# Studio della legge di sopravvivenza di dadi a 6 facce

Caputo, Crismale, Panteghini

**Abstract**

Lo scopo di questo esperimento è analizzare la legge di sopravvivenza nel lancio dei dadi e studiarne i parametri. Attraverso uno studio probabilistico verifichiamo che i dadi utilizzati non siano truccati confrontando il valore atteso, 1/6 per un dado regolare, con quello ottenuto:

$$0.167 \pm 0.004$$

**Introduzione**

Prendendo in considerazione una faccia generica del dado, nel nostro caso la numero 4, effettuiamo una serie di lanci su 100 dadi virtuali tramite un programma su Root che ne permette la generazione casuale.
Per ogni lancio compiuto, considereremo unicamente i dadi "sopravvissuti", ovvero quelli che non mostrano la faccia presa in considerazione, escludendo i restanti dal conteggio.
Sono stati effettuati 10 set ciascuno da 15 lanci, partendo dalla totalità di 100 dadi.

**Apparato Sperimentale**

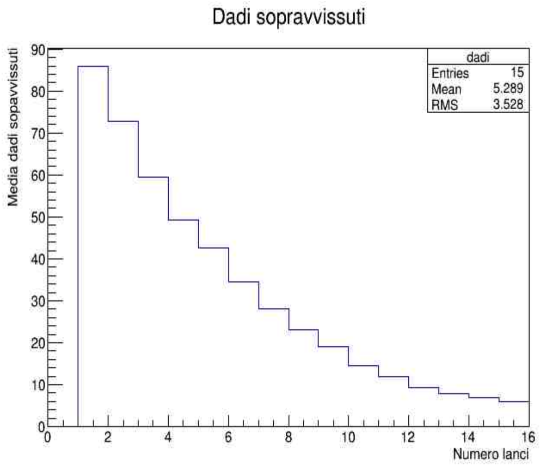
Per lo svolgimento di questo esperimento son stati utilizzati software quali Root e Microsoft Excel.
Non disponendo realmente di 100 dadi, abbiamo usufruito di una macro su Root che ne simulasse il lancio virtuale.
Affinché la generazione fosse casuale, abbiamo inserito un "seed" differente per ogni set di lanci.
Mentre Excel è stato utilizzato per semplificare i calcoli matematici.

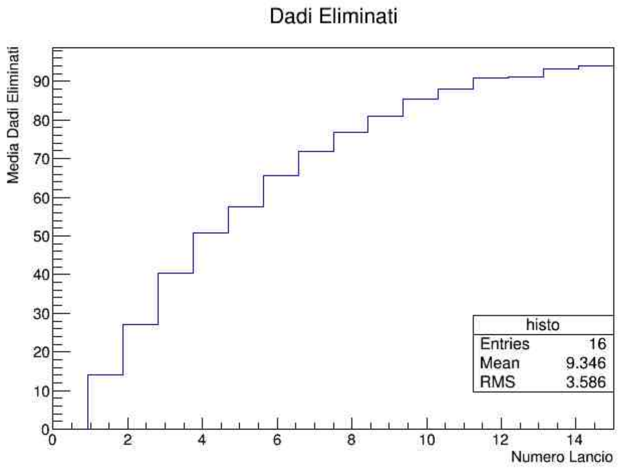
**Analisi Dati**

In seguito alla generazione del primo set di lanci, abbiamo raccolto i dati nella seguente tabella:

| Numero del lancio | Numero dadi sopravvissuti ($O_k$) | Numero dadi eliminati | Totale dadi eliminati |
|---|---|---|---|
| 0 | 100 | 0 | 0 |
| 1 | 83 | 17 | 17 |
| 2 | 70 | 13 | 30 |
| 3 | 61 | 9 | 39 |
| 4 | 53 | 8 | 47 |
| 5 | 45 | 8 | 55 |
| 6 | 34 | 11 | 66 |
| 7 | 31 | 3 | 69 |
| 8 | 27 | 4 | 73 |
| 9 | 23 | 4 | 77 |
| 10 | 21 | 2 | 79 |
| 11 | 16 | 5 | 84 |
| 12 | 12 | 4 | 88 |
| 13 | 11 | 1 | 89 |
| 14 | 8 | 3 | 92 |
| 15 | 8 | 0 | 92 |

Al fine di avere dei dati più precisi abbiamo ripetuto per un totale di 10 volte i set di lanci e abbiamo calcolato la media aritmetica dei dadi sopravvissuti e dei dadi eliminati;
nei seguenti grafici è riportata la frequenza della media di entrambi in funzione del numero di lancio.




Costruiamo quindi un modello che ci permetta di interpretare le due curve.
I dadi sopravvissuti $N_1$ dopo il primo lancio saranno:

$$N_1 = N_0 - pN_0 = N_0(1 - p)$$

dove $p$ indica la probabilità di estrazione della faccia scelta e $N_0$ il numero di dadi lanciati.
Facendo riferimento ad un generico lancio k, il numero atteso di dadi sopravvissuti sarà:

$$N_{k+1} = N_k - pN_k = N_k(1 - p)$$

In particolare, supponendo i dadi non truccati e di conseguenza tutte le facce equiprobabili, $p$ assumerà valore pari ad 1/6.
Ottenuto il modello, confronteremo i dati sperimentali derivati dalla generazione di Root, con i valori teorici attesi.
Abbiamo inoltre calcolato gli errori relativi al numero medio dei dadi sopravvissuti, dei dadi eliminati e del totale dei dadi eliminati nel modo seguente:

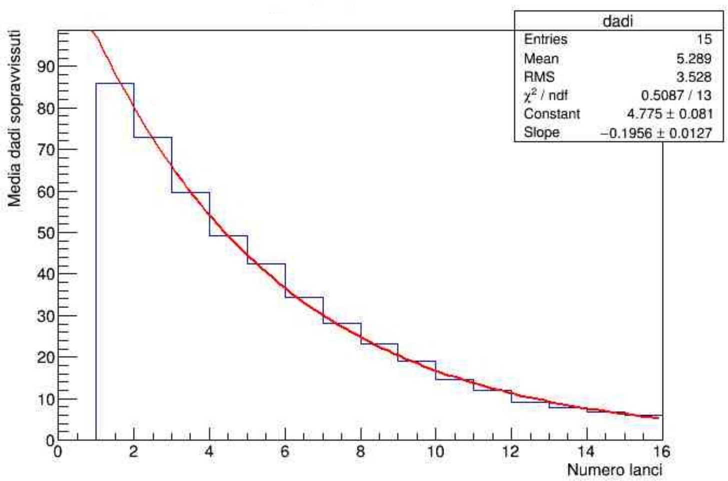
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 - \bar{x}^2)}$$

Dove $\bar{x}$ è la media aritmetica, cioè la migliore stima del valore vero, N il numero di prove e $\sigma_x$ la deviazione standard.

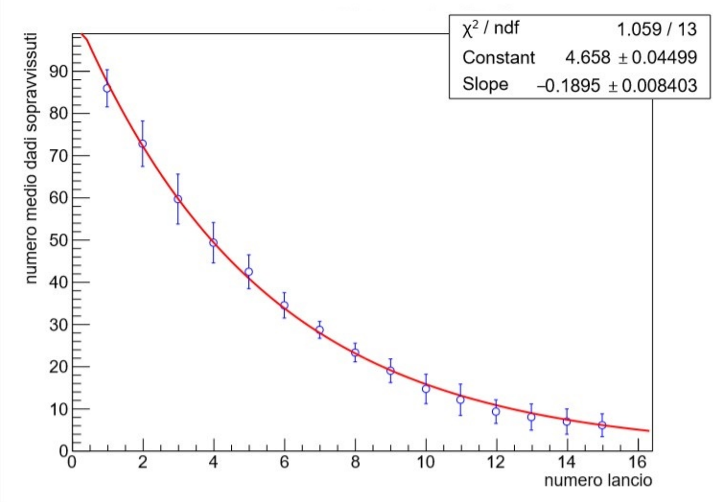
Abbiamo riportato tutti i valori calcolati nella seguente tabella:

| Numero del lancio | Dadi sopravvissuti | | | Dadi eliminati | | Totale dadi eliminati | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Numero medio ($O_k$) | Errore ($s_k$) | Numero atteso ($E_k$) | Numero medio | Errore | Numero medio | Errore |
| 0 | 100 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 85.9 | 4.4 | 75.0 | 14.1 | 4.4 | 14.1 | 4.4 |
| 2 | 72.8 | 5.4 | 56.3 | 13.1 | 2.6 | 27.2 | 5.4 |
| 3 | 59.6 | 5.9 | 42.2 | 13.2 | 4.3 | 40.4 | 5.9 |
| 4 | 49.3 | 4.8 | 31.6 | 10.3 | 3.2 | 50.7 | 4.8 |
| 5 | 42.5 | 4.0 | 23.7 | 6.8 | 2.6 | 57.5 | 4.0 |
| 6 | 34.5 | 3.0 | 17.8 | 8.0 | 2.4 | 65.5 | 3.0 |
| 7 | 28.2 | 2.0 | 13.3 | 6.3 | 2.3 | 71.8 | 2.0 |
| 8 | 23.2 | 2.2 | 10.0 | 5.0 | 2.4 | 76.8 | 2.2 |
| 9 | 19.0 | 2.8 | 7.5 | 4.2 | 2.5 | 81.0 | 2.8 |
| 10 | 14.6 | 3.5 | 5.6 | 4.4 | 2.3 | 85.4 | 3.5 |
| 11 | 12.0 | 3.7 | 4.2 | 2.6 | 2.0 | 88.0 | 3.7 |
| 12 | 9.2 | 2.8 | 3.2 | 2.8 | 1.2 | 90.8 | 2.8 |
| 13 | 7.9 | 3.1 | 2.4 | 1.3 | 0.8 | 92.1 | 3.1 |
| 14 | 6.9 | 3.0 | 1.8 | 1.0 | 0.9 | 93.1 | 3.0 |
| 15 | 6.0 | 2.7 | 1.3 | 0.9 | 1.0 | 94.0 | 2.7 |

Notiamo che l'andamento del grafico della media dei dadi sopravvissuti può essere descritto da una curva di tipo esponenziale (indicata in rosso nel grafico a destra).




Per verificare che il fit svolto con la funzione esponenziale sia corretto, consideriamo anche le incertezze relative ad ogni valore e notiamo che la curva rientra perfettamente nel range degli errori considerati.



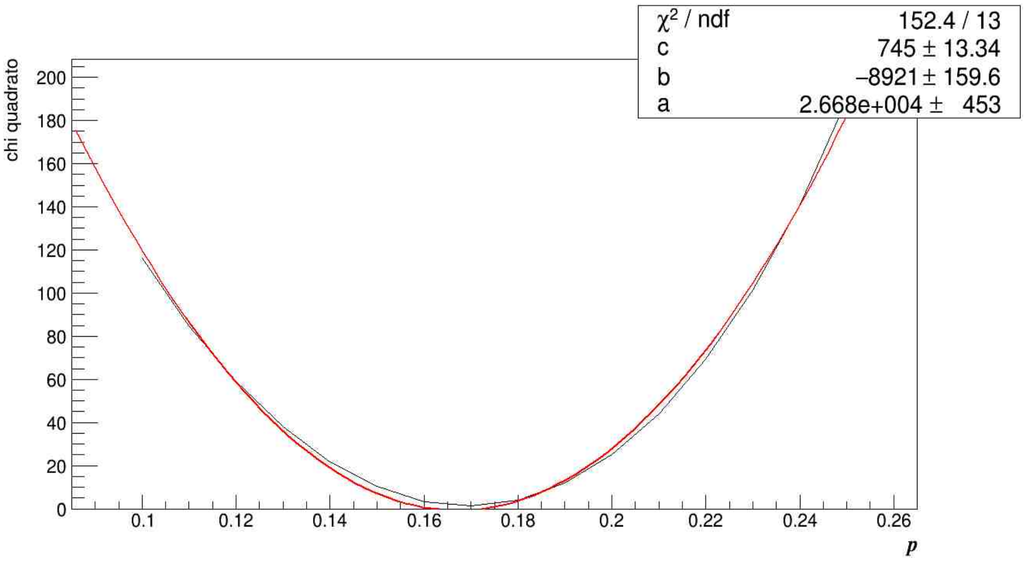
Facendo riferimento ai dati sperimentali raccolti in precedenza, cerchiamo il valore del parametro $p$, considerando la seguente quantità:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{15} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

dove $O_k$ è il valore ottenuto dalla generazione casuale ed $E_k$ il valore atteso secondo il modello teorico.
$\chi^2$ è espresso in funzione della probabilità (essendo $E_k$ dipendente da $p$) e indica il discostamento dei valori sperimentali da quelli aspettati; pertanto ad un valore minore di $\chi^2$ corrisponde una descrizione più accurata dell'esperimento.

| $p$ | $\chi^2$ |
|---|---|
| 0.10 | 116.10 |
| 0.11 | 85.00 |
| 0.12 | 59.02 |
| 0.13 | 37.99 |
| 0.14 | 21.76 |
| 0.15 | 10.24 |
| 0.16 | 3.43 |
| 0.17 | 1.37 |
| 0.18 | 4.17 |
| 0.19 | 12.04 |
| 0.20 | 25.25 |
| 0.21 | 44.20 |
| 0.22 | 69.36 |
| 0.23 | 101.39 |
| 0.24 | 141.08 |
| 0.25 | 189.42 |

Aspettandoci una probabilità pari ad 1/6, in accordo con il modello teorico, prendiamo in considerazione valori di $p$ compresi tra 0.10 e 0.25.
Calcoliamo quindi $\chi^2$ al variare di $p$ e osserviamo che per $p < 0.17$ $\chi^2$ decresce e cresce per $p > 0.17$.
Notiamo inoltre che l'andamento di $\chi^2$ può essere approssimato ad una funzione quadratica come mostrato nel seguente grafico:




Nel grafico è rappresentata in rosso la funzione $\chi^2 = a\,p^2 + b\,p + c$ della quale possiamo determinare il minimo, che risulta essere $p = 0.167$.
Calcoliamo ora $\sigma_p$, l'incertezza casuale relativa al valore di $p$ trovato, usando la formula seguente:

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{a}}\right)^2 \cdot \sigma_a{}^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{b}}\right)^2 \cdot \sigma_b{}^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{b}{2a^2} = -6.3 \cdot 10^{-6} \qquad , \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{2a} = -1.9 \cdot 10^{-5}$$

da cui $\sigma_p = 0.004$.

Pertanto il valore della probabilità cercato, tenendo conto degli errori casuali, è $p = 0.167 \pm 0.004$.

**Conclusioni**

Considerando i risultati ottenuti secondo cui $p = 0.167 \pm 0.004$ e confrontandoli con il valore atteso $p = 1/6 = 0.1\overline{6}$, osserviamo che quest'ultimo rientra nel range dei valori ricavanti sperimentalmente. Possiamo quindi concludere che i dadi utilizzati hanno tutte le facce equiprobabili e di conseguenza non sono truccati.