ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 1

INSIEMI NUMERICI

NUMERI NATURALI: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,\dots\}$

NUMERI INTERI: $\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}$

NUMERI RAZIONALI: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \underset{\text{TALE CHE}}{:} m,n\in\mathbb{Z} \text{ e } n\neq 0\right\}$

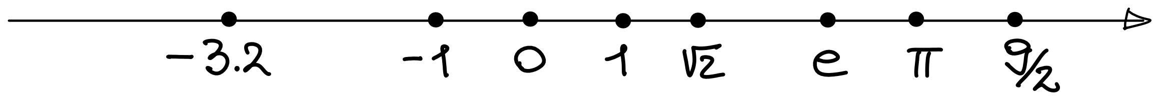
NUMERI REALI:

$$\mathbb{R}=\Big\{\underbrace{n.c_1c_2c_3c_4\dots}_{\text{rappresentazione decimale}} : n\in\mathbb{Z},\ c_i\in\{0,1,2,\dots,9\}\ \underset{\text{PER OGNI}}{\forall} i\geq 1\Big\}$$

$$\to n+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\frac{c_3}{10^3}+\frac{c_4}{10^4}+\dots$$

OSSERVAZIONI

- $\mathbb{N}\subsetneq\mathbb{Z}\subsetneq\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{R}$
- I numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata



Inoltre

$$1.25=\frac{125}{100}=\frac{5}{4}\in\mathbb{Q}$$

$$1.252525\ldots=1.\underbrace{\overline{25}}_{\text{periodo}}=1+\frac{25}{10^2}+\frac{25}{10^4}+\dots=\frac{124}{99}\in\mathbb{Q}$$

$+1$

Se $0.\overline{25}=x$ allora

$$100x=25.25=25+x \Rightarrow 99x=25 \Rightarrow x=\frac{25}{99}$$

Esistono numeri reali non razionali?

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\sqrt{2}$ è un numero reale positivo tale che il suo quadrato vale 2

dim. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Allora $\exists m \in \mathbb{N}^+$ e $\exists n \in \mathbb{N}^+$ tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

ESISTE NATURALI POSITIVI

Quindi $\sqrt{2}n = m$ e elevando al quadrato si ha

intero con un numero DISPARI di fattori 2 $\rightarrow$ $2n^2 = m^2$ $\leftarrow$ intero con un numero PARI di fattori 2

Il fatto che il numero di fattori 2 a destra e a sinistra siano diversi contraddice l'unicità della fattorizzazione di un intero in fattori primi. Così l'ipotesi di partenza $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ deve essere falsa e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

OSSERVAZIONE: la rappresentazione decimale di $\sqrt{2}$ è illimitata e NON periodica

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$$

Questa proprietà vale per tutti i

$$\text{NUMERI IRRAZIONALI} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

sottrazione insiemistica

Si dimostra che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono insiemi DENSI in $\mathbb{R}$ ossia

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \begin{cases} \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b \\ \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < r < b \end{cases}$$

PROPRIETÀ DI $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è un CAMPO: ci sono due operazioni, SOMMA e PRODOTTO tali che:

- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad \left.\begin{array}{l}(a+b)+c=a+(b+c)\\(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)\end{array}\right\}$ P. ASSOCIATIVA
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\quad \left.\begin{array}{l}a+b=b+a\\a\cdot b=b\cdot a\end{array}\right\}$ P. COMMUTATIVA
- $\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad \left.\begin{array}{l}a+0=a\\a\cdot 1=a\end{array}\right\}$ ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO
- $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} : a+b=0$ $\quad b=-a$ ESISTENZA DELL'OPPOSTO
- $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists b \in \mathbb{R} : a\cdot b=1$ $\quad b=\frac{1}{a}$ ESISTENZA DEL RECIPROCO
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ P. DISTRIBUTIVA

In $\mathbb{R}$ c'è una RELAZIONE D'ORDINE $\leq$ tale che:

- $\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad a\leq a$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\quad a\leq b$ oppure $b\leq a$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\quad a\leq b$ e $b\leq a \overset{\text{IMPLICA}}{\Rightarrow} a=b$
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad a\leq b$ e $b\leq c \Rightarrow a\leq c$
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad a\leq b \overset{\text{SE E SOLO SE}}{\Leftrightarrow} a+c\leq b+c$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall c>0$ $\quad a\leq b \Leftrightarrow c\cdot a\leq c\cdot b$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall c<0$ $\quad a\leq b \Leftrightarrow c\cdot a\geq c\cdot b$

OSSERVAZIONE: $\forall a,b\geq 0$ $\quad a\leq b \Leftrightarrow a^2\leq b^2$

Si noti che $-3\leq 2$, ma $(-3)^2\leq 2^2$ non vale

In $\mathbb{R}$ vale l'ASSIOMA DI CONTINUITÀ che assicura la corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\mathbb{R}$ e i punti della retta orientata. Per questo $\mathbb{R}$ si dice anche COMPLETO.

$\boxed{\text{INTERVALLI}}$

Notazioni: $\forall a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$.

Intervalli LIMITATI:

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\} \quad \text{APERTO}$$

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a<x\leqslant b\}$$

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x<b\}$$

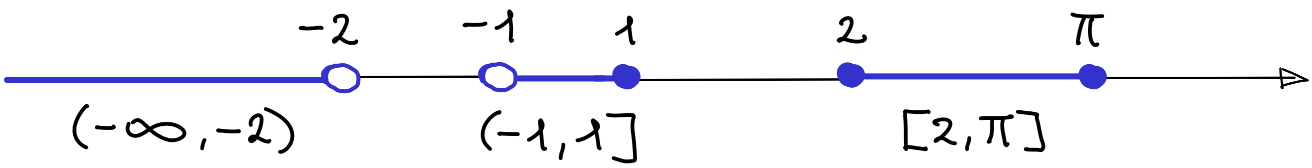
$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x\leqslant b\} \quad \text{CHIUSO}$$

Intervalli NON LIMITATI:

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R} \quad x<a\} \\ (a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \quad a<x\}\end{array}\right\} \text{APERTI}$$

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} : x\leqslant a\} \\ [a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x\}\end{array}\right\} \text{CHIUSI}$$

$$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R} \qquad \text{APERTO e CHIUSO}$$



OSSERVAZIONE $I\subseteq\mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se $\forall a,b\in I$ si ha che $[a,b]\subseteq I$.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Descrivere l'insieme

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}<2\right\}$$

come unione di intervalli.

Per le proprietà di $\mathbb{R}$ è necessario che

$1-x\neq 0$ denominatore $\neq 0$ $\iff x\neq 1$

$4-x^2\geq 0$ argomento della radice quadrata ≥ 0

$$\iff (2+x)(2-x)\geq 0 \iff x\in[-2,2]$$

Quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x\neq 1 \\ -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}<2 \end{cases}$$

Non si può elevare al quadrato altrimenti si perde il segno di $1-x$

Distinguiamo due casi a seconda del segno di $1-x$: $x>1$ oppure $x<1$

$$\begin{cases} x>1 \\ -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\underbrace{1-x}_{\leq 0}}<2 \end{cases} \cup \begin{cases} x<1 \\ -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\underbrace{1-x}_{\geq 0}}<2 \end{cases}$$

sempre vero

elevo al quadrato

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x\in(1,2] \qquad \begin{cases} x\in[-2,1) \\ 4-x^2<4(1-x)^2 \end{cases}$$

$$\cancel{4}-x^2<\cancel{4}-8x+4x^2$$

$$5x^2-8x>0$$

$$x(5x-8)>0$$

$$x<0 \ \vee \ x>\frac{8}{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$x\in[-2,0)$$

Quindi $A=[-2,0)\cup(1,2]$.