

Travaux pratiques n°7
Polynômes
Permutations d'un ensemble fini

F. CUVELLIER, J. TANOH

M.P.S.I. 1, 2015–2016

1 Polynômes réels

1.1 Définitions et notations

Un *polynôme réel* est une suite de nombres réels, indexée par l'ensemble des nombres entiers naturels, dont l'ensemble des indices des éléments non nuls est fini. Pour des raisons qui n'apparaîtront pas ici, un polynôme réel $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se note d'ordinaire

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

ou $\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$. De façon générale, l'élément d'indice n du polynôme s'appelle le *coefficient* d'indice n du polynôme.

Si le polynôme $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ est non nul (c'est-à-dire si l'un des nombres a_n est non nul), le plus grand des indices des éléments non nuls s'appelle le *degré* du polynôme; on le note $\deg(f)$. On convient que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Si le polynôme $\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ est de degré plus petit que N , on le note aussi

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_NX^N.$$

Étant donnés des polynômes $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ et $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_nX^n$, on appelle somme de f et de g le polynôme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)X^n,$$

que l'on note $f + g$; on appelle produit de f et de g le polynôme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^n a_h b_{n-h} \right) X^n,$$

que l'on note fg .

Enfin, si g est un polynôme non nul, de degré n , il existe un unique couple (q, r) de polynômes réels tel que r soit de degré strictement plus petit que n et que

$$f = gq + r.$$

Le polynôme q s'appelle le *quotient* et r le *reste* de la *division euclidienne* de f par g .

1.2 Algorithmes

On convient de représenter un polynôme réel $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ de degré d sous la forme d'une liste \mathbf{f} de longueur strictement plus grande que d , telle que $\mathbf{f}[0]$ soit a_0 , $\mathbf{f}[1]$ a_1 , etc. Plusieurs listes peuvent donc représenter un polynôme non nul donné, mais une seule d'entre elles a un dernier élément non nul. On l'appelle le *représentant normalisé* du polynôme. Le polynôme nul peut être représenté par la liste vide, aussi bien que par toute liste de zéros. On convient que la liste vide est le représentant normalisé du polynôme nul.

Les complexités des algorithmes suivants s'exprimeront en fonction des longueurs des listes des polynômes sans tenir compte de la taille des coefficients.

Exercice 1.

1. Donner un algorithme pour transformer une liste représentant un polynôme en le représentant normalisé.
2. Calculer sa complexité, dans le cas le pire et dans le cas optimal.

Exercice 2.

1. Donner un algorithme qui calcule la somme de deux polynômes.
2. Calculer sa complexité, dans le cas le pire et dans le cas optimal.

Exercice 3.

1. Donner un algorithme qui calcule le produit de deux polynômes.
2. Calculer sa complexité, dans le cas le pire et dans le cas optimal.

Exercice 4.

1. Donner un algorithme qui calcule le quotient et le reste de la division euclidienne d'un polynôme par un polynôme non nul.
2. Calculer sa complexité, dans le cas le pire et dans le cas optimal.

1.3 Programmation en Python

Un polynôme est représenté par une liste de nombres, entiers ou flottants.

Exercice 5. Implémenter ces algorithmes en Python.

Exercice 6.

1. Définir une fonction qui transforme une liste $[a, b, c, \dots]$ de nombres en une chaîne de caractères $a+bX+cX^2+\dots$, en respectant l'usage habituel de noter $-$ au lieu de $+$, X^k au lieu de $1X^k$ et de ne pas faire apparaître les monômes de coefficient nul, sauf pour le polynôme nul. Par exemple, la liste $[2, 3, -1, 0, -3]$ devra donner la chaîne de caractères $2+3X-X^2-3X^4$.
2. Définir une fonction qui transforme une chaîne de caractères de la forme précédente en le représentant normalisé du polynôme correspondant.

2 Permutations

2.1 Définitions et théorèmes

Une permutation d'un ensemble E est une application bijective de E dans lui-même.

La composée de deux permutations de E est une permutation de E . La réciproque de toute permutation de E est une permutation de E .

On dit qu'un élément x de E est *fixe* pour une permutation σ de E si $\sigma(x) = x$. On dit qu'une permutation σ de E est un *cycle* si l'ensemble des éléments de E que σ ne fixe pas est une partie non vide *finie* S de E , de cardinal r (strictement plus grand que 1), qui possède un élément a tel que les r éléments de S soient $a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)$ (dans ce cas, $\sigma^r(a) = a$). La partie S s'appelle le *support* de σ , et le cardinal de S la *longueur* du cycle. En pratique, un cycle de longueur r se note sous la forme d'un r -uplet $(a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a))$ (d'une des r façons possibles).

Ici, nous ne considérons que le cas où l'ensemble E est fini, et plus précisément, celui où il est un intervalle $[1, n]$ de l'ensemble \mathbf{N} des nombres entiers naturels.

On décrit généralement une permutation σ de l'intervalle $[1, n]$ de \mathbf{N} comme une matrice à deux lignes et n colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

L'ordre des colonnes n'a pas d'importance, mais si dans une colonne donnée, k est l'élément de la première ligne, $\sigma(k)$ doit être celui de la seconde ligne. (C'est ainsi que la matrice obtenue en échangeant les deux lignes précédentes représente la permutation σ^{-1} .)

Toute permutation est la composée de cycles dont les supports sont deux à deux disjoints. Par exemple, la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

est la composée des cycles $(2, 3)$ et $(4, 6, 7)$.

Des cycles de supports disjoints commutent, si bien que la décomposition d'une permutation en produit de cycles n'est pas unique, mais à l'ordre près, les cycles qui interviennent dans la décomposition sont bien déterminés par la permutation.

Il existe toutefois une façon canonique de noter une permutation à partir de sa décomposition en produit de cycles en convenant de noter un point fixe sous la forme d'un 1-uplet, de noter un cycle de longueur r sous la forme d'un r -uplet dont le premier élément est le plus petit du support, et enfin, d'écrire les k -uplets obtenus de sorte que la suite formée par tous les premiers éléments soit *décroissante*. Par exemple, la permutation précédente s'écrit $(5, 4, 6, 7, 2, 3, 1)$.

2.2 Algorithmes

Exercice 7. Donner un algorithme qui vérifie si une matrice à deux lignes représente une permutation.

Exercice 8. Donner un algorithme qui vérifie si les éléments d'un n -uplet sont deux à deux distincts.

Exercice 9.

1. Écrire un algorithme qui transforme une permutation représentée par une matrice de deux lignes en la décomposition en produit de cycles écrite sous forme canonique.
2. Calculer sa complexité, dans le cas le pire et dans le cas optimal.

Exercice 10.

1. Écrire un algorithme qui transforme un n -uplet formé des n nombres $1, 2, \dots, n$ (dans un ordre arbitraire) en la matrice de deux lignes représentant la permutation dont le n -uplet est la forme canonique.
2. Calculer sa complexité, dans le cas le pire et dans le cas optimal.

Exercice 11. Écrire un algorithme qui calcule la composée de deux permutations données.

2.3 Programmation en Python

Exercice 12. Implémenter les algorithmes précédents en Python. Une matrice à deux lignes sera représentée sous la forme d'une liste de deux listes de même longueur.