Travaux pratiques n°4

Exercices d'algorithmique

F. Cuvellier, J. Tanoh

M.P.S.I. 1, 2014–2015

1 Algorithmes de calcul numérique

1.1 Calculs sur une liste

Exercice 1. On considère une liste de nombres `L`. Donner un algorithme pour le calcul de la somme des éléments de `L`, puis écrire une fonction `sum` de paramètre `L`, qui retourne cette somme. (Dans le cas où la liste est vide, la somme est nulle.)

Exercice 2. Donner une fonction qui retourne la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique et la moyenne harmonique d'une liste de nombres.

Exercice 3.

1. On considère une liste d'au moins deux nombres `L` et une fonction numérique `f` de deux variables numériques. Donner un algorithme qui calcule le nombre obtenu en remplaçant les deux premiers nombres de `L` par la valeur qu'ils donnent à `f`, et en répétant l'opération sur la liste qui en résulte jusqu'à ce qu'elle n'ait plus qu'un élément. C'est cet élément que retourne l'algorithme.

2. Écrire la fonction `power(L,f)` correspondante.

3. On veut compléter la définition de cette fonction en adjoignant à la liste de ses paramètres un paramètre optionnel `reverse` booléen, de valeur par défaut `False`, de sorte qu'elle retourne le nombre obtenu comme précédemment si `reverse` est `False`, et, dans le cas contraire, le nombre obtenu avec la liste lue de droite à gauche. Dans les deux cas, le premier argument de `f` est celui de gauche et le second celui de droite. Écrire la fonction `power(L,f,reverse)`.

4. Calculer $2^{3^{4^5}}$ et $((2^3)^4)^5$.

1.2 Valeurs approchées d'une intégrale

Exercice 4. Étant donnée une fonction numérique f continue dans un intervalle fermé $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, pour estimer son intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, on peut se servir de l'expression

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(a + \frac{k}{n}(b-a)\big),$$

où n est un entier naturel non nul. On démontre que $R_n(f)$ tend vers $\int_a^b f(x)\,dx$ quand n croît indéfiniment.

1. Écrire une fonction `rect(f, n, a=0, b=1)` qui retourne $R_n(f)$. Les valeurs par défaut de a et de b sont 0 et 1.

2. Estimer la vitesse de convergence de $(R_n(f))$ vers $\int_a^b f(x)\,dx$ dans le cas où f est une fonction polynomiale de degré < 5. Dépend-elle du degré ?

2 Nombres premiers

2.1 Recherche du plus petit diviseur premier

Exercice 5. Pour déterminer le plus petit diviseur premier d'un entier naturel n non nul, on se fonde sur quelques remarques élémentaires :

- Le nombre 1 n'a pas de diviseur premier.
- Ou n est premier, ou son plus petit diviseur premier est plus petit que $\sqrt{n}$.
- Tout nombre premier autre que 2 et 3 précède ou suit un multiple de 6.

On peut donc tester si l'entier naturel n est divisible par 2, par 3 ou par le prédécesseur ou le successeur d'un multiple de 6.

1. Proposer à partir de ces remarques un algorithme qui donne le plus petit diviseur premier de n.

2. Écrire la fonction `leastprime(n)` correspondante.

Exercice 6. Donner une fonction qui retourne la liste des diviseurs premiers d'un nombre entier naturel non nul. (Elle retournera la liste vide pour le nombre 1.)

2.2 Crible d'Érathostène

Le *crible d'Ératosthène* est une méthode de détermination pratique des nombres premiers plus petits qu'un entier naturel n donné.

- On part de la liste des entiers de 2 à n rangés dans l'ordre croissant.
- Soit p le plus petit de ces entiers (au début, $p = 2$). On le met de côté et on retire de la liste tous les multiples de p.
- On obtient une nouvelle liste d'entiers naturels rangés dans l'ordre croissant et on retourne à l'étape précèdente aussi longtemps que la liste qui en résulte est non vide.
- Les nombres premiers $\leqslant n$ sont les nombres p mis de côté.

Exercice 7. Utiliser le crible d'Ératosthène pour écrire une procédure à un paramètre, l'entier naturel n, qui retourne la liste des nombres premiers $\leqslant n$ rangés dans l'ordre croissant.