

## Analisi Matematica

### Foglio di esercizi n. 1

1. Risolvere le seguenti disuguaglianze.

a.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} < 0$

b.  $\frac{x(x+1)^2}{x^2-16} \leq \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-24}$

c.  $x-3 > \sqrt{2x^2-10x-12}$

d.  $\sqrt{2-\sqrt{2+x}} \geq x$

e.  $\frac{|x|-x}{2x^2-1} \geq -2$

f.  $2\log_4(|x|) \leq \log_2(2-3x) + 1$

g.  $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) + \sin^2(x) \leq \frac{1}{4}$

h.  $\frac{2\cos(2x) - \cos^2(x)}{1 + \sin^2(x)} \leq 1$

2. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni.

a.  $f(x) = |\sqrt{|x-3|} - 1|$

b.  $f(x) = 1 + \sin(-|x-\pi|)$

c.  $f(x) = \frac{1}{||x|-2|} - \frac{1}{2}$

d.  $f(x) = \arctan(|\tan(x)|)$

3. Determinare il dominio  $D$  delle seguenti funzioni.

a.  $f(x) = \frac{\log_2(|\sin(2^x)|)}{|x-2|}$

b.  $f(x) = \frac{\tan(x/2)}{1 - \cos(4x)}$

c.  $f(x) = \sqrt{1 - |x-1| + |x-3|}$

d.  $f(x) = \arccos(x - \sqrt{x^2-3x})$

4. Per ciascuna delle seguenti funzioni  $f$  determinare il dominio  $D$  e l'insieme immagine  $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ . Verificare se  $f : D \rightarrow f(D)$  sia invertibile e nel caso determinare la funzione inversa  $f^{-1}$ .

a.  $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$

b.  $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$

c.  $f(x) = \frac{2}{3 + \log\left(\frac{x+1}{x}\right)}$

5. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti proposizioni:

a.  $\forall n \geq 7, n! > 3^n$

b.  $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$