Lösungen zu Gleichungen

Lineare Gleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die **:ref:‘Übungsaufgaben <Aufgaben Lineare Gleichungen>‘** zum Abschnitt **:ref:‘Lineare Gleichungen <Lineare Gleichungen>‘**.

system-message
ERROR/3 in `loesungen.rst`, line 13
Unknown interpreted text role "ref".

system-message
ERROR/3 in `loesungen.rst`, line 13
Unknown interpreted text role "ref".

- Zur Lösung der Gleichung empfiehlt es sich, beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner $2 \cdot 3 = 6$ der auftretenden Terme zu multiplizieren.

$$\frac{10 \cdot x + 3}{3} - 5 = 11 - \frac{3 \cdot x + 4}{2} - \frac{2 \cdot x + 6}{3}$$
$$6 \cdot \left(\frac{10 \cdot x + 3}{3} - 5 \right) = 6 \cdot \left(11 - \frac{3 \cdot x + 4}{2} - \frac{2 \cdot x + 6}{3} \right)$$

  Multipliziert man die Klammern aus, so können die auftretenden Brüche durch Kürzen beseitigt werden. Man erhält dadurch:

$$2 \cdot (10 \cdot x + 3) \;-\; 30 = 66 - 3 \cdot (3 \cdot x + 4) - 2 \cdot (2 \cdot x + 6)$$

  Die Gleichung kann durch ein Ausmultiplizieren der Klammern weiter vereinfacht werden:

$$20 \cdot x + 6 \;-\; 30 = 66 - 9 \cdot x - 12 - 4 \cdot x - 12$$

  Zum Auflösen werden alle x-Terme auf eine Seite der Gleichung, alle anderen Terme auf die andere Seite der Gleichung gebracht. Damit folgt:

$$20 \cdot x + 13 \cdot x = 66 - 24 + 24$$
$$33 \cdot x = 66$$
$$x = 2$$

  Die Lösung der Gleichung lautet somit $x = 2$.

  :ref:‘Zurück zur Aufgabe <ling01>‘

system-message
ERROR/3 in `loesungen.rst`, line 57
Unknown interpreted text role "ref".

Quadratische Gleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die **:ref:‘Übungsaufgaben <Aufgaben Quadratische Gleichungen>‘** zum Abschnitt **:ref:‘Quadratische Gleichungen <Quadratische Gleichungen>‘**.

system-message
ERROR/3 in `loesungen.rst`, line 66
Unknown interpreted text role "ref".

system-message
ERROR/3 in `loesungen.rst`, line 66
Unknown interpreted text role "ref".

- a) Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ("Mitternachtsformel") liefert für die gegebene Gleichung $x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$ mit $a = 1$, $b = -6$ und $c = 8$:

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

  Somit ergeben sich folgende Lösungen:

  $$x_1 = \frac{6-2}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$$

  Die Lösungsmenge der Gleichung lautet somit $\mathbb{L} = \{2;\, 4\}$.

- b) Zum Lösen der Gleichung $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 15 = 0$ sind in die "Mitternachtsformel" die Werte $a = 3$, $b = 4$ und $c = -15$ einzusetzen. Man erhält damit:

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{6}$$

  Die Wurzel $\sqrt{196}$ ergibt den Wert 14. Als Lösungen erhält man damit:

  $$x_1 = \frac{-4-14}{6} = -3 \qquad x_2 = \frac{-4+14}{6} = \frac{5}{3}$$

  Die Lösungsmenge der Gleichung lautet somit $\mathbb{L} = \left\{-3;\, \frac{5}{3}\right\}$.

  :ref:‘Zurück zur Aufgabe <quag01>‘

system-message
ERROR/3 in `loesungen.rst`, line 110
Unknown interpreted text role "ref".

- Der Satz von Vieta ist insbesondere dann nützlich, wenn eine quadratische Gleichung der Form $1 \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ vorliegt und b sowie c ganze Zahlen sind.

Man prüft dann als erstes, durch welche Produkt zweier Zahlen sich die Zahl c darstellen lässt. Im Fall $c = 20$ ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 20 &= 20 \cdot 1 \\ &= 10 \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 4 \end{aligned}$$

Ebenfalls möglich sind die Produkte $(-20)\cdot(-1)$, $(-10)\cdot(-2)$ und $(-5)\cdot(-4)$. Eine dieser drei beziehungsweise sechs Möglichkeiten gibt die beiden Lösungen der Gleichung an.

Um zu prüfen, welche der obigen Möglichkeiten die Gleichung löst, bildet man die Summen der einzelnen Wertepaare:

$$\begin{aligned} 20 + 1 &= 21 \\ 10 + 2 &= 12 \\ 5 + 4 &= 9 \end{aligned}$$

Das "richtige" Wertepaar erkennt man daran, dass die Summe einen Wert ergibt, der mit dem Wert von $(-b)$ identisch ist. In dieser Aufgabe ist $b = -9$, also ist $(-b) = 9$. Die Lösung der Gleichung lautet somit:

$$x_1 = 4 \quad ; \quad x_2 = 5$$

Als Produktform lässt sich die Gleichung damit wie folgt schreiben:

$$x^2 - 9 \cdot x + 20 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-4) \cdot (x-5) = 0$$

:ref:‘Zurück zur Aufgabe <quag02>‘

> **system-message**
> ERROR/3 in `loesungen.rst`, line 166
> Unknown interpreted text role "ref".

Algebraische Gleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die **:ref:‘Übungsaufgaben <Aufgaben Algebraische Gleichungen>‘** zum Abschnitt **:ref:‘Algebraische Gleichungen höheren Grades <Algebraische Gleichungen>‘**.

> **system-message**
> ERROR/3 in `loesungen.rst`, line 176
> Unknown interpreted text role "ref".

> **system-message**
> ERROR/3 in `loesungen.rst`, line 176
> Unknown interpreted text role "ref".

- Existiert die Lösung $x_1 = 3$, so kann der Gleichungsterm in ein Produkt aus dem Linearfaktor $(x-3)$ und einem Restterm zerlegt werden. Dieser kann mittels einer Polynom-Division ermittelt werden; es muss also folgende Rechnung durchgeführt werden:

$$(x^3 - 6 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 30) : (x-3) = ?$$