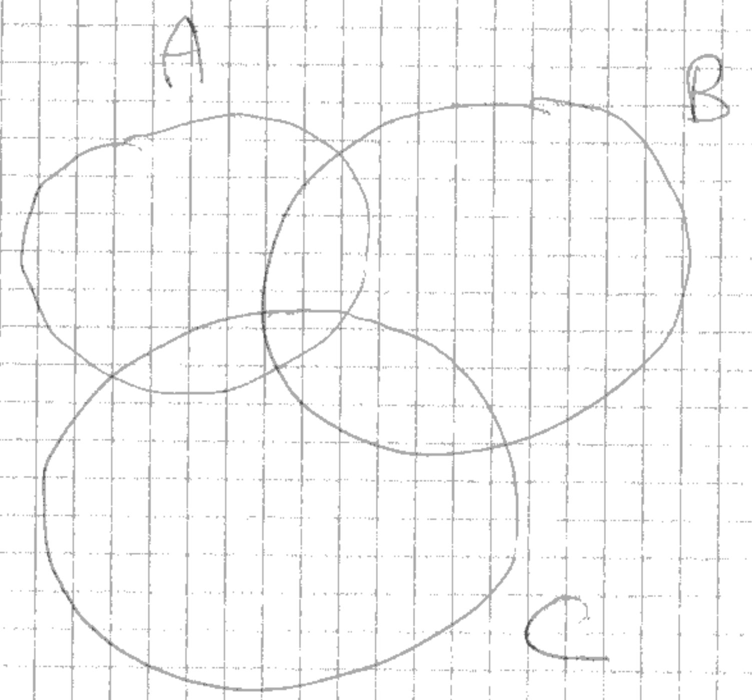
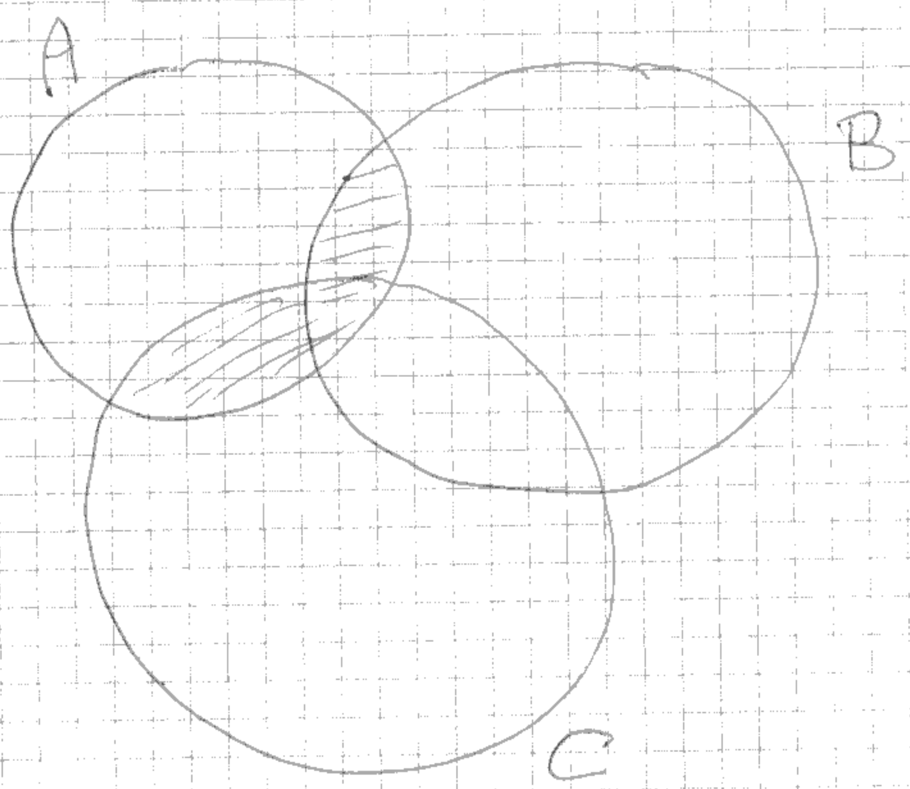
DIAGRAMMI DI VENN

SI RAPPRESENTA OGNI INSIEME CON I PUNTI RACCHIUSI DA UNA CURVA.

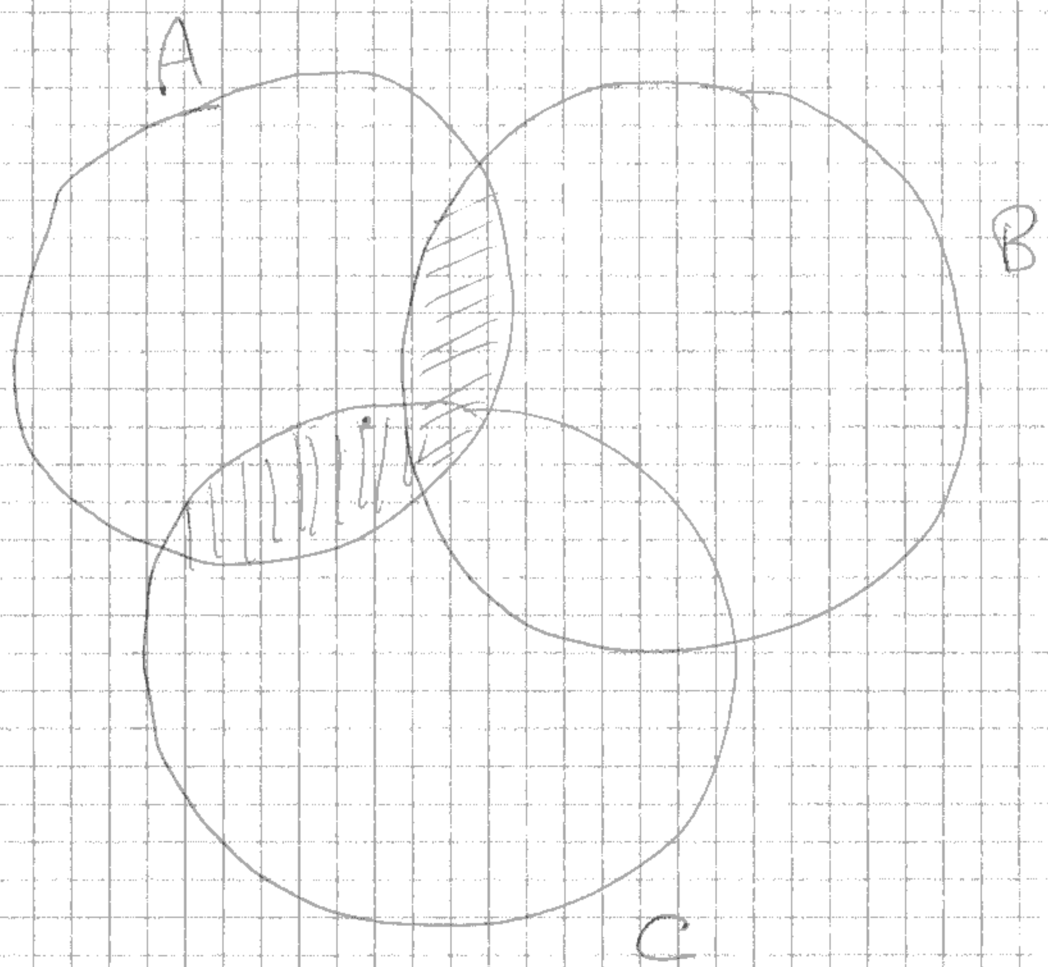
E.g.



PROP. DISTRIBUTIVA:



$A \cap (B \cup C)$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

OSS.

TAVOLA DI VERITÀ: DIMOSTRA (NON AIUTA L'INTUIZIONE)

DIAGRAMMA DI VENN: AIUTA L'INTUIZIONE (NON DIMOSTRA)

~~DIMOS~~ RAGIONAMENTO: DIMOSTRA (HA BISOGNO DELL'INTUIZIONE)

A, B INSIEMI

DEF. LA DIFFERENZA TRA A E B È

$$A \setminus B \overset{def}{=} \{ x \in A : x \notin B \}$$

DEF: LA DIFFERENZA SIMMETRICA DI A E B È

$$A \triangle B \overset{def}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$\left(= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \right).$$

__DEF__: IL __PRODOTTO CARTESIANO__ DI A E B È

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

coppia ordinata

$$\left(= \{a, \{a,b\}\} \right)$$

__E.g.__ $(1,2) \neq (2,1)$.

SIMILMENTE, SE A, B, C SONO INSIEMI, ALLORA

$$A \times B \times C \overset{def}{=} \{(a,b,c) : a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$$

ETC...

(SEMPRE VERO)

ES. [2]: È VERO CHE

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \ ?$$

ES. [1]: A, B, C INSIEMI, CON $C \subseteq A$. È VERO CHE

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \quad ?$$

ES. [2]: CHI È

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P}) \quad ?$$

A INSIEME.

DEF. L'INSIEME DELLE PARTI DI A (o INSIEME POTENZA) è

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{def}{=} \{B : B \subseteq A\}.$$

PROP. 1.2.3 A, B, C INSIEMI. ALLORA

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

DIM. SIA $(x,y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ e $y \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ e $y \in B$ e $y \in C$

$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$ e $(x,y) \in A \times C$

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

VICEVERSA. SIA $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$ e $(x,y) \in A \times C \Rightarrow x \in A$

e $y \in B$ e $x \in A$ e $y \in C \Rightarrow x \in A$ e

$y \in B \cap C \Rightarrow (x,y) \in A \times (B \cap C)$. $\square$

<u>PROBLEMA SAT</u>: DATE DUE FORMULE

COMPOSTE DA UN NUMERO FINITO

DI INSIEMI, $\cap$ e $\cup$, <u>DECIDERE</u>

SE SONO UGUALI COME INSIEMI.
IN UN TEMPO
"RAGIONEVOLE"

<u>1.3 APPLICAZIONI TRA INSIEMI</u>

A, B INSIEMI. UNA APPLICAZIONE DA A IN B È UNA LEGGE CHE ASSOCIA AD OGNI $a \in A$ UN <u>UNICO</u> ELEMENTO $b \in B$.

DEF. UNA **APPLICAZIONE** (O **FUNZIONE** O **MAPPA**) $f: A \to B$ È UN SOTTOINSIEME $f \subseteq A \times B$ TALE CHE PER OGNI $a \in A$ ESISTE UN UNICO $b \in B$ TALE CHE $(a,b) \in f$ (SCRIVIAMO $f(a) = b$).

SI A $f: A \to B$.

DEF. f È **SURIETTIVA** SE PER OGNI $b \in B$ ESISTE $a \in A$ TALE CHE

$f(a) = b$.

__DEF.__ f è __INIETTIVA__ SE

$$\begin{matrix} x, y \in A \\ x \neq y \end{matrix} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

__DEF.__ f È __BIUNIVOCA__ SE f è INIETTIVA E f è SURIETTIVA.

SIANO A, B, C INSIEMI e

$f: A \to B$ e $g: B \to C$.

DEF. LA COMPOSIZIONE DI f E g È

$g \circ f : A \to C$ DEFINITA PONENDO

$$(g \circ f)(a) \overset{def}{=} g(f(a)),$$

PER OGNI $a \in A$.

NOTAZIONI:

$\forall$ SIGNIFICA "PER OGNI"

$\exists$ SIGNIFICA "ESISTE"

$\exists!$ " "ESISTE UN UNICO"

PROP. 1.3.1 A, B, C INSIEMI, $f : A \to B$, $g : B \to C$. ALLORA:

i) f e g INIETTIVE $\Rightarrow$ $g \circ f$ INIETTIVA

ii) f e g SURIETTIVE $\Rightarrow$ $g \circ f$ SURIETTIVA

iii) " " BIUNIVOCHE $\Rightarrow$ $g \circ f$ BIUNIVOCA.

DIM. i) SIANO $x, y \in A$, $x \neq y$ $\Rightarrow$ POICHÈ f È INIETTIVA $\Rightarrow$ $f(x) \neq f(y)$. MA g È INIETTIVA $\Rightarrow$ $g(f(x)) \neq g(f(y))$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$.

ii) SIA $c \in C \Rightarrow$ POICHÈ g È SURIETTIVA $\Rightarrow \exists\, b \in B$ tale che $g(b) = c$. Ma f È SURIETTIVA $\Rightarrow \exists\, a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Quindi $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

iii) SEGUE DA i) e ii). $\square$

<u>ES. [1+]</u>: QUANTE FUNZIONI $f : [3] \to [4]$ CI SONO CHE SONO INIETTIVE?

(RISPOSTA: 24)

ES. [17]. QUANTE FUNZIONI $f: [4] \to [3]$ CI SONO CHE SONO SURIETTIVE?

(RISPOSTA: 36).

A, B INSIEMI, $f: A \to B$, f BIUNIVOCA.

DEF. L'**INVERSA** DI f È $f^{-1}: B \to A$ DEFINITA PONENDO

$$f^{-1} \overset{def}{=} \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in f\}$$

OSS. QUINDI

$$f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a.$$

DEF. LA FUNZIONE IDENTITÀ SU A è

$I_A : A \to A$ (o 1_A, o I, o 1) DEFINITA

PONENDO

$$I_A(a) \overset{def}{=} a$$

$\forall a \in A$.

PROP. 1.3.2: A INSIEME, $f: A \to A$, $g: A \to A$, $h: A \to A$. ALLORA:

i) $f \circ g : A \to A$;

ii) SIA $a \in A$. ALLORA

$$(f\circ(g\circ h))(a) = f((g\circ h)(a)) = f(g(h(a)))$$

MENTRE

$$((f\circ g)\circ h)(a) = (f\circ g)(h(a)) = f(g(h(a)))$$ ✓

iii) SIA $a \in A$. ALLORA

$$(f\circ I_A)(a) = f(I_A(a)) = f(a)$$

MENTRE

$$(I_A\circ f)(a) = I_A(f(a)) = f(a)$$ ✓

ii) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$;

iii) $f \circ I_A = I_A \circ f = f$;

iv) f BIUNIVOCA $\Rightarrow f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$.

<u>DIM.</u> i) E' CHIARO.

~~ii)~~

<u>OSS.</u> DATE $f, g : A \to B$ SI DICE CHE f e g SONO <u>UGUALI</u> (SCRITTO $f = g$) SE

$$f(a) = g(a) \quad \forall a \in A.$$

iv) SIA f BIUNIVOCA E $a \in A$. ALLORA

~~SIA~~

$$(f \circ f^{-1})(a) = f(f^{-1}(a))$$

SIA $b \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(a) \Rightarrow f(b) = a \Rightarrow$

$$f(f^{-1}(a)) = a \Rightarrow (f \circ f^{-1})(a) = a = I_A(a)$$

SIMILMENTE

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)).$$

SIA $c \overset{\text{def}}{=} f(a) \Rightarrow f^{-1}(c) = a \Rightarrow$

$$f^{-1}(f(a)) = a \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(a) = a = I_A(a). \square$$