# T.P. Cours : Etude d'un pendule pesant

## I Introduction :

On se propose d'étudier un oscillateur : le pendule pesant. Dans le cas des oscillations de faibles amplitudes, cet oscillateur est un oscillateur harmonique mais dans le cas des oscillations de grande amplitude, il ne l'est plus. Ceci se traduit à différents niveaux : l'équation différentielle régissant le mouvement n'est plus linéaire, sa solution n'est plus une fonction sinusoïdale et la période d'oscillation du pendule dépend de l'angle maximal d'écart avec la verticale. La sortie de « pendulor » est branchée sur une carte d'acquisition.

## II Matériel :

On dispose sur chaque table :

- Boîtier Orphy ;
- Logiciel "ED".
- Fichier "Pendule.rw3"
- Ordinateur
- Logiciel Regressi ;

## III Etude théorique :

### 3-1 Etude énergétique :

** Déterminer l'énergie potentielle en fonction de $\theta$. Montrer que le puits de potentiel est parabolique au voisinage de $\theta = 0$. On prendra $E_p = 0$ pour $\theta = 0$.

** Tracer l'énergie potentielle en fonction de l'angle $\theta$ avec la verticale pour $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$.
Ecrire la conservation de l'énergie en négligeant toutes les forces de frottement et la masse de la tige.

En déduire les différents mouvements possibles du pendule.

** Calculer la vitesse minimale $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_o$ à donner au mobile lors du passage par la verticale de l'axe afin qu'il puisse passer par position haute avec une ficelle tendue.

### 3-2 Equation différentielle :

** En déduire que l'équation du mouvement s'écrit $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$.

** Dans le cas des <u>angles petits</u>, montrer que $\theta = \theta_o \cos(\omega_o t + \phi)$. Préciser l'expression de $\omega_o$.

** Préciser $\theta_o$ et $\phi$ dans le cas où on lache la masse d'une position $\theta_m$.

### 3-3 Calcul de la période en fonction de l'angle maximal d'écart :

On se place dans le cas où on lache le pendule sans vitesse initiale de l'angle maximal $\theta_o$.

** A partir de la conservation de l'énergie mécanique, écrire l'équation différentielle du premier ordre reliant $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, θ, $\theta_o$ et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.

** Donner l'expression de la période $T(\theta_o)$ sous forme d'une intégrale en fonction θ, $\theta_o$ et des paramètres caractéristiques du système.

On montre que si on fait le changement de variables $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_o}{2}\right)\sin(\phi)$ : $\frac{T}{T_o} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)\sin^2(\phi)}}$

** En déduire que si $\theta_o$ est petit, on a bien $\frac{T}{T_o} = 1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)$

**3-4 Portrait de phase :**

Le portrait de phase est un autre mode de représentation que la trajectoire ou le diagramme énergétique qu'on utilise pour les systèmes à un degré de liberté (à une seule variable)

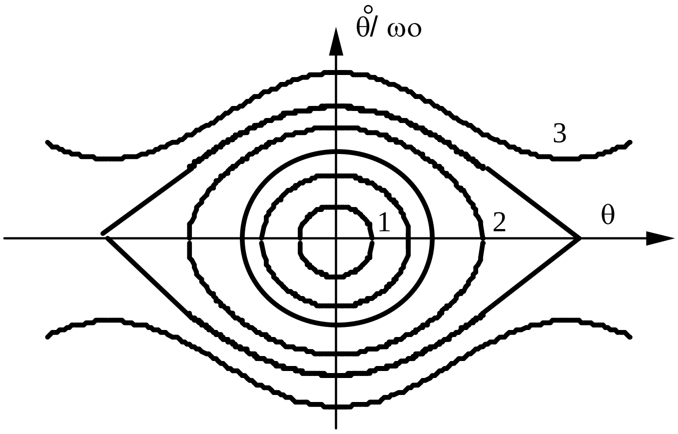


figure 2

On représente alors la dérivée temporelle de cette variable en fonction de la variable elle-même. Dans le cas du pendule, on représente $\frac{d\theta}{dt} = \overset{\circ}{\theta} = f(\theta)$.

** Trouver la relation entre $\frac{d\theta}{dt}$ et θ dans le cas du pendule à partir de la conservation de l'énergie.

On obtient un réseau de courbes (trajectoires) avec une courbe pour chaque valeur de l'énergie mécanique.(cf. figure)

** Pour les petits angles, montrer que la trajectoire est une ellipse (trajectoire 1).On rappelle l'équation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes : $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$)

On convient souvent de rendre cette ellipse circulaire par un choix convenable de grandeur portée en ordonnée (ici $\frac{1}{\omega_o}\frac{d\theta}{dt}$ au lieu de $\frac{d\theta}{dt}$ );

** Quel est l'intérêt de cette transformation ellipse en cercle ?

** L'énergie mécanique du pendule augmente-t-elle ou diminue-t-elle en passant des trajectoires 1 à 3.

** Que signifient les courbes fermées ?

** Que signifie la déformation (écart aux cercles) pour la trajectoire 2 ?

** A quelle situation correspond la trajectoire 3 ?

## III Etude expérimentale :

**4-1 Principe de la mesure :**

Un potentiomètre couplé à l'axe du pendule délivre une tension électrique proportionnelle à la position angulaire du pendule. L'angle θ entre le pendule et la verticale est traduit en tension via un montage potentiométrique : Donc $\frac{\theta-\theta_i}{2\pi} = \frac{V_A}{E}$

Cette tension est appliquée à l'entrée de la carte Sysam-SP5, celle-ci étant connectée à un ordinateur.

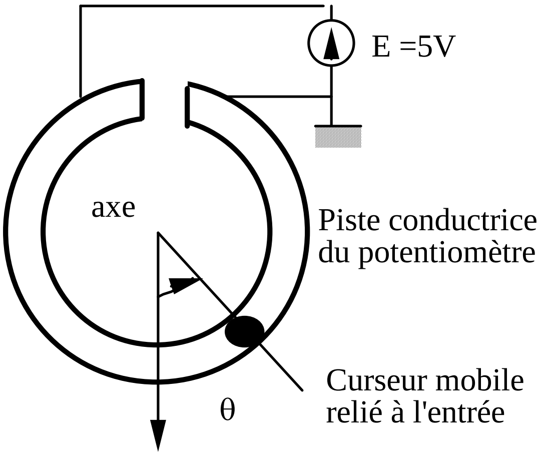



figure 4

### 4-2 Préparation du logiciel et matériel :

Ouvrir le logiciel « Latis Pro ».
Choisir l'entrée analogique EA0 et cocher « ajouter les courbes » à gauche de l'écran.
Pour l'étalonnage, cliquer avec le bouton droit de la souris sur **EA0,** puis choisir **Capteur utilisateur,** puis **créer capteur utilisateur**. Vous pouvez alors choisir le nom du capteur (pendulor par exemple) , lui donner un nom et son unité (degré angulaire), le minimum est à -180° , le maximum à 180°. Vous pouvez alors **l'étalonner** (cliquer sur **Etalonnage**) .
Le pendule en position verticale (repos), vérifier que la valeur de la tension du voltmètre est à 2,5V environ, puis faire l'acquisition du premier point (0°) .
Mettre alors le pendule à la verticale, modulo $\pi$ et valider le deuxième point d'étalonnage ( 180°)
Recliquer alors avec le bouton droit sur EA0 pour choisir votre capteur ainsi créé dans « Capteurs utilisateur » et passer ensuite en **acquisition temporelle.**
Fixer une durée d'enregistrement égale à 3 s et le nombre de points d'enregistrement égal à 1000.
Faire plusieurs enregistrements pour différents angles initiaux.
Enregistrer le fichier puis fichier\Exportation, sélectionner le tableau $\theta(t)$ et l'enregistrer sur le réseau sous pendule.csr.

### 4-3 Relevés expérimentaux :

Lancer Regressi sous windows. On aura fait l'enregistrement de 16 pages que vous pouvez charger à partir du répertoire ..\MPSI2\Pendule.csv. On a procédé à 16 pages d'enregistrement pour $\alpha_0$= 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°; 70°, 80°, 90°, 100°; 110°, 120°;130°,140°, 150°, 160 °. Afficher les courbes plein écran.

### 4-4 Exploitation des résultats :

<u>4-4-1 Mesure de T sur les 16 enregistrements :</u>

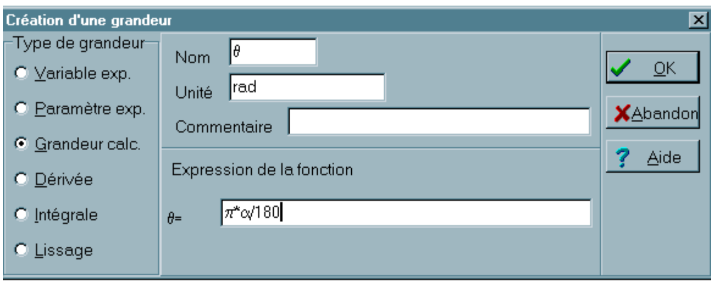



figure 6

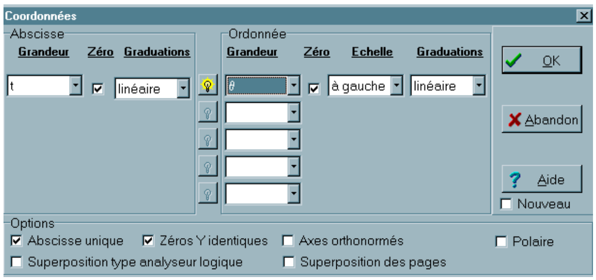
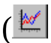
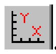



figure 7

Revenir aux grandeurs (  ). En cliquant sur  , créer une nouvelle grandeurs calculée θ (ctrl q) (figure 6).

Vérifier que les angles sont en radians . ( )

Revenir au graphe ( ) puis afficher θ(t) à l'aide de .

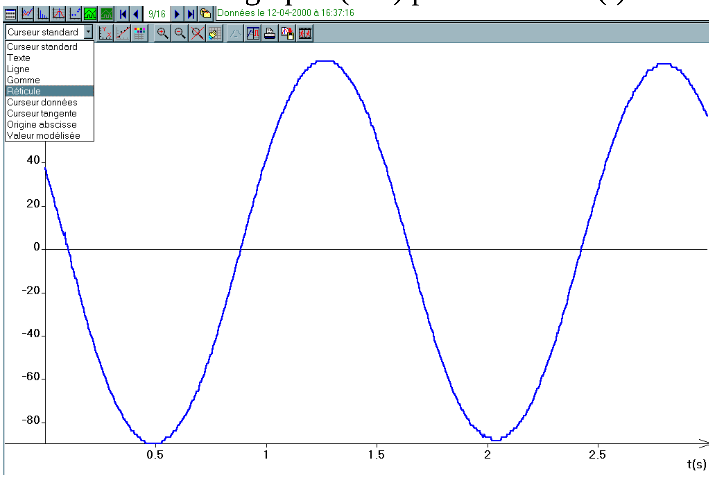



figure 8

Après le passage à l'écran texte, définir une nouvelle variable $\theta = \dfrac{\alpha}{360} 2\pi$ (si nécessaire, on introduira $\alpha_d$ qui est un angle de décalage entre la valeur indiquée par l'ordinateur et la valeur réelle. $\boxed{\alpha_d = \qquad\qquad}$ )

A l'aide de curseur "Réticule", repérer les instants de passages par 0 dans le même sens pour chaque graphe. Compléter le tableau ci-dessous T=f($\alpha_o$). Ces mesures doivent être faites de manière précise. **Chaque groupe fera 2 pages** et on mettra en commun les résultats.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ (°) | | | | | | | | |
| T | | | | | | | | |
| $\alpha$ (°) | | | | | | | | |
| T | | | | | | | | |

On néglige les amortissements.

### 4-4-2 Vérification de l'équation différentielle :


figure 9

Mettre Uo en radian . Créer la variable $\theta = \dfrac{\pi}{180} U_0$ .Afficher $\theta(t)$

Sélectionner à l'aide flèches (voir ci-contre) le graphe pour $\alpha_o$ = 100° (page 10) (fig. 9).

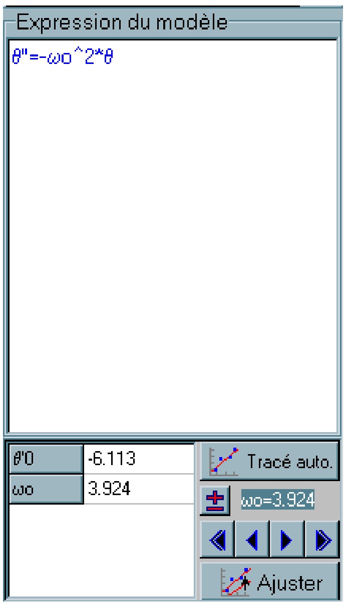
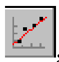
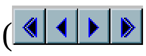



figure 10

A l'aide de "modélisation", , modéliser par $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_o^2\theta$ (figure 10) .Tapez $\theta$" pour $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$. Le logiciel demande $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)_o$ et $\omega_o$. Déterminer ces valeurs approchées en modifier ces valeurs en utilisant les flèches ( ) puis cliquez pour ajuster.

A ce stade, le logiciel cherche la fonction sinusoïdale la mieux adaptée. Interpréter le résultat. On précise que l = 43 cm et g=9.81 m.s$^{-2}$.Le logiciel trouve-t-il une valeur correcte pour $\omega_o$.

Procéder de même à partir d'une équation $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_o^2 \sin(\theta)$. Conclusion.

Recommencer cette modélisation pour toutes les pages.

A l'aide du bouton droit de la souris, "Sauver modèle", "Dans une variable" , sauvegarder le modèle θm, correspondant à la modélisation et sauvegarder votre résultat sous TP17 dans le répertoire …\MPSIj ou …\PCSIj où j est votre classe.

### 4-4-3 Espace des phases:

Revenir aux grandeurs ( ) . En cliquant sur , créer une variable dérivée $\theta m' = \frac{d\theta m}{dt}$, correspondant à la dérivée de modélisation. Cela permet de lisser la courbe.

Revenir au graphe ( ) puis afficher $\theta m' = f\left(\theta_m\right)$ à l'aide de , sous forme paramètrée, le paramètre étant le temps. Faire défiler les pages. Commentaires. A l'aide de , superposer les pages.

Créer une variable $y = \frac{\theta m'}{\omega_o}$ et afficher $y = f\left(\theta_m\right)$. Quel est l'intérêt de ce changement de variable ?

4-4-4 Etude énergétique :

Sélectionner à l'aide des flèches le graphe pour $\alpha_o$ = 100° (page 10) . On prendra l = 0.43 m et g =9.81 m.s$^{-2}$ ; Revenir aux grandeurs ( ). En cliquant sur , créer les variables, $Ec = \frac{1}{2}l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, $E_p = 9{,}81l\left(1-\cos(\theta)\right)$ et $E_m = E_c + E_p$, énergie par unité de masse.

Vérifier la conservation d'énergie. Conclusion. On pourra utiliser la modélisation, $\theta_m$ pour les calculs.

4-4-5 Etude de T(θ):

Ouvrir un nouveau fichier en rentrant le tableau T= f($\theta_o$) obtenu plus haut. En cliquant sur , créer $\theta_o = \frac{2\pi}{360}\alpha_o$ . Déterminer $T_o = \lim T(\theta_o)$ quand $\theta_o \to 0$ . $\boxed{T_o = \qquad s}$

En cliquant sur , créer la nouvelle variable $x = \frac{T}{T_o}$. Représenter x($\theta_o$). Attention, $\theta_o$ doit être en radians!

La théorie montre que $\frac{T}{T_o} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1.3.5......(2n-1)}{2.4.6....2n}\right]^2\left[\sin\left(\frac{\theta_o}{2}\right)\right]^{2n}\right\} = x$

Exemple: Pour $\theta_o$ petit, $\sin\left(\frac{\theta_o}{2}\right) \approx \frac{\theta_o}{2}$, on a $x \approx 1 + \frac{\theta_o^2}{16}$.

En cliquant sur , créer 4 nouvelles variables :

- $x_1$ = premier terme du développement de la série : $x_1 = 1$.
- $x_2$ = somme des 2 premiers termes : $x_2 = x_1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right)$
- $x_3$ = somme des 3 premiers termes : $x_3 = x_2 + \frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_o}{2}\right)$
- $x_4$ = somme des 4 premiers termes : $x_4 = x_3 + \frac{(15)(15)}{(48)(48)}\sin^6\left(\frac{\theta_o}{2}\right)$

Superposer les 4 nouvelles variables. Conclusion.