombres réels $(r_0, s_0) \in \mathbb{R}_4$,

$$\begin{aligned} E_e(t) &= r_+ e^{\kappa_+ t} + r_- e^{\kappa_- t}, \\ F_e(t) &= s_0 + e^{\kappa_+ t} s_0 - e^{\kappa_- t} s_0, \\ M_e(t) &= e^{-\mu t} M_0 + (1-r) v_E \int_0^t e^{-\mu(t-t')} (r_+ e^{\kappa_+ t'} + r_- e^{\kappa_- t'}) dt'. \end{aligned}$$

Dans le détail, on retrouve

$$\begin{aligned} r_+ &= \frac{X_-}{X_- - X_+} E_0 - \frac{1}{X_- - X_+} F_0, & r_- &= \frac{-X_+}{X_- - X_+} E_0 + \frac{1}{X_- - X_+} F_0 \\ s_0 &= \frac{X_-}{X_- - X_+} E_0 - \frac{X_+}{X_- - X_+} F_0, & s_0 &= \frac{-X_+ + X_-}{X_- - X_+} E_0 + \frac{X_-}{X_- - X_+} F_0. \end{aligned}$$

En supposant $\kappa_+ = -\mu$ et $\kappa_- = -\mu$ (qui doit tenir génériquement puisqu'il s'agit de paramètres biologiques), on obtient

$$M_e(t) = e^{-\mu t} M_0 + (1-r) v_E \left(\frac{e^{\kappa_+ t} - e^{-\mu t}}{\mu + \kappa_+} + r_- \frac{e^{\kappa_- t} - e^{-\mu t}}{\mu + \kappa_-} \right).$$

En supposant $N > 2$, on utilise la surestimation (24) de E_+ comme donnée initiale (E_0, M_0, F_0) , et avec les notations

$$g(\sigma) = 1 + \frac{\sqrt{4br_{EQ}}}{(v_E + \mu_E - \mu_F)^2}, \quad \sigma = \text{sgn}(v_E + \mu_E - \mu_F),$$

on en déduit

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{K}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \left(1 \pm \frac{(2N-1)(v_E + \mu_E + \mu_F)}{g(\sigma) |v_E + \mu_E - \mu_F|} \right), \\ s_{\pm} &= \frac{K |v_E + \mu_E - \mu_F|}{4bg(\sigma)} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \left(\sigma \pm g(\sigma) g(\epsilon) \right) \pm \frac{(2N-1)(v_E + \mu_E + \mu_F) |v_E + \mu_E - \mu_F|}{\mu_E - \mu_F}. \end{aligned}$$

Si $r_0 < 0$ on peut utiliser la borne supérieure simple $E_e(t) \leq r_0 + e_{K+t}$. Cette condition se lit

$$g(q) |v_E + \mu_E - \mu_F| < (2N-1)(v_E + \mu_E) + \mu_F.$$

Dans ce cas, nous savons que $E_e(t) \leq \hat{E}_-^{[1]}$ si $r_0 \leq \frac{\lambda K_1}{N-1}$, c'est si

$$t \geq t_{\min} := \frac{2}{v_E + \mu_E + \mu_F - g(q) |v_E + \mu_E - \mu_F|} \text{Journal} \frac{((N-1)(\frac{1}{2\psi} - 1) + \frac{(2N-1)(v_E + \mu_E) + \mu_F}{g(q) |v_E + \mu_E - \mu_F|})}{(28)}$$

Alors, sous la même condition on a $s_0 \pm > 0$. En utilisant le fait que $s_0 + s_0 = \bar{F}_+$, nous déduire que $F_e(t) \leq \hat{E}_-^{[1]}$ si $\bar{F}_+ e_{K+t} \leq \bar{F}_-$, c'est si

$$t \geq t_{\min} := \frac{2}{v_E + \mu_E + \mu_F - g(q) |v_E + \mu_E - \mu_F|} \text{Journal} \frac{(N(N-1))}{\psi}. \quad (29)$$

De plus, nous avons $t_{\min} > t_F$ et seulement si

$$(2N-1)(v_E + \mu_E) + \mu_F > (N-1)g(\epsilon) |v_E + \mu_E - \mu_F|.$$

Remarque B.2 Pour les petits q , les estimations précédentes montrent approximativement que

$$t_{\min} \geq \frac{1}{\min(v_E + \mu_E, \mu_F)} \text{Journal} \frac{(N_2)}{\psi}.$$

Enfin, nous devons calculer la condition $M_e(t) \leq \mu_M / \mu_F$. Soit $\sigma_E := \mu_M / (v_E + \mu_E)$ et $\sigma_F := \mu_M / \mu_F$. Nous réécrivons $M_e(t)$ comme

$$M_e(t) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{N} \right) (a e^{-\mu_M t} + \alpha_+ e_{K+t} + \alpha_- e_{K-t},)$$

avec

$$\alpha_{\pm} = \frac{(N-1)\sigma_F + 1 - \epsilon N}{(\sigma_F - 1)(\sigma_E - 1) - \epsilon N}, \quad \alpha_{\pm} = \frac{\mu_M}{\mu_M + K_{\pm}} r_0,$$

où

$$r_0 := \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2N-1 + \sigma_E / \sigma_F}{g(q)\sigma(1 - \sigma_E / \sigma_F)} \right), \quad g(\epsilon) = \frac{\sqrt{1 + \frac{4N\sigma_E \sigma_F \epsilon}{(\sigma_F - \sigma_E)^2}}}{1 + \frac{4N\sigma_E \sigma_F \epsilon}{(\sigma_F - \sigma_E)^2}}$$

et

$$\frac{\mu_M}{\mu_M + K_{\pm}} = \frac{2\sigma_E \sigma_F}{2\sigma_E \sigma_F - (\sigma_E + \sigma_F) \pm \sigma(\sigma_F - \sigma_E)g(\epsilon)}.$$

La condition que nous devons calculer est donc

$$a e^{-\mu_M t} + \alpha_+ e_{K+t} + \alpha_- e_{K-t} \leq \frac{\psi}{N-1}.$$

Nous supposons que la demi-vie des mâles est plus courte que celle des femelles et des œufs, de sorte que $\sigma_F, \sigma_E > 1$. Sous les hypothèses plus fortes que $r_0 < 0$ et

$$\epsilon N < 1, \quad (\sigma_F - 1)(\sigma_E - 1) > \epsilon N,$$

on obtient que $\alpha > 0$. On traite simplement deux sous-cas : d'abord si $\mu_M + K_{\pm} < 0$ (petit μ_M) alors on obtient $\alpha_{\pm} < 0$. Et ainsi

$$t_{\min} := \frac{1}{\mu_M} \text{Journal} \left((N-1) \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{\psi} \right).$$

Deuxièmement, si $\mu_M + \kappa > 0$ (grand μ_M) alors on obtient $\alpha_- < 0 < \alpha_+$ Et ainsi

$$t_{\min}^M := \frac{1}{-\kappa_+} \left(\text{Journal} (N-1) \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{\psi} \right).$$

Dans le dernier cas (quand μ_M est grand), on peut vérifier que $t_{\min}^M > t_E^{\min}$ est équivalent à

$$\alpha_+ + \alpha_- > r_0 \quad + ,$$

ce qui tient puisque $\alpha_- > 0$ et $\alpha_+ > r_0 \quad +$.

Dans ce cas on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\text{maximum}_{\min, t_{\min}^M, t_{\min}^M} \right) \\ &= \frac{2\sigma_E}{\mu_{FOF} + \sigma_E - g(\varphi)\sigma(\sigma_F - \sigma_E)} \left(\text{Journal} \frac{(N-1) \left((N-1)\sigma_F + 1 - \varepsilon N \right)}{\psi (\sigma_F - 1)(\sigma_E - 1) - \varepsilon N} \right) \\ & \quad + \left(\frac{\sigma_E \sigma_F g(\varepsilon)\sigma(\sigma_F - \sigma_E) + (2N-1)\sigma_F + \sigma}{2\sigma_E \sigma_F - (\sigma_E + \sigma_F) + \sigma(\sigma_F - \sigma_E)g(\varepsilon)g(\varepsilon)\sigma(\sigma_F - \sigma_E)} \right) \end{aligned}$$

Références

- [1] R. Anguelov, Y. Dumont et J. Lubuma, Modélisation mathématique de la technologie des insectes stériles pour le contrôle du moustique anophèle, *Calcul. Math. Appl.*, 64 (2012), p. 374–389.
- [2] R. Anguelov, Y. Dumont et J. Lubuma, Sur les schémas de différences finies non standards en biosciences, *AIP Conf. Proc.*, 1487 (2012), p. 212–223.
- [3] D. Bainov et P. Simeonov, Équations différentielles impulsives : solutions périodiques et applications, vol. 66, CRC Press, 1993.
- [4] PENNSYLVANIE. Bliman, MS Aronna, FC Coelho et MAHB da Silva, Assurer le succès de l'introduction de wolbachia dans les populations naturelles d'aedes aegypti au moyen d'un contrôle par rétroaction, *Journal of Mathematical Biology*, 76 (2018), p. 1269–1300.
- [5] K. Bourtzis, Technologies basées sur Wolbachia pour le contrôle des populations d'insectes ravageurs, 627 (2008), p. 104–13.
- [6] E. Chambers, L. Hapairai, BA Peel, H. Bossin et S. Dobson, Compétitivité d'accouplement mâle d'une souche d'aedes polynesiensis introgressée par wolbachia dans des conditions semi-naturelles, 5 (2011), p. e1271.
- [7] C. Dufourd et Y. Dumont, Modélisation et simulations de la dispersion des moustiques. le cas d'aedes albopictus, *Biomath*, 1209262 (2012), p. 1–7.
- [8] ———, Impact des facteurs environnementaux sur la dispersion des moustiques en perspective d'insectes stériles contrôle technique, *Calcul. Math. Appl.*, 66 (2013), p. 1695–1715.
- [9] Y. Dumont et JM Tchuente, Etudes mathématiques sur la technique de l'insecte stérile pour la maladie du chikungunya et Aedes albopictus, *Journal of Mathematical Biology*, 65 (2012), p. 809–855.
- [dix] R. Durrett et SA Levin, L'importance d'être discret (et spatial), 46 (1994), p. 363–394.

- [11]VA Dyck, J. Hendrichs et AS Robinson,La technique de l'insecte stérile, les principes et la pratique de la lutte antiparasitaire intégrée à l'échelle de la zone,Springer, Dordrecht, 2006.
- [12]Z Farkas, SA Gourley, R. Liu et A.-A. Yakubu,Modélisation de l'infection à wolbachia dans une population de moustiques sexués porteurs du virus du Nil occidental,Journal of Mathematical Biology, 75 (2017), p. 621–647.
- [13]Z Farkas et P. Hinow,Modèles continus structurés et non structurés pour les infections à wolbachia,Bulletin de biologie mathématique, 72 (2010), pp. 2067–2088.
- [14]A. Fenton, KN Johnson, JC Brownlie et GDD Hurst,Résoudre le paradoxe de Wolbachia : modéliser l'interaction tripartite entre l'hôte, Wolbachia, et un ennemi naturel,The American Naturalist, 178 (2011), p. 333–342.
- [15]L. Hapairai, J. Marie, SP Sinkins et H. Bossin,Effet de la température et de la densité larvaire sur la productivité des élevages en laboratoire et les caractéristiques des mâles d'aedes polynesiensis (diptera : Culicidae),132 (2013).
- [16]LK Hapairai, MAC Sang, SP Sinkins et HC Bossin,Etudes de population du vecteur filarien aedes polynesiensis (diptera : Culicidae) dans deux milieux insulaires de polynésie française,Journal d'entomologie médicale, 50 (2013), pp. 965–976.
- [17]M. Hertig et SB Wolbach,Etudes sur les micro-organismes de type rickettsie chez les insectes,Le Journal de la recherche médicale, 44 (1924), p. 329.
- [18]M. Huang, X. Song et J. Li,Modélisation et analyse des lâchers impulsifs de moustiques stériles,Journal of Biological Dynamics, 11 (2017), p. 147–171. PMID : 27852161.
- [19]H. Hughes et NF Britton,Modélisation de l'utilisation de Wolbachia pour contrôler la transmission de la dengue.,Taureau. Math. Biol., 75 (2013), p. 796–818.
- [20]L. Jachowski Jr et al.,Filariose aux Samoa américaines. y. bionomique du vecteur principal, marque aedes polynesiensis.,Journal américain d'hygiène, 60 (1954), pp. 186–203.
- [21]LK Hapairai,Etudes sur l'introggression et l'écologie d'Aedes polynesiensis pour faciliter le contrôle de la filariose lymphatique,Thèse de doctorat, Université d'Oxford, 2013.
- [22]R. Lees, B. Knols, R. Bellini, M. Benedict, A. Bheecarry, H. Bossin, D. Chadee, J. Charlwood, R. Dabiré, L. Djogbenou, A. Egyir-Yawson, R. Gato, L. Gouagna, M. Hassan, S. Khan, L. Koekemoer, G. Lempierere, N. C Manoukis, R. Mozuraitis et J. Gilles, Bilan : Améliorer nos connaissances sur la biologie des moustiques mâles en lien avec les programmes de lutte génétique,132S (2014), p. S2–S11.
- [23]J. Li et Z. Yuan,Modélisation des lâchers de moustiques stériles avec différentes stratégies,Journal of Biological Dynamics, 9 (2015), p. 1–14. PMID : 25377433.
- [24]LA Moreira, I. Iturbe-Ormaetxe, JA Jeffery, G. Lu, AT Pyke, LM Hedges, BC Rocha, S. Hall-Mendelin, A. Day, M. Riegler, LE Hugo, KN Johnson, BH Kay, EA McGraw , AF van den Hurk, PA Ryan et SL O'Neill,Un symbiote wolbachia chez aedes aegypti limite l'infection par la dengue, le chikungunya et le plasmodium,Cellule, 139 (2009), p. 1268 – 1278.

- [25]G. Nadin, M. Strugarek et N. Vauchelet,Entraves à la propagation du front bistable : application à l'invasion de wolbachia,Journal de biologie mathématique, (2017).
- [26]L. O'Connor, C. Plichart, AC Sang, CL Brelsfoard, HC Bossin et SL Dobson,Libération à l'air libre de moustiques mâles infectés par un biopesticide wolbachia : performance terrain et confinement de l'infection,PLOS Neglected Tropical Diseases, 6 (2012), pp. 1–7.
- [27]CF Oliva, D. Damiens et MQ Benoît,Biologie de la reproduction mâle des moustiques aedes,Acta Tropica, 132 (2014), p. S12 – S19. Biologie et comportement des moustiques mâles en relation avec de nouvelles approches de lutte contre les moustiques vecteurs de maladies.
- [28]JL Rasgon et TW Scott,Wolbachia et incompatibilité cytoplasmique dans le complexe d'espèces de moustiques culex pipiens de Californie : estimations des paramètres et dynamique de l'infection dans les populations naturelles,Génétique, 165 (2003), p. 2029-2038.
- [29]F. Rivière,Ecologie de Aedes (Stegomyia) polynesiensis, Marks, 1951, et transmission de la filariose de Bancroft en Polynésie,Thèse de doctorat, ORSTOM, 1988.
- [30]G. Sallet et MAHB da Silva,Systèmes dynamiques monotones et quelques modèles de wolbachia dans les populations d'aedes aegypti,ARIMA, 20 (2015), p. 145–176.
- [31]JG Schraiber, AN Kaczmarczyk, R. Kwok, M. Park, R. Silverstein, FU Rutaganira, T. Aggarwal, MA Schwemmer, CL Hom, RK Grosberg et SJ Schreiber,Contraintes sur l'utilisation de wolbachia raccourcissant la durée de vie pour contrôler la dengue,Journal of Theoretical Biology, 297 (2012), p. 26 à 32.
- [32]SP Sinkins,Wolbachia et incompatibilité cytoplasmique chez les moustiques,Insect Biochemistry and Molecular Biology, 34 (2004), pp. 723 – 729. Biologie moléculaire et des populations de moustiques.
- [33]HL Smith,Systèmes dynamiques monotones : une introduction à la théorie des systèmes compétitifs et coopératifs.,Providence, RI : Société mathématique américaine, 1995.
- [34]M. Strugarek, N. Vauchelet et J. Zubelli,Quantifier l'incertitude de survie des moustiques infectés par Wolbachia dans un modèle spatial,Biosciences mathématiques et ingénierie, 15(4) (2018), pp. 961–991.
- [35]T. Suzuki et F. Sone,Habitudes de reproduction des moustiques vecteurs de la filariose et de la dengue aux Samoa occidentales,29 (1978), p. 279–286.