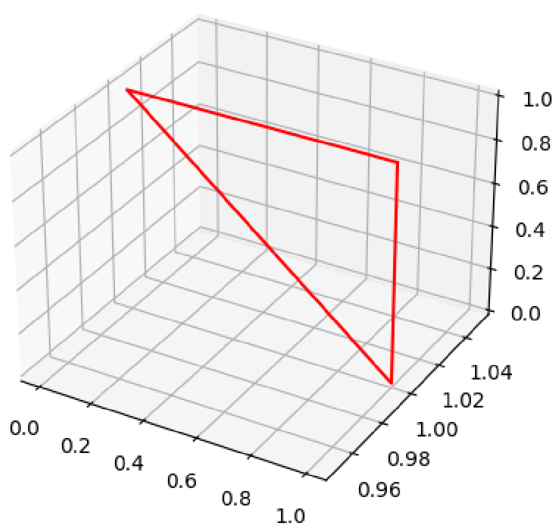
Описание алгоритмов

Приложение основано на использовании классических определений из аналитической геометрии и состоит из нескольких классов, позволяющих создавать различные примитивы, по типу плоскостей, линий и изменять их.

STL файл

Структура формата STL ASCII

Данный формат используется для описания моделей с помощью треугольников. У каждого треугольника есть нормаль и три координаты вершин треугольника. Нормаль обычно смотрит во внешнюю часть фигуры. При этом порядок координат говорит нам сторону, в которую смотрит вектор нормали (для этого используется правило правого винта).




```
solid ASCII
facet normal 0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00
    outer loop
      vertex   1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00
      vertex   1.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00
```

```
      vertex   0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00
    endloop
  endfacet
endsolid
```

solid - название файла.

facet normal - координаты нормали треугольника (она всегда исходит из нуля).

vertex - координаты вершины треугольника.

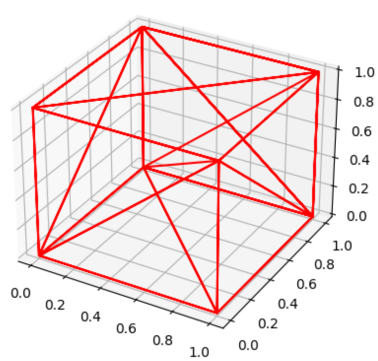
Класс Parser_stl

Функция parse_stl(file) принимает в себя stl файл asc2 формата (текстовый) и возвращает `triangles_array и name` .

```
triangles_array = [[n1, n2, n3],
                                        x1, y1, z1],
                                          x2, y2, z2],
                                          x3, y3, z3]]
```

name - имя, которое стоит после solid

Функция show(`triangles`) принимает в себя `triangles_array` , описанный выше и рисует фигуру из треугольников.



Класс линии Line

Этот класс содержит шесть коэффициентов из канонического уравнения линии:

$$\frac{x-a}{p1} = \frac{y-b}{p2} = \frac{z-c}{p3}$$

a, b и c - это координаты точки, через которую проходит прямая.

p1, p2, p3 - координаты вектора, который указывает направление прямой. Начало вектора исходит всегда из нуля. В моей программе используется единичный вектор.

Создание линии по двум точкам

Функция `line_create_from_points(self, point1, point2) -> None:` принимает две точки списком или объектом класса numpy.ndarray:

$$[x_1,\ y_1,\ z_1],\ [x_2,\ y_2,\ z_2]$$

В качестве коэффициентов a, b, c возьмем координаты первой точки (нет разницы, брать первую или вторую точку).

В качестве направляющего вектора возьмем следующий вектор, получаемый из двух точек:

$$p_1 = x_2 - x_1,\ p_2 = y_2 - y_1,\ p_3 = z_2 - z_1$$

$$\vec{P}\{p_1\ ,p_2,\ p_3\}$$

Далее необходимо нормировать вектор:

$$|\vec{P}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

И разделить каждую координату на норму вектора:

$$p_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{|\vec{P}|}}$$

$$p_2 = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{|\vec{P}|}}$$

$$p_3 = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{|\vec{P}|}}$$

Создание линии по двум плоскостям

Как упоминалось выше, класс линии состоит из координат точки, через которую она проходит и из координат вектора, начало которого исходит из нуля системы координат и конец в координатах , указанных в нижней части канонического уравнения.

Для начала нам необходимо найти вектор, который будет задавать направление прямой, а потом найти любую точку, через которую проходит прямая, и вписать ее коэффициенты в наши параметры прямой.

Для начала нам необходимо убедиться, что две плоскости не параллельны друг другу или не совпадают, поэтому проверяем векторы нормали на коллинеарность векторным произведением, если при перемножении получается нулевой вектор - плоскости параллельны и смысла искать пересечение этих плоскостей - нет. При этом это же векторное произведение мы будем использовать для поиска координат вектора направления прямой.

Пусть имеется две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Эти плоскости имеют такие вектора нормалей:

$$\vec{N}_1\{A_1,\ B_1,\ C_1\}$$

$$\vec{N}_2\{A_2,\ B_2,\ C_2\}$$

Их векторное произведение будет равно:

$$\vec{P} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$
$$= (B_1C_2 - C_1B_2)\vec{i} + (C_1A_2 - A_1C_2)\vec{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{k}$$

Если $B_1C_2 - C_1B_2 = 0,\ C_1A_2 - A_1C_2 = 0,\ A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то $\vec{N}_1 || \vec{N}_2$ и плоскости параллельны, либо совпадают.

Далее мы должны нормировать вектор:

$\vec{P}_n = \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|} = \{\frac{B_1C_2 - C_1B_2}{\sqrt{(B_1C_2 - C_1B_2)^2 + (C_1A_2 - A_1C_2)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2}}, \frac{C_1A_2 - A_1C_2}{\sqrt{(B_1C_2 - C_1B_2)^2 + (C_1A_2 - A_1C_2)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2}}, \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{(B_1C_2 - C_1B_2)^2 + (C_1A_2 - A_1C_2)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2}}\}$

Если вектор $\vec{P} \neq \vec{0}$ (равносильно $\vec{P} \neq \{0,\ 0,\ 0\}$), то координаты этого вектора идут в коэффициенты $p_1,\ p_2,\ p_3$ канонического уравнения прямой.

Далее, необходимо вычислить координаты точки, которая будет принадлежать пересечению двух плоскостей. Поместим уравнения плоскостей в систему:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Можно заметить, что у нас два уравнения и три неизвестных. Для того, чтобы выйти из ситуации мы будем приравнивать каждую из координат нулю и искать, получится ли найти другие две.

Пускай z = 0, тогда:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 \cdot 0 + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 \cdot 0 + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases}$$

Далее разделим оба уравнения на A_1 и A_2 соответственно:

$$\begin{cases} \frac{A_1x+B_1y+D_1}{A_1} = 0 \\ \frac{A_2x+B_2y+D_2}{A_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{B_1}{A_1}y + \frac{D_1}{A_1} = 0 \\ x + \frac{B_2}{A_2}y + \frac{D_2}{A_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{B_1y+D_1}{A_1} = 0 \\ x + \frac{B_2y+D_2}{A_2} = 0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, тогда мы получим следующие уравнения:

$$\frac{B_1y + D_1}{A_1} = \frac{B_2y + D_2}{A_2}$$

$$\begin{gathered} B_1A_2y + D_1A_2 = B_2A_1y + D_2A_1 \\ B_1A_2y - B_2A_1y = D_2A_1 - D_1A_2 \\ y(B_1A_2 - B_2A_1) = D_2A_1 - D_1A_2 \\ y = \frac{D_2A_1 - D_1A_2}{B_1A_2 - B_2A_1} \end{gathered}$$

Тогда координата x вычисляется следующим образом:

$$x = -\frac{B_1y + D_1}{A_1} = -\frac{B_2y + D_2}{A_2}$$

Класс плоскости Plane

Данный класс содержит четыре коэффициента a, b, c, d из канонического уравнения плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Создание плоскости из массива треугольника

Функция `create_plane_from_triangle(triangle, point=1) -> None:`

Данная функция принимает массив 4x3. Строка 1 - координаты вектора нормали (пишутся координаты только второй точки, первая исходит из нуля).
Строки 2, 3, 4 - координаты вершин треугольника формата [x, y, z]
На основе четырех точек создается плоскость и коэффициенты a, b, c, d записываются в поля объекта класса Plane.

Математика

На входе мы имеем:

$\vec{N}\{A,\ B,\ C\},\ P_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ P_2(x_2,\ y_2,\ z_2),\ P_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$, где N - вектор нормали, а $P_1,\ P_2,\ P_3$ - координаты вершин треугольников.

Координаты с вектора $\vec{N}$ идут в коэффициенты плоскости Plane: $Ax + By + Cz + D = 0$

Для вычисления коэффициента D выразим его:

$$D = -Ax - By - Cz$$

В качестве $x,\ y,\ z$ возьмем любую точку из треугольника, например P_1. Это сработает, так как $P_1 \in Plane$. Тогда получается:

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$$

Функции проекций

Данные функции используются для различных алгоритмов, когда мы знаем значения двух координат из трех в рамках плоскости (если бы это был класс криволинейной поверхности, то в рамках нее) и нам нужно найти координату треьей координаты, зная все коэффициенты канонического уравнения плоскости.

Общее описание на примере нахождения точки z на плоскости по координатам x и y

Данные функции ищут по двум координатам третью, на основе заданной плоскости.

Логика работает следующим образом, напишем снова уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Выражаем одну из координат через остальные члены уравнения, например z в функции `projection_z(self, point_x, point_y):`

$$z = \frac{-A \cdot x - B \cdot y - D}{C}$$

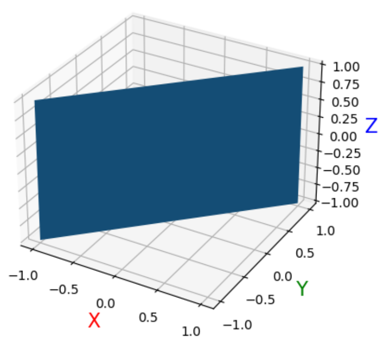
Но здесь можно заметить, что происходит деление на C. Если C = 0, то возникает неопределенность в определении Z. Такое происходит при параллельности плоскости оси Z

Только C = 0.

Примем вектора $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, где $\vec{x}\{1,\ 0,\ 0\},\ \vec{y}\{0,\ 1,\ 0\},\ \vec{z}\{0,\ 0,\ 1\}$ являются единичными векторами и рассмотрим различные случаи расположения плоскости относительно осей.

Пускай $Plane||\vec{z}$. В таком случае $\vec{N} \cdot \vec{z} = 0$. Надо заметить, что под знаком "·" подразумевается скалярное умножение векторов.

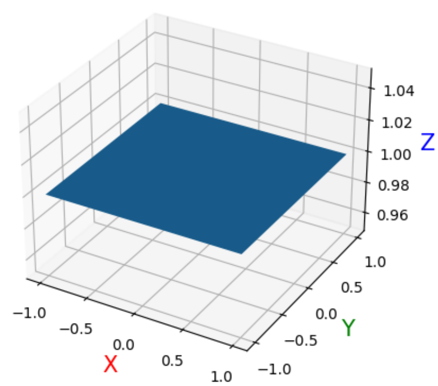
$$\vec{N} \cdot \vec{z} = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 = C$$



Из вышеприведенного уравнения видно, что в случае, если коэффициент C станет равен нулю, то плоскость станет параллельной оси z или будет с ней совпадать, а определение координаты z по точкам x, y станет неопределенным из-за деления на нуль. В этом случае функция возвращает `"Uncertainty z".` Так происходит, потому что в этом случае задаются ограничения на точки x и y. Если в функцию поданы точки, которые не лежат на плоскости, то проекцию по оси z будет невозможно найти, так как эту проекцию мы проводим параллельно оси z и плоскости, мы можем либо никогда не попасть в плоскость, либо проводить ее внутри плоскости. В данном случае мы можем выбирать любой z при получении `"Uncertainty z"` на выходе функции, при это также надо проверить, правильно подавались точки x и y, может быть в этом случае проекцию будет не найти.

B = 0 и A = 0.

В данном случае вектор $\vec{N}$ будет иметь одно фиксированное положение и иметь координаты $\vec{N}\{0,\ 0,\ 1\}$ (В моем приложении в качестве нормалей используются только единичные вектора).



Тогда z можно будет найти следующим образом:

$$z = \frac{-A \cdot x - B \cdot y - D}{C} = \frac{-0 \cdot x - 0 \cdot y - D}{C} = -\frac{D}{C}$$

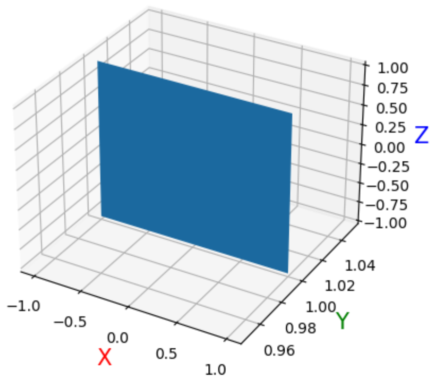
Нахождение точки y по координатам x и z

Соответственно в `projection_y(self, point_x, point_z)` y находится также:

$$y = \frac{-A \cdot x - C \cdot z - D}{B},\ B \neq 0$$

В случае A = 0 и C = 0:

$$y = -\frac{D}{B}$$



Нахождение точки x по координатам x и z

`projection_x(self, point_y, point_z):`

$$x = \frac{-B \cdot y - C \cdot z - D}{A}$$

В случае Z = 0 и C = 0:

$$x = -\frac{D}{A}$$