# Travaux pratiques n°5
# Exercices de concours sur les nombres et sur les suites

F. Cuvellier, J. Tanoh

M.P.S.I. 1, 2018–2019

Les exercices suivants ont été posés lors d'épreuves orales de mathématiques. Tous contiennent des questions qui réclament l'usage de Python.
Dans le cadre de cette séance de travaux pratiques, on ne traitera que celles-ci, sans chercher à donner de démonstrations. On pourra aussi regarder ce que des expériences faites avec Python apportent aux autres.

## 1 Sur les nombres

**Exercice 1.** (École nationale supérieure des arts et métiers, PSI, 2016)

1. Soient $p$ et $q$ des nombres entiers, $q$ non nul. Écrire une fonction qui renvoie la partie entière de $p/q$.
2. Écrire une fonction qui prend en arguments $p$, $q$ et un nombre entier $n$ et qui renvoie un tableau contenant les $n$ premières décimales de $p/q$.
3. La partie décimale de certains nombres est périodique à partir d'un certain rang (par exemple 12,72123123123...). Écrire une fonction d'arguments $p$ et $q$, qui renvoie la partie périodique de $p/q$.
4. Soit $e$ un nombre décimal dont la partie décimale est périodique à partir d'un certain rang. Écrire une fonction qui renvoie des nombres entiers $p$ et $q$, premiers entre eux, tels que $p/q = e$.

**Exercice 2.** (École nationale supérieure des arts et métiers, PSI, 2016)

1. Pour un nombre entier $n$, que renvoie l'instruction `list(str(n))` ?
2. Écrire une fonction `somme` qui à tout nombre entier naturel associe la somme de ses chiffres.
3. Un nombre est dit *adéquat* si la somme de ses chiffres est multiple de 10. Écrire une fonction `test()` qui renvoie le booléen `True` si le nombre est adéquat, et `False` sinon.
4. Écrire une fonction `modification(n)` qui change le chiffre des unités du nombre $n$ pour qu'il soit adéquat. Si $n$ est déjà adéquat, la fonction le renvoie sans modification.
5. Tester la fonction pour dix nombres entiers tirés au hasard entre 10000 et 100000 grâce à la fonction `randint`.

## 2 Sur les suites

**Exercice 3.** (École centrale, PSI, 2015)
Soit $S$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telles que, pour tout nombre entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}.$$

On désigne par $u_n(x)$ le $n$-ième terme de la suite de $S$ telle que $u_0 = x$.

1. Écrire une fonction `Suite(n, x)` qui renvoie $u_n(x)$. Tester la fonction pour quelques valeurs. Tracer les premiers termes de la suite pour différentes valeurs de $x$. Commenter.

2. Tester pour $n = 31$ et $x = 1{,}6616$, pour $n = 17$ et $x = 1{,}6617$. Commenter.

3. Démontrer l'équivalence des trois relations suivantes.

   - Il existe un nombre entier naturel $n$ tel que $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - Il existe un nombre entier naturel non nul $n$ tel que $u_n < 1$.
   - $(u_n)$ converge vers 0.

4. Démontrer que, s'il exists un nombre entier naturel N tel que $u_N \geqslant N + 2$ alors, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant N$, $u_n \geqslant n + 2$.

5. Étudier $x = 1$ et $x = 2$. On note $E_0$ l'ensemble des nombres réels $x$ tels que la suite $(u_n(x))$ converge vers 0 et $E_\infty$ l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $(u_n(x))$ tels que $(u_n(x))$ diverge vers $+\infty$. Démontrer que $E_0$ et $E_\infty$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$ tels que $\mathbf{R}_+^* = E_0 \cup E_\infty$.

**Exercice 4.** (École centrale, MP, 2016)
Pour tout nombre entier naturel non nul $n$, on pose $Q_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

1. (a) Démontrer que $Q_n$ possède une unique racine sur $\mathbf{R}_+^*$, que l'on notera $x_n$.
   (b) Écrire une fonction prenant $n$ en paramètre et calculant une valeur approchée de $x_n$. Que peut-on conjecturer quant au comportement asymptotique de $x_n$ ?
   (c) Prouver que $(x_n)$ converge et déterminer sa limite.

2. (a) Démontrer que $2^n(2 - x_n)$ tend vers 1 quand $n$ croît indéfiniment.
   (b) Poursuivre le développement asymptotique de $x_n$.

**Exercice 5.** (École centrale, MP, 2016)
On note $(u_n)$ la suite d'entiers naturels définie par $u_0 = 9$ et, pour tout nombre entier naturel $n$, $u_{n+1} = 4u_n^3 + 3u_n^4$. On note $c_n$ le nombre de 9 terminant l'écriture décimale de $u_n$.

1. Écrire une fonction déterminant le nombre de 9 terminant un entier $k$ donné. Donner $c_n$ pour $n$ allant de 0 à 10. Conjecturer la forme de $c_n$ et démontrer la conjecture.

2. Écrire une fonction donnant le chiffre situé juste avant la série de 9 et qui renvoie 0 si le nombre n'est composé que de 9. Donner le chiffre situé juste avant la série de 9 de $c_n$ pour $n$ allant de 0 à 10. Conjecturer et démontrer le résultat.

3. On note $p_n$ le nombre de chiffres de $c_n$ en base 10. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, $4p_n - 2 \leqslant p_{n+1} \leqslant 4p_n + 1$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, $\frac{1}{3}4^n \leqslant p_{n+1} \leqslant \frac{4}{3}4^n$.