Travaux pratiques n°8

Représenter un nuage de points
Étude de suites de nombres réels

F. Cuvellier, J. Tanoh

M.P.S.I. 1, 2015–2016

1 Représenter un nuage de points issu d'une expérience

1.1 Exemple

1.1.1 Fichier de données

On trouvera dans le répertoire d'échange le fichier `maxpid.txt`. Il contient soixante-douze lignes. Les deux premières indiquent le nom des grandeurs mesurées et leurs unités. Les soixante-dix suivantes contiennent sept nombres correspondant à une date, à une consigne, à une position, à une tension moteur et à d'autres grandeurs mesurées lors d'un essai.

1.1.2 Extrait du fichier de données

```
Temps Consigne Position Commande Courant Vit. Axe Moteur
ms degrés degrés Volts mA rad/s rad/s
    0   44.6   44.6    0.2     50   0.00   -141
    5   83.6   44.6   21.1   4650    0.32   -82
   24   83.6   45.6   21.1   3800   0.42    -33
   44   83.6   47.9   21.1   2650   0.73     -3
   63   83.6   50.4   21.1   2100   1.02     12
   83   83.6   53.2   21.1   1700   1.44     24
  108   83.6   56.3   21.1   1500   1.57     29
  125   83.6   59.2   21.1   1400   1.84     32
```

On souhaite représenter la colonne position (colonne d'indice 2) en fonction du temps (colonne d'indice 0).

1.1.3 Traitement du fichier de données

Exercice 1.

1. Copier et coller le fichier `trace_fich.py` dans son répertoire personnel.
2. Adapter le chemin d'accès au fichier de données dans la méthode `np.loadtxt()`.
3. Exécuter le fichier. Observer.
4. Observer ce qu'apportent certaines commandes en les dé-commentant.

1.1.4 Les variables de type array

Exercice 2. Que fait la méthode `loadtxt()` de la bibliothèque NumPy ?

Exercice 3. Exécuter la commande suivante.

```
X = np.loadtxt('...../maxpid.txt', skiprows = 2)
```

À partir du shell Python :

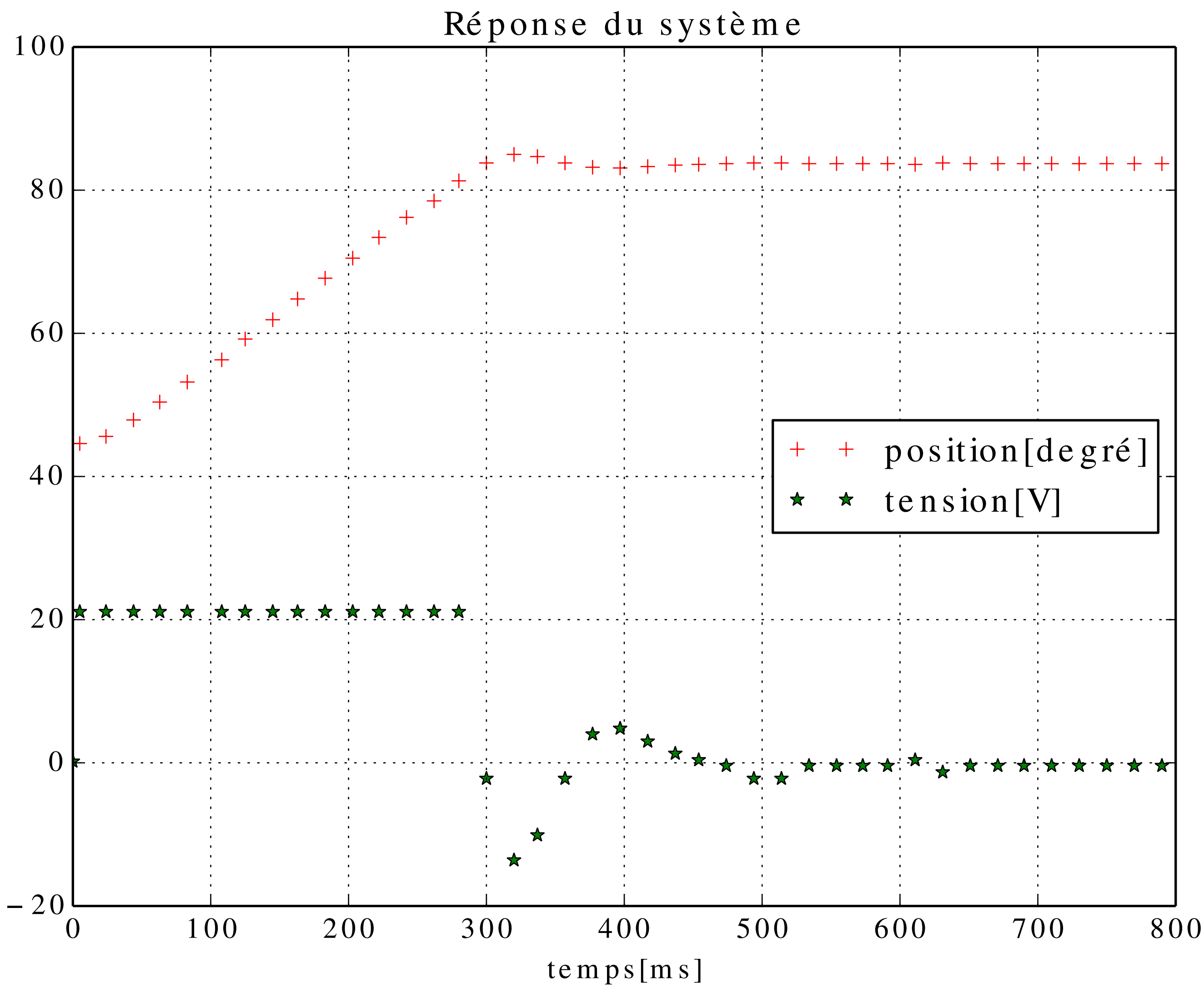
1. Quel est le type de `X` ?
2. Que contient `X[5]` ?
3. Que contient `X[5,0]` ?
4. Que contient `X[:,0]` ?
5. Que donne la commande `X.shape` ?

Pour obtenir le même résultat de façon plus directe, on aurait pu utiliser des options dans la commande :

```
t, position = loadtxt('...../maxpid.txt', usecols = (0, 2),
    skiprows = 2, unpack = True)
```

L'option `unpack = True` a permis de créer deux tableaux `t` et `position` à partir des colonnes `t` et `position`.

1.1.5 Image obtenue dans l'exemple



1.2 Application

Exercice 4. Dans le fichier de données `moto.txt`, la colonne d'indice 2 donne les mesures en volt d'une accélération. Le temps est absent du fichier, mais on sait qu'entre deux lignes s'est écoulé 0,002s. On souhaite représenter l'accélération en fonction du temps.

1. Tester dans le shell Python la commande `np.arange(0,2,0.1)`. S'en inspirer pour créer le tableau du temps.

2. Tester dans le shell Python la commande `np.linspace(0,2,21)`. S'en inspirer pour créer le tableau du temps.

2 Représentation de suites de nombres réels

2.1 Usage de la bibliothèque MatPlotLib

La bibliothèque MatPlotLib permet de représenter des graphes. (Pour la charger et l'appeler par le nom `ppl`, exécuter la commande `import matplotlib.pyplot as ppl`.) Pour ce faire, on se sert de la fonction `ppl.plot()`. Elle a deux paramètres, un tableau d'abscisses et un tableau d'ordonnées. Elle retourne l'adresse en mémoire d'un objet de Python, et on le visualise ensuite avec `ppl.show()`. C'est le graphe formé des segments de droites qui relient les points dont les coordonnées sont les abscisses et les ordonnées des tableaux précédents.

- Pour donner le titre *TITRE* : `ppl.title('TITRE')`.
- Pour faire apparaître x sur l'axe des abscisses : `ppl.xlabel('$x$')`; y sur l'axe des ordonnées : `ppl.ylabel('$y$')`.
- Pour faire apparaître l'axe des abscisses en noir : `ppl.axhline(color='black')`; et celui des ordonnées en noir : `ppl.axvline(color='black')`.

Exercice 5. Représenter le triangle dont les sommets sont les points de coordonnées $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(0, 1)$.

2.2 Diverses façons de représenter une suite bornée

On se donne une suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels. Pour la représenter ses termes dont les indices appartiennent à un certain intervalle fini $I = [a, b]$ de $\mathbf{N}$, on peut d'abord relier les points de coordonnées (n, x_n) $(n \in I)$. On peut aussi relier les points du plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dont les coordonnées sont (x_n, x_{n+1}) $(a \leqslant n < b)$. On peut encore relier les points du plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dont les coordonnées sont (x_n, x_n) et (x_n, x_{n+1}) $(a \leqslant n < b)$. Enfin, on peut représenter chaque nombre x_n à l'aide d'un segment d'extrémités $(x_n, 0)$ et (x_n, l_n) dont la longueur l_n est d'autant plus petite que n est grand (par exemple, proportionnelle à $1/(n + 1)$ ou à $1/2^n$).

Exercice 6. Représenter les suites $(1/(n + 1))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(2^{-n})_{n\in\mathbf{N}}$. On tiendra compte de la question de l'exercice suivant pour choisir une façon commode de définir les suites.

Exercice 7. Écrire une fonction à quatre paramètres, une liste (dont les premiers termes sont ceux de la suite à représenter), les deux bornes de l'intervalle fini de $\mathbf{N}$ formé des indices des nombres à représenter, et un paramètre correspondant au mode de représentation choisi. Elle donnera l'objet que Python peut visualiser par `ppl.show()`.

3 Exemples de suites

3.1 Suites convergentes

Exercice 8. On considère la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la relation $x_n = (1 + 1/n)^n$.

1. La représenter de toutes les façons possibles (parmi celles qui ont été suggérées).
2. Discuter leur pertinence.

Exercice 9. On considère la famille de suites $(x_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ définies par la relation $x_n(\alpha) = (1 + 1/n)^{n+\alpha}$. Elles convergent toutes vers le même nombre réel e.

1. Proposer une représentation qui permettent de voir comment toutes les suites de cette famille convergent.
2. Quel est le rôle du nombre α ?

3.2 Suites définies par une relation de récurrence

Exercice 10. Représenter pour différentes valeurs de x_0 les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que, pour tout nombre entier naturel n, $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$.

Exercice 11. Représenter pour différentes valeurs de x_0 les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que, pour tout nombre entier naturel n, $x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n/2}$.

Exercice 12. Représenter pour différentes valeurs de x_0 et du nombre réel $\lambda > 1$ les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que, pour tout nombre entier naturel n, $x_{n+1} = \lambda(1 - |x_n - 1|)$.

Exercice 13. Représenter pour différentes valeurs de x_0 les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ telles que, pour tout nombre entier naturel n,

$$x_{n+1} = x_n\Big(x_n + \frac{1}{n}\Big).$$

3.3 Valeurs d'adhérence d'une suite

On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ toute limite d'une suite extraite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 14.

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par les relations $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 1 - 1{,}34x_n^2$ a plusieurs valeurs d'adhérence. Les visualiser.

2. Même question avec la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par les relations $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 1 - 1{,}38x_n^2$.

Exercice 15. Proposer une manière de visualiser les valeurs d'adhérence d'une suite de nombres réels donnée.

Exercice 16. Traiter le cas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout nombre entier naturel n, $x_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}\,]$.