Travaux pratiques n°4

Abaque du temps à 5 % réduit d'un système du second ordre en automatique des systèmes continus linéaires invariants

F. Cuvellier, J. Tanoh

M.P.S.I. 1, 2017–2018

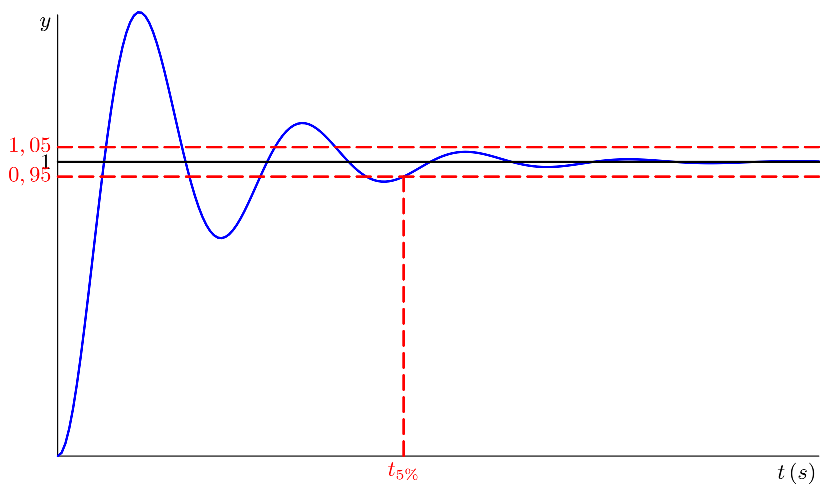
1 Présentation du problème

En automatique des systèmes continus linéaires invariants, l'étude de la réponse indicielle d'un système du second ordre simple est incontournable. Le critère communément utilisé pour caractériser la rapidité de la réponse, le temps de réponse à 5 % ($t_{5\,\%}$), a conduit à la réalisation d'un abaque, qui en permet une détermination rapide sans calculatrice.

1.1 Temps de réponse à 5 %

Si la réponse $y(t)$ d'un système à une sollicitation a une limite y_∞ quand t tend vers ∞, le *temps de réponse à 5 %* se définit comme le plus petit instant tel que, pour tout $t > t_{5\,\%}$,

$$0{,}95 \cdot y_\infty < y(t) < 1{,}05 \cdot y_\infty.$$



1.2 Équation différentielle du système

La réponse $y(t)$ du système satisfait à l'équation différentielle

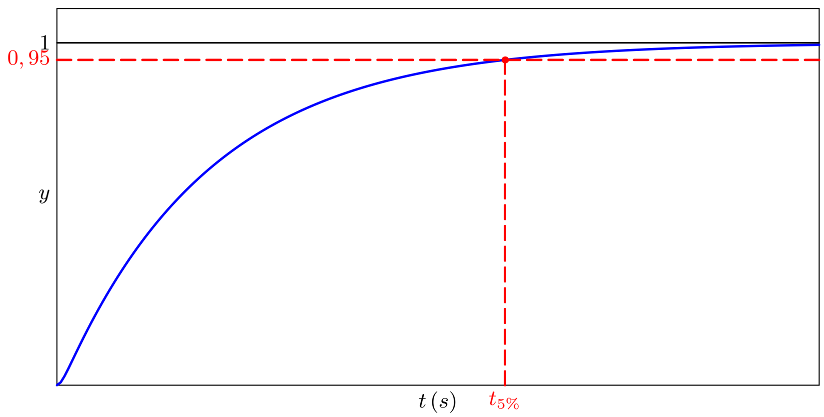
$$y(t) + \frac{2m}{\omega_0} y'(t) + \frac{1}{\omega_0^2} y''(t) = 1,$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Ici, m et ω_0 désignent des constantes strictement positives (coefficient d'amortissement et pulsation propre du système).
Dans ce problème, on se propose de fournir les points pour construire cet abaque. À partir d'un tableau de valeurs croissantes de m, on veut construire le tableau des temps de réponse à 5 % correspondants.

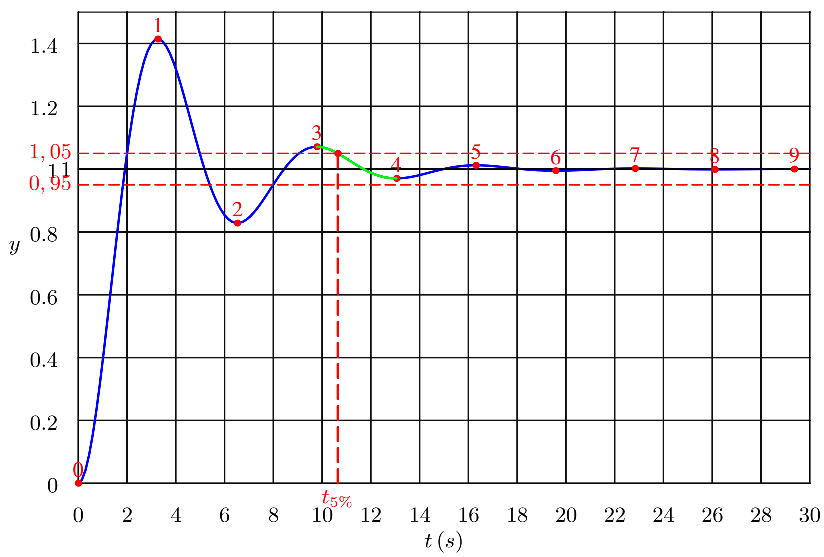
1.3 Expression de la solution

- Si $m > 1$,
$$y(t) = 1 - \frac{t_1 \exp(-t/t_1) - t_2 \exp(-t/t_2)}{t_1 - t_2},$$
où $\omega_0 t_1 = m + \sqrt{m^2-1}$ et $\omega_0 t_2 = m - \sqrt{m^2-1}$.
- Si $m = 1$,
$$y(t) = 1 - (1 + \omega_0 t)\exp(-\omega_0 t).$$
- Si $m < 1$,
$$y(t) = 1 - \frac{\exp(-m\omega_0 t)}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega_0 t\sqrt{1-m^2} - \varphi),$$
où $\varphi = -\arccos m$.

Dans le cas où $m \geqslant 1$:



Le temps cherché s'obtient en résolvant l'équation $y(t) - 0{,}95 = 0$.
Dans le cas où $m < 1$:



les points k de la figure correspondent à des extrema relatifs qui se produisent aux instants $kT_a/2$, où $T_a = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$, et sont distants de la droite formée des points d'ordonnée 1 de $D_k = \exp - \dfrac{k\pi m}{\sqrt{1-m^2}}$.
On utilisera ces propriétés pour faciliter la détermination de $t_{5\,\%}$.

2 Construction de l'abaque

Le fichier `abaqueT5.py` contient onze fonctions : sept dont le code est complet, quatre dont seul le cadre a été esquissé et qu'il faudra compléter.

Ce fichier ne doit pas être modifié. On commencera donc par le copier, puis on travaillera sur sa copie.

Dans toute l'étude, on donne à ω_0 la valeur 1, et l'on choisit m de sorte que $0{,}1 \leqslant m \leqslant 5$.

Exercice 1. (Codage de la fonction `dichotomie`) L'algorithme suivant permet de déterminer un zéro d'une fonction numérique continue.
Étant donnés une fonction numérique continue f, des nombres a, b tels que $a < b$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$, et un nombre strictement positif ε, estimer un zéro de f à ε près.

- $u = a$, $v = b$.
- Tant que $v - u > \varepsilon$,
  - $w = (u + v)/2$.
  - Si $f(u)f(w) \leqslant 0$: $v = w$.
  - Sinon : $u = w$.
- Retourner u.

1. Implémenter l'algorithme précédent.
2. Tester en exécutant sous Shell `t5_critique()`.
3. Tester en exécutant sous Shell `test_exo1()`.
4. Quelles sont les opérations effectuées dans la fonction `t5_critique()` dont le code est dans le fichier ?

Exercice 2.

1. Proposer un algorithme permettant de construire un tableau de valeurs de $t_{5\,\%}$ correspondant à `tab_m`, tableau donné de valeurs croissantes de m telles que $m \geqslant 1$.
2. En Python, réaliser une fonction `t5_aperiodique(tab_m)` qui retourne le tableau des valeurs de $t_{5\,\%}$ à partir de `tab_m`, tableau de valeurs de m.
3. Tester en exécutant sous Shell `t5_aperiodique( [1.5, 2, 4, 8] )`.

Exercice 3. On suppose donnée une fonction appelée `Dk(m)`, qui pour un coefficient d'amortissement m donné, strictement inférieur à 1, retourne la valeur du dépassement relatif définie précédemment.

1. Proposer un algorithme qui, à partir d'une valeur donnée de $m < 1$, détermine
   - les bornes t_a et t_b de l'intervalle dans lequel se trouve $t_{5\,\%}$,
   - et celle des valeurs 0,95 et 1,05 qui sera utile à la détermination de $t_{5\,\%}$.
2. En Python, réaliser une fonction `intervalle_t5(m)` qui, pour $0 < m < 1$, retourne le *tuple* formé de t_a, de t_b et de 0,95 ou de t_a, de t_b et de 1,05.
3. Tester en exécutant sous Shell `intervalle_t5(0.27)`.

Exercice 4.

1. Proposer un algorithme permettant de construire un tableau de valeurs de $t_{5\,\%}$ correspondant à `tab_m`, tableau donné de valeurs croissantes de m telles que $m < 1$.

2. En Python, réaliser une fonction `t5_pseudoperiodique(tab_m)` qui retourne le tableau des $t_{5\,\%}$.
3. Tester en exécutant sous Shell `t5_pseudoperiodique( [ 0.25, 0.5, 0.69, 0.692, 0.7, 0.99] )`.