ESEMPI E CONTROESEMPI:

ESEMPIO: NON DIMOSTRA

CONTROESEMPIO: DIMOSTRA CHE NON È SEMPRE VERO.

E.g. CONSIDERIAMO L'ENUNCIATO:

"OGNI PRIMO È DISPARI" (P 1)

ESEMPIO: 3 È PRIMO ED È DISPARI.

CONTROESEMPIO: 2 È PRIMO ED È PARI.

($\Rightarrow$ (P1) È FALSA).

SIA $m \in \mathbb{P}$. PONIAMO

$$S_m \stackrel{def}{=} \{ f : [m] \to [m],\ f\ \text{BIUNIVOCA} \}$$

(S_m È IL GROPPO SIMMETRICO)

SIA $f \in S_n$

SCRIVIAMO

$$f = a_1\, a_2 - a_n$$

PER DIRE CHE

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ ,\ f(n) = a_n$$

E.g.

$$S_3 = \{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}$$

OSS. SE $f, g \in S_m$, $f = a_1 \cdots a_m$, $g = b_1 \cdots b_m$ ALLORA

$$f \circ g = a_{b_1} \, a_{b_2} \cdots a_{b_m}$$

E.g. $(m=7)$ $f = 7153426$ $g = 6712534$

$\Rightarrow f \circ g = 2671453$

<u>OSS.</u> SE $f \in S_n$, $f = a_1 \cdots a_n$ ALLORA

$f^{-1} = b_1 \dots b_n$ DOVE b_i È LA

POSIZIONE DI i IN $a_1 \cdots a_n$.

<u>E.g.</u> $n=7$, $f = 5132647$ ALLORA

$$f^{-1} = 2436157$$

IN EFFETTI

$$5132647 \circ 2436157 = \overbrace{1234567}^{Id_{[n]}}$$

$2436157 \circ 5132647 = 1234567$ ✓

<u>DEF</u> GLI ELEMENTI DI S_m SI DICONO <u>PERMUTAZIONI</u>

A, B INSIEMI, $f: A \to B$.

SIA $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$.

<u>DEF</u> L'<u>IMMAGINE</u> DI X MEDIANTE f È $f(X) \overset{def}{=} \{f(a) : a \in X\}$.

DEF. LA CONTROIMMAGINE (O RETROIMMAGINE) DI Y MEDIANTE f È

$$f^{-1}(Y) \stackrel{def}{=} \{a \in A : f(a) \in Y\}$$

OSS. $f^{-1}(Y)$ È DEFINITA ANCHE SE f NON È BIUNIVOCA.

E.g. $A = [3]$, $B = [2]$,

$f : A \to B$ TALE CHE

$f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$.

$Y = \{2\}$. ALLORA

$f^{-1}(Y) = \{1, 3\}$.

PROP. 1.3.3: A, B INSIEMI, $f: A \to B$, $X, Y \subseteq B$. ALLORA:

i) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

DIM.

i) SIA $a \in f^{-1}(X \cap Y) \Rightarrow f(a) \in X \cap Y \Rightarrow f(a) \in X$ e $f(a) \in Y$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(X)$ e $a \in f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

VICEVERSA, SIA $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(X)$ e $a \in f^{-1}(Y) \Rightarrow$

$f(a) \in X$ e $f(a) \in Y \Rightarrow f(a) \in$

$X \cap Y \Rightarrow a \in f^{-1}(X \cap Y)$.

ii) ANALOGO. $\square$

ES. [1+]: A, B INSIEMI, $f: A \to B$.

DIMOSTRARE CHE

$f(f^{-1}(B)) = B \iff f$ è SURIETTIVA.

1.4 RELAZIONI

A INSIEME

DEF. UNA RELAZIONE SU A

È UN SOTTOINSIEME $R \subseteq A \times A$.
SCRIVIAMO aRb PER DIRE CHE $(a,b) \in R$ $(a, b \in A)$ (LETTO "a È IN RELAZIONE CON b")

SIA R UNA RELAZIONE SU A.

<u>DEF.</u>

i) R È <u>RIFLESSIVA</u> SE
$a \in A \Rightarrow aRa$ $(\Leftrightarrow (a,a) \in R)$

ii) R È <u>SIMMETRICA</u> SE

$$aRb \iff bRa$$

$$(\forall a, b \in A)$$

iii) R È <u>TRANSITIVA</u> SE

$$\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix} \implies aRc$$

$$(\forall a, b, c \in A)$$

DEF. R È UNA RELAZIONE DI **EQUIVALENZA** SE È RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

E.g. $A = [5]$, $R = \{(1,1), (2,2), (4,4), (5,5), (1,2), (2,3), (1,3), (3,2)\}$ $(\subseteq A \times A)$. ALLORA R **NON** È RIFLESSIVA, PERCHÈ $(3,3) \notin R$.

INOLTRE R NON È SIMMETRICA PERCHÈ

$(1,2) \in R$ MA $(2,1) \notin R$.

($\Rightarrow R$ NON È DI EQUIVALENZA)

SIA R UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU A. SIA $a \in A$.

<u>DEF.</u> LA <u>CLASSE DI EQUIVALENZA</u> DI a È

$$[a] = \{ b \in A : aRb \}.$$

PROP. 1.4.1: R RELAZIONE DI EQUIVA-LENZA SU A. SIANO $a, b \in A$. ALLO-RA O $[a] = [b]$ O $[a] \cap [b] = \emptyset$.

DIM. SUPPONIAMO CHE $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. SIA $c \in [a] \cap [b]$. ALLORA cRa e cRb. MA R È SIMMETRICA

$\Rightarrow aRc$ e cRb. MA R È TRANSI-
TIVA $\Rightarrow aRb$ ($\Rightarrow bRa$).

SIA $x \in [a] \Rightarrow xRa$. MA aRb
$\Rightarrow xRb \Rightarrow x \in [b]$. VICEVERSA.
(TRANSITIVA)

(bRa)

SIA $y \in [b] \Rightarrow yRb \Rightarrow yRa \Rightarrow$
$y \in [a]$. $\square$

i) $B_i \subseteq A$. $(\forall i = 1, \dots, k)$

ii) $B_i \neq \emptyset$ $(\forall i = 1, \dots, k)$

iii) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = A$

iv) $1 \leq i < j \leq k \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$.

- $B_1, \dots, B_k$ SI DICONO I <u>BLOCCHI</u> DELLA PARTIZIONE π e SI DICE CHE π HA k BLOCCHI.

ES. [1]: QUANTE RELAZIONI DI EQUIVALENZA CI SONO SU $[3]$?

(RISPOSTA: 5).

SIA A INSIEME.

DEF. UNA PARTIZIONE (O PARTIZIONE INSIEMISTICA) DI A È UN INSIEME $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ TALE CHE:

__E.g.__ $A = [8]$ ALLORA

$$\pi = \{\{1,3\}, \{4\}, \{2,5,7\}, \{6,8\}\}$$

È UNA PARTIZIONE DI A IN 4 BLOCCHI.

__COR__ 1.4.2 SIA R UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU A. ALLORA LE CLASSI DI EQUIVALENZA DI R SONO UNA PARTIZIONE DI A.

DIM: SIA $a \in A \Rightarrow [a] \neq \emptyset$ (PERCHÈ $a \in [a]$). INOLTRE $\bigcup_{a \in A} [a] = A$

(SE $x \in A \Rightarrow x \in [x] \Rightarrow x \in \bigcup_{a \in A} [a]$).

SEGUE QUINDI DA 1.4.1. $\square$