TD filtrage adaptatif TNS

RT4 – INSAT

Chargé de cours/TD/TP R. Amara

Exercice 1

Dans certaines applications télécoms, les signaux modulés sont à enveloppe constante (par exemple, les signaux numériques modulés en phase ou en fréquence). L'algorithme CMA (Constant Modulus Algorithm) est un algorithme de filtrage adaptatif basé sur l'adaptation des coefficients d'un filtre dans le but de minimiser les variations de l'enveloppe du signal.

A. CMA et filtrage RIF

Soit $x(n)$ le signal réel qu'on veut traiter par un filtre RIF non stationnaire de coefficients $w_n(k)|_{k=0,\ldots,P-1}$ afin de produire une sortie $y(n)$ dont le carré doit être contraint à la valeur 1. $x(n)$ est bien sûr non stationnaire. Ainsi, le critère EQMM (Erreur Quadratique Moyenne Minimale) correspondant s'écrit

$$\xi = \frac{1}{4}E\left\{\left(y^2(n)-1\right)^2\right\}$$

A.1. Donner l'expression de $y(n)$ en fonction de $\underline{w}_n = \begin{bmatrix} w_n(0) \\ \vdots \\ w_n(P-1) \end{bmatrix}$ et $\underline{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ \vdots \\ x(n-P+1) \end{bmatrix}$.

A.2. Ecrire l'équation de mise à jour des coefficients du filtre adaptatif $\underline{w}_n$ de type gradient déterministe minimisant l'EQM ξ.

A.3. Déterminer ainsi l'algorithme de gradient stochastique ou encore LMS correspondant. Faites-en le résumé.

A.4. Calculer $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ et $\underline{w}_3$ pour $P = 2$, un pas d'adaptation $\mu = 0.5, \underline{w}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{x}(0)$ vecteur nul, $x(1) = 1$ et $x(2) = 2$.

B. CMA et filtre récursif

En gardant toujours dans le même objectif, on change la structure du filtre adaptatif en introduisant une partie récursive de la façon suivante

$$y(n) = b_n(0)x(n) + b_n(1)x(n-1) + a_n(1)y(n-1) + a_n(2)y(n-2)$$

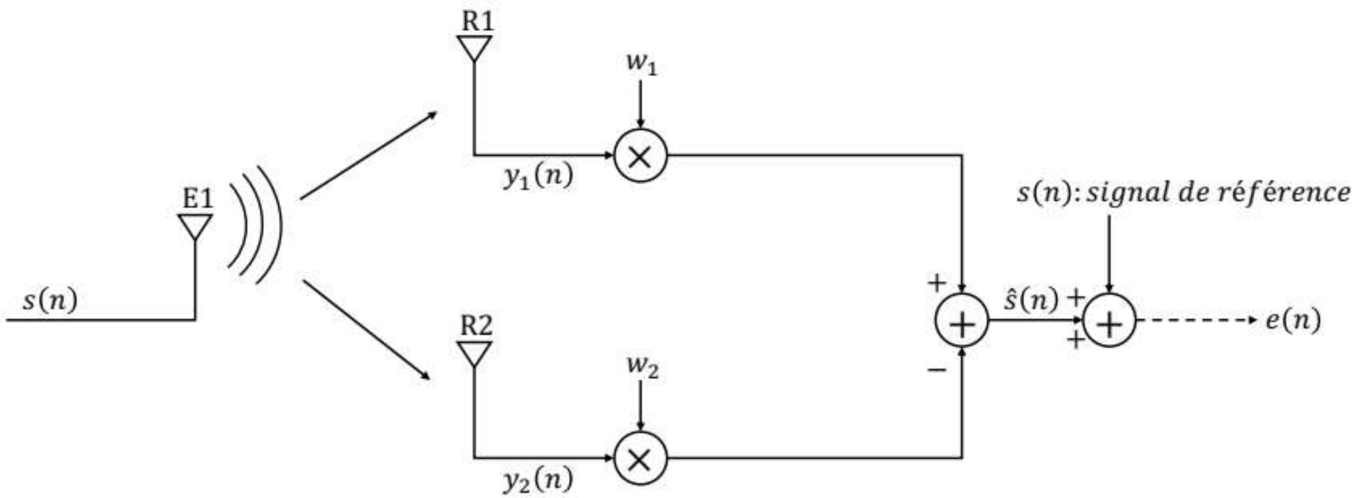
B.1. De quel type de filtre s'agit-il ?

B.2. Ecrire $y(n)$ en fonction de $\underline{\theta}_n = \begin{bmatrix} b_n(0) \\ b_n(1) \\ a_n(1) \\ a_n(2) \end{bmatrix}$ et $\underline{z}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ y(n-1) \\ y(n-2) \end{bmatrix}$.

B.3. Reprendre les questions **A.2.** et **A.3.** dans ce cas. On spécifiera les hypothèses requises pour la mise à jour des gradients dans de tels algorithmes et on l'assume dans la suite. On tâchera bien de faire un résumé de l'algorithme adaptatif ainsi déduit pour la mise à jour de $\underline{\theta}_n$.

Exercice 2

On considère le système SIMO (Single Input Multiple Output) suivant, à une antenne émettrice et deux antennes réceptrices.



On note $s(n)$ les symboles correspondant au signal HF transmis par l'antenne E1. En effet, on montre que le signal transmis arrive aux deux antennes réceptrices via deux trajets différents ; chaque trajet effectuant un filtrage sur le signal transmis et que, de ce fait, les échantillons des signaux reçus sur les antennes R1 et R2 peuvent s'écrire

$$y_1(n) = a_{11}s(n) + a_{12}s(n-1) + b_1(n)$$
$$y_2(n) = a_{21}s(n) + a_{22}s(n-1) + b_2(n)$$

L'effet du canal ainsi caractérisé par les coefficients $a_{ij}|_{i,j=1}^{2}$ stockés dans la matrice A d'élément a_{ij}. Ces coefficients sont supposés connus par le récepteur. Le rôle d'un égaliseur spatio-temporel est alors de restituer les symboles transmis en les estimant. On pense dans cet exercice à utiliser un filtre spatial optimal au sens Wiener qui a pour rôle de combiner les entrées du récepteur $y_1(n)$ et $y_2(n)$ de façon à produire une estimée $\hat{s}(n) = w_1y_1(n) + w_2y_2(n)$ très proche des vrais symboles transmis au sens de l'erreur quadratique moyenne $E\left\{e^2(n)\right\}$ minimale, où $e(n) = s(n) - \hat{s}(n)$. Les bruits $b_1(n)$ et $b_2(n)$ sont supposés centrés, blancs, de même variance σ_b^2, décorrélés entre eux et des symboles $s(n)$.

1. Exprimer $\hat{s}(n)$ en fonction de $\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ et $\underline{y}(n) = \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix}$.
2. Sachant qu'il s'agit de symboles binaires $\in \{-1, +1\}$ indépendants et identiquement distribués, déterminer la moyenne et l'autocorrélation des symboles $s(n)$.

3. Remplir la matrice d'autocorrélation du vecteur $\underline{y}(n)$, de dim. 2×2.

4. En supposant les signaux mis en jeu conjointement stationnaires, déterminer les équations d'orthogonalité auxquelles doit obéir le vecteur de coefficients optimaux $\underline{w}_{\text{opt}}$ (on pourra reprendre la même démarche que le cours).

5. En déduire l'expression des coefficients optimaux $\underline{w}_{\text{opt}}$ en fonction de σ_b^2 et des a_{ij}.

6. Dans certains contextes de traitement, les coefficients d'atténuation a_{ij} sont assimilés à des variables aléatoires gaussiennes centrées et de même variance σ_a^2. Ces coefficients d'atténuation dépendent-ils statistiquement des symboles ? Que devient dans ce cas le vecteur des coefficients optimaux au sens Wiener ?

7. Dans un contexte de mobilité, la configuration spatiale de l'antenne émettrice et des antennes réceptrices devient dynamique et la stationnarité des signaux mis en jeu est remise en cause. Les facteurs d'atténuation sur les trajets a_{ij} deviennent variables en fonction du temps et il est même inenvisageable de les connaître ou les estimer (pour une forte mobilité). On opte alors pour une implémentation de la même structure mais en version adaptative. Donner le résumé, dans ce cas, de l'algorithme de gradient stochastique ou LMS, pour la mise à jour du filtre adaptatif de coefficients $w_1(k)$ et $w_2(k)$? A-t-on besoin d'une séquence d'apprentissage ?

8. Expliquer comment faire le choix de la longueur de la séquence d'apprentissage et celle du pas d'adaptation.