Travaux pratiques n°5

Exercices de concours sur les nombres et sur les suites

F. Cuvellier, J. Tanoh

M.P.S.I. 1, 2018–2019

Les exercices suivants ont été posés lors d'épreuves orales de mathématiques. Tous contiennent des questions qui réclament l'usage de Python.
Dans le cadre de cette séance de travaux pratiques, on ne traitera que celles-ci, sans chercher à donner de démonstrations. On pourra aussi regarder ce que des expériences faites avec Python apportent aux autres.

1 Sur les nombres

Exercice 1. (École nationale supérieure des arts et métiers, PSI, 2016)

1. Pour un nombre entier n, que renvoie l'instruction `list(str(n))` ?
2. Écrire une fonction `somme` qui à tout nombre entier naturel associe la somme de ses chiffres.
3. Un nombre est dit *adéquat* si la somme de ses chiffres est multiple de 10. Écrire une fonction `test()` qui renvoie le booléen `True` si le nombre est adéquat, et `False` sinon.
4. Écrire une fonction `modification(n)` qui change le chiffre des unités du nombre n pour qu'il soit adéquat. Si n est déjà adéquat, la fonction le renvoie sans modification.
5. Tester la fonction pour dix nombres entiers tirés au hasard entre 10000 et 100000 grâce à la fonction `randint`.

Exercice 2. (École nationale supérieure des arts et métiers, PSI, 2016)

1. Soient p et q des nombres entiers, q étant non nul. Écrire une fonction qui renvoie la partie entière de p/q.
2. Écrire une fonction qui prend en arguments p, q et un nombre entier n et qui renvoie un tableau contenant les n premières décimales de p/q.
3. La partie décimale de certains nombres est périodique à partir d'un certain rang (par exemple 12,72123123123...). Écrire une fonction d'arguments p et q, qui renvoie la partie périodique de p/q.
4. Soit e un nombre décimal dont la partie décimale est périodique à partir d'un certain rang. Écrire une fonction qui renvoie des nombres entiers p et q, premiers entre eux, tels que $p/q = e$.

2 Sur les suites

Exercice 3. (École centrale, PSI, 2015)
Soit S l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telles que, pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}.$$

On désigne par $u_n(x)$ le n-ième terme de la suite de S telle que $u_0 = x$.

1. Écrire une fonction `Suite(n, x)` qui renvoie $u_n(x)$. Tester la fonction pour quelques valeurs. Tracer les premiers termes de la suite pour différentes valeurs de x. Commenter.

2. Tester pour $n = 31$ et $x = 1{,}6616$, pour $n = 17$ et $x = 1{,}6617$. Commenter.

3. Démontrer l'équivalence des trois relations suivantes.

   - Il existe un nombre entier naturel n tel que $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - Il existe un nombre entier naturel non nul n tel que $u_n < 1$.
   - (u_n) converge vers 0.

4. Démontrer que, s'il existe un nombre entier naturel N tel que $u_N \geqslant N + 2$ alors, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant N$, $u_n \geqslant n + 2$.

5. Étudier $x = 1$ et $x = 2$. On note E_0 l'ensemble des nombres réels x tels que la suite $(u_n(x))$ converge vers 0 et E_∞ l'ensemble des nombres réels x tels que $(u_n(x))$ tels que $(u_n(x))$ diverge vers $+\infty$. Démontrer que E_0 et E_∞ sont des intervalles de $\mathbf{R}$ tels que $\mathbf{R}_+^* = E_0 \cup E_\infty$.

Exercice 4. (École centrale, MP, 2016)
Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $Q_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

1. (a) Démontrer que Q_n possède une unique racine sur $\mathbf{R}_+^*$, que l'on notera x_n.
   (b) Écrire une fonction prenant n en paramètre et calculant une valeur approchée de x_n. Que peut-on conjecturer quant au comportement asymptotique de x_n ?
   (c) Prouver que (x_n) converge et déterminer sa limite.

2. (a) Démontrer que $2^n(2 - x_n)$ tend vers 1 quand n croît indéfiniment.
   (b) Poursuivre le développement asymptotique de x_n.

Exercice 5. (École centrale, MP, 2016)
On note (u_n) la suite d'entiers naturels définie par $u_0 = 9$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n^3 + 3u_n^4$. On note c_n le nombre de 9 terminant l'écriture décimale de u_n.

1. Écrire une fonction déterminant le nombre de 9 terminant un entier k donné. Donner c_n pour n allant de 0 à 10. Conjecturer la forme de c_n et démontrer la conjecture.

2. Écrire une fonction donnant le chiffre situé juste avant la série de 9 et qui renvoie 0 si le nombre n'est composé que de 9. Donner le chiffre situé juste avant la série de 9 de c_n pour n allant de 0 à 10. Conjecturer et démontrer le résultat.

3. On note p_n le nombre de chiffres de c_n en base 10. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, $4p_n - 2 \leqslant p_{n+1} \leqslant 4p_n + 1$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, $\frac{1}{3}4^n \leqslant p_{n+1} \leqslant \frac{4}{3}4^n$.