Propositional Tableaux

- Nella logica di primo ordine - il metodo delle tavole di verità risulta poco efficiente

Prima di introdurre il metodo dei tableaux descriviamo le 8 regole per la logica proposizionale

- queste regole si applicano a qualsiasi formula X e Y nella logica proposizionale

1) • Negazione $(\sim X)$ oppure $(\neg X)$ oppure $(\underbrace{F\,X})$ questa notazione la vediamo più tardi

- se $\underbrace{\sim X}$ è vero, allora $\underbrace{X}$ è falso
- se $\underbrace{\sim X}$ è falso, allora $\underbrace{X}$ è vero

A	¬A
F	V
V	F

2) • Congiunzione $(X \wedge Y)$ ("and", "e")

- se $X \wedge Y$ è vero, allora entrambi X e Y sono veri
- se $X \wedge Y$ è falso, allora uno di loro è falso

A	B	A ∧ B
F	F	F
V	F	F
F	V	F
V	V	V

3) • Disgiunzione $(X \vee Y)$ ("or", "oppure")

- se $X \vee Y$ è vero, allora o X o Y è vero (anche entrambi veri, basta che uno sia vero)
- se $X \vee Y$ è falso, allora entrambi sono falsi

A	B	A ∨ B
F	F	F
V	F	V
F	V	V
V	V	V

4) • Implicazione $(X \Rightarrow Y)$ $(X \supset Y)$

"$\underbrace{\text{se domani piove}}_{X}$, $\underbrace{\text{mi porto l'ombrello}}_{Y}$"

A	B	A → B
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V

- $X \Rightarrow Y$
  - se piove (vero)
    - mi porto l'ombrello (vero)

  } risultato vero (non mi bagno)

la domanda da porsi è "non mi bagno?"

- $X \Rightarrow Y$
  - se piove (vero)
    - mi porto l'ombrello (falso)

  } risultato falso (mi bagno)

Formule firmate

Introduciamo in questa parte una notazione che include i simboli T e F

T → true, F → false

- una formula firmata è un' espressione del tipo $\boxed{TX}$ oppure $\boxed{FX}$
  - dove X è una formula già definita
    - TX viene letto "X è vero"
    - FX viene letto "X è falso"

Illustration of the tableaux method

Illustriamo un esempio, definendo una formula e dimostriamo che sarà sempre vera (tautologia)

formula: $p \vee (q \wedge r) \Rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

se questa formula dovrà essere sempre vera, allora dimostriamo la sua negazione F

(1) $F[\underbrace{p \vee (q \wedge r)}_{A}] \Rightarrow [\underbrace{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}_{B}]$

(2) $T\ \underbrace{p}_{D} \vee \underbrace{(q \wedge r)}_{E}$

(3) $F\ \underbrace{(p \vee q)}_{F} \wedge \underbrace{(p \vee r)}_{G}$

siccome l'implicazione tra A ⇒ B è falsa solo in un caso, ovvero quando A è vera (TA) (2) e allo stesso momento B deve essere falsa (FB) (3)

A	B	A → B
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V

(4) Tp

ramo si divide a causa della (2)

(5) $T(q \wedge r)$

continua sotto o altra pagina

ramo si divide a causa della (2)

(4) Tp

(8) $F(p \vee q)$

(12) Fp

(13) Fq

X chiuso

(9) $F(p \vee r)$

(14) Fp

(15) Fr

X chiuso

Siccome in un OR ($\vee$) per essere vera la (2) può essere vera sia D (TD) che E (TE), quindi dividiamo in due casi possibili (4) (5)

(5) $T(q \wedge r)$

(6) Tq

(7) Tr

possiamo direttamente dedurre che in un AND ($\wedge$) devono essere tutti veri, quindi avremo (6) (7)

(10) $F(p \vee q)$

(16) Fp

(17) Fq

X chiuso

(11) $F(p \vee r)$

(18) Fp

(19) Fr

X chiuso

[Regole per le costruzioni dei tableaux]

(1) $\dfrac{T\sim X}{FX}$ | $\dfrac{F\sim X}{TX}$

(2) $\dfrac{TX \wedge Y}{TX}$ $\dfrac{TX \wedge Y}{TY}$ | $FX \wedge Y$ → FX | FY

nella congiunzione falsa potrebbe che X sia falsa oppure potrebbe che Y sia vera

(3) $TX \vee Y$ → TX | TY | $\left[\dfrac{FX \vee F}{FX} \quad \dfrac{FX \vee Y}{FY} \right]$

nell' OR falso vuol dire che deve essere falso sia X che Y (nello stesso momento)

(4) $TX \Rightarrow Y$ → FX | TY | $\dfrac{FX \Rightarrow Y}{TX}$ $\dfrac{FX \Rightarrow Y}{FY}$

come abbiamo già visto nell'implicazione falsa, allo stesso momento X deve essere vera e Y deve essere falsa

• Dimostrare che una formula è una conseguenza logica di altre formule con un metodo simile a quello di tableaux

• vogliamo dimostrare che $\underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)}_{B} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r)}_{A}$

B è una conseguenza logica di A

• potremmo costruire un tableau intero però sarebbe lungo da elaborare, quindi possiamo iniziare con 3 linee partendo dalla negazione della formula

$F \underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)}_{B} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r)}_{A}$

allora possiamo direttamente dire che

(1°) $T\ (p \Rightarrow q)$
(2°) $T\ (q \Rightarrow r)$
devono essere veri perché B è interamente vera

(3°) $F\ (p \Rightarrow r)$

$\Downarrow$

osservando la terza riga possiamo direttamente dire che se la (3)° è falsa, allora p deve essere vera e r falsa

(3°) $Tp \Rightarrow Fr$

ma allora la (2°) dovrà essere

(2°) $Fq \Rightarrow Fr$

contraddizione

(1°) $Tp \Rightarrow Tq$

qui q deve essere per forza vera sennò darà come risultato dell'implicazione falso e non vero come è definita la suo formula (1°)

• Definizione generale:

- per dimostrare che una formula Y è una guenza logica di un insieme di formule $X_1, X_2 \dots X_n$

• ci sono 2 modalità:

- costruire un tableau chiuso partendo dalla formula

$(X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n) \Rightarrow Y$

- costruire un tableau chiuso partendo dalle righe:

• $T X_1$
• $T X_2$
⋮
• $T X_n$
• $F Y$

dimostriamo così che Y è una conseguenza logica delle formule $X_1, X_2 \dots X_n$

Esempio (1)

(1) $F\,[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

(2) $T\,(\overset{T}{p} \Rightarrow \overset{T}{q}) \wedge (\overset{T}{q} \Rightarrow \overset{T}{r})$

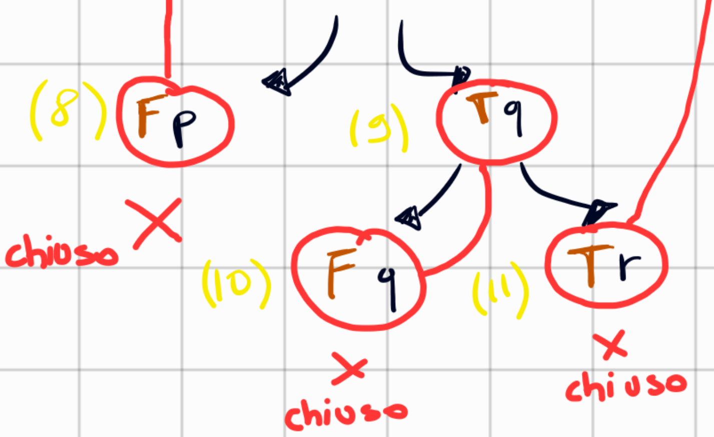
(3) $F\,(\underset{T}{p} \Rightarrow \underset{F}{r})$

(4) $T\,p$

(5) $F\,r$

(6) $T\,(p \Rightarrow q)$

(7) $T\,(q \Rightarrow r)$



(Osservazione)

possiamo notarlo anche direttamente qui partendo dalla (3) che ci dice che

$T\,p \quad F\,r$

alla numero (2) però osserviamo che se p deve essere vera (grazie alla (3)), allora la q deve essere per forza vera e questo va bene, ma il secondo pezzo anche lui deve essere vero, allora se la q è vera, la r dovrà essere per forza vera, ma se prima nella (3) avevamo che r era falsa → **contraddizione**

$$\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{X_1} \wedge \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{X_2} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r)}_{Y}$$

$T\,X_1 - T(p \Rightarrow q) \xrightarrow[3]{} \sim p \Rightarrow \sim q = \text{True}$

$T\,X_2 - T(q \Rightarrow r) \xrightarrow[2]{} \sim q \Rightarrow \sim r = \text{True}$

$F\,Y - F(p \Rightarrow r) \xrightarrow[1]{} p \Rightarrow \sim r = \text{False}$

(Unsigned formula)

(formule non firmate)

• Esempio 2

(1) $F\left[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\right] \Rightarrow \left[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\right]$

(2) $T\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ •

(3) $F\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

(4) $T\ (p \Rightarrow q)$ •

(5) $F\ (p \Rightarrow r)$

(6) $T\ p$

(7) $F\ r$

- $F\ p$ — × chiuso
- $T\ (q \Rightarrow r)$ •
  - $F\ p$
  - $T\ q$
    - $F\ q$ — × chiuso
    - $T\ r$ — × chiuso

• Esempio 3

$$F\ \left[\underbrace{(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)}_{T \qquad T}\right] \Rightarrow \left[\underbrace{(p \vee q) \Rightarrow r}_{F}\right]$$

(3) $T\ (p \Rightarrow r)$ $\rightarrow$ $F p$ (9) $F r$ (8)

(2) $T\ (q \Rightarrow r)$ $\quad$ $F q$ (7) $F r$ (6)

contraddizione

(1) $F\ (p \vee q) \Rightarrow r$ $\quad$ (4) $T(p \vee q)$ $\quad$ (5) $F r$

metodo più veloce: proviamo ad creare un tableau

$$F\ \big[\underbrace{(p \Rightarrow r) \land (q \Rightarrow r)}_{T}\big] \Rightarrow \big[\underbrace{(p \lor q) \Rightarrow r}_{F}\big]$$

(1) $T\ \underbrace{(p \Rightarrow r)}_{T} \land \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{T}$

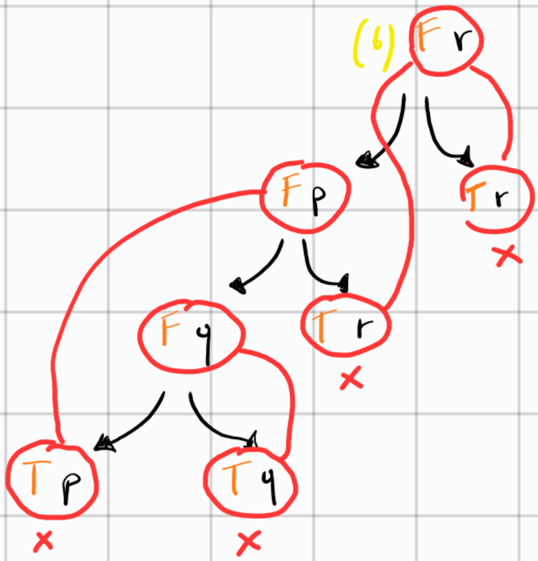
(2) $T\ (p \Rightarrow r)$ • — siccome c'è un $\land$ (and) dovranno essere tutte e due vere (True) T

(3) $T\ (q \Rightarrow r)$ •

(4) $F\ (p \lor q) \Rightarrow r$

(5) $T\ (p \lor q)$ •

(6) $F\ r$



Tableaux con Formule Non Firmate

- Sino ad ora abbiamo utilizzato

F X per indicare la negazione di una formula X } quindi che la formula X è falsa

oppure

T X per indicare che la formula X è vera

FORMULE FIRMATE

~X
¬X

utilizzando le formule NON FIRMATE → indica la negazione della formula X con ~ | ¬

(OPPURE)

X → per indicare che formula X è vera (True) non si mette nulla davanti alla formula

} questo ci aiuta a diminuire la VERBOSITÀ del tableau

FORMULE NON FIRMATE

(1)
$$\frac{\sim\sim X}{X}$$
la negazione di una formula già negata equivale alla formula vera

(2)
$$\frac{(X \wedge Y)}{X} \qquad \frac{(X \wedge Y)}{Y} \qquad \Big\| \qquad \sim(X \wedge Y) \to \sim X \;\; \sim Y$$
in formula firmata vuol dire
$F(X \wedge Y) \to FX \;\; FY$

(3)
$$(X \vee Y) \to X \;\; Y \qquad \Big\| \qquad \frac{\sim(X \vee Y)}{\sim X} \qquad \frac{\sim(X \vee Y)}{\sim Y}$$

(4)
$$(X \to Y) \to \sim X \;\; Y \qquad \Big\| \qquad \frac{\sim(X \to Y)}{X} \qquad \frac{\sim(X \to Y)}{\sim Y}$$

• Esempio (4)

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$$

(SENZA TABLEAU) metodo più veloce

$$\sim [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$$

(1) $(p \Rightarrow q)$ p ✓   q ✓

(2) $(p \Rightarrow r)$ p ✓   r ✓

(3) $\sim [p \Rightarrow (q \wedge r)]$
- p ✓
- $\sim (q \wedge r)$ ✗ ✗

- se $[p \Rightarrow (q \wedge r)]$ deve essere falso allora:
  - p è vero
  - $(q \wedge r)$ è falso:
    - ⚠ q è falso } oppure
    - r è falso

- se $(p \Rightarrow q)$ deve essere vero allora:
  - p è vero dal (3)
  - ⚠ quindi per forza q deve essere vero

contrad.

- se $(p \Rightarrow r)$ deve essere vero allora:
  - p è vero dal (3)
  - ⚠ quindi per forza r deve essere vero

Conclusione: abbiamo una contraddizione perché nel (3) abbiamo dedotto che q ed r uno di loro è falso, ma poi nei passi (2) e (1) deduciamo che sia q che r devono essere veri che è una CONTRADDIZIONE

→ e quindi è una tautologia la formula data!

• Esempio (5)

$\sim(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

$\sim[\underbrace{\sim(p \vee q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(\sim p \wedge \sim q)}_{\times}]$

(1) $\sim(p \vee q) \quad \sim p \quad \sim q$

(2) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

- $\sim(\sim p) \rightarrow p$
- $\sim(\sim q) \rightarrow q$

non possiamo trovare una valutazione che renda la formula falsa, quindi è una tautologia

$\sim[\underbrace{\sim(p \vee q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(\sim p \wedge \sim q)}_{F}]$

(1) $\sim(p \vee q)$

(2) $\sim p$

(3) $\sim q$

(4) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

$\sim(\sim p) \qquad \sim(\sim q)$

$p \qquad q$

• Esempio (6)

$(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow [\sim(p \vee q)]$

$\sim\underbrace{(\sim p \wedge \sim q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{[\sim(p \vee q)]}_{F}$

(1) $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge q)$

- $\sim p$
- $\sim q$

(2) $\sim[\sim(p \vee q)]$

- $(p \vee q)$
- p oppure q

contraddizione

$(\sim F \wedge \sim F)$

$(V \wedge V) \rightarrow V$

$\sim(\underbrace{F \wedge F}_{})$

$\sim F \rightarrow V$

[Tableau]

$\sim\underbrace{(\sim p \wedge \sim q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{[\sim(p \vee q)]}_{F}$

(1) $(\sim p \wedge \sim q) = \sim(p \wedge q)$

se vogliamo che questo sia vero, allora p e q devono essere falsi così che il negato di falso dia vero

"raccogliamo la negazione" perchè, esempio:

$(\sim F \wedge \sim F) \rightarrow (V \wedge V)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\sim(F \wedge F) \qquad V$

$\hookrightarrow \sim F$

(2) $\sim p$

(3) $\sim q$

(4) $\sim[\sim(p \vee q)]$

(5) $(p \vee q)$

$p \qquad q$

$\times \qquad \times$

ricordiamo qui la regola

(1) $\dfrac{\sim\sim X}{X}$

$(\sim V \wedge \sim V)$

$\sim(V \wedge V)$ raccolgo $\sim$

$\sim V \rightarrow F$

$(F \wedge F)$

• Esempio (7)

$[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

$\sim [\underline{p \wedge (q \vee r)}] \Rightarrow [\underline{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}]$

(1) $p \wedge (q \vee r)$

(2) p

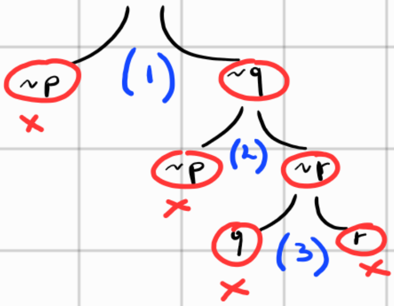
(3) $(q \vee r)$ • (3)

(4) $\sim [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

$\dfrac{\sim (x \vee y)}{\sim x}$ $\dfrac{\sim (x \vee y)}{\sim y}$

(5) $\sim (p \wedge q)$ • (1)

(6) $\sim (p \wedge r)$ • (2)



• sviluppo dei rami come meglio conviene!

• Esempio (7)

la nego subito per efficienza

$\sim [\underline{(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)}] \Rightarrow \underline{\sim p}$

(1) $(p \Rightarrow q) \longrightarrow p$ q

(2) $(p \Rightarrow \sim q) \longrightarrow p$ $\sim q$

(3) $\sim (\sim p) \longrightarrow p$

$\sim [\underline{(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)}] \Rightarrow \underline{\sim p}$

(1) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$

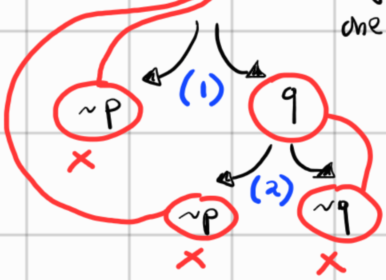
(2) $(p \Rightarrow q)$ • (1)

(3) $(p \Rightarrow \sim q)$ • (2)

(4) $\sim (\sim p)$

(5) p

applichiamo la regola che dice che $\dfrac{\sim \sim x}{x}$



• Esempio (8)

$$[((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow (q \vee r))] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

(1) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow (q \vee r))$

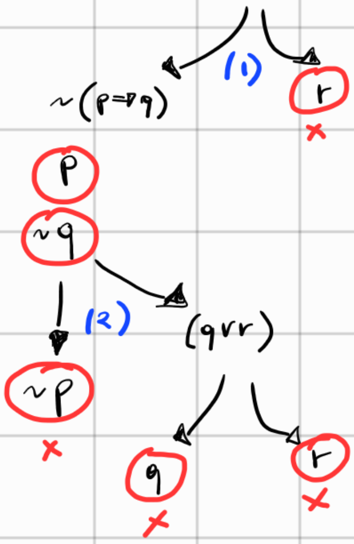
(2) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ • (1)

(3) $(p \Rightarrow (q \vee r))$ • (2)

(4) $\sim (p \Rightarrow r)$

(5) p

(6) $\sim r$



Notazione Unificante

Connettivi di partenza ("starters")

finora i tableaux sono stati considerati $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow$ come connettivi logici indipendenti ("starters")

ma alcuni di questi possono essere definiti in termini di altri

Connettivi primitivi

- diversi sistemi assiomatici della Logica Proposizionale usano diverse combinazioni di questi connettivi di base
  - solo $\sim$ e $\wedge$
  - solo $\sim$ e $\Rightarrow$
  - solo $\sim$, $\wedge$ e $\vee$

esempio:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

riscritto usando
usando solo $\sim, \wedge$

$$\sim [[\sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (q \wedge \sim r)] \sim\sim (p \wedge \sim r)]$$

Introduzione al simbolo α (alfa)

α può rappresentare 5 tipi diversi di formule:

- T(X∧Y): congiunzione vera
- F(X∨Y): disgiuzione falsa
- F(X⇒Y): implicazione falsa
- T∼X: una negazione vera
- F∼X: una negazione falsa

α	α_1	α_2
T(X∧Y)	TX	TY
F(X∨Y)	FX	FY
F(X⇒Y)	TX	FY
T∼X	FX	FX
F∼X	TX	TX

Definizione delle componenti

- per ogni formula α, si definiscono due componenti (α_1 e α_2)

- Se α è T(X∧Y)
  - α_1 = TX
  - α_2 = TY
- Se α è F(X∨Y)
  - α_1 = FX
  - α_2 = FY
- Se α è F(X⇒Y)
  - α_1 = TX
  - α_2 = FY
- Se α è T∼X
  - α_1 = FX
  - α_2 = FX

se è vero che la negazione della formula X allora la formula sarà falsa

- Se α è F∼X
  - α_1 = TX
  - α_2 = TX

tutte queste formule sono di tipo congiuntivo perché

- se α vera se e solo se ENTRAMBE le sue componenti (α_1 e α_2) sono ver
- questo significa che quando le ntroviamo nei tableaux, possiamo direttamente aggiungere entrambe le sue componenti sullo stesso ramo

Perché questo?

questo unifica il trattamento di formule che si comportano in maniera simile

- per esempio quando incontriamo

T(p∧q), F(p∨q), F(p⇒q) T∼p, F∼p

possiamo trattarle tutte allo stesso modo: aggiungendo entrambe le sue componenti α_1 e α_2 sullo stesso ramo

---

Introduzione al simbolo β (Beta) che rappresenterà le formule di tip β (quelle che creano nuovi rami) anche qui di 5 tipi

formula di tipo disgiuntivo

β	β_1	β_2
F(X∧Y)	FX	FY
T(X∨Y)	TX	TY
T(X⇒Y)	FX	TY
T∼X	FX	FX
F∼X	TX	TX

basta che un componente (β_1, β_2) sia vero

- Utilizzando la notazione delle formule non firmate

α	α_1	α_2
$(x \wedge y)$	x	y
$\sim(x \vee y)$	$\sim x$	$\sim y$
$\sim(x \Rightarrow y)$	x	$\sim y$
$\sim x$	$\sim x$	$\sim x$
$\sim\sim x$	x	x

β	β_1	β_2
$\sim(x \wedge y)$	$\sim x$	$\sim y$
$(x \vee y)$	x	y
$(x \Rightarrow y)$	$\sim x$	y
$\sim x$	$\sim x$	$\sim x$
$\sim\sim x$	x	x

Problema 1

ci sono altri due connettivi logici:

- NOR ($\downarrow$)
- NAND ($\mid$)

- quali saranno le loro regole nei tableaux?
- determiniamo anche la loro classifica come α o β.

NOR ($\downarrow$)

- tabella di verità

x	y	$x \downarrow y$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

è vero il NOR solo se entrambi i componenti sono falsi

in pratica è la negazione di un $\vee$ (OR)

$\sim(x \vee y)$

$F\ x \downarrow y$ → $T\ x$, $T\ y$

β

$$\frac{T\ x \downarrow y}{F\ x} \qquad \frac{T\ x \downarrow y}{F\ x}$$

α

NOR ($\downarrow$)

- tabella di verità

x	y	$x \mid y$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

è falso il NAND quando entrambi i componenti sono veri

in pratica è la negazione di un $\wedge$ (AND)

$\sim(x \wedge y)$

$T\ x \mid y$ → $F\ x$, $F\ y$

β

$$\frac{F\ x \mid y}{T\ x} \qquad \frac{F\ x \mid y}{T\ x}$$

α

il Bi-Condizionale ($\equiv$)

la formula $X \equiv Y$ può essere visto come abbreviazione di due formule equivalenti

- $(x \wedge y) \vee (\sim x \wedge \sim y)$
- $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$

oppure

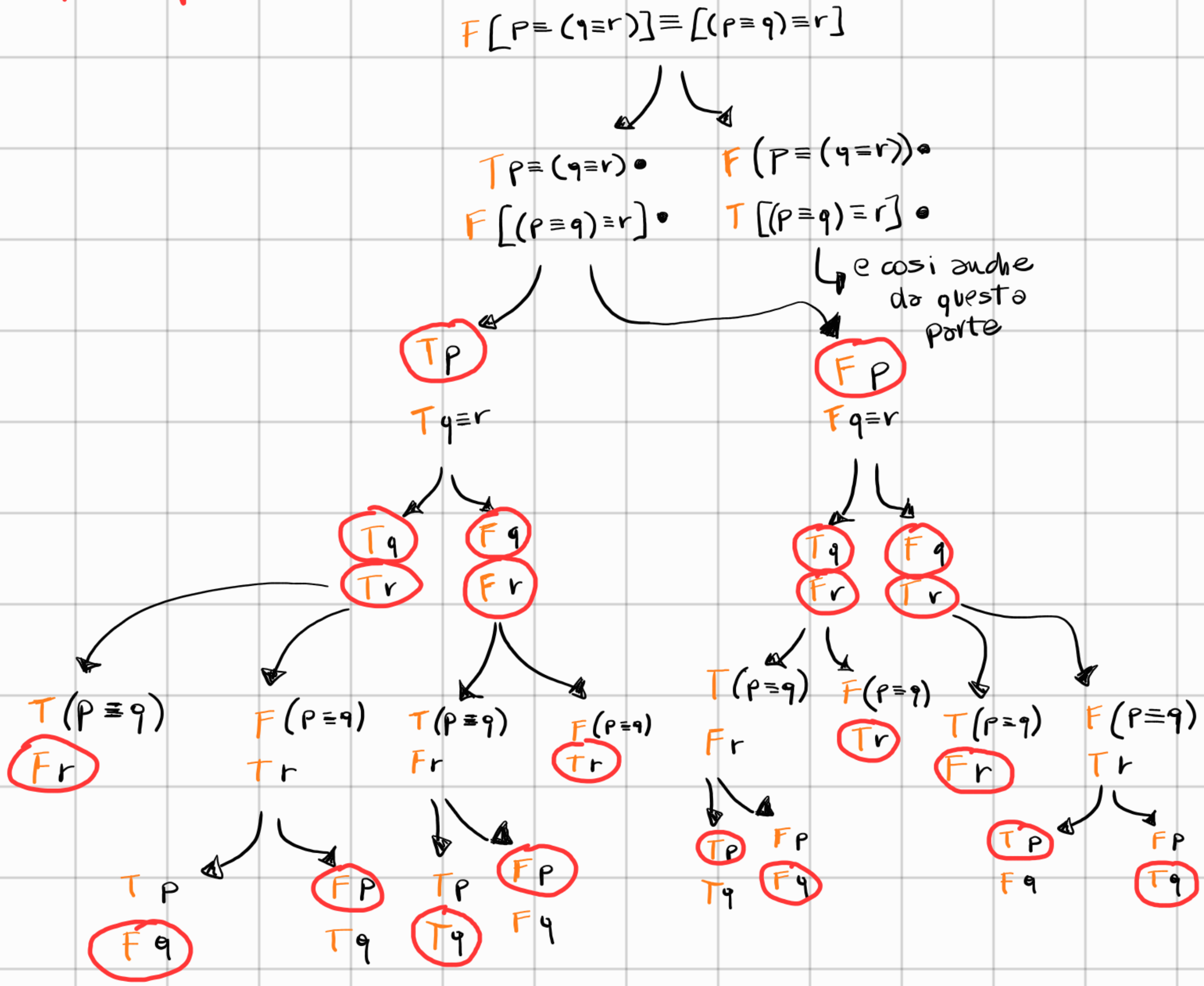
le regole specifiche per i tableaux con $\equiv$

$T(X \equiv Y)$: TX, TY | FX, FY

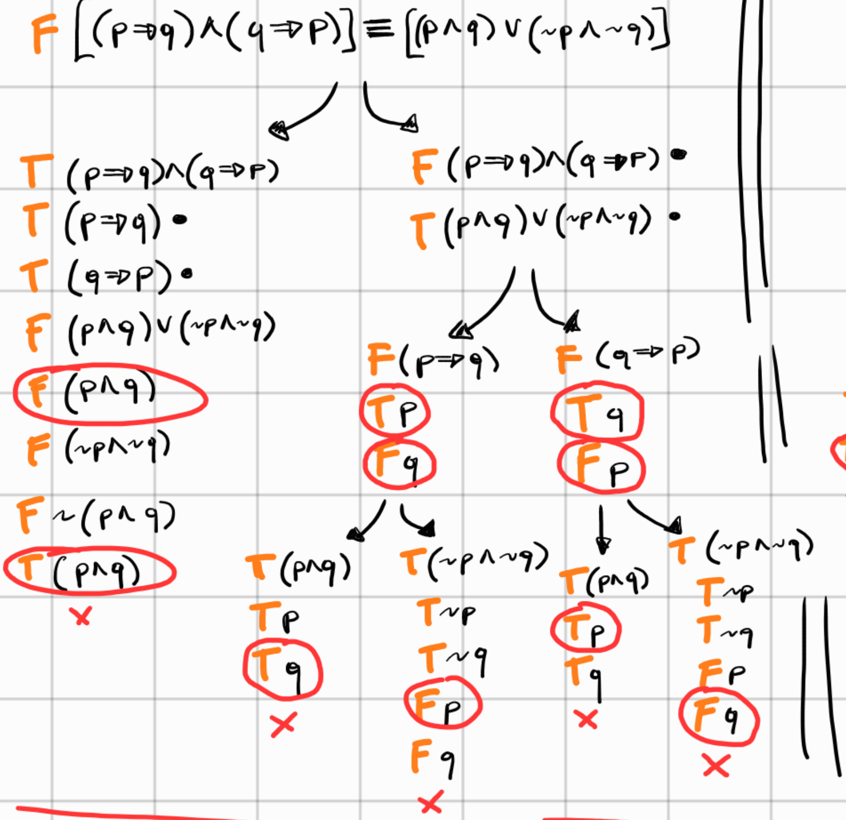
$F(X \equiv Y)$: TX, FY | FX, TY

⚠ • notiamo che $\equiv$ non rientra nello schema $\alpha - \beta$

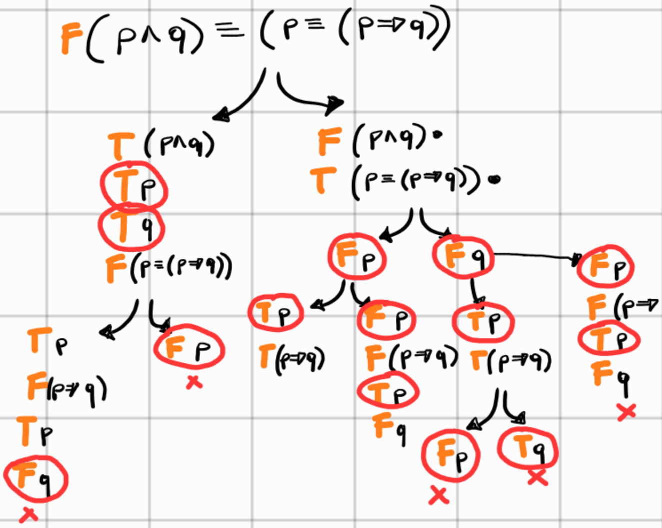
• Esempio (1)



• Esempio (2)



• Esempio (3)



GRADO DI UNA FORMULA

• il grado di una formula è il **numero di connettivi logici** presenti nella formula stessa

• **Variabili proposizionali**: ogni variabile proposizionale ha grado 0, poiché non contiene connettivi logici.
(p, q, r)

• **Connettivi binari**:
se abbiamo due formule X e Y con gradi n_1 e n_2 allora:

• $X\wedge Y$
• $X\vee Y$
• $X\Rightarrow Y$

} grado n_1+n_2+1 ↳ connettivo logico aggiunto

• **Negazione**:
Se una formula X ha grado n_1, allora la negazione di X $(\sim X)$ ha grado n_1+1
↳ siccome la negazione aggiunge un connettivo logico alla formula

• **Relazioni tra Gradi**:

• Se una formula α è di grado più alto rispetto a α_1, α_2, allora α ha più connettivi rispetto ad α_1 e α_2 ⟹

$$\underset{1}{\overset{\alpha}{F\,X\Rightarrow Y}} \qquad \underset{0}{\overset{\alpha_1}{T\,X}} \qquad \underset{0}{\overset{\alpha_2}{F\,Y}}$$

• La formula β è di grado più alto di entrambe β_1 e β_2 ⟹

$$T\,X\Rightarrow Y \quad \begin{cases} F\,X \\ T\,X \end{cases}$$

Concetto di Correttezza e Completezza

Un concetto fondamentale della teoria dei tableaux è la metateoria che si concentra in due proprietà essenziali:

- **Correttezza (Correctnes)**
  - afferma che se una formula X può essere dimostrata con il metodo dei tableaux (cioè esiste un tableau chiuso che inizia da FX) allora X è effettivamente una tautologia.
  - In altre parole non dice falsità ed è corretto

- **Completezza (completness)**
  - Afferma che ogni tautologia può essere dimostrata con il metodo dei tableaux
  - se X è una tautologia, qualsiasi tableau completo che parte da FX finirà per essere chiuso

- **Soddisfacibilità**
  - Una formula è soddisfacibile se esiste almeno un caso in cui è VERA

⟺

- se la formula è una tautologia:
  - F (formula) deve essere insoddisfacibile

+ Esempio

$(p \wedge q) \rightarrow$ soddisfacibile perchè la formula è vera quando p è vera e q è vera

$(p \vee \sim p) \rightarrow$ è una tautologia perchè $F(p \vee \sim p)$ è insoddisfacibile
- non esiste nessun caso in cui $(p \vee \sim p)$ possa essere falsa

- Un ramo è soddisfacibile se tutte le sue formule possono essere vere insieme

+ Esempio

T(p)	T(p)
T(q)	F(p)
• soddisfacibile	• Insoddisfacibile

• Esercizio n° 1

$S = \{p \Rightarrow q,\ p \Rightarrow \sim q,\ q \Rightarrow p\}$

Dire se il seguente insieme S è soddisfacibile, motivando adeguatamente la risposta.

$T(p \Rightarrow q)$

nel caso di T_p

allora q deve essere vero T_q

$T(p \Rightarrow \sim q)$ con T_p e T_q

non funziona perchè q viene negata e la formula diventa falsa

✕

nel caso p fosse falso F_p

allora q può essere sia falso che vero

(•) nel caso q sia falso F_q

$T(p \Rightarrow \sim q)$

OK FUNZIONA CON F_q e F_p

$T(q \Rightarrow p)$

OK FUNZIONA CON F_q F_p

V

l'insieme è soddisfacibile con l'interpretazione in F_p F_q

(•) nel caso q sia vero T_q

$T(p \Rightarrow \sim q)$ se F_p e T_q

Ok funziona e da vero

ma quando incontriamo

$T(q \Rightarrow p)$

se T_q e F_p

NON FUNZIONA e non da vero quindi questa strada non può funzionare (dove F_p T_q)

✕

---

a)

• Dimostrare che se un tableaux è soddisfacibile, allora ogni sua estensione (utilizzando regola α e regola β) rimane soddisfacibile

se un Tableau è <u>soddisfacibile</u> vuol dire <u>che almeno un ramo è soddisfacibile</u>, cioè <u>esiste almeno una interpretazione che rende tutte le formule di quel ramo vere</u>.

Regola β

Se quel ramo ho una formula del tipo β $(x \vee y)$ applicando la regola, il ramo si divide in due casi dove uno dei due dovrà essere vero, mantenendo la soddisfacibilità

Regola α $(x \wedge y)$

Se a quel ramo soddisfacibile ho una formula del tipo α $(x \wedge y)$ e applico la regola che se questa è vera (parte dell'interpretazione e della soddisfacibilità) allora sia x che y devono essere vere, rimane la soddisfacibilità perchè con la stessa interpr. rimane tutto vero.

- Dimostrare che se X è soddisfacibile, nessun tableau per X può essere chiuso

- se X è soddisfacibile vuol dire che esiste un'interpretazione che la rende vera

- un tableau chiuso vuol dire che tutte interpretazioni portano a contraddizioni } cioè ogni possibile interpretazione conduce ad un risultato falso

supponiamo che una formula X soddisf. ci sia un tableau che si chiude allora come può essere se X è soddisfacibile e abbia un tableau chiuso

→ X deve avere un ramo senza contraddizioni

- Esercizio n° 2

$$S = \{\sim(p \vee q),\ p \Rightarrow q\}$$

- 1- Verificare se è soddisfacibile

$$\frac{T \sim (p \vee q)}{F}$$

$$\downarrow$$

Fp Fq → $T(p \Rightarrow q)$ OK funziona ed è soddisfacibile in Fp e Fq

$$\frac{T \sim (p \vee q)}{Fp} \qquad \frac{T \sim (p \vee q)}{Fq}$$

tipo α

- 3- Verificare che l'insieme S' che otteniamo da S aggiungendo le componenti della formula α (α_1, α_2) se ancora soddisfacibile.

$$S' = S \cup \{\overset{Fp}{\sim p}, \overset{Fq}{\sim q}\} = \{\sim(p \vee q),\ p \Rightarrow q,\ \sim p,\ \sim q\}$$

Fp Fq → $T \sim p$ ✓ $T \sim q$ ✓

quindi si S' è ancora soddisfacibile.

- Verificare che almeno uno dei due insiemi S_1' e S_2', che otteniamo da S aggiungendo rispettivamente la prima e la seconda componente della formula di tipo β $(p \Rightarrow q)$ è soddisfacibile

$$S_1' = S \cup \{\overset{Fp}{\sim p}\} = \{\sim(p \vee q),\ p \Rightarrow q,\ \overset{Fp}{\sim p}\}$$

$$S_2' = S \cup \{\overset{Tq}{q}\} = \{\sim(p \vee q),\ p \Rightarrow q,\ \overset{Tq}{q}\}$$

si la soddisfacibilità viene mantenuta anche negli insiemi S_1', S_2'

- Esercizio n° 3

Sia S un insieme soddisfacibile e sia $f \in S$ una formula, dimostrare che:

↳ se f è una formula di tipo α, l'insieme $S' = S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ è ancora soddisfacibile.

F_{α_1} o F_{α_2}

supponiamo per assurdo che S' non sia più soddisfacibile allora vuol dire che o α_1 o α_2 sotto la stessa interpretazione di α danno risultato falso (insoddisfacibilità), allora vuol dire che anche α ritorna falso e allora $f \notin S$ → assurdo perché all'inizio abbiamo usato l'ipotesi che $f \in S$