光の屈折の原理と計算

小野涼大

2024 年 10 月 25 日

概要

Ray Tracing in One Weekend(週末レイトレーシング) と言うサイトでは, レイトレーシングを C++ で簡単に実装する方法について解説されている. その中では当たり前だが多少の計算が必要で, プログラミングやレイトレーシングに興味を持った未来の高専生たちが, いざ作ってみようと思っても (コード例が載っているので作ることはできるが) 完全に理解した状態で作るには説明が足りないと思われる. そこでその計算方法やその他屈折に関する興味深い事実をまとめた.

1　はじめに

最近のゲームや映画の映像はものによっては現実と区別がつかないほど高度な域にまで達している (特に金属や機械など). 商業的に使われているものほど複雑なものは難しいが, 単純な金属球やガラス球といったものを現実のような美しさで 1 から描画するのは実はさほど難しくない.

レイトレーシングという 3D CG の描画手法を使えば (プログラミングを実行できる環境を持っていれば) 誰でも簡単にレイトレーシングを行うことができる. 参考までに生成された画像は数理同好会の部屋に置いておく. 念を押すが誰でも Blender や Unreal Engine といったソフトウェアを使わずに 3D CG を描画できるのだ.

こちらではこれの作り方は説明しない. 既に Ray Tracing in One Weekend というサイトで作り方を無料公開しているからだ. こちらではそのサイトでは説明不足に感じた光の屈折の計算方法とそれに関する蛇足情報をまとめてある. まず計算する際に必要になる知識の説明をする.

2　必要になる知識の説明

三角比

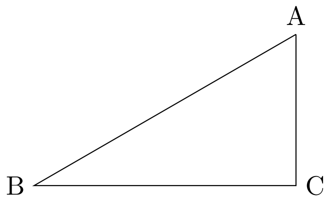

図1: 直角三角形

図1のような直角三角形がある. $\angle \mathrm{ABC} = \theta$ とする. それぞれ向かい合う辺を a, b, c とすると三角比は以下

のように定義される.

$$\sin\theta = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

なお今回使うのは sin だけである. また定義から明らかなことではあるが斜辺の長さをかければそれぞれ高さ, 底辺の長さを求めることができる.

ベクトル

今まで使ってきた長さや速さといったものは 1 つの値で表してきた. このようなものをスカラーと言う. これに方向といった情報を追加し, 複数の値を使って表すものをベクトルという. $\vec{a}$ や $\mathbf{a}$ などを使う. 今回は後者を使う. 格好良いから. ベクトルの演算方法については, 加算, 内積, 大きさの計算方法がわかっていれば良いので, その 3 つについて説明する.

加算については図2のようなイメージを持ってもらえば良い. マイナスがついた場合方向が真逆になると思って欲しい.

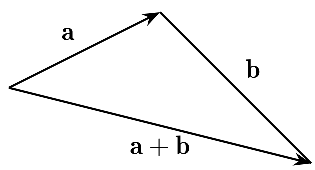

図2: ベクトルの加算

内積は 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ とするとき以下のように定義される.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

$|\mathbf{a}|$ は $\mathbf{a}$ の大きさを意味しており, θ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角度である. イメージとしては $\mathbf{a}$ の終端から $\mathbf{b}$ へ垂線をおろし, その長さにそれぞれの大きさ (長さ) をかけたものだ. 式を見ればわかることだが内積で得られる値はスカラーである.

3　光の屈折とは

光が別の物質へ入るとき (入射), 光が曲がる現象がある. これを屈折という. 水面に景色が映り込んだり, 分厚いガラスから見る景色が歪んでいたりするのはこの屈折という現象によって引き起こされる.

3.1　屈折のメカニズム

そもそも屈折とはどのようにして起きるのだろう. 図4に屈折する光の簡単なモデルを載せた. 光は波の性質を持っているので, 図4の破線は光の波の山の位置を描いており, 矢印は光の山と山の距離, 波長の長さだけ引いてある (山と山の最短距離 = 波長). 光が他の物質に入るときに曲がるのであれば, 必然的に図4のように波の方向が変化する. このとき, 山の接触しなければ波の周期にずれが起きてしまうので, 波の方向を変えると一緒になって波の間隔も短くなる.

光の波長が変わったとしても光の波から波までの時間, 周期は変わってしまってはおかしなことになる. なぜなら元は同じ光源だったはずだからである. であれば波長を変えるには速さを変えるしか方法はない (3.1).

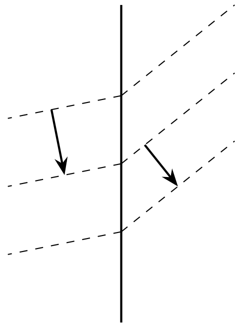

図3: 屈折のモデル

よって屈折とは光が他の物質へ入射する際に速度が変わることによって引き起こされることがわかった.

$$\lambda = vT(\lambda : 波長 v: 速度 T : 周期) \tag{3.1}$$

3.2 光が遅くなるとは

この宇宙で最速の光くんは" 真空中" で速度 $c \simeq 300,000\text{km/s}$ とされている. これは 1 秒で地球を 7 周半できるほどの速さである [*1]. なぜ" 真空中で" となっている理由は先程説明した.

しかし光速というものは同時に絶対的であるとも言われている. どんな状態 (速さ) から見ても光の速度は変化しない. そのため時間が伸び縮みするのだがそんなことを言っておきながら光が遅くなってどうすんだと思うだろう. 実は物質中では光は遅くなるというのは半分嘘である. 正しくは" 見かけ上" 光は光速 c より遅くなるのだ.

ここからはある程度数式を使って小難しいことを言っているが, 正直式の内容を理解しなくても文章の部分が理解できれば十分だ.

まず電場, 電磁波について簡単に話そう. この世のありとあらゆる物質はすべて原子からできており, 原子は原子核とその周りにある電子で構成されている. その原子核には陽子という正の電荷 (電気) を持つものと電荷を持たない中性子がある. こいつらも分解できるがこの話には関係ないので割愛する.

ここで今回重要になってくるのは電荷を持つ電子と陽子だ. 陽子に関しては単体であることはほとんどないので原子核として考えてよいだろう. これらは存在するだけで電場と呼ばれる空間を作り, この電場の強さや様々な電場が重ね合わさることによって生じる向きに従って, 電荷を持つ物質は力を加えられる [*2]. 丁度電気がプラスからマイナスに流れるような感じだ.

さてこの電場は光速 c で伝わる. また電場は電荷を持つ物質との距離にも依存するのでもし電荷が移動すれば電場に変化が生まれることになる. これが電磁波となって伝わるのだ [*3].

さてここからは簡単な数式を使いながら説明する. まず状況を設定する. 薄いガラスの板があり, 横から見て左の遠くに外部光源 S があり, 右の遠くにある観測点 P での電場について考える. まず P における電場を

[*1] 速い, が宇宙の最速としては遅い, と思う

[*2] 電荷からの距離と電場を生み出している電荷の大きさによって電場の強さは変化し, それらは異符号の電荷を自身に引き寄せるような力が働いている. 世界中に電荷を持つ物体は大量にあるので, 複雑に絡みあうのだ. 中学生であれば磁力線のようなものだと思って欲しい.

[*3] 少々雑な説明なので注意してください

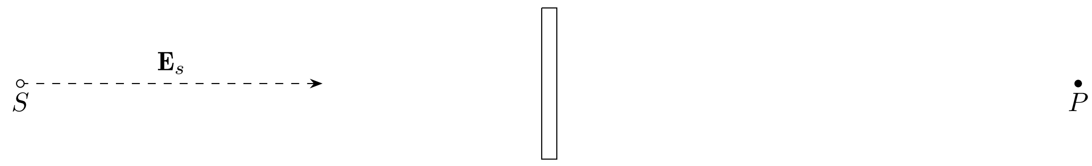

図4: 問題設定

求めるが, S の発する電磁波がガラスの板の原子にある電子にも作用し電場が変化する. 結果 P における電場も S からの電磁波による影響以外に様々な影響を受けることになる. もちろんこの宇宙の全電荷による作用もあるが今回の場合はそれらは無視できるほど小さいものと仮定する. ではこの仮定を元に P における電場を $\mathbf{E}$, S の発する電場を $\mathbf{E}_s$, ガラス板内の振動する電荷による電場を $\mathbf{E}_a$ とすると以下のようになる.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_a \tag{3.2}$$

ここからははこの $\mathbf{E}_a$ がどうなるのかを考えていく. まずはじめに単純に屈折率 n の物質中を進む光の速さは $\frac{c}{n}$ になるとする. もしガラス板が何の影響も持たないとすると, 右 (z 軸) に進む波の電場は

$$E_s = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

となる. オイラーの公式 [*4] を用いると以下のように表すこともできる.

$$E_s = E_0 e^{i\omega\frac{t-z}{c}}$$

i は虚数単位なので sin の部分は情報として落ちるので問題ない. z は S と P の距離を表している. cos については先程説明したのでなんとなくわかると思うが, これは波を表すことになる. 時間に関係してくるため t が入っており, また距離を速さで割った $\frac{z}{c}$ だけ伝わる時間に差ができる. なぜならこの E_s というのは S での電場であり t は P を基準に決めているからである.

ここで板厚を Δz とすると板が無ければこの距離を $\frac{\Delta z}{c}$ の時間で進むが, 仮に

4 屈折光の計算

実際に屈折光をスネルの法則を中心に計算していくが計算過程でいくつか高校数学で習うものを使う. といってもちょろいので簡単な説明をしておく.

4.1 スネルの法則

先程まで屈折率を n で扱ってきたが諸事情 (法線を $\mathbf{n}$ で表したい) により屈折率を η, η' で表す. ここで使う記号を以下にまとめる. なおベクトルは全て単位ベクトルである.

まず屈折の法則としてスネルの法則を載せる. これが屈折光を求める上での基本となる. スネルの法則の導出については Google 先生に聞けば一発なので気になる場合は各自調べてほしい.

$$\eta \cdot \sin\theta = \eta' \sin\theta' \tag{4.1}$$

[*4] $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

表1: 記号の意味

名前	意味
η	入射側の屈折率
η'	屈折側の屈折率
θ	入射角
θ'	屈折角
$\mathbf{n}$	法線のベクトル
$\mathbf{R}$	入射光
$\mathbf{R}'$	反射光
$\mathbf{R}'_{\parallel}$	反射光の法線に平行な成分
$\mathbf{R}'_{\perp}$	反射光の法線に垂直な成分

主に使うのは下の変形した形である.

$$\sin\theta' = \frac{\eta}{\eta'}\sin\theta \tag{4.2}$$

まず今回の問題を図に書き起こすと図5のようになる. 直接屈折光 $\mathbf{R}'$ を求めるのは難しいので, $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{\perp} + \mathbf{R}'_{\parallel}$ と表せることを利用し $\mathbf{R}'_{\perp}$, $\mathbf{R}'_{\parallel}$ をそれぞれ求める.

まず4.2をベクトルを使って表現する. $\mathbf{R}$ の始点から $\mathbf{n}$ に対し垂直に線を引く. すると $\mathbf{R}$ の始点とその交点までのベクトルの大きさは $\mathbf{R}$ は単位ベクトルなので $\sin\theta$ と同じになることになる. つまりはこうなる.

$$\sin\theta = |\mathbf{R} + \cos\theta\mathbf{n}|$$

また図5より

$$\sin\theta' = |\mathbf{R}_{\perp}|$$

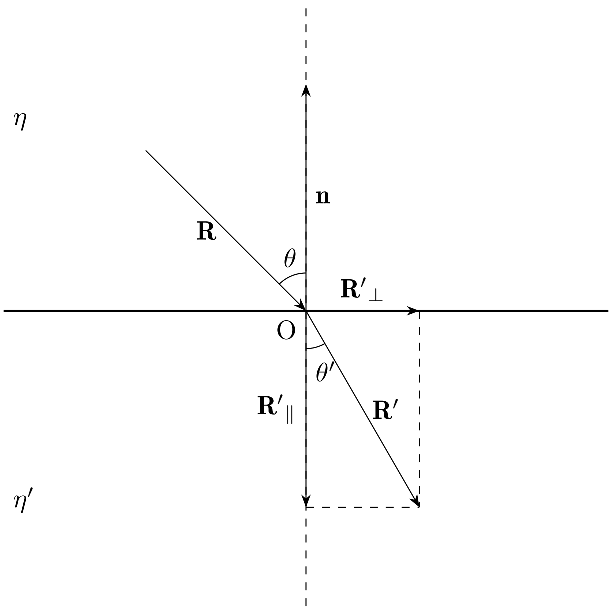

図5: 屈折のシンプルな方のモデル

以上より (4.2) から以下の関係が成り立つ．

$$|\mathbf{R'}_\perp| = \frac{\eta}{\eta'}|\mathbf{R} + \cos\theta\mathbf{n}|$$

$\mathbf{R} + \cos\theta\mathbf{n} \perp \mathbf{n}$ かつ $\mathbf{R'} \perp \mathbf{n}$ であることからこれら 2 つは平行なので, 平行な 2 つのベクトルは互いにどちらかのスカラー倍で表すことができる．また $\mathbf{R}\cdot\mathbf{n} = \cos\theta|\mathbf{R}||\mathbf{n}|$ であり, それぞれ単位ベクトルなので $|\mathbf{R}||\mathbf{n}| = 1$ であることから, $\cos\theta$ は $\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}$ である．よって $\mathbf{R'}$ は以下の式で表すことができる．

$$\mathbf{R'}_\perp = \frac{\eta}{\eta'}\{\mathbf{R} + (\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\} \tag{4.3}$$

次に $\mathbf{R'}_\parallel$ を求める．$\mathbf{R'}_\parallel \parallel \mathbf{n}$ であることから, $\mathbf{n}$ のスカラー倍で表すことが出来る．$\mathbf{R'}_\parallel$ の大きさはピタゴラスの定理より

$$|\mathbf{R'}_\parallel| = \sqrt{1 - |\mathbf{R'}_\perp|^2}$$

である．これらをもとに $\mathbf{R'}_\parallel$ を求めると

$$\mathbf{R'}_\perp = -\mathbf{n}\sqrt{1 - |\mathbf{R'}_\perp|^2} \tag{4.4}$$

となる．$\mathbf{n}$ とは逆方向なので負の数になっている．

4.2 全反射

4.3 フレネル反射率

5 最後に

一番最初に紹介したのに最後に紹介するのはあまり良くないかもしれないが, 最後に Ray Tracing in One Weekend について布教したいと思う．そもそもこちら

参考文献

[1] Ray Tracing in One Weekend.

[2] https://www.optics-words.com/kogaku_kiso/Frenel-equations.html