Travaux pratiques n°7

Résolution d'équations différentielles

F. Cuvellier, J. Tanoh

M.P.S.I. 1, 2017–2018

1 Méthodes de résolution approchée d'équations différentielles résolues

On considère l'équation différentielle $x' = f(t,x)$, où f est une fonction numérique définie dans une partie U de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, à valeurs réelles. Une solution (ou intégrale) de cette équation est une fonction dérivable $x \colon I \mapsto \mathbf{R}$, telle que pour tout élément t de I, $(t, x(t))$ appartient à U et $x'(t) = f(t, x(t))$. Pour fixer les idées, t sera vu comme un temps.
En pratique, sauf dans des cas exceptionnels, il est impossible de résoudre une telle équation en donnant un procédé de calcul du graphe d'une solution. Même dans le cas d'équations différentielles linéaires à coefficients réels (constants), dont les solutions sont des combinaisons linéaires de produits de fonctions polynomiales et de fonctions exponentielles que l'on peut souvent expliciter, un tel procédé n'existe pas à partir de calculs algébriques. On recourt alors à des méthodes de résolution approchée.

1.1 Méthode d'Euler

Une méthode de résolution approchée de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ se fonde sur la formule des accroissements finis. Concrètement, pour un couple (t_0, x_0) de U, on cherche à déterminer des estimations des valeurs de la solution x telle que $x(t_0) = x_0$, en quelques points d'un intervalle compact dont x_0 est une borne.
On se donne un pas τ, positif ou négatif mais non nul, un nombre entier naturel non nul n, et l'on considère les points t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, …, $t_0 + n\tau$, qu'on note t_0, t_1, …, t_n. Pour tout nombre entier naturel k plus petit que n, on note x_k l'estimation de $x(t_k)$ que donne la méthode. De façon précise, les valeurs approchées x_0, x_1, …, x_n sont estimées par les formules $x_0 = x(t_0)$ et

$$x_{k+1} = x_k + \tau f(t_k, x_k).$$

1.2 Méthode de Heun

On reprend les notations précédentes. Les valeurs approchées $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont estimées par les formules $x_0 = x(t_0)$ et

$$x_{k+1} = x_k + \tfrac{1}{2}\tau\big(f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_k + \tau f(t_k, x_k))\big).$$

1.3 Exercice

Exercice 1. La solution du problème de Cauchy $x(0) = 1$ associé à l'équation différentielle $x' = x$ est la fonction exponentielle. Expliciter les formules pour x_k que donnent la méthode d'Euler et celle de Heun dans ce cas.

Exercice 2. Écrire les algorithmes associés à ces méthodes et les implémenter. Les paramètres seront, par exemple, la fonction f, les nombres t_0 et x_0, et le pas τ et le nombre entier n.

2 Études d'équations différentielles

2.1 Usage des fonctions de Python

La bibliothèque SciPy contient des fonctions pour résoudre numériquement les équations différentielles. Parmi elles, la fonction `scipy.integrate.odeint()` retourne un tableau d'estimations d'une solution pour un tableau de temps donnée en argument. De façon précise, les paramètres sont une fonction numérique f, qui transforme (x, t) (et non (t, x)) en un nombre réel, la valeur de la solution pour la première valeur du temps et *un tableau* des valeurs de t.

Par exemple, `scipy.integrate.odeint(lambda x,t: t**2 + x, 3, [0, 0.5, 1])` retourne les valeurs approchées pour 0, 0,5 et 1 de la solution de l'équation différentielle $x' = x + t^2$ qui prend la valeur 3 pour 0.

Un tableau est la structure de données adaptée à NumPy qui s'apparente au tableau de Python. Pour en former un, on peut procéder comme pour les tableaux (et il est fréquent que NumPy interprète correctement les tableaux de Python). On peut aussi se servir de `numpy.linspace()` (avec trois paramètres, les deux bornes et le nombre de points, régulièrement espacés) ou de la fonction `numpy.arange`.

Pour représenter une fonction numérique, on se sert de la fonction `matplotlib.pyplot.plot()` de la bibliothèque MatPlotLib. Elle a deux paramètres, un tableau d'abscisses et un tableau d'ordonnées, de même longueur. Elle retourne l'adresse en mémoire d'un objet de Python, qu'on peut visualiser avec `matplotlib.pyplot.show()`. C'est le graphe formé des segments de droite qui relient les points dont les coordonnées sont les abscisses et les ordonnées des tableaux précédents.

2.2 Exercices

Exercice 3. Représenter la fonction numérique $x \mapsto x^2$ définie dans l'intervalle $[-3, 4]$.

Exercice 4.

1. Définir en Python une fonction dont les paramètres sont une fonction f, des nombres réels t_0 et x_0, un nombre non nul τ (positif ou négatif) et un nombre de points n. Elle calcule le tableau des abscisses et le tableau des ordonnées des points du graphe de la solution approchée que donne la méthode d'Euler et elle retourne l'objet que `matplotlib.pyplot.show()` visualise.

2. En faire autant avec la méthode de Heun.

Exercice 5. Représenter la solution du problème de Cauchy $x(0) = 1$ associé à l'équation différentielle $x' = x$. Pour cela, on choisira un intervalle de représentation adapté. Afin de comparer les méthodes, on mettra côte à côte le graphe de la fonction exponentielle, celui de la solution approchée que donne la méthode d'Euler et celui de la solution approchée que donne la méthode de Heun.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle $x' = 2\sqrt{x}$.

1. Représenter la solution du problème de Cauchy $x(0) = 1$. (Si possible, l'intervalle de définition choisi pour la représentation sera $[-4, 2]$.)

2. Que dire des solutions du problème de Cauchy $x(0) = 0$? (Par exemple, considérer un problème de Cauchy $x(a) = 0{,}1$ et réfléchir au bon choix de a.)

Exercice 7. On considère l'équation différentielle $x' = x^2$.

1. Vérifier que ses solutions maximales sont la fonction nulle et, pour tous les nombres réels a, les fonctions $t \mapsto 1/(a - t)$, définies dans n'importe lequel des deux intervalles ouverts non bornés de $\mathbf{R}$ dont a est une borne.

2. La solution maximale du problème de Cauchy $x(0) = 1$ attaché à cette équation est la fonction $t \mapsto 1/(1-t)$ définie dans l'ensemble des nombres réels strictement plus petits que 1. Étudier comment les méthodes de résolution approchée d'équations différentielles s'appliquent à ce problème.

Exercice 8. On se propose d'étudier l'équation différentielle $x' = x^2 - t$ à partir des graphes des intégrales.

1. Représenter l'intégrale qui vaut 0 pour 0.
2. Représenter les solutions du problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$ où $x_0^2 - t_0 = 0$.
3. Représenter les solutions du problème de Cauchy $x(0) = x_0$. (Bien choisir l'intervalle dans lequel prendre x_0. En pratique, ce nombre ne peut excéder $\frac{3}{4}$.)
4. Décrire le comportement des solutions à partir de constatations sur les exemples précédents.

Exercice 9. Adapter la méthode d'Euler au cas d'une équation différentielle $x'' = f(t, x, x')$ (d'ordre 2). (Introduire une fonction inconnue auxiliaire y, définie par la relation $y = x'$.)

Exercice 10. On se propose d'étudier l'équation différentielle (d'ordre 2) $x'' - x' - 6x = 0$.

1. Quelles en sont les solutions ?
2. Représenter la solution du problème de Cauchy $x(0) = 1$ et $x'(0) = \alpha$ dans le cas où $\alpha = 1$ puis dans celui où $\alpha = -2$. Que constate-t-on ? Comment expliquer la différence entre le graphe de la solution théorique et celui que donnent les méthodes de résolution approchée ?

Exercice 11. On considère l'équation différentielle $x'' = tx$.

1. Représenter la solution du problème de Cauchy $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$ et celle du problème de Cauchy $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.
2. Estimer les deux plus grands zéros strictement négatifs de chacune de ces solutions.