Dimostrazioni

Teorema dell'unicità del limite

Sia a_n una successione , vogliamo dimostrare che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ dove l è unico :
Supponiamo (per ASSURDO) che

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = l_1 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = l_2 \end{cases} \quad \text{con} \quad l_1 \neq l_2$$

passiamo allora alla definizione di limite di successione :

$$\begin{cases} \forall\epsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} : \ |a_n - l_1| < \epsilon \quad \forall n > n_1 \\ \forall\epsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} : \ |a_n - l_2| < \epsilon \quad \forall n > n_2 \end{cases}$$

adesso prendiamo il massimo tra gli indici di partenza per cui valgono le due disuguaglianze lo stesso , infatti se prendo $n = \max(n_1, n_2)$, allora valgono sempre lo stesso allo stesso momento siccome vale $\forall n > n_1, n_2$. $\implies$

$$\begin{cases} \forall\epsilon > 0 \quad |a_n - l_1| < \epsilon \\ \forall\epsilon > 0 \quad |a_n - l_2| < \epsilon \end{cases}$$

ma allora sicuramente abbiamo che :

$$|a_n - l_1| + |a_n - l_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

adesso utilizziamo la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE e la proprietà che dice che $|x| = |-x|$, $\implies$

$$|a_n - l_1| + |l_2 - a_n| \implies \implies |a_n - l_1 + l_2 - a_2| \underbrace{\leq}_{DT} |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$$
$$\implies |a_n - l_1 + l_2 - a_n| < 2\epsilon \implies |l_2 - l_1| < 2\epsilon$$

ma scegliendo $\epsilon = \frac{|l_2 - l_1|}{2} \implies |l_2 - l_1| < |l_2 - l_1| \implies \text{CONTRADDIZIONE}$

$\square$

Teorema del confronto

Vogliamo dimostrare che se $a_n \to l_1$, $b_n \to l_2$ e

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : a_n \leq b_n \quad \forall n > n_0$$

(ovvero definitivamente $a_n \leq b_n$) $\implies \ l_1 \leq l_2$.

Supponiamo per ASSURDO che $l_1 > l_2$ e fissiamo $\epsilon = \frac{l_1 - l_2}{2} > 0$ (notiamo che è > 0 siccome abbiamo supposto per assurdo che $l_1 > l_2$) e applichiamo la definizione per i due limiti :

$$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - l_1| < \epsilon \quad \forall n > n_1 \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : |b_n - l_2| < \epsilon \quad \forall n > n_2 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases}\exists n_1 \in \mathbb{N} : l_1 - \epsilon < a_n < l_1 + \epsilon \quad \forall n > n_1 \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : l_2 - \epsilon < b_n < l_2 + \epsilon \quad \forall n > n_2\end{cases}$$

ora prendiamo $n = \max(n_0, n_1, n_2)$ ovvero l'indice di partenza per cui valgono le 3 proprietà (anche che $a_n \leq b_n$) e sostituiamo $\epsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$ otteniamo :

$$l_1 - \frac{(l_1 - l_2)}{2} = \underbrace{\frac{l_1 + l_2}{2}} < a_n < l_1 + \frac{(l_1 - l_2)}{2} = \frac{3l_1 - l_2}{2}$$

$$l_2 - \frac{(l_1 - l_2)}{2} = \frac{3l_2 - l_1}{2} < b_n < l_2 + \frac{(l_1 - l_2)}{2} = \underbrace{\frac{l_1 + l_2}{2}}$$

$\implies$ otteniamo che $b_n < \frac{l_1 + l_2}{2} < a_n \implies b_n < a_n \rightarrow \text{CONTRADDIZIONE}$

□

Teorema della permanenza del segno

Supponiamo (caso finito) che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l > 0$$

Definiamo questo limite attraverso la definizione di limite :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \epsilon \quad \forall n > n_0$$

Fissiamo

$$\epsilon = \frac{l}{2} > 0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |a_n - l| < \frac{l}{2} \quad \forall n > n_0 \implies$$

$$\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad l - \frac{l}{2} < a_n < l + \frac{l}{2} \quad \forall n > n_0$$

Poiché $l > 0$, anche $\frac{l}{2} > 0$, abbiamo che anche

$$a_n > 0 \quad \forall n > n_0$$

cioè definitivamente (da un certo n_0 in poi), la successione a_n è positiva.

□

Infinitesima per limitata = 0

Vogliamo dimostrare che se

- b_n è LIMITATA
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\implies \lim_{n\to\infty} b_n a_n = 0$, che per definizione vuol dire che :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : |b_n a_n - 0| < \epsilon \implies \forall \epsilon > 0 \quad |b_n a_n| < \epsilon \quad \forall n > n_0$$

Iniziamo notando che siccome b_n è LIMITATA allora per definizione $\exists M > 0$ tale che :

$$|b_n| \leq M \implies -M \leq b_n \leq M \quad \forall n$$

Inoltre siccome $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \implies$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n| < \delta \quad \forall n > n_1$$

utilizziamo ora una prop. dei moduli ($|ab| = |a||b|$) , una catena di disuguaglianze e il fatto che $|b_n| \leq M$:

$$|b_n a_n| = |b_n||a_n| \leq |a_n|M$$

ora utilizziamo il fatto che $|a_n| < \delta$ e poniamo $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, ottenendo :

$$|a_n|M \leq \delta M = \frac{\epsilon}{\cancel{M}} \cancel{M}$$

quindi otteniamo che

$$|b_n a_n| \leq |a_n|M \leq \epsilon$$

□

Convergenza numero di nepero e

Vogliamo dimostrare che la successione $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è *convergente* a $e \in (2, 3)$:
Dimostriamolo in *2 step* :

1. dimostriamo che $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è STRETTAMENTE CRESCENTE
2. dimostriamo che $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è SUPERIORMENTE LIMITATA $\implies$ esiste il suo limite e vale $\sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+ \right\} \in \mathbb{R}$

Stretta crescenza

Quindi dobbiamo dimostrare che
$a_n < a_{n+1} \implies \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \quad \forall n \geq 1$
esprimiamo a_n con il binomio di Newton ovvero che :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$\implies$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\ \cancel{(n-k)!}}{k!\ \cancel{(n-k)!}}}_{\binom{n}{k}} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{=1-\frac{1}{n}} \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{=1-\frac{2}{n}} \dots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{=1-\frac{(k-1)}{n}} \right)$$

quindi otteniamo che :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{(k-1)}{n} \right) \right)$$

ora poniamo $n = n+1 \quad \implies$ otteniamo :

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \dots \left(1 - \frac{(k-1)}{n+1} \right) \right)$$

ora confrontiamo a_n e a_{n+1} , e quindi ci chiediamo le seguenti disuguaglianze :

- $1 - \frac{1}{n} \overbrace{<}^{?} 1 - \frac{1}{n+1} \implies \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \implies \dots \implies -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \to \text{SI}$
- $1 - \frac{(k-1)}{n} \underbrace{<}_{?} 1 - \frac{(k-1)}{n+1} \to \text{SI}$

$\implies a_n < a_{n+1}$

Limitatezza superiore

Lavoriamo sulla sommatoria e otteniamo qualcosa piu grosso :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

notiamo (grazie anche allo step precedente) che :

$$\frac{1}{k!} \underbrace{1 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{(k-1)}{n} \right)}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!}$$

ma siccome $k! = k(k-1)(k-2)! \geq k(k-1)$ e passando ai reciproci otteniamo che

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$\implies$

$$a_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

dove l'ultimo termine assomiglia a una serie telescopica , siccome rimane la testa e la coda (come in un *telescopio*) :

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}$$

quindi possiamo concludere che

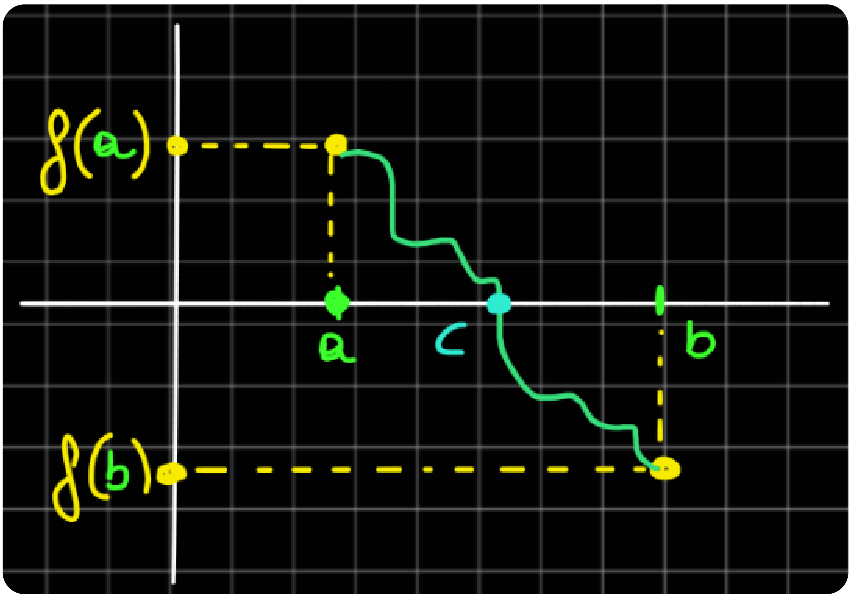
$$a_n = 2+1-\frac{1}{n}=3-\frac{1}{n}\leq 3$$

$\implies$ a_n ha 3 come maggiorante e dunque è LIMITATA SUPERIORMENTE .

$\square$

Teorema degli zeri

Il teorema dice che sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (definita in un intervallo *chiuso* e *limitato*) e che sia *CONTINUA* in $[a,b]$
e che $f(a)f(b)<0 \implies \exists c\in(a,b): f(c)=0$.
intuitivamente nel grafico abbiamo :



dove se $f(a)>0 \iff f(b)<0$ o viceversa , e che siccome la funzione è continua allora sicuramente passerà per un punto c dove assumerà valore 0.

Costruiamo *ricorsivamente* due successioni a_n e b_n nel seguente modo (si pensi come un algoritmo da ripetere):

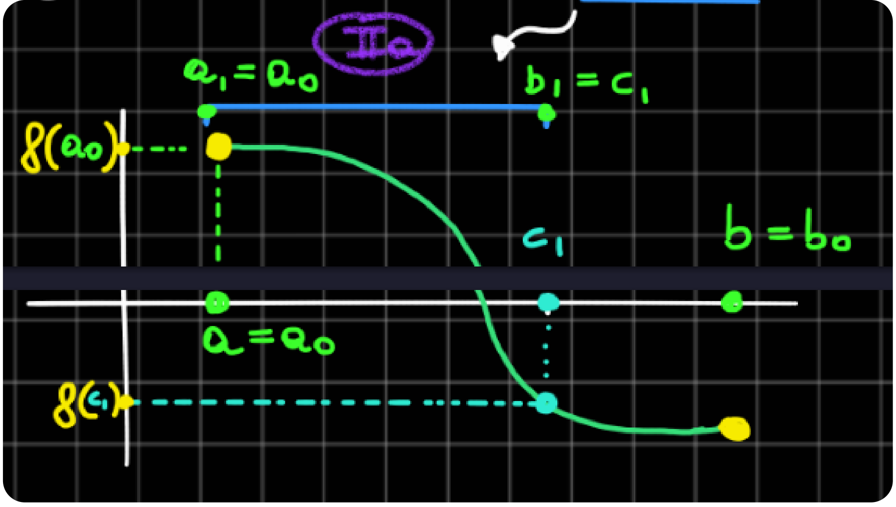
$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \\ c_1 = \frac{a_0+b_0}{2}\end{cases}$$

dove c_1 è il punto medio del segmento $\overline{ab}$, quindi ci sono due possibilità :

1. Se $f(c_1)=0 \implies c=c_1$ e ho finito
2. Se $f(c_1)\neq 0 \implies$

$$\begin{cases} \text{se} \quad f(a_0)f(c_1)<0 \implies a_1=a_0\,, b_1=c_1 \quad (*) \\ \text{se} \quad f(b_0)f(c_1)<0 \implies a_1=c_1\,, b_1=b_0 \quad (**)\end{cases}$$

infatti graficamente (caso $(*)$)



in questo modo considero un intervallo più piccolo $[a, b] = [a_0, c_1]$ di ricerca di questo punto dove la funzione mi farà 0.

Procedendo in questo modo ho definito una successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ tale che $I_{n+1} \subseteq I_n$
Inoltre sto garantendo che :

1. $f(a_n)f(b_n) < 0 \quad \forall n$
2. siccome divido sempre a metà per n volte abbiamo che la lunghezza da i dell'intervallo sarà

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

   Osserviamo inoltre che

- $a_0 = a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$
- $a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 < b_0 = b$
  ovvero che a_n va dentro verso destra (quindi cresce) e che b_n va dentro verso sinistra e quindi decresce , quindi ottengo che ho a_n una successione crescente e limitata (siccome è maggiorata da b e minorata da a_0) e analogamente b_n è una successione decrescente e limitata.
  Quindi per il teorema delle successioni monotone, per entrambe le successioni esistono i limiti :

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = c_1 \\ \lim_{n\to\infty} b_n = c_2 \end{cases}$$

  ora devo dimostrare solo che $c_1 = c_2$ (siccome l'intervallo sarà sempre piu piccolo perché a_n entra $\rightarrow$ e b_n entra $\leftarrow$)

Quindi siccome devo dimostrare che $c_1 = c_2 = c$, allora la differenza dovrebbe fare 0 , infatti :

$$c_2 - c_1 = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{\underbrace{2^n}_{\to+\infty}} = 0$$

Ora dobbiamo dimostrare che $f(c) = 0$ e quindi osservo che poiché f è *continua* in $[a, b]$ allora per definizione di funzione continua in un intervallo :

$$\begin{cases} f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \\ f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0 \end{cases}$$

(oppure viceversa , tanto l'importante è che sappiamo per costruzione che le immagini della funzione in quei punti sono discordi tra loro e quindi il prodotto è negativo)
e quindi siccome $f(c) \leq 0$ e $f(c) \geq 0$ l'unica possibilità è che $f(c) = 0$.
$\square$

Teorema di Weiestrass

Il teorema di Weiestrass ci dice che : sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$:

- Ipotesi :
  - f continua in $[a, b]$
- Tesi :
  - $\exists\, M = \max f$ e $\exists\, m = \min f$

Prima di iniziare vero e proprio la dimostrazione , notiamo che $S = \{f(x) : \forall x \in [a, b]\}$ siccome è insieme non vuoto, allora sappiamo che

$$\exists\, s = \sup S$$

ovvero l'estremo superiore dell'insieme S. Inoltre sappiamo che esiste una successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che :

$$\lim_{n \to \infty} y_n = s$$

Infatti nel caso $s \in \mathbb{R}$, notiamo che $\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad \exists\, y_n \in S$ tale che :

$$s - \frac{1}{n} \leq y_n \leq s$$

ovvero che comunque prendiamo n troveremo sempre un y_n che sarà più grande di $s - \frac{1}{n}$ ma più piccolo di s , tutto questo per definizione di estremo superiore di un insieme. Però ora siccome $s - \frac{1}{n} \to s$ possiamo applicare il teorema dei carabinieri e concludere che anche $y_n \to s$.
Nel caso $s = +\infty$, sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, y_n \in S$ tale che :

$$y_n \geq n$$

anche se $s = +\infty$ cadrebbe la continuità e non il teorema di Weierstrass non vale più.

Iniziamo quindi la dimostrazione costruendo una nuova successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ tale che :

$$f(x_n) = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ora siccome x_n è una successione limitata allora per il TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS :

$$\exists\, \{x_n\}_k \subseteq \{x_n\}_n : \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_M \in [a, b]$$

ovvero che esiste una sotto-successione x_{n_k} convergente di x_n .

Sappiamo inoltre , grazie alle ipotesi , che f è continua in $[a, b]$, quindi abbiamo che :

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_M) \in S$$

Concludiamo che quindi abbiamo :

$$s = \lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_M)$$

quindi abbiamo dimostrato che :

$$f(x) \leq f(x_M) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b]$$

$\square$

Teorema di Fermat

Il teorema afferma che :

- Ipotesi : sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
  - x_0 sia punto di minimo o massimo relativo
  - f derivabile in x_0
- Tesi : $\implies f'(x_0) = 0$ ossia che x_0 è un punto stazionario (ovvero che la tangente in quel punto è orizzontale)

Dimostriamo nel caso x_0 sia un minimo relativo (similmente per il caso sia massimo relativo)
Iniziamo notiamo che siccome f è derivabile in x_0 , allora per definizione di derivabilità in un punto , abbiamo che la derivata destra e sinistra in quel punto devono essere uguali alla derivata in quel punto :

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

quindi vediamo che segno ha $f'_+(x_0)$, infatti notiamo che :

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

quindi vogliamo capire che segno ha $f(x_0 + h) - f(x_0)$.
Ora siccome x_0 è un minimo relativo , per definizione di minimo relativo :

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in (x - \delta, x + \delta)$$

quindi sicuramente $f(x_0 + h) \geq f(x_0) \implies f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$, quindi abbiamo che :

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0}{h \geq 0} \implies f'_+(x) \geq 0$$

ora similmente per $f'_-(x_0)$ avremo che :

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0}{h \leq 0} \implies f_-(x_0) \leq 0$$

ma allora abbiamo la seguente situazione di segni :

$$\begin{cases} f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) = f'-(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

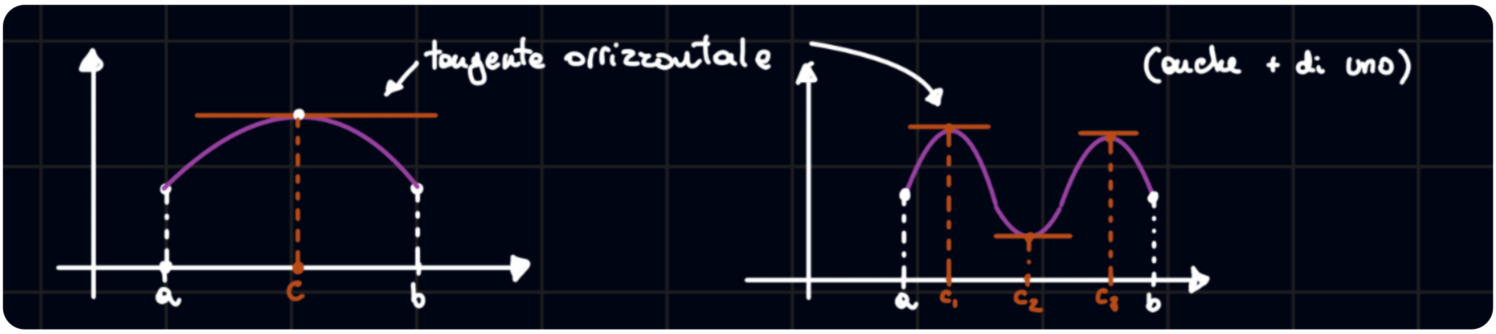
quindi necessariamente $f'(x_0) = 0$.

$\square$

Teorema di Rolle

Il teorema di Rolle afferma che :

- Ipotesi : sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$
    - continua in $[a, b]$
    - derivabile in (a, b)
    - $f(a) = f(b)$
- Tesi : $\implies \ \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$ l caso



Iniziamo osservando che grazie alle ipotesi possiamo applicare il teorema di Weiestrass infatti abbiamo che :

$$\exists x_m \in [a, b] \quad \exists\, x_M \in [a, b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]$$

quindi abbiamo due casi :

1. x_m e x_M sono gli estremi $\{a, b\} \implies f(x_m) = f(x_M) \implies$ otteniamo che f è una funzione costante in (a, b) , ma allora la derivata in ogni punto preso tra a e b , otteniamo che la retta tangente sarà $= 0$ infatti avremo che

$$f'(c) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

2. almeno uno dei due di x_m e x_M sono punti interni in (a, b) , ma siccome sono uno un punto di massimo e l'altro un punto di minimo , possiamo applicare il TEOREMA DI FERMAT , infatti avremo che :

$$f'(x_m) = 0 \quad \vee \quad f'(x_M) = 0$$

quindi abbiamo osservato che sia nel caso 1 che nel caso 2 , otteniamo che $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

$\square$.

Teorema di Lagrange o valor medio

Il teorema afferma che :

- Ipotesi : Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
    - continua in $[a, b]$
    - derivabile in (a, b)
- Tesi : $\implies \qquad \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

dove $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sarebbe il coefficiente angolare della retta parallela alla retta tangente nel punto $(c, f(c))$:

Iniziamo considerando una funzione ausiliaria :

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$$

calcoliamoci $h(a)$, $h(b)$:

$$\begin{aligned} &= f(a) - \tfrac{f(b)-f(b)}{b-a}(a-a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0 \\ &= f(b) - \tfrac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\ \cancel{(b-a)} - f(a) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0 \end{aligned} \implies h(a) = h(b) = 0$$

Ora siccome abbiamo $h(a) = h(b)$ applichiamo il TEOREMA DI ROLLE , allora abbiamo che :

$$\exists\, c \in (a,b) : h'(c) = 0$$

(vedi dimostrazione del teorema di Rolle che va usata per dimostrare questo teorema che stiamo dimostrando).

Ora calcoliamo $h'(x)$ (la derivata) e poi $h'(c)$, allora abbiamo che :

$$h'(x) = f'(c) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \implies h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ma siccome siccome $h'(c) = 0$:

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ovvero proprio la nostra tesi .

$\square$.

Teorema del criterio di monotonia

Il teorema afferma che :

- Ipotesi : sia f derivabile in un intervallo (a,b)
- Tesi :
  1. f è CRESCENTE in $(a,b) \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$
  2. f è DECRESCENTE in $(a,b) \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dimostriamo 1. (2. è simile) , per dimostrare che vale " $\iff$ " dimostriamo prima " $\implies$ " e poi " $\impliedby$ " :

" $\Longrightarrow$ "

Quindi per dimostrare che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ dobbiamo capire che segno ha il rapporto incrementale (che sarebbe per definizione la derivata) usando l'ipotesi che f è crescente , quindi abbiamo che :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \begin{cases} \text{se } h > 0 \implies f(x+h) \geq f(x) \implies f(x+h) - f(x) \geq 0 \implies \left(\frac{+}{+}\right) \geq 0 \\ \text{se } h < 0 \implies f(x+h) \leq f(x) \implies f(x+h) - f(x) \leq 0 \implies \left(\frac{-}{-}\right) \geq 0 \end{cases}$$

e quindi abbiamo dimostrato che $f'(x)$ risulta sempre ≥ 0 .

" $\Longleftarrow$ "

Ora dobbiamo dimostrare la crescenza di f ovvero che se prendiamo due qualsiasi $x_1, x_2 \in (a, b)$ basta che $x_1 \leq x_2$, quindi consideriamo questi due punti , e applichiamo il TEOREMA DI LAGRANGE in $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$, siccome per ipotesi sappiamo che f è derivabile , e quindi questo implica che sia anche continua , in (a, b) e quindi lo è anche $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$, quindi per il teorema di Lagrange abbiamo che :

$$\exists c \in (x_1, x_2) : f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

quindi moltiplichiamo a destra e sinistra per per $(x_2 - x_1)$ e abbiamo che :

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \implies f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \implies f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)$$

ma siccome $x_2 \geq x_1 \implies x_2 - x_1 \geq 0$ e quindi se aggiungiamo qualcosa di positivo a $f(x_1)$ avremo necessariamente che :

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$

che è proprio la crescenza di f .

$\square$.

Teorema di De l'Hospital

Il teorema di De l'Hospital afferma che :

- Ipotesi : sia f e g funzioni derivabili in $(x_0, x_0 + r) \quad r > 0$ (in un intorno destro di x_0) $(I^+(x_0))$
  - $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$ (quindi abbiamo una forma $\left[\frac{0}{0}\right]$)
  - $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + r)$
  - $\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
- Tesi : $\implies \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L_1$

Iniziamo la dimostrazione estendendo f e g anche in x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$ in questo modo rendiamo continue f e g anche in x_0 .
Ora consideriamo una successione x_n in $(x_0, x_0 + r)$ tale che $x_n \to x_0^+$.
Ora notiamo che per $\forall n \in \mathbb{N}^+$ vale il TEOREMA DI CAUCHY in $[x_0, x_n]$, che ci dice che siano f e g continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) e che $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ allora sappiamo che :

$$\exists c \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

.Quindi applicando il teorema di Cauchy in $[x_0, x_n]$ allora abbiamo che :

$$\exists c_n \in (x_0, x_n) : \frac{f(x_n)-f(x_0)}{g(x_n)-g(x_0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

ora notiamo che siccome $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (dalle ipotesi) abbiamo che :

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{g(x_n)-g(x_0)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

Ora notiamo che siccome $x_0 < c_n < x_n$ e $x_n \to x_0^+$, utilizziamo il teorema dei Carabinieri e otteniamo che anche $c_n \to x_0^+$.

Infine partiamo dall'ultima ipotesi di esistenza del limite della derivata delle due funzioni :

$$L_1 = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e notiamo che possiamo fare un "cambio di variabile" (o teorema Ponte al contrario) di x con c_n , siccome tutte e due $\to x_0^+$, quindi abbiamo che :

$$L_1 = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

ma grazie a Cauchy (di prima) abbiamo che :

$$L_1 = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \underset{\text{Teo. Cauchy}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

ora rifacciamo un "cambio di variabile" di x_n con x , siccome anche in questo caso sia una che l'altra $\to x_0^+$, quindi abbiamo che :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \underset{x_n \to x_0^+ \iff x \to x_0^+}{=} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

quindi abbiamo dimostrato che :

$$L_1 = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\square$.

Formula di Taylor con resto di Peano

La formula del polinomio di Taylor con il resto di Peano ci dice che possiamo approssimare una funzione nel seguente modo :

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$$

ora per capire come dimostrarlo , portiamo $T_{n,x_0}(x)$ a destra e quindi otteniamo :

$$R_{n,x_0} = f(x) - T_{n,x_0}(x)$$

ma siccome il resto di Peano è l'errore commesso dal polinomio di Taylor nell'approssimazione è definito come :

$$R_{n,x_0}(x) = o((x-x_0)^n)$$

ovvero proprio quello che vogliamo dimostrare , infatti per definizione di o-piccolo :

$$\text{se } R_{n,x_0}(x) = o((x-x_0)^n) \implies \lim_{x \to x_0^+} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

quindi la dimostrazione consiste nel svolgere un limite e dimostrare che fa 0.
Iniziamo quindi da :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0^+}$$

Criterio della condizione necessaria per la convergenza

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente $\implies$ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ (quindi si fa il test del limite , se $\neq 0$ allora possiamo dire che non converge)

Per ipotesi sappiamo che la serie converge $\implies$ $\lim_{n \to \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

se facciamo un passo indietro e quindi per S_{n-1} $\implies$ $\lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$ (converge lo stesso non frega niente se faccio un passo in indietro tanto $n \to \infty$)
quindi abbiamo :

$$\lim_{n \to \infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$$

inoltre notiamo che :

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} = \\ = (\cancel{a_0 + a_1} + \cdots + \cancel{an - 1} + a_n) - (\cancel{a_0 + a_1} + \cdots + \cancel{a_{n-1}}) \\ = a_n \implies \lim_{n \to \infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \end{aligned}$$

Criterio di Leibniz

Il Criterio di Leibniz dice :

- IPOTESI :
  Sia a_n una successione in $\mathbb{R}$ e
  - $a_n \geq a_{n+1}$ (decrescente , anche definitivamente)
  - $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
  - $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- TESI :
  La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n < \infty$ (converge)

Dimostriamo quindi che la serie converge considerando la somma parziale $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ e quindi che il $\lim_{n\to\infty} S_n < \infty$, facciamo tutto in step :

- decrescenza di S_{2n} (somma parziale dei termini pari) : $S_{2n+2} \leq S_{2n}$ (il successivo è piu piccolo del precedente)
- crescenza di S_{2n-1} (somma parziale dei termini dispari) : $S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$ (il successivo è piu grande del precedente)
- S_{2n} è limitata inferiormente
- S_{2n-1} è limitata superiormente
- limiti di S_{2n} e S_{2n-1} sono uguali

Osserviamo prima che "andamento" ha la somma parziale e infatti notiamo che :

“Pasted image 20250624191245.png” could not be found.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots$$

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_1 = S_0 - a_1 \\ S_2 = S_1 + a_2 \\ S_3 = S_2 - a_3 \\ S_4 = S_3 + a_4 \\ \dots \end{cases}$$

quindi notiamo che

$$\begin{cases} S_{2n+2} = S_{2n+1} + a_{2n+2} \\ S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \end{cases}$$

Decrescenza di S_{2n}

Notiamo che per la somma parziale pari ($2n+2$)

$$S_{2n+2} = \underbrace{S_{2n+1}} + a_{2n+2} = \underbrace{S_{2n} - a_{2n+1}} + a_{2n+2}$$

ma siccome per l'ipotesi che la successione è decrescente (il successivo è piu piccolo del precedente) :

$$a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \implies -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$$

quindi se sommo a S_{2n} qualcosa di negativo allora il risultato sarà $\leq S_{2n}$, quindi abbiamo che :

$$S_{2n+2} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n} \implies S_{2n+2} \leq S_{2n}$$

Crescenza di S_{2n-1}

Quindi analogamente notiamo che :

$$S_{2n+1} = \underbrace{S_{2n}} - a_{2n+1} = \underbrace{S_{2n-1} + a_{2n}} - a_{2n+1} \geq S_{2n-1} \implies S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$$

Limitatezza superiore e inferiore

Quindi ora notiamo che :

$$S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n} \geq S_{2n-1} \implies S_{2n} \geq S_{2n-1}$$

quindi grazie alla decrescenza di S_{2n} (pari) e crescenza di S_{2n-1} (dispari) , e notiamo che :

$$\underbrace{S_1 \leq S_{2n-1}}_{S_{2n+1} \leq S_{2n-1}} \leq \underbrace{S_{2n} \leq S_0}_{S_{2n} \leq S_{2n+2}}$$

(questa situazione è la stessa nel disegno)
Quindi siccome S_{2n} è limitata superiormente e monotona crescente , per il *teorema della successione monotona limitata inferiormente* esiste il limite finito (converge) , analogamente per S_{2n-1} (ma per teorema inverso) :

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = L_0 \quad \wedge \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = L_1$$

$L_0 = L_1$

Per dimostrare che $L_0 = L_1$, portiamo di la :

$$L_0 - L_1 = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n-1})$$

ma siccome :

$$S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n} \implies S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n}$$

quindi abbiamo che

$$L_0 - L_1 = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'ipotesi del criterio che $a_n \to 0$.

Quindi abbiamo dimostrato che i due limiti sono uguali , e che quindi siccome le due somme parziali unendole otteniamo S_n ($\{S_{2n}\} \cup \{S_{2n-1}\} = S_n$) , abbiamo dimostrato che $S_n \to L \in \mathbb{R}$ converge.

$\square$

Limite notevole $\frac{\sin(x)}{x}$

Vogliamo dimostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$: quindi siccome la funzione $\frac{\sin(x)}{x}$ risulta pari basta anche fare per $x \to 0^+$ e notiamo che per $x > 0$ (basta di poco infatti) , $\sin(x) \geq 0$ e quindi notiamo che

$$x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \implies \text{divido tutto per } \sin(x) \implies 0 \leq 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\implies 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \implies \text{passo per i reciproci} \implies \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \implies$$

siccome

$$\underbrace{\cos(x)}_{\to 1 \text{ per } x \to 0^+} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{1}_{\to 1}$$

allora per il teorema dei Carabinieri anche $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ per $x \to 0^+$. $\square$

Disuguaglianza di Bernoulli

Vogliamo dimostrare che

$$\forall n \geq 1 \ (\in \mathbb{N}^+) \quad \forall x \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Dimostrazione per INDUZIONE su n :
PB : $P(1) \implies (1+x)^1 \geq 1 + x \implies \text{VERO}$
PI : Sappiamo quindi da PB che $P(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx$ è VERA allora dimostriamo che è VERA anche

$$P(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \quad \text{per} \quad n \geq 1$$

Iniziamo e notiamo che

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underbrace{\geq}_{P(n)} (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (1+n)x + nx^2$$

quindi ora ci chiediamo se

$$1 + (n+1)x + nx^2 \underbrace{\geq}_{?} 1 + (n+1)x \implies ? = \text{si ovvio}$$

$\square$.

Potenza di un binomio

Vogliamo dimostrare per INDUZIONE che

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Partiamo con il passo base :

$$\begin{aligned} P(1) : (a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{n-k} + b^k = \\ = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = \\ = a + b \implies P(n) \text{ è VERA} \end{aligned}$$

Ora passiamo al passo induttivo :

- Ipotesi induttiva $\to$ $P(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- Tesi induttiva $\downarrow$

$$P(n+1) : \underbrace{(a+b)^{n+1}}_{LHS} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k}_{RHS}$$

Quindi iniziamo da LHS per arrivare a RHS e notiamo - utilizzando $P(n)$ - che :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ora distribuiamo a e b con la sommatoria e abbiamo che :

$$(a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

ora lasciamo la prima sommatoria uguale e facciamo uno "*shift*" di indice per la seconda sommatoria , quindi passiamo da $k = 0 \to k = 1$ e quindi anche $n \to n+1$, ricordiamo però che ora nella seconda sommatoria ogni k diventa $k-1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{(k-1)+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} b^k$$

ora "*tiriamo fuori*" dalla prima sommatoria il primo termine ($k = 0$) e dalla seconda sommatoria l'ultimo termine ($k = n+1$) (per poter "*allineare*" le due sommatorie e poi riunirle in una sola) :

$$\binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^{n-(n+1-1)} b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} b^k + b^{n+1}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato che $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$.

Ora siccome le due sommatorie partono e finiscono dagli stessi numeri (sono "*allineate*") , possiamo unirle in una sola :

$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k$$

Ora utilizziamo la REGOLA DI PASCAL che dice che :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

quindi abbiamo che :

$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

ora l'ultimo passo è "rimettere dentro" i due termini esterni tirati fuori prima , quindi dobbiamo ripartire con $k=0$ e finire fino a $n+1$ e quindi otteniamo proprio RHS :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

$\square$.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Vogliamo dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e che quindi siano a, b *irriducibili* , $\sqrt{2}$ non può essere scritto come $\frac{a}{b}$, ma allora per dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, supponiamo per ASSURDO che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2}$ può essere scritto come $\frac{a}{b} \implies \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ora eleviamo tutto al quadrato e quindi $2 = \frac{a^2}{b^2} \implies a^2 = 2b^2 \implies \underbrace{a^2}_{\text{pari}} = \underbrace{2b^2}_{\text{pari}}$, ma se a^2 è *pari* allora anche a è *pari* , quindi possiamo chiamare $a = 2c$

$\implies (2c)^2 = 2b^2 \implies 4c^2 = 2b^2 \implies 2c^2 = b^2 \implies \underbrace{2c^2}_{\text{pari}} = \underbrace{b^2}_{\text{pari}}$ ma se b^2 è *pari* allora anche b è *pari*.

Quindi abbiamo ottenuto che sia a e b sono *pari* , da questo otteniamo una CONTRADDIZIONE , siccome le nostre ipotesi erano che a e b erano "irriducibili" fra di loro , ovvero che erano *coprimi*, ovvero che non hanno nessun divisore in comune.

coprimi

Teorema della media Integrale

Il teorema della media integrale afferma che :

- Ipotesi : Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
  - continua in $[a,b]$ e quindi integrabile in $[a,b]$
- *Tesi* : $\implies \exists c \in [a,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \implies f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Iniziamo , osservando che siccome f è continua in $[a,b]$ allora per il TEOREMA DI WEIERSTRASS , sappiamo che esistono il massimo e il minimo :

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

Ora possiamo osservare che se consideriamo una partizione dei soli punti $x_0 = a < b = x_1$, che chiamiamo σ , possiamo dire che allora che :

$$s(f,\sigma) = m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) = S(f,\sigma)$$

ma allora dividendo tutto per $(b-a)$ otteniamo che :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

ora siccome $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ si trova tra m e M , per il **TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI** abbiamo che :

$$\exists\, c \in [a,b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

$\square$.

Teorema del calcolo Integrale

Il teorema del calcolo integrale afferma che :

- **Ipotesi** : sia f continua in $[a,b]$ e definita la funzione $I(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, dove :

$$I(x) : \int_a^x f(t)\,dt$$

- **Tesi** :
  1. I è derivabile in $[a,b]$ e $I'(x) = f(x)$ (ovvero che I è una primitiva di f)
  2. sia F una qualsiasi primitiva di f ovvero che $F'(x) = f(x)$ allora abbiamo che :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Tesi 1

Vogliamo dimostrare che data la funzione $I(x)$ definita come nelle ipotesi , allora I è derivabile in $[a,b]$ ed è una primitiva di f , quindi dobbiamo ***"lavorare" con il rapporto incrementale di $I(x)$*** , quindi consideriamo $x, x+h \in [a,b]$ con $h \neq 0$, quindi abbiamo che

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \underset{\text{linearità}}{=}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt}\right]$$

quindi otteniamo che :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

ora osserviamo che possiamo applicare il **TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE** in $[x, x+h]$, quindi otteniamo che :

$$\exists\, c(h) \in [x, x+h] : \; f(c(h)) = \frac{1}{\cancel{x} + h - \cancel{x}} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

ma siccome $x \leq c(h) \leq x + h$ allora per confronto anche $c(h) \to x$ per $h \to 0$, quindi otteniamo che :

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = \lim_{h \to 0} f(c(h)) = f(x)$$

ovvero proprio la nostra tesi 1. .

Tesi 2

Vogliamo dimostrare che se prendiamo una qualsiasi primitiva di f ovvero F allora possiamo usare la formula (mostrata nella tesi 2.) per calcolare l'integrale. Quindi per dimostrare la tesi 2 , possiamo partire dal fatto che F è una primitiva , quindi vuol dire che $F(x) = I(x) + c$, siccome anche $I(x)$ per 1. è una primitiva di f .
Quindi possiamo osservare che :

$$F(b) - F(a) = I(b) + \cancel{c} - I(a) - \cancel{c} \underset{\text{def di I(x)}}{=}$$
$$= \int_a^b f(x)\, dt - \underbrace{\int_a^a f(x)\, dx}_{=0} = \int_a^b f(x)\, dx$$

ovvero la nostra tesi 2 .
$\square$.

Teorema del confronto integrale

Il teorema afferma che:

- Ipotesi : siano f e g funzioni
  - continue in $[a, b)$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
  - integrabili in $[a, t] \quad \forall t \in (a, b)$
  - $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b)$
- Tesi :
  - se $\int_a^b g(x)\, dx$ converge $\implies \int_a^b f(x)\, dx$ converge
  - se $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge $\implies \int_a^b g(x)\, dx$ diverge

Osservazione preliminare

Prima di dimostrare il teorema abbiamo bisogno di una osservazione fondamentale , ovvero che : sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, e tale che f sia integrabile in qualsiasi punto $c \in [a, b)$ (ovvero che comunque prendo un punto $c \in [a, b)$ posso fare l'integrale della funzione) e $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b)$, sappiamo che anche la funzione integrale $F(t)$, definita come :

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

sarà crescente in $[a, b)$.
Infatti se considero due punti t_1, t_2 tale che $a \leq t_1 < t_2 < b$ allora ottengo che :

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geq 0 \implies F(t_2) \geq F(t_1)$$

dove nell'ultimo passaggio deduciamo che anche $\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geq 0$ siccome anche la funzione $f(x) \geq 0$ in $[a, b)$.

(inoltre notiamo che partiamo da $F(t_2) - F(t_1)$ per capire che segno ha in modo da dedurre che è crescente , ovvero che comunque prendo due punti $t_1 < t_2$ devo ottenere che $F(t_2) \geq F(t_1)$)

Quindi se ho una funzione $F(t)$ crescente in $[a, b]$, allora ammette limite :

$$\lim_{t \to b^-} F(t) = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \underset{\text{def di integrale improprio}}{=} \int_a^b f(x)\,dx$$

Dimostrazione

Ora dimostriamo il teorema considerando due funzioni $F(t)$ e $G(t)$ nel seguente modo :

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \quad \wedge \quad G(t) = \int_a^t g(x)\,dx$$

ora siccome abbiamo la relazione (ipotesi) che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b)$, allora necessariamente con $a \leq t < b$ abbiamo che anche le due funzioni definite seguono la stessa "relazione" :

$$0 \leq F(t) \leq G(t) \implies 0 \leq \int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx$$

ma siccome grazie all'osservazione preliminare e alla permanenza del segno dei limiti , sappiamo che : $F(t), G(t)$ sono funzioni crescenti allora ammettono limiti , quindi avremo che :

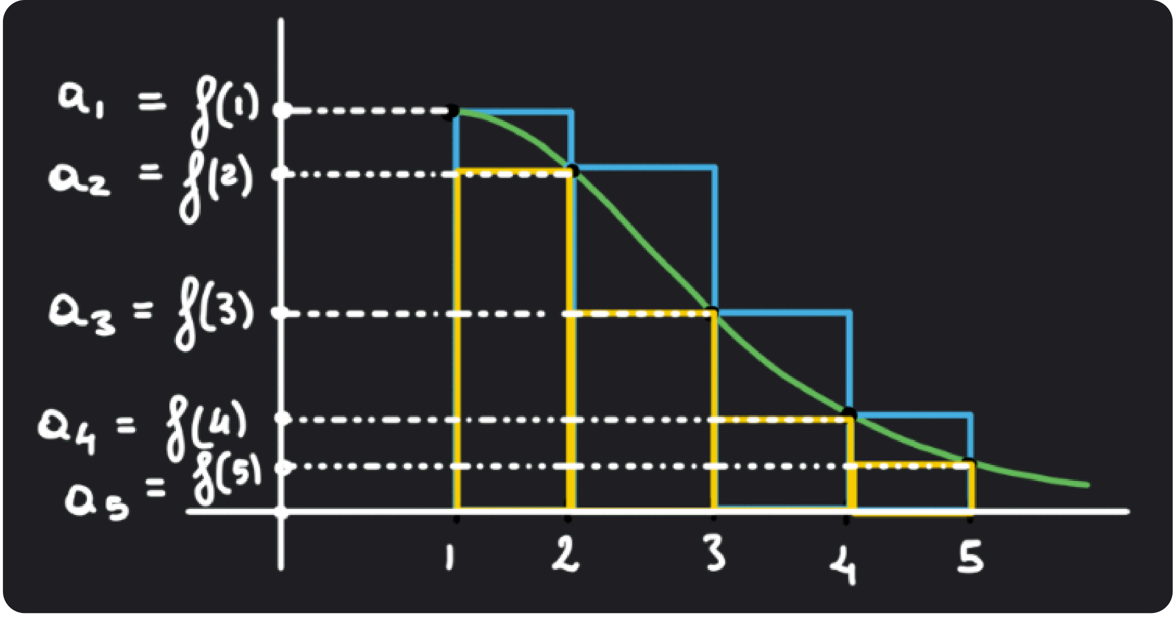
$$0 \leq \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \leq \lim_{t \to b^-} \int_a^t g(x)\,dx$$

ma per definizione di integrale improprio otteniamo che :

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

e da questo otteniamo la tesi.
$\square$

Teorema del confronto integrali - serie



a1 = f(1)
a2 = f(2)
a3 = f(3)
a4 = f(4)
a5 = f(5)
1
2
3
4
5