Travaux pratiques n°1

Répertoires et fichiers sous Windows
Nombres rationnels
Coefficients binomiaux

F. Cuvellier, J. Tanoh

M.P.S.I. 1, 2017–2018

1 Répertoires et fichiers sous Windows

1.1 Répertoires

Un *fichier* est une suite de caractères.
Un *répertoire* (ou *dossier*, dans les versions françaises de Windows) est un fichier qui contient des fichiers. En pratique, pour organiser le contenu d'un ordinateur, on crée des répertoires pour regrouper des fichiers conçus suivant un même principe ou relevant d'un même thème.

1.2 Commandes

Pour gérer un grand nombre de fichiers, par exemple ceux d'un même répertoire qui ont été créés à une date donnée, on peut utiliser des commandes d'utilisateurs, qui permettent d'exécuter une même opération (une commande) sur tous les fichiers. C'est ainsi qu'on peut renuméroter les milliers de photographies prises pendant de passionnantes vacances avec trois téléphones portables, deux tablettes numériques et quatre appareils photographiques numériques, de sorte qu'elles se succèdent dans l'ordre chronologique. (Renuméroter à la main chaque fichier de photographie pourrait s'avérer fastidieux.) Un ordinateur doit disposer de fonctionnalités qui facilitent ce travail, c'est-à-dire les effectuent en quelques secondes.
Les systèmes d'exploitation de type Unix proposent des langages de programmation efficaces, appelés *shells de commandes*, qui effectuent de telles tâches et bien d'autres, par exemple, les shells *sh*, *bash*, *tcsh*, *zsh*, etc. Les systèmes d'exploitation de type Windows proposent aussi une fonctionnalité qui s'apparente à un shell. Dans la version française, elle s'appelle *Invite de commandes*.

Exercice 1. Créer cent fichiers, appelés `x00.txt`, `x01.txt`, ..., `x99.txt`, qui contiennent chacun uniquement leur nom sans l'extension. (Par exemple, `x47.txt` contient la chaîne de trois caractères `x47`.)

2 Nombres rationnels

2.1 Représentation des nombres rationnels

On convient de représenter un nombre rationnel $r = a/b$ à l'aide d'un tableau à deux éléments entiers, le premier pour le numérateur, le second pour le dénominateur, `[a, b]`. Par exemple, le nombre rationnel $-\frac{11}{7}$ sera représenté par le tableau `[-11, 7]` (ou par le tableau `[11, -7]`). Dans ce qui suit, par *nombre rationnel*, on entend donc un tableau à deux éléments entiers.

Si `r` désigne un nombre rationnel, son numérateur est `r[0]` et son dénominateur `r[1]`.

2.2 Opérations sur les nombres rationnels

Exercice 2.

1. Écrire une fonction à un paramètre, `op(r)`, qui transforme un nombre rationnel en son opposé.

2. Écrire une fonction à deux paramètres, `sm(r, s)`, qui transforme deux nombres rationnels en leur somme.

3. Écrire une fonction à deux paramètres, `pr(r, s)`, qui transforme deux nombres rationnels en leur produit.

(Ces fonctions seront modifiées ultérieurement, pour simplifier le résultat.)

2.3 Forme irréductible d'un nombre rationnel

En pratique, un nombre rationnel a/b (représenté par le tableau `[a, b]`) peut s'écrire d'une seule façon sous la forme d'une fraction de deux nombres entiers a'/b', de sorte que b' est strictement positif et que a' et b' n'ont pas de diviseur entier autre que 1 et -1. Pour passer de la fraction a/b à la fraction a'/b', il suffit de remplacer a et b par leurs opposés si b est strictement négatif, et de diviser le numérateur et le dénominateur par leur plus grand diviseur commun.
Par exemple, le nombre rationnel $\frac{18}{-12}$, sous forme irréductible, s'écrit $\frac{-3}{2}$, et se représente par le tableau `[-3, 2]`. Un nombre entier n s'écrit sous forme irréductible $n/1$.

La fonction suivante retourne le plus grand diviseur commun (strictement positif) de deux nombres entiers a et b.

```
def gcd(a, b):
    if a < 0:
        a = -a
    if b < 0:
        b = -b
    while a * b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a + b
```

Exercice 3.

1. Recopier la fonction précédente.

2. L'utiliser pour écrire une fonction à un paramètre, `simpl(r)`, qui transforme un nombre rationnel (c'est-à-dire un tableau à deux éléments entiers) en sa forme irréductible.

3. Modifier les fonctions `op(r)`, `sm(r, s)` et `pr(r, s)`, pour que le résultat soit un nombre rationnel écrit sous forme irréductible.

3 Coefficients binomiaux

On s'interdira de définir des fonctions récursives.

3.1 Différentes formules pour calculer des coefficients binomiaux

Rappelons qu'étant donnés des nombres entiers naturels n et k, le coefficient binomial d'indice (n, k) est le nombre *entier naturel* noté $\binom{n}{k}$, défini par la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1}.$$

(En particulier, pour tout nombre entier naturel n, $\binom{n}{0} = 1$.)
Quatre formules classiques permettent de calculer les coefficients binomiaux : quels que soient les nombres entiers naturels n et k,

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}, \\
\binom{n}{k+1} &= \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}, \\
\binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}, \\
\binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k},
\end{aligned}$$

la dernière dans le cas où k est plus petit que n.

3.2 Trois fonctions pour calculer les coefficients binomiaux

Les deux premières fonctions reposent sur les deux premières formules données précédemment, ainsi que sur la quatrième. De façon précise, si k est strictement plus grand que $n-k$, on commence par remplacer $\binom{n}{k}$ par $\binom{n}{n-k}$; si k est nul, le coefficient $\binom{n}{k}$ vaut 1 ; enfin, on se sert de la première formule (respectivement de la deuxième) pour réduire la somme des arguments $n+k$.

Exercice 4. Écrire deux fonctions `binom1(n, k)` et `binom2(n, k)` fondées sur la méthode qui vient d'être décrite.

Exercice 5.

1. Proposer un algorithme qui permette de calculer le coefficient binomial d'indice (n, k) à l'aide de la formule du triangle $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

2. L'implémenter sous la forme d'une fonction (non récursive) `pascal(n, k)`.

3.3 Vérification de quelques formules

Exercice 6.

1. Formuler une conjecture sur la validité des relations suivantes à l'aide de Python. La lettre n désigne un nombre entier naturel.

$$\begin{aligned}
1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots &= 0, \\
\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots &= n2^{n-1}, \\
\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots &= 0, \\
2 \cdot 1\binom{n}{2} + 3 \cdot 2\binom{n}{3} + 4 \cdot 3\binom{n}{4} + \cdots &= n(n-1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

2. Même question avec la relation :

$$\binom{n}{1}\frac{1}{1} - \binom{n}{2}\frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

3. Même question ; ici, n et k sont des nombres entiers naturels.

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} - \cdots \pm \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 0.$$