Support de cours “dynamique des populations”

Ludovic Mailleret

Février 2022

Polytech Nice Sophia, MAM4, 2021 - 2022 : séance 3

Populations en interaction : les modèles de “Lotka Volterra”

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (1)

Modèle historique (années 1920), étudié indépendemmant par Lotka (chimie) et Volterra (poissons)

Hypothèses :

- la population de proie a un taux de croissance constant (isol.)
- la population de prédateur a un taux de mortalite constant (isol.)
- la predation assure le transfert entre les populations, selon un modèle bilinéaire

Mise en équation :

- soient x et y les tailles des populations de proies et prédateurs

$$\dot{x} = rx - cxy,$$
$$\dot{y} = bxy - my.$$

- r est le taux de croissance des proies, m le taux de mortalité des prédateurs, c et b les paramètres de consommation et de naissance liés à la prédation

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (1)

Modèle historique (années 1920), étudié indépendemmant par Lotka (chimie) et Volterra (poissons)

Hypothèses :

- la population de proie a un taux de croissance constant (isol.)
- la population de prédateur a un taux de mortalite constant (isol.)
- la predation assure le transfert entre les populations, selon un modèle bilinéaire

Mise en équation :

- soient x et y les tailles des populations de proies et prédateurs

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx - cxy,\\ \dot{y} &= bxy - my.\end{aligned}$$

- r est le taux de croissance des proies, m le taux de mortalité des prédateurs, c et b les paramètres de consommation et de naissance liés à la prédation

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (2)

Positivité (well-posedness) : $\dot{x}_i(x_i = 0, x_j \geq 0) \geq 0$

$$\dot{x}(x = 0) = 0,$$
$$\dot{y}(y = 0) = 0.$$

$\Rightarrow$ les faces de $\mathbb{R}^2_+$ sont invariantes, le modèle est positif

Isoclines nulles :

$$\dot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ou} \ y = \frac{r}{c},$$
$$\dot{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \ \text{ou} \ x = \frac{m}{b}.$$

Equilibres (intersections des isoclines nulles des différentes variables):

$$(0, 0) \ \text{et} \ (x^*, y^*) = \left(\frac{m}{b}, \frac{r}{c}\right)$$

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (2)

Positivité (well-posedness) : $\dot{x}_i(x_i = 0, x_j \geq 0) \geq 0$

$$\dot{x}(x = 0) = 0,$$
$$\dot{y}(y = 0) = 0.$$

$\Rightarrow$ les faces de $\mathbb{R}^2_+$ sont invariantes, le modèle est positif

Isoclines nulles :

$$\dot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ ou } \ y = \frac{r}{c}\ ,$$
$$\dot{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \ \text{ ou } \ x = \frac{m}{b}\ .$$

Equilibres (intersections des isoclines nulles des différentes variables):

$$(0,0) \ \text{ et } \ (x^*, y^*) = \left(\frac{m}{b}, \frac{r}{c}\right)$$

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (2)

Positivité (well-posedness) : $\dot{x}_i(x_i = 0, x_j \geq 0) \geq 0$

$$\dot{x}(x = 0) = 0,$$
$$\dot{y}(y = 0) = 0.$$

$\Rightarrow$ les faces de $\mathbb{R}^2_+$ sont invariantes, le modèle est positif

Isoclines nulles :

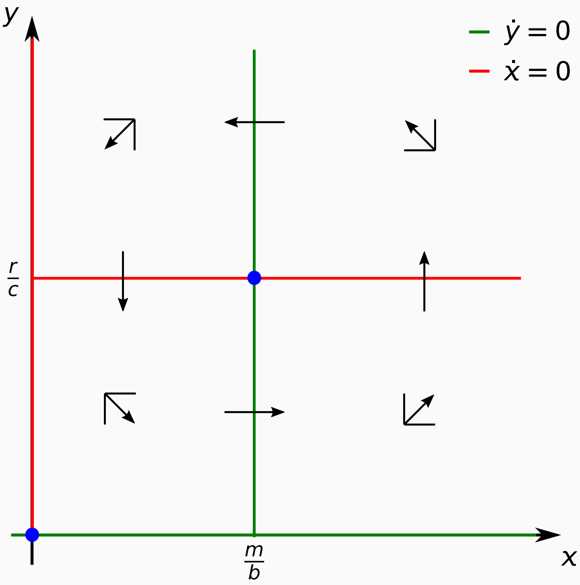
$$\dot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ ou } \ y = \frac{r}{c} \,,$$
$$\dot{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \ \text{ ou } \ x = \frac{m}{b} \,.$$

Equilibres (intersections des isoclines nulles des différentes variables):

$$(0, 0) \ \text{ et } \ (x^*, y^*) = \left(\frac{m}{b}, \frac{r}{c}\right)$$

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (2)

Plan de phase : nullclines, équilibres, orientation du champ de vecteurs



Stabilité des équilibres

Theorem (Méthode de Lyapunov indirecte)

Soit x^* un équilibre de $\dot{x} = f(x)$, $J(x^*)$ la jacobienne évaluée en x^*, et λ_i ses valeurs propres:

- *si $\forall i$, $Re(\lambda_i) < 0$, alors $x^\star$ est asymptotiquement stable*
- *si $\exists i$, $Im(\lambda_i) > 0$, alors $x^\star$ est instable*

L'idée est d'évaluer le linéarisé du système non linéaire autour d'un point d'équilibre

Tant que le linéarisé est "non nul", le théorème est constructif, sinon il ne l'est plus

Theorem (Méthode de Lyapunov indirecte)

Soit x^* un équilibre de $\dot{x} = f(x)$, $J(x^*)$ la jacobienne évaluée en x^*, et λ_i ses valeurs propres:

- *si $\forall i$, $Re(\lambda_i) < 0$, alors $x^\star$ est asymptotiquement stable*
- *si $\exists i$, $Im(\lambda_i) > 0$, alors $x^\star$ est instable*

L'idée est d'évaluer le linéarisé du système non linéaire autour d'un point d'équilibre

Tant que le linéarisé est "non nul", le théorème est constructif, sinon il ne l'est plus

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (3)

Calculons la Jacobienne :

$$J(x,y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} r - cy & -cx \\ by & bx - m \end{pmatrix}$$

D'où :

$$J(0,0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

et $\lambda_1 = r > 0$, $\lambda_2 = -m < 0$: $(0,0)$ est instable (point selle / col)

Et :

$$J\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cm}{b} \\ \frac{br}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

et $Tr(J^*) = 0$, $Det(J^*) = rm > 0$: les valeurs propres sont imaginaires pures ; la méthode ne permet pas de conclure à la stabilité asymptotique ou l'instabilité de (x^*, y^*)

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (3)

Calculons la Jacobienne :

$$J(x,y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} r - cy & -cx \\ by & bx - m \end{pmatrix}$$

D'où :

$$J(0,0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

et $\lambda_1 = r > 0$, $\lambda_2 = -m < 0$: $(0,0)$ est instable (point selle / col)

Et :

$$J\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cm}{b} \\ \frac{br}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

et $Tr(J^*) = 0$, $Det(J^*) = rm > 0$: les valeurs propres sont imaginaires pures ; la méthode ne permet pas de conclure à la stabilité asymptotique ou l'instabilité de (x^*, y^*)

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (3)

Calculons la Jacobienne :

$$J(x,y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} r - cy & -cx \\ by & bx - m \end{pmatrix}$$

D'où :

$$J(0,0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

et $\lambda_1 = r > 0$, $\lambda_2 = -m < 0$: $(0,0)$ est instable (point selle / col)

Et :

$$J\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cm}{b} \\ \frac{br}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

et $Tr(J^*) = 0$, $Det(J^*) = rm > 0$: les valeurs propres sont imaginaires pures ; la méthode ne permet pas de conclure à la stabilité asymptotique ou l'instabilité de (x^*, y^*)

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (4)

Intégrale première : le long d'une trajectoire:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{(bx-m)y}{(r-cy)x}$$

En séparant les variables il vient, le long d'une trajectoire :

$$r\int_{y_0}^{y(t)} \left(\frac{1}{y} - \frac{c}{r}\right) dy = m\int_{x_0}^{x(t)} \left(\frac{b}{m} - \frac{1}{x}\right) dx$$

i.e. :

$$r\log\left(\frac{y}{y_0}\right) - c(y-y_0) = b(x-x_0) - m\log\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

D'où, le long d'une trajectoire :

$$cy - r\log(y) + bx - m\log(x) = cy_0 - r\log(y_0) + bx_0 - m\log(x_0) = \text{constante}$$

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (4)

Intégrale première : le long d'une trajectoire:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{(bx-m)y}{(r-cy)x}$$

En séparant les variables il vient, le long d'une trajectoire :

$$r\int_{y_0}^{y(t)} \left(\frac{1}{y} - \frac{c}{r}\right) dy = m\int_{x_0}^{x(t)} \left(\frac{b}{m} - \frac{1}{x}\right) dx$$

i.e. :

$$r\log\left(\frac{y}{y_0}\right) - c(y-y_0) = b(x-x_0) - m\log\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

D'où, le long d'une trajectoire :

$$cy - r\log(y) + bx - m\log(x) = cy_0 - r\log(y_0) + bx_0 - m\log(x_0) = \text{constante}$$

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (4)

Intégrale première : le long d'une trajectoire:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{(bx - m)y}{(r - cy)x}$$

En séparant les variables il vient, le long d'une trajectoire :

$$r \int_{y_0}^{y(t)} \left(\frac{1}{y} - \frac{c}{r} \right) dy = m \int_{x_0}^{x(t)} \left(\frac{b}{m} - \frac{1}{x} \right) dx$$

i.e. :

$$r \log \left(\frac{y}{y_0} \right) - c(y - y_0) = b(x - x_0) - m \log \left(\frac{x}{x_0} \right)$$

D'où, le long d'une trajectoire :

$$cy - r \log(y) + bx - m \log(x) = cy_0 - r \log(y_0) + bx_0 - m \log(x_0) = \text{constante}$$

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (5)

Intégrale première :

$$H(x, y) = cy - r\log(y) + bx - m\log(x) = \text{constante}$$

Extrema de $H(x, y)$, le gradient :

$$\nabla(H(x,y)) = DH(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - \frac{m}{x} \\ c - \frac{r}{y} \end{pmatrix}$$

s'annule uniquement en (x^*, y^*) qui est le seul extremum de $H(x, y)$

Est ce un maximum/minimum ? La Hessienne $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, évaluée en (x^*, y^*) :

$$D^2H(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{m}{x^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{r}{y^{*2}} \end{pmatrix}$$

est définie positive : (x^*, y^*) est un minimum de $H(x, y)$

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (5)

Intégrale première :

$$H(x,y) = cy - r\log(y) + bx - m\log(x) = \text{constante}$$

Extrema de $H(x,y)$, le gradient :

$$\nabla(H(x,y)) = DH(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - \frac{m}{x} \\ c - \frac{r}{y} \end{pmatrix}$$

s'annule uniquement en (x^*, y^*) qui est le seul extremum de $H(x,y)$

Est ce un maximum/minimum ? La Hessienne $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, évaluée en (x^*, y^*) :

$$D^2H(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{m}{x^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{r}{y^{*2}} \end{pmatrix}$$

est définie positive : (x^*, y^*) est un minimum de $H(x,y)$

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (5)

Intégrale première :

$$H(x,y) = cy - r\log(y) + bx - m\log(x) = \text{constante}$$

Extrema de $H(x,y)$, le gradient :

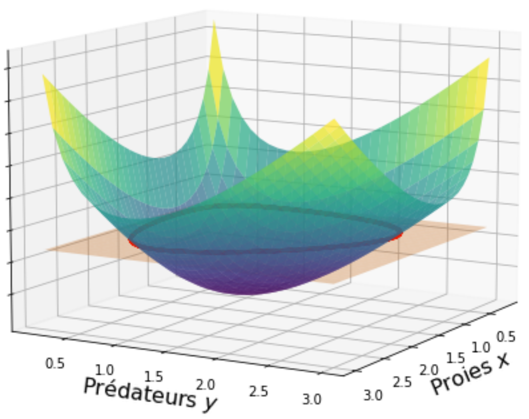
$$\nabla(H(x,y)) = DH(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - \frac{m}{x} \\ c - \frac{r}{y} \end{pmatrix}$$

s'annule uniquement en (x^*, y^*) qui est le seul extremum de $H(x,y)$

Est ce un maximum/minimum ? La Hessienne $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, évaluée en (x^*, y^*) :

$$D^2H(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{m}{x^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{r}{y^{*2}} \end{pmatrix}$$

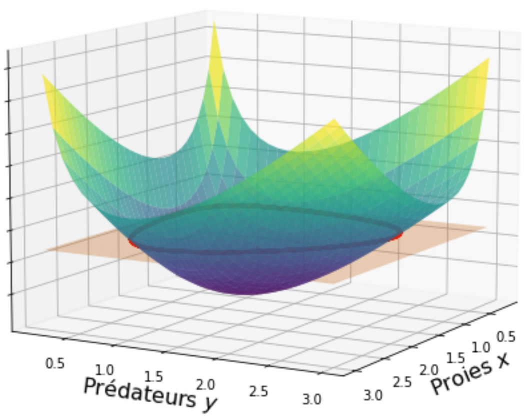
est définie positive : (x^*, y^*) est un minimum de $H(x,y)$



les orbites sont des courbes fermées qui entourent (x^*, y^*) ; cet équilibre est un centre

les trajectoires sont périodiques, d'une amplitude déterminée par la condition initiale

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (6)



les orbites sont des courbes fermées qui entourent (x^*, y^*) ; cet équilibre est un centre

les trajectoires sont périodiques, d'une amplitude déterminée par la condition initiale

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (7)

Valeur moyenne : séparation des variables et intégration de $\dot{x}$ sur une période T

$$\int_{x(t)}^{x(t+T)} \frac{dx}{x} = \int_{t}^{t+T} r - cy(\tau)d\tau$$

D'où :

$$\log\left(\frac{x(t+T)}{x(t)}\right) = 0 = rT - c\int_{t}^{t+T} y(\tau)d\tau$$

Ainsi :

$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} y(\tau)d\tau = \frac{r}{c} = y^*$$

On montre de même (en utilisant $\dot{y}$) que :

$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} x(\tau)d\tau = \frac{m}{c} = x^*$$

Intéret pour étudier l'influence de prélèvements/poisons sur le système

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (7)

Valeur moyenne : séparation des variables et intégration de $\dot{x}$ sur une période T

$$\int_{x(t)}^{x(t+T)} \frac{dx}{x} = \int_t^{t+T} r - cy(\tau)d\tau$$

D'où :

$$\log\left(\frac{x(t+T)}{x(t)}\right) = 0 = rT - c\int_t^{t+T} y(\tau)d\tau$$

Ainsi :

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} y(\tau)d\tau = \frac{r}{c} = y^*$$

On montre de même (en utilisant $\dot{y}$) que :

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(\tau)d\tau = \frac{m}{c} = x^*$$

Intéret pour étudier l'influence de prélèvements/poisons sur le système

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (7)

Valeur moyenne : séparation des variables et intégration de $\dot{x}$ sur une période T

$$\int_{x(t)}^{x(t+T)} \frac{dx}{x} = \int_{t}^{t+T} r - cy(\tau)d\tau$$

D'où :

$$\log\left(\frac{x(t+T)}{x(t)}\right) = 0 = rT - c\int_{t}^{t+T} y(\tau)d\tau$$

Ainsi :

$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} y(\tau)d\tau = \frac{r}{c} = y^*$$

On montre de même (en utilisant $\dot{y}$) que :

$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} x(\tau)d\tau = \frac{m}{c} = x^*$$

Intéret pour étudier l'influence de prélèvements/poisons sur le système

Modèle Proies-Prédateurs de Lotka Volterra (7)

Valeur moyenne : séparation des variables et intégration de $\dot{x}$ sur une période T

$$\int_{x(t)}^{x(t+T)} \frac{dx}{x} = \int_{t}^{t+T} r - cy(\tau)d\tau$$

D'où :

$$\log\left(\frac{x(t+T)}{x(t)}\right) = 0 = rT - c\int_{t}^{t+T} y(\tau)d\tau$$

Ainsi :

$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} y(\tau)d\tau = \frac{r}{c} = y^*$$

On montre de même (en utilisant $\dot{y}$) que :

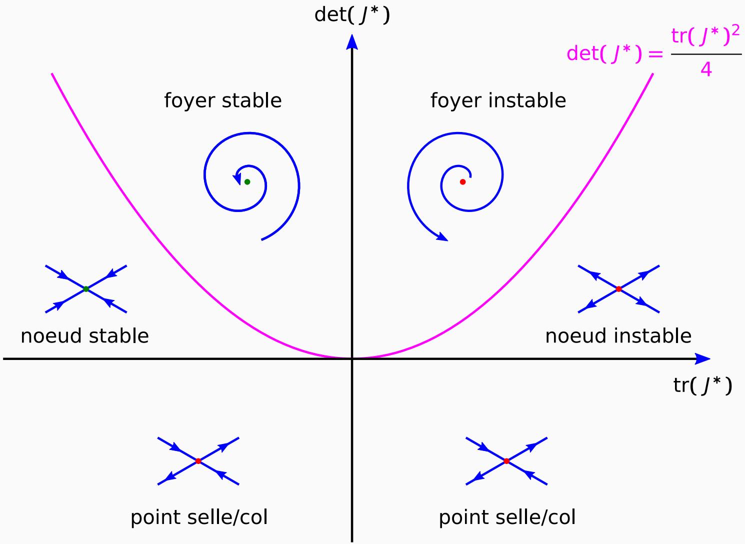
$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} x(\tau)d\tau = \frac{m}{c} = x^*$$

Intéret pour étudier l'influence de prélèvements/poisons sur le système

Interlude : typologie des points d'équilibre

Typologie des points d'équilibre en dimension 2

En dimension 2, la trace et le déterminant de la jacobienne évaluée en un équilibre permettent de déterminer la stabilité et le type d'équilibre



Modèle de compétition de Lotka Volterra

Modèle de Lotka Volterra de compétition (1)

Extension du modèle logistique à deux espèces

$$\dot{x} = r_x\, x \left(1 - \frac{x + c_{x,y}\, y}{K_x}\right),$$
$$\dot{y} = r_y\, y \left(1 - \frac{y + c_{y,x}\, x}{K_y}\right).$$

Adimensionalisation partielle: $\mathbf{x} = \frac{x}{K_x}$, $\mathbf{y} = \frac{y}{K_y}$

$$\dot{\mathbf{x}} = r_x\, \frac{x}{K_x} \left(1 - \frac{x}{K_x} - \frac{c_{x,y}}{K_x} y\right) = r_x \mathbf{x} \left(1 - \mathbf{x} - \frac{c_{x,y} K_y}{K_x} \mathbf{y}\right),$$
$$\dot{\mathbf{y}} = r_y\, \frac{y}{K_y} \left(1 - \frac{y}{K_y} - \frac{c_{y,x}}{K_y} x\right) = r_y \mathbf{y} \left(1 - \mathbf{y} - \frac{c_{y,x} K_x}{K_y} \mathbf{x}\right).$$

Soit:

$$\dot{x} = r_x\, x(1 - x - a_{x,y}\, y),$$
$$\dot{y} = r_y\, y(1 - y - a_{y,x}\, x).$$

Modèle de Lotka Volterra de compétition (1)

Extension du modèle logistique à deux espèces

$$\dot{x} = r_x\, x \left(1 - \frac{x + c_{x,y}\, y}{K_x}\right),$$
$$\dot{y} = r_y\, y \left(1 - \frac{y + c_{y,x}\, x}{K_y}\right).$$

Adimensionalisation partielle: $\mathbf{x} = \dfrac{x}{K_x},\ \mathbf{y} = \dfrac{y}{K_y}$

$$\dot{\mathbf{x}} = r_x\, \frac{x}{K_x} \left(1 - \frac{x}{K_x} - \frac{c_{x,y}}{K_x} y\right) = r_x \mathbf{x} \left(1 - \mathbf{x} - \frac{c_{x,y} K_y}{K_x} \mathbf{y}\right),$$
$$\dot{\mathbf{y}} = r_y\, \frac{y}{K_y} \left(1 - \frac{y}{K_y} - \frac{c_{y,x}}{K_y} x\right) = r_y \mathbf{y} \left(1 - \mathbf{y} - \frac{c_{y,x} K_x}{K_y} \mathbf{x}\right).$$

Soit:

$$\dot{x} = r_x\, x(1 - x - a_{x,y}\, y),$$
$$\dot{y} = r_y\, y(1 - y - a_{y,x}\, x).$$

Modèle de Lotka Volterra de compétition (1)

Extension du modèle logistique à deux espèces

$$\dot{x} = r_x\, x\left(1 - \frac{x + c_{x,y}\, y}{K_x}\right),$$
$$\dot{y} = r_y\, y\left(1 - \frac{y + c_{y,x}\, x}{K_y}\right).$$

Adimensionalisation partielle: $\mathbf{x} = \dfrac{x}{K_x},\ \mathbf{y} = \dfrac{y}{K_y}$

$$\dot{\mathbf{x}} = r_x\,\frac{x}{K_x}\left(1 - \frac{x}{K_x} - \frac{c_{x,y}}{K_x}y\right) = r_x\mathbf{x}\left(1 - \mathbf{x} - \frac{c_{x,y}K_y}{K_x}\mathbf{y}\right),$$
$$\dot{\mathbf{y}} = r_y\,\frac{y}{K_y}\left(1 - \frac{y}{K_y} - \frac{c_{y,x}}{K_y}x\right) = r_y\mathbf{y}\left(1 - \mathbf{y} - \frac{c_{y,x}K_x}{K_y}\mathbf{x}\right).$$

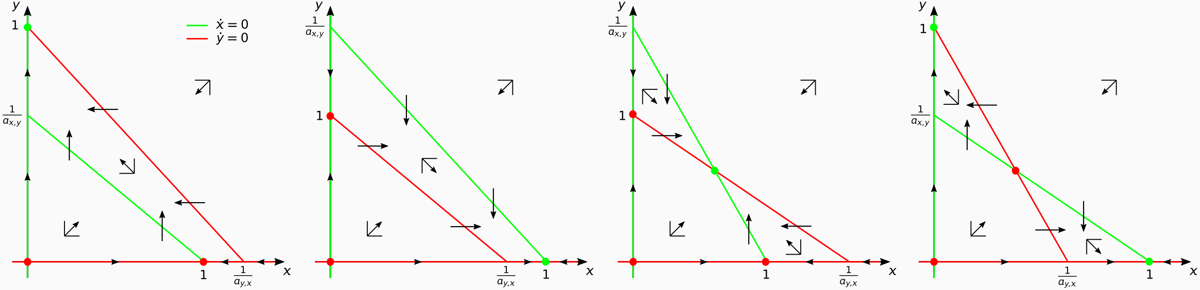
Soit:

$$\dot{x} = r_x\, x(1 - x - a_{x,y}\, y),$$
$$\dot{y} = r_y\, y(1 - y - a_{y,x}\, x).$$

Modèle de Lotka Volterra de compétition (2)

Isoclines nulles :

$$\dot{x} = 0 \iff x = 0 \ \text{ ou } \ x = 1 - a_{x,y}\, y,$$
$$\dot{y} = 0 \iff y = 0 \ \text{ ou } \ y = 1 - a_{y,x}\, x,$$



exclusion compétitive de x ou de y, co-existence des espèces, ou bi-stabilité

Modèle de Lotka Volterra de compétition (3)

Par le calcul

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} r_x(1-2x-a_{x,y}\,y) & -r_x a_{x,y}\,x \\ -r_y a_{y,x}\,y & r_y(1-2y-a_{y,x}\,x) \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ est instable}$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -r_x & -r_x a_{x,y} \\ 0 & r_y(1-a_{y,x}) \end{pmatrix} \Rightarrow (1,0) \text{ est as. stable si } a_{y,x} > 1,\ \text{instable si } a_{y,x} < 1$$

$$J(0,1) = \begin{pmatrix} r_x(1-a_{x,y}) & 0 \\ -r_y a_{y,x} & -r_y \end{pmatrix} \Rightarrow (0,1) \text{ est as. stable si } a_{x,y} > 1,\ \text{instable si } a_{x,y} < 1$$

Modèle de Lotka Volterra de compétition (3)

Par le calcul

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} r_x(1-2x-a_{x,y}\,y) & -r_x a_{x,y}\,x \\ -r_y a_{y,x}\,y & r_y(1-2y-a_{y,x}\,x) \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ est instable}$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -r_x & -r_x a_{x,y} \\ 0 & r_y(1-a_{y,x}) \end{pmatrix} \Rightarrow (1,0) \text{ est as. stable si } a_{y,x} > 1, \text{ instable si } a_{y,x} < 1$$

$$J(0,1) = \begin{pmatrix} r_x(1-a_{x,y}) & 0 \\ -r_y a_{y,x} & -r_y \end{pmatrix} \Rightarrow (0,1) \text{ est as. stable si } a_{x,y} > 1, \text{ instable si } a_{x,y} < 1$$

Modèle de Lotka Volterra de compétition (3)

Par le calcul

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r_x(1 - 2x - a_{x,y}\, y) & -r_x a_{x,y}\, x \\ -r_y a_{y,x}\, y & r_y(1 - 2y - a_{y,x}\, x) \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{pmatrix} \Rightarrow (0, 0) \text{ est instable}$$

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} -r_x & -r_x a_{x,y} \\ 0 & r_y(1 - a_{y,x}) \end{pmatrix} \Rightarrow (1, 0) \text{ est as. stable si } a_{y,x} > 1,\ \text{instable si } a_{y,x} < 1$$

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} r_x(1 - a_{x,y}) & 0 \\ -r_y a_{y,x} & -r_y \end{pmatrix} \Rightarrow (0, 1) \text{ est as. stable si } a_{x,y} > 1,\ \text{instable si } a_{x,y} < 1$$

Modèle de Lotka Volterra de compétition (3)

Par le calcul

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} r_x(1-2x-a_{x,y}\,y) & -r_x a_{x,y}\,x \\ -r_y a_{y,x}\,y & r_y(1-2y-a_{y,x}\,x) \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ est instable}$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -r_x & -r_x a_{x,y} \\ 0 & r_y(1-a_{y,x}) \end{pmatrix} \Rightarrow (1,0) \text{ est as. stable si } a_{y,x} > 1,\ \text{instable si } a_{y,x} < 1$$

$$J(0,1) = \begin{pmatrix} r_x(1-a_{x,y}) & 0 \\ -r_y a_{y,x} & -r_y \end{pmatrix} \Rightarrow (0,1) \text{ est as. stable si } a_{x,y} > 1,\ \text{instable si } a_{x,y} < 1$$

Modèle de Lotka Volterra de compétition (4)

Le point d'équilibre de co-existence (x^*, y^*) lorsqu'il existe vérifie

$$x^* = 1 - a_{x,y}\, y^* \in (0,1) \text{ et } y^* = 1 - a_{y,x}\, x^* \in (0,1)$$

i.e.

$$x^* = \frac{1 - a_{x,y}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}} \text{ et } y^* = \frac{1 - a_{y,x}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}}$$

donc, pour que (x^*, y^*) existe, il faut que $a_{i,j} > 1$ ou < 1, $\forall i, j$

Par ailleurs

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r_x(1 - 2x^* - a_{x,y}\, y^*) & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & r_y(1 - 2y^* - a_{y,x}\, x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_x\, x^* & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & -r_y\, y^* \end{pmatrix}$$

Donc : $\mathrm{Tr}(J(x^*, y^*)) = -r_x\, x^* - r_y y^* < 0$ (lorsque (x^*, y^*) existe)

Et : $\mathrm{Det}(J(x^*, y^*)) = r_x\, x^* r_y\, y^* - r_y a_{y,x}\, y^* r_x a_{x,y}\, x^* = r_x r_y x^* y^* (1 - a_{x,y}a_{y,x})$

- si $a_{i,j} > 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est instable, c'est un point selle/col
- si $a_{i,j} < 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est asymptotiquement stable

Modèle de Lotka Volterra de compétition (4)

Le point d'équilibre de co-existence (x^*, y^*) lorsqu'il existe vérifie

$$x^* = 1 - a_{x,y}\, y^* \in (0,1) \ \text{ et } \ y^* = 1 - a_{y,x}\, x^* \in (0,1)$$

i.e.

$$x^* = \frac{1 - a_{x,y}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}} \ \text{ et } \ y^* = \frac{1 - a_{y,x}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}}$$

donc, pour que (x^*, y^*) existe, il faut que $a_{i,j} > 1$ ou < 1, $\forall i, j$

Par ailleurs

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r_x(1 - 2x^* - a_{x,y}\, y^*) & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & r_y(1 - 2y^* - a_{y,x}\, x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_x\, x^* & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & -r_y\, y^* \end{pmatrix}$$

Donc : $\mathrm{Tr}(J(x^*, y^*)) = -r_x\, x^* - r_y y^* < 0$ (lorsque (x^*, y^*) existe)

Et : $\mathrm{Det}(J(x^*, y^*)) = r_x\, x^* r_y\, y^* - r_y a_{y,x}\, y^* r_x a_{x,y}\, x^* = r_x r_y x^* y^* (1 - a_{x,y}a_{y,x})$

- si $a_{i,j} > 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est instable, c'est un point selle/col
- si $a_{i,j} < 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est asymptotiquement stable

Modèle de Lotka Volterra de compétition (4)

Le point d'équilibre de co-existence (x^*, y^*) lorsqu'il existe vérifie

$$x^* = 1 - a_{x,y}\, y^* \in (0,1) \;\text{ et }\; y^* = 1 - a_{y,x}\, x^* \in (0,1)$$

i.e.

$$x^* = \frac{1 - a_{x,y}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}} \;\text{ et }\; y^* = \frac{1 - a_{y,x}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}}$$

donc, pour que (x^*, y^*) existe, il faut que $a_{i,j} > 1$ ou < 1, $\forall i, j$

Par ailleurs

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r_x(1 - 2x^* - a_{x,y}\, y^*) & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & r_y(1 - 2y^* - a_{y,x}\, x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_x\, x^* & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & -r_y\, y^* \end{pmatrix}$$

Donc : $\mathrm{Tr}(J(x^*, y^*)) = -r_x\, x^* - r_y y^* < 0$ (lorsque (x^*, y^*) existe)

Et : $\mathrm{Det}(J(x^*, y^*)) = r_x\, x^* r_y\, y^* - r_y a_{y,x}\, y^* r_x a_{x,y}\, x^* = r_x r_y x^* y^* (1 - a_{x,y}a_{y,x})$

- si $a_{i,j} > 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est instable, c'est un point selle/col
- si $a_{i,j} < 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est asymptotiquement stable

Modèle de Lotka Volterra de compétition (4)

Le point d'équilibre de co-existence (x^*, y^*) lorsqu'il existe vérifie

$$x^* = 1 - a_{x,y}\, y^* \in (0,1) \;\text{ et }\; y^* = 1 - a_{y,x}\, x^* \in (0,1)$$

i.e.

$$x^* = \frac{1 - a_{x,y}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}} \;\text{ et }\; y^* = \frac{1 - a_{y,x}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}}$$

donc, pour que (x^*, y^*) existe, il faut que $a_{i,j} > 1$ ou $< 1, \ \forall i, j$

Par ailleurs

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r_x(1 - 2x^* - a_{x,y}\, y^*) & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & r_y(1 - 2y^* - a_{y,x}\, x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_x\, x^* & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & -r_y\, y^* \end{pmatrix}$$

Donc : $\mathrm{Tr}(J(x^*, y^*)) = -r_x\, x^* - r_y y^* < 0$ (lorsque (x^*, y^*) existe)

Et : $\mathrm{Det}(J(x^*, y^*)) = r_x\, x^* r_y\, y^* - r_y a_{y,x}\, y^* r_x a_{x,y}\, x^* = r_x r_y x^* y^* (1 - a_{x,y}a_{y,x})$

- si $a_{i,j} > 1, \ \forall i, j$ alors (x^*, y^*) est instable, c'est un point selle/col
- si $a_{i,j} < 1, \ \forall i, j$ alors (x^*, y^*) est asymptotiquement stable

Modèle de Lotka Volterra de compétition (4)

Le point d'équilibre de co-existence (x^*, y^*) lorsqu'il existe vérifie

$$x^* = 1 - a_{x,y}\, y^* \in (0,1) \;\text{ et }\; y^* = 1 - a_{y,x}\, x^* \in (0,1)$$

i.e.

$$x^* = \frac{1 - a_{x,y}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}} \;\text{ et }\; y^* = \frac{1 - a_{y,x}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}}$$

donc, pour que (x^*, y^*) existe, il faut que $a_{i,j} > 1$ ou < 1, $\forall i, j$

Par ailleurs

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r_x(1 - 2x^* - a_{x,y}\, y^*) & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & r_y(1 - 2y^* - a_{y,x}\, x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_x\, x^* & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & -r_y\, y^* \end{pmatrix}$$

Donc : $\mathrm{Tr}(J(x^*, y^*)) = -r_x\, x^* - r_y y^* < 0$ (lorsque (x^*, y^*) existe)

Et : $\mathrm{Det}(J(x^*, y^*)) = r_x\, x^* r_y\, y^* - r_y a_{y,x}\, y^* r_x a_{x,y}\, x^* = r_x r_y x^* y^* (1 - a_{x,y}a_{y,x})$

- si $a_{i,j} > 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est instable, c'est un point selle/col
- si $a_{i,j} < 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est asymptotiquement stable

Modèle de Lotka Volterra de compétition (4)

Le point d'équilibre de co-existence (x^*, y^*) lorsqu'il existe vérifie

$$x^* = 1 - a_{x,y}\, y^* \in (0,1) \;\text{ et }\; y^* = 1 - a_{y,x}\, x^* \in (0,1)$$

i.e.

$$x^* = \frac{1 - a_{x,y}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}} \;\text{ et }\; y^* = \frac{1 - a_{y,x}}{1 - a_{x,y}a_{y,x}}$$

donc, pour que (x^*, y^*) existe, il faut que $a_{i,j} > 1$ ou < 1, $\forall i, j$

Par ailleurs

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r_x(1 - 2x^* - a_{x,y}\, y^*) & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & r_y(1 - 2y^* - a_{y,x}\, x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_x\, x^* & -r_x a_{x,y}\, x^* \\ -r_y a_{y,x}\, y^* & -r_y\, y^* \end{pmatrix}$$

Donc : $\mathrm{Tr}(J(x^*, y^*)) = -r_x\, x^* - r_y y^* < 0$ (lorsque (x^*, y^*) existe)

Et : $\mathrm{Det}(J(x^*, y^*)) = r_x\, x^* r_y\, y^* - r_y a_{y,x}\, y^* r_x a_{x,y}\, x^* = r_x r_y x^* y^* (1 - a_{x,y}a_{y,x})$

- si $a_{i,j} > 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est instable, c'est un point selle/col
- si $a_{i,j} < 1$, $\forall i, j$ alors (x^*, y^*) est asymptotiquement stable

Fin du cours sur

les modèles de Lotka Volterra