

MATEMATICA DISCRETA

- Prof. F. Brenti

- Studio: 1213

- Tel. + 4671

- Ricevimento: HE 16-17 (o su Appuntamento) (online su TEAMS)

- e-mail: BRENTI@MAT.UNIROMA2.IT

- WWW.MAT.UNIROMA2.IT

- TESTO: VEDI PAGINA DEL CORSO

CONSIGLIATI: G.M. PIACENTINI CATTANEO, MATEMATICA DISCRETA, ZANICHELLI, 2008

S. LIPSCHUTZ, H.L. LIPSON, DISCRETE MATHEMATICS,
SCHAUH, 2002

- ESAME: SCRITTO + ORALE (DETTAGLI DOPO)

- MATEMATICA ϕ : IN TUTTI GLI SCRITTI

(INCORRETTA \rightarrow NON AMMESSO ALL'ESAME)

$$(ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\ln(x) < e^x ?$$

ORE
1-4

ESERCIZI: GRADUATI $([1], [2], [3])$

10-20
MIN

20-60
MIN

- ESORDER: NON CI SONO ESORDERI

2 6

PREAMBOLO: COS'E' LA MATEMATICA?

- ES. 1: WIMBLEDON

128 GIOCATRICI, ELIMINAZIONE DIRETTA

64 +

DOMANDA: QUANTE PARTITE VENGONO

GIOcate IN TOTALE?

64 + 32 + ... + 2 + 1

D'ALTRA PARTE: OGNI PARTITA HA ESATTA

MENTE 1 PERDENTE, E OGNI GIOCATORE

(TRANNE IL VINCITORE) PERDE 1 € 1

SOLA VOLTA

⇒ # PARTITE = # PERDENTI

$$= 428 - 1 = 127.$$

ES. 2: I TEST SEROLOGICI CONDOTTI

DAL GOVERNO ITALIANO IN ESTATE
STIMANO CHE CI SONO $\approx 0,5$ MILIONE
DI PERSONE (IN ITALIA) CHE HANNO
COVID, E SONO ASINTOMATICHE.

POPOLAZ. ITALIANA ≈ 60 M.

DOMANDA: IN UN GRUPPO DI 110

PERSONE, QUAL'E' LA PROBABILITA'
CHE CI SIA ALMENO UNA PERSONA
CON COVID E ASINTOMATICA?

VEDREMO NEL CAP. 4, CHE QUESTA

PROBABILITÀ È

$\approx 0,64$

CAPITOLO 1: TEORIA DEGLI INSIEMI

1.1 INSIEMI

TUTTO IN MATEMATICA È UN INSIEME.

LA MATEMATICA PRENDE COME CONCETTI

FONDAMENTALI, I SEGUENTI:

INSIEME, ELEMENTO, APPARTENENZA

INTUITIVAMENTE: UN INSIEME È UNA COLLEZIONE

DI OGGETTI, DETTI ELEMENTI,

APPARTENENTI ALL'INSIEME)

SOLITAMENTE SI SCRIVE OUN INSIEME

ELENCOANDO GLI ELEMENTI, SEPARATI DA

VIRGOLE, E RACCHIUSI DA PARENTESI

GRATTE.

E. g. $A = \{1, 2, 5\}$

OSS. UN INSIEME PUÒ ESSERE ELEMENTO
DI UN ALTRO INSIEME

E.g. $\{1, 3, \{1, 2, 3\}, \{3, 8\}\}$

OSS. IN UN INSIEME L'ORDINE NON
CONTA

E.g. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

OSS. IN UN INSIEME NON CI SONO
RIPETIZIONI

E.g. $\{1, 2, 2\}$ NON È UN INSIEME.

SCRIVIAMO

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2\}$$

PER DIRE CHE A È L'INSIEME SCRITTO
A DESTRA, SCRIVIAMO

$$x \in A$$

SE x È ELEMENTO DI A

$$x \notin A$$

" NON È "

NOTAZIONI:

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

SE $a \in \mathbb{N}$ allora

$$[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, a\}.$$

DEF. L'INSIEME CHE NON HA ELEMENTI

SI DICE INSIEME VUOTO, SCRITTO

\emptyset .

$$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset.$$

1.2 OPERAZIONI TRA INSIEMI

SCRIVIAMO $A = B$ (A, B insieme)

PER DIRE CHE A e B HANNO GLI STESSI ELEMENTI.

SIANO A, B INSIEMI.

DEF. A È INCLUSO IN B (σ È UN SOTTO-
INSIEME DI B) SE OGNI ELEMENTO

DI A È ANCHE ELEMENTO DI B .

SCRIVIAMO $A \subseteq B$.

NOTAZIONE:

$A \subsetneq B$ SIGNIFICA

$$A \subseteq B$$

e

$$A \neq B$$

OSS. $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

DEF. L'INTERSEZIONE DI A E B È

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A : x \in B\}$$

↑

(TALE CHE)

DEF. L'UNIONE DI A E B È

L'INSIEME, SCRITTO $A \cup B$, CHE HA
COME ELEMENTI TUTTI GLI ELEMENTI
DI A E TUTTI GLI ELEMENTI DI B.

PROP 1.2.1 A, B, C INSIEMI. Allora

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad (\text{PROP.})$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad (\text{ASSOCIATIVA})$$




PRM. OMESSA. □

ES. [1]: A, B INSIEMI.

$$A \cup B = A \cap B \iff A = B ?$$





DEVI

PROP. 1.22: A, B, C INSIEMI. ACCORDA:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad (\text{PROP.})$$

23) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; DISTRIBU.
TIVE

Dim:

$$\exists! A: x \in A \wedge (B \vee C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \vee C.$$

1. $\frac{1}{2}$
 2. $\frac{1}{3}$
 3. $\frac{1}{4}$
 4. $\frac{1}{5}$
 5. $\frac{1}{6}$
 6. $\frac{1}{7}$
 7. $\frac{1}{8}$
 8. $\frac{1}{9}$
 9. $\frac{1}{10}$
 10. $\frac{1}{11}$
 11. $\frac{1}{12}$
 12. $\frac{1}{13}$
 13. $\frac{1}{14}$
 14. $\frac{1}{15}$
 15. $\frac{1}{16}$
 16. $\frac{1}{17}$
 17. $\frac{1}{18}$
 18. $\frac{1}{19}$
 19. $\frac{1}{20}$
 20. $\frac{1}{21}$
 21. $\frac{1}{22}$
 22. $\frac{1}{23}$
 23. $\frac{1}{24}$
 24. $\frac{1}{25}$
 25. $\frac{1}{26}$
 26. $\frac{1}{27}$
 27. $\frac{1}{28}$
 28. $\frac{1}{29}$
 29. $\frac{1}{30}$
 30. $\frac{1}{31}$
 31. $\frac{1}{32}$
 32. $\frac{1}{33}$
 33. $\frac{1}{34}$
 34. $\frac{1}{35}$
 35. $\frac{1}{36}$
 36. $\frac{1}{37}$
 37. $\frac{1}{38}$
 38. $\frac{1}{39}$
 39. $\frac{1}{40}$
 40. $\frac{1}{41}$
 41. $\frac{1}{42}$
 42. $\frac{1}{43}$
 43. $\frac{1}{44}$
 44. $\frac{1}{45}$
 45. $\frac{1}{46}$
 46. $\frac{1}{47}$
 47. $\frac{1}{48}$
 48. $\frac{1}{49}$
 49. $\frac{1}{50}$
 50. $\frac{1}{51}$
 51. $\frac{1}{52}$
 52. $\frac{1}{53}$
 53. $\frac{1}{54}$
 54. $\frac{1}{55}$
 55. $\frac{1}{56}$
 56. $\frac{1}{57}$
 57. $\frac{1}{58}$
 58. $\frac{1}{59}$
 59. $\frac{1}{60}$
 60. $\frac{1}{61}$
 61. $\frac{1}{62}$
 62. $\frac{1}{63}$
 63. $\frac{1}{64}$
 64. $\frac{1}{65}$
 65. $\frac{1}{66}$
 66. $\frac{1}{67}$
 67. $\frac{1}{68}$
 68. $\frac{1}{69}$
 69. $\frac{1}{70}$
 70. $\frac{1}{71}$
 71. $\frac{1}{72}$
 72. $\frac{1}{73}$
 73. $\frac{1}{74}$
 74. $\frac{1}{75}$
 75. $\frac{1}{76}$
 76. $\frac{1}{77}$
 77. $\frac{1}{78}$
 78. $\frac{1}{79}$
 79. $\frac{1}{80}$
 80. $\frac{1}{81}$
 81. $\frac{1}{82}$
 82. $\frac{1}{83}$
 83. $\frac{1}{84}$
 84. $\frac{1}{85}$
 85. $\frac{1}{86}$
 86. $\frac{1}{87}$
 87. $\frac{1}{88}$
 88. $\frac{1}{89}$
 89. $\frac{1}{90}$
 90. $\frac{1}{91}$
 91. $\frac{1}{92}$
 92. $\frac{1}{93}$
 93. $\frac{1}{94}$
 94. $\frac{1}{95}$
 95. $\frac{1}{96}$
 96. $\frac{1}{97}$
 97. $\frac{1}{98}$
 98. $\frac{1}{99}$
 99. $\frac{1}{100}$
 100. $\frac{1}{101}$
 101. $\frac{1}{102}$
 102. $\frac{1}{103}$
 103. $\frac{1}{104}$
 104. $\frac{1}{105}$
 105. $\frac{1}{106}$
 106. $\frac{1}{107}$
 107. $\frac{1}{108}$
 108. $\frac{1}{109}$
 109. $\frac{1}{110}$
 110. $\frac{1}{111}$
 111. $\frac{1}{112}$
 112. $\frac{1}{113}$
 113. $\frac{1}{114}$
 114. $\frac{1}{115}$
 115. $\frac{1}{116}$
 116. $\frac{1}{117}$
 117. $\frac{1}{118}$
 118. $\frac{1}{119}$
 119. $\frac{1}{120}$
 120. $\frac{1}{121}$
 121. $\frac{1}{122}$
 122. $\frac{1}{123}$
 123. $\frac{1}{124}$
 124. $\frac{1}{125}$
 125. $\frac{1}{126}$
 126. $\frac{1}{127}$
 127. $\frac{1}{128}$
 128. $\frac{1}{129}$
 129. $\frac{1}{130}$
 130. $\frac{1}{131}$
 131. $\frac{1}{132}$
 132. $\frac{1}{133}$
 133. $\frac{1}{134}$
 134. $\frac{1}{135}$
 135. $\frac{1}{136}$
 136. $\frac{1}{137}$
 137. $\frac{1}{138}$
 138. $\frac{1}{139}$
 139. $\frac{1}{140}$
 140. $\frac{1}{141}$
 141. $\frac{1}{142}$
 142. $\frac{1}{143}$
 143. $\frac{1}{144}$
 144. $\frac{1}{145}$
 145. $\frac{1}{146}$
 146. $\frac{1}{147}$
 147. $\frac{1}{148}$
 148. $\frac{1}{149}$
 149. $\frac{1}{150}$
 150. $\frac{1}{151}$
 151. $\frac{1}{152}$
 152. $\frac{1}{153}$
 153. $\frac{1}{154}$
 154. $\frac{1}{155}$
 155. $\frac{1}{156}$
 156. $\frac{1}{157}$
 157. $\frac{1}{158}$
 158. $\frac{1}{159}$
 159. $\frac{1}{160}$
 160. $\frac{1}{161}$
 161. $\frac{1}{162}$
 162. $\frac{1}{163}$
 163. $\frac{1}{164}$
 164. $\frac{1}{165}$
 165. $\frac{1}{166}$
 166. $\frac{1}{167}$
 167. $\frac{1}{168}$
 168. $\frac{1}{169}$
 169. $\frac{1}{170}$
 170. $\frac{1}{171}$
 171. $\frac{1}{172}$
 172. $\frac{1}{173}$
 173. $\frac{1}{174}$
 174. $\frac{1}{175}$
 175. $\frac{1}{176}$
 176. $\frac{1}{177}$
 177. $\frac{1}{178}$
 178. $\frac{1}{179}$
 179. $\frac{1}{180}$
 180. $\frac{1}{181}$
 181. $\frac{1}{182}$
 182. $\frac{1}{183}$
 183. $\frac{1}{184}$
 184. $\frac{1}{185}$
 185. $\frac{1}{186}$
 186. $\frac{1}{187}$
 187. $\frac{1}{188}$
 188. $\frac{1}{189}$
 189. $\frac{1}{190}$
 190. $\frac{1}{191}$
 191. $\frac{1}{192}$
 192. $\frac{1}{193}$
 193. $\frac{1}{194}$
 194. $\frac{1}{195}$
 195. $\frac{1}{196}$
 196. $\frac{1}{197}</$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$\text{SE } x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (A \cap B)$

VICEVERSA: $\text{Si } A \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow$

$x \in A \cap B \quad \text{ó} \quad x \in A \cap C$. Se $x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \quad \text{e} \quad x \in B \Rightarrow x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. Se $x \in A \cap C \Rightarrow$

$x \in A \quad \text{e} \quad x \in C \Rightarrow x \in B \cup C \Rightarrow$

$x \in A \cap (B \cup C)$.

ii) SIMILAR. \square

Ex. 8.

SIA

$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{ A : A \notin A \}$

(E.g. $\mathcal{N} \in \mathcal{L}$) ($\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$)

QUESTION: $\mathcal{L} \in \mathcal{L}$?

- SE $\mathcal{L} \in \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} \notin \mathcal{L} \quad \nearrow$

- SE $\mathcal{L} \notin \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} \in \mathcal{L} \quad \nearrow$

DEF. 01

\mathcal{L}

IL PARADOSSO SI EVITA SE ASSUMIAMO
CHE TUTTI GLI INSIEMI CHE CONSIDERIAMO
SIANO SOTTOINSIEMI DI UN INSIEME
UNIVERSO, U .

SIA A INSIEME.

DEF. IL COMPLEMENTARE DI A È

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in U : x \notin A\}$$

(SI SCRIVE ANCHE A^c)

PROP. DISTRIBUTIVA:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

SIA $x \in U$, ALLORA

$$\begin{array}{ccc} \text{v} & x \in A & \text{v} & x \notin A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{v} & x \in B & \text{v} & x \notin B \end{array}$$

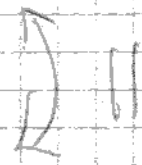
$$\begin{array}{ccc} \text{v} & x \in C & \text{v} & x \notin C \end{array}$$

\Rightarrow 8 POSSIBILITÀ.

TAVOLE DI VERITÀ:

A B C $B \cup C$ $A \cap B$ $A \cap C$ $A \cap (B \cup C)$

1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0



LE COLONNE CORRESPONDENTI

~~SONO~~ UGUALI \Rightarrow

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

PROP. 1.2.3: A, B INSIEMI. ALLORA:

i) $(A \cap B)' = (A' \cup B')$ (LEGGI DI

DE

ii) $(A \cup B)' = (A' \cap B')$ (MORGAN)

DIM: USIAMO LE TAVOLE DI VERITÀ.

Es. [1]. □