

Travaux pratiques n°2

Manipulation de structures de données en Python

Application au calcul matriciel et au jeu d'échecs

F. CUVELLIER, J. TANOI

M.P.S.I. 1, 2018–2019

1 Structures de données de type séquence

Une séquence est un objet

- itérable (c'est-à-dire qu'une variable peut parcourir),
- dont les éléments sont accessibles (par leurs indices, écrits entre crochets `[]`),
- auquel on peut associer une longueur (`len()`).

Python dispose de cinq structures de données de type séquence, la chaîne de caractères (`str`), le n -uplet (`tuple`), le tableau (`list`) et deux structures de formats binaires qui ne seront pas abordées ici, l'octet `bytes` (non mutable) et le tableau d'octets `bytearray` (mutable).

L'accès à un élément se fait par l'opérateur d'extraction (*slice* en anglais), dont la syntaxe connaît trois formes :

1. `seq[ind]`, pour donner l'élément de `seq` d'indice `ind`;
2. `seq[start:end]`, pour donner la structure de même type que `seq`, formée des éléments d'indice compris entre `start` inclus et `end` exclu;
3. `seq[start:end:step]`, pour la même action que précédemment, à ceci près que la différence entre un indice et le suivant est `step`.

Le premier élément a l'indice 0, le suivant l'indice 1, etc. Le dernier élément a l'indice `-1`, le précédent l'indice `-2`, etc.

On peut aussi répliquer une séquence à l'aide de l'opérateur `*`.

1.1 Chaînes de caractères

1.1.1 Description

Une chaîne de caractères est un objet non mutable formé d'une suite de caractères (codés par défaut en Unicode). Son type est `str`. La fonction `str()` permet aussi bien de créer une chaîne de caractères que de convertir un objet en chaîne de caractères.

Une chaîne de caractères peut être délimitée de trois façons, par des apostrophes (`'`), par des guillemets (`"`) ou par des triples guillemets (`"""`). Dans chaque cas, le signe employé doit être le même au début et à la fin de la chaîne. D'ordinaire, le caractère de nouvelle ligne sert à marquer la fin d'une expression, mais ce n'est pas le cas à l'intérieur d'un jeu de parenthèses, d'un de crochets, d'un d'accolades ou d'un de *triples guillemets*.

Les chaînes se concatènent à l'aide de l'opérateur `+`.

1.1.2 Comparaison de chaînes de caractères

On peut comparer bit à bit deux chaînes de caractères à l'aide des opérateurs `<`, `<=`, `==`, `!=`, `>` et `>=`. (Les surprises sont nombreuses du fait que le codage en Unicode n'est pas injectif.)

1.1.3 Méthodes sur les chaînes de caractères

De nombreuses méthodes agissent sur les chaînes de caractères. Plusieurs servent à l'édition de texte (conversion, codage, transformation de minuscules en majuscules, etc.). La commande `help(str)` les décrit.

Notons que pour une chaîne de caractères `s`,

- `s.count(t)` retourne le nombre d'occurrences de `t` ;
- `s.find(t)` retourne l'indice de la première occurrence de `t` s'il en existe une, `-1` sinon ;
- `s.index(t)` retourne l'indice de la première occurrence de `t` s'il en existe une, `ValueError` sinon ;
- `s.join(seq)` retourne à partir d'une séquence `seq` de chaînes de caractères la chaîne de caractères formée des éléments de `seq` séparés par la chaîne `s` ;
- `s.split(t)` retourne le tableau des sous-chaînes de `s` séparées par la chaîne `t`. (Par défaut, `t` est une espace.)

(De nombreux arguments optionnels peuvent être passés.)

1.2 *n*-Uplets

1.2.1 Description

Le *n*-uplet (`tuple`) est une séquence ordonnée d'objets. Il est non mutable.

Les *n*-uplets se concatènent à l'aide de l'opérateur `+`.

1.2.2 Comparaison des *n*-uplets

Les *n*-uplets se comparent terme à terme à l'aide des opérateurs de comparaison `<`, `<=`, `==`, `!=`, `>` et `>=`.

1.2.3 Méthodes sur les *n*-uplets

Seules deux méthodes s'appliquent à cette structure de données. Pour un *n*-uplet `t`, `t.count(x)` retourne le nombre d'occurrences de `x`, et `t.index(x)` l'indice de la première occurrence de `x` s'il en existe une, `ValueError` sinon.

1.3 Tableaux

1.3.1 Description

Un tableau est une séquence ordonnée d'objets. Il est mutable. L'opérateur de concaténation est `+`. En particulier, on peut concaténer à un tableau `L` un tableau `M` à l'aide de l'opérateur `+=`.

1.3.2 Méthodes sur les tableaux

À un tableau `L`, on peut appliquer les méthodes suivantes.

- `L.append(x)` met l'objet `x` au bout du tableau `L`.
- `L.count(x)` retourne le nombre d'occurrences de `x` dans le tableau `L`.

- `L.extend(m)` met au bout de `L` les éléments de l'objet itérable `m`. L'opérateur `+=` produit le même résultat.
- `L.index(x)` retourne l'indice de la première occurrence de `x` s'il en existe une, `ValueError` sinon.
- `L.insert(i, x)` insère l'objet `x` à la place d'indice `int(i)`.
- `L.pop()` retourne le dernier élément de `L` et le supprime de `L`.
- `L.pop(i)` retourne l'élément d'indice `s` et le supprime de `L`.
- `L.remove(x)` supprime la première occurrence de l'objet `x` s'il en existe une, produit `ValueError` sinon.
- `L.reverse()` transforme `L` en le tableau parcouru à partir de la fin.
- `L.sort(...)` transforme `L` en le tableau ordonné. Des arguments optionnels peuvent être passés.

1.3.3 Définition d'un tableau par compréhension

On peut définir un tableau par compréhension à l'aide de l'instruction `[expr for x in obj if bool]` où `x` est une variable qui parcourt l'objet itérable `obj`, l'expression de `x expr` est évaluée à condition que le booléen `bool` soit vrai.

Par exemple, pour obtenir les années bissextiles de 1850 à 2050, on peut se servir des instructions

```
leap_years = []
for year in range(1850, 2050):
    if (year % 4 == 0 and year % 100 != 0) or (year % 400 == 0):
        leap_years.append(year)
```

ou de l'instruction

```
leap_years = [year for year in range(1850, 2050)
               if (year % 4 == 0 and year % 100 != 0) or (year % 400 == 0)]
```

On peut se servir d'autant de variables qu'on veut. Par exemple, l'instruction

```
L = [a + b for a in range(10) for b in range(10) if abs(a-b) < 2]
```

produit le tableau formé des sommes de deux nombres entiers naturels strictement plus petits que 10, dont la valeur absolue de la différence est strictement plus petite que 2. On obtient le même tableau `L` avec les instructions suivantes.

```
L = []
for a in range(10):
    for b in range(10):
        if abs(a-b) < 2:
            L.append(a+b)
```

1.4 Exercices

Exercice 1.

1. Transformer la chaîne de caractères "abc" en n -uplet et en tableau.
2. Reformuler la chaîne de caractères "abc" à partir de chaque résultat.

Exercice 2. On note `s` la chaîne de caractères "J'aime les mathématiques."

1. Afficher `s` sans puis avec la fonction `print()`.

2. Extraire la sous-chaîne de `s` formée des caractères d'indice pair.
3. Scinder la chaîne `s` suivant les espaces, puis suivant la lettre `a`.
4. Écrire la chaîne `s` à l'envers. (La sous-chaîne formée des huit premiers caractères est `".seuqita"`.)
5. Répliquer la chaîne de caractères `s` dix fois, à raison d'une phrase par ligne.

Exercice 3. Former le tableau *ordonné* des nombres $a^2 + b^2$ pour tous les couples (a, b) de nombres entiers naturels non nuls plus petits que 100, premiers entre eux. Les éléments devront être distincts.

2 Application au calcul matriciel

2.1 Représentation d'une matrice

On convient de représenter une matrice sous la forme d'un tableau de tableaux. Plus précisément, chaque ligne d'une matrice à s lignes et t colonnes

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1t} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{s1} & m_{s2} & \cdots & m_{st} \end{pmatrix}$$

est vue comme un tableau de longueur t , et la matrice M comme le tableau de ces s tableaux.

On notera au passage que, du fait que le premier indice d'un tableau en Python est 0, l'élément d'indice (h, k) de M est `M[h-1][k-1]`.

Exercice 4. Avec la convention précédente, la matrice à éléments entiers

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & -2 \\ 11 & 2 & -13 & 1 \\ 4 & 101 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

est représentée par le tableau `[[5, -6, 7, -2], [11, 2, -13, 1], [4, 101, 3, 8]]`. On voudrait la voir sous la forme d'une chaîne de caractères

```
( 5   -6    7   -2 )
( 11    2  -13    1 )
(  4  101    3    8 )
```

dont voici la description :

- Chaque ligne est délimitée par des parenthèses ;
 - Dans une colonne donnée de la matrice où le plus grand nombre de caractères qu'exige la représentation de ses nombres est c , le nombre n devient la chaîne de caractères de longueur $c + 2$ obtenue par la concaténation d'une chaîne d'au moins une espace, de la chaîne `str(n)` et de la chaîne d'une espace.
1. Écrire une fonction à deux paramètres, un nombre entier positif ou négatif n et un nombre entier c supérieur ou égal au nombre de caractères nécessaires à la représentation de n , qui retourne la chaîne de caractères de longueur $c + 2$ formée (par concaténation) d'une ou de plusieurs espaces, de la chaîne `str(n)` et d'une espace.

Par exemple, pour le couple $(-4, 3)$ elle devra retourner la chaîne de caractères `"__-4_"`, à ceci près qu'ici chaque espace a été remplacée par un souligné.

2. Donner une fonction à un paramètre, une matrice M de nombres entiers relatifs, qui retourne le tableau dont l'élément d'indice k est la plus grande des longueurs des chaînes de caractères représentant les nombres de la colonne d'indice k de M .
3. Écrire une fonction qui transforme une matrice en la chaîne de caractères décrite précédemment.
4. Donner la fonction qui effectue la transformation réciproque.

2.2 Transposition

Exercice 5. À toute matrice $M = (m_{hk})$ à s lignes et t colonnes, on associe la matrice à t lignes et s colonnes dont l'élément d'indice (k, h) est l'élément d'indice (h, k) de M . On l'appelle la matrice *transposée* de M . Donner une fonction à un paramètre, un tableau de tableaux représentant une matrice, qui retourne le tableau de tableaux représentant la matrice transposée.

2.3 Opérations algébriques sur deux matrices

Exercice 6. Donner une fonction qui retourne la somme de deux matrices de même type, passées en arguments.

Exercice 7. Donner une fonction qui retourne le produit de deux matrices de types convenables, passées en arguments.

2.4 Déterminant d'une matrice carrée

On peut définir de façon récursive le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n de la façon suivante.

- Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1 est son unique élément : $\det(m_{11}) = m_{11}$.
- Le déterminant d'une matrice $M = (m_{hk})$ carrée d'ordre $n > 1$ s'obtient par la formule

$$\det(M) = \sum_{h=1}^n (-1)^{h+n} m_{hn} \det(M^{(hn)})$$

où l'on note ici $M^{(hn)}$ la matrice obtenue à partir de M en supprimant la ligne d'indice h et la colonne d'indice n (développement suivant la dernière colonne).

Exercice 8.

1. Donner une fonction à trois paramètres, une matrice M , un indice de ligne h et un indice de colonne k , qui retourne la matrice obtenue à partir de M en en supprimant la ligne d'indice h et la colonne d'indice k . (On pourra adopter l'indexation de Python, où le premier élément d'un tableau a l'indice 0, mais on devra alors modifier la formule qui donne le déterminant de M par récurrence.)
2. Donner une fonction qui retourne le déterminant d'une matrice carrée.

3 Jeu d'échecs

On convient de représenter un échiquier par un tableau E de huit tableaux à huit éléments : le tableau $E[1]$ est une ligne d'indice 1 de l'échiquier ; l'élément $E[1][c]$ de ce tableau est une chaîne de caractères, '0' si la case d'indice c de cette ligne est vide, une lettre majuscule si elle est occupée par une pièce blanche, et une lettre minuscule si elle est occupée par une pièce noire. La lettre utilisée est l'initiale du nom de la pièce en français (tour, cavalier, fou, dame, roi) ; les pions sont désignés par les lettres 'P' et 'p'. Au début, l'échiquier est donc

```
[['t', 'c', 'f', 'd', 'r', 'f', 'c', 't'],
 ['p', 'p', 'p', 'p', 'p', 'p', 'p', 'p'],
 ['0', '0', '0', '0', '0', '0', '0', '0'],
 ['0', '0', '0', '0', '0', '0', '0', '0'],
 ['0', '0', '0', '0', '0', '0', '0', '0'],
 ['0', '0', '0', '0', '0', '0', '0', '0'],
 ['P', 'P', 'P', 'P', 'P', 'P', 'P', 'P'],
 ['T', 'C', 'F', 'D', 'R', 'F', 'C', 'T']]
```

Les déplacements des pièces et des pions obéissent aux règles suivantes :

- Un pion ou une pièce autre qu'un cavalier ne peuvent atteindre une case que si celles qui la séparent de sa case initiale sont libres.
- Ni une pièce, ni un pion ne peuvent sortir de l'échiquier au cours de son mouvement, sauf le pion lorsqu'il atteint la dernière ligne, où il est alors remplacé par une pièce quelconque autre qu'un roi, choisie par le joueur qui l'a poussé.
- Une pièce ou un pion ne peuvent occuper la place d'une pièce ou d'un pion de la même couleur.
- Si une pièce atteint une case occupée par une pièce ou un pion d'une autre couleur, celui-ci est retiré du jeu. Cette action s'appelle une *prise*.
- Le roi se déplace d'une seule case, dans toutes les directions, la dame d'un nombre quelconque de cases, dans toutes les directions, la tour d'un nombre quelconque de cases horizontalement ou verticalement, et le fou d'un nombre quelconque de cases en diagonale.
- Le cavalier se déplace en partant d'un sommet d'un rectangle de deux cases sur trois et en atteignant le sommet diagonalement opposé.
- Un pion blanc se déplace vers le haut, le pion noir vers le bas, à chaque fois d'une case sauf lors de son premier déplacement, éventuellement de deux cases.
- Un pion peut prendre un pion ou une pièce d'une autre couleur, placé sur une case situé à une case de lui, en diagonale.

Pour simplifier, deux règles ont été omises : celle de la prise en passant (pour le pion), et celle des roques (pour le roi et une tour).

Exercice 9. Former le tableau qui représente l'échiquier, avec ses pions et ses pièces.

Exercice 10. Proposer une fonction d'affichage de l'échiquier. Par exemple, associer une chaîne de caractères à E, qui matérialise les cases (en les délimitant). Une case vide pourra être représentée par la chaîne vide.

Exercice 11. Écrire une fonction qui retourne le tableau des cases accessibles (représentées par un tableau à deux éléments, un pour la ligne, l'autre pour la colonne), à partir des coordonnées d'une case et de la nature de la pièce qui l'occupe. (Écrire d'abord des fonctions pour chaque pièce, en commençant par la tour et le fou.)