

1 レンズの歪曲収差とは何か

収差を大別すると、単色収差と色収差に分けられる。歪曲収差は単色収差のひとつである。単色収差には記述方法の異なる光線収差と波面収差の分類があるが、物理的実体は同じである。また、光線収差を求めるために、屈折面においてスネルの法則を用いて光線を追跡するとき、3次近似していくなかで、光線収差には5つの分類が出来上がる。これはザイデルの5収差と呼ばれ、歪曲収差はそのひとつとされている。ザイデルの5収差は以下のような式で表される。このとき、物点を通るように yz -面を選び、極座標を用いる。

$$\Delta x' = Ar^3 \sin \theta + Br^2 y \sin 2\theta + D r y^2 \sin \theta \quad (1)$$

$$\Delta y' = Ar^3 \cos \theta + Br^2 y (2 + \cos 2\theta) + (2C + D) r y^2 \cos \theta + E y^3 \quad (2)$$

ここで、A,B,C,D,E は球面収差、コマ収差、非点収差、像面収差、歪曲収差を表す収差係数である。 y は像高、 r, θ は主平面上の極座標系で表される射出瞳の半径と長さを表す。ここで、入射高が0のとき、つまり、 $r=0$ のときを考える。したがって、

$$\Delta x' = 0 \quad (3)$$

$$\Delta y' = E y^3 \quad (4)$$

以上の式から、光軸からの像高のみに依存した項のみが残っていることがわかる。この項により表される収差を歪曲収差または、ディストーションと呼ぶ。歪曲収差は光軸に垂直な平面上にある物体は、光軸に垂直な平面上に結像するため、像は鮮明となる。しかし、光軸から離れた部分ほど形状が歪む性質が観測できる。歪む形には糸巻き型 ($E > 0$) や樽型 ($E < 0$) が挙げられる。歪曲収差は像点のずれが像高の3乗に比例するため、像の大きさによって横倍率が異なることにより生じる。つまり、入射光線の画角または像高により、結像倍率が異なってしまう。

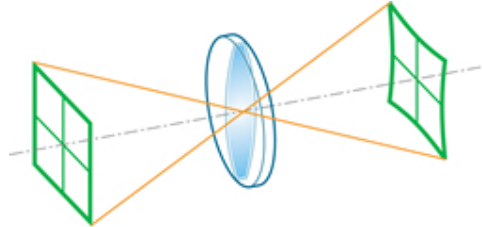


図 1: 歪曲収差 [5]

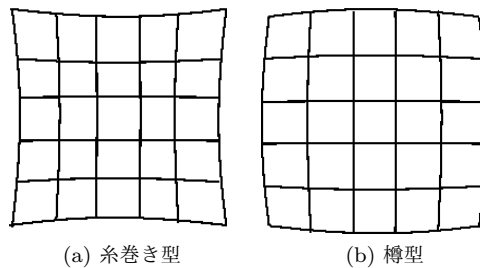


図 2: 歪曲収差による観測できる形

2 レンズの歪曲収差の校正方法について

レンズの歪みには、レンズの形状による半径方向歪みとカメラの組み立ての不具合による円周方向歪みがある。これらの歪みを考慮してカメラの特性を得ることをカメラキャリブレーションと呼ぶ。つまり、カメラキャリブレーションは歪曲収差を校正しているといえる。ここで、カメラキャリブレーションの方法について説明する。

まず初めに、半径方向歪みについて考える。レンズの特性から、レンズの中心から離れた場所を通過する光は近くを通過する光よりも大きく曲げられる。この特性より、光学の中心において歪みは観測されなく、周辺部分に行くに従って歪みは大きくなる。現実では、この歪みは小さいものであり、光学中心からみた半径を r とし、 $r = 0$ 付近でのテイラー級数を求め、近似値として表せる。

$$x_{corrected} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \quad (5)$$

$$y_{corrected} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \quad (6)$$

ここで、 $x_{corrected}, y_{corrected}$ は補正の結果で得られる位置である。

次に、円周方向歪みについて考える。円周方向歪みはレンズが画像平面に対して完全に平行に取り付けられていないという欠陥によって起こる。この歪みは2つのパラメータによって表現することができる。

$$x_{corrected} = x + [2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2)] \quad (7)$$

$$y_{corrected} = y + [p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy] \quad (8)$$

以上の4つの式から、合計で5つの歪み係数 (k_1, k_2, k_3, p_1, p_2) を求めることによって歪みの補正ができる。カメラの内部パラメータを用いて、歪み係数を求めることができる。また、ここで使用される内部パラメータは初期推定時のパラメータである。

ここで、歪みのない位置を (x_p, y_p) 、歪みによりずれた位置を (x_d, y_d) とすると、歪み係数を求めるための方程式は以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p_1 x_d y_d + p_2(r^2 + 2x_d^2) \\ p_1(r^2 + 2y_d^2) + 2p_2 x_d y_d \end{bmatrix} \quad (9)$$

式 (9) の方程式はキャリブレーションにより複数集めることで解くことができ、歪み係数を求めることができる。その後、内部パラメータや外部パラメータは再推定される。つまり、レンズの校正方法とはカメラキャリブレーションという内部パラメータと外部パラメータを推定する過程の内である。カメラキャリブレーションの一例として、チェスボードを複数枚とった方法が挙げられる。また、カメラキャリブレーションによる方法以外にも、レンズの組み合わせや絞りの調整などの物理的に歪みによる位置ずれを回避することも可能である。

3 歪曲収差以外の収差とその特徴について

1 章にて、収差には単色収差と色収差が存在すると述べた。また、単色収差にはザイデルの 5 収差がある。

3.1 ザイデルの 5 収差

3.1.1 球面収差

球面収差とは、レンズ面が球面であることにより発生する収差である。ここで、式 (14), 式 (15) から球面収差の項のみを考える。つまり、

$$\Delta x' = Ar^3 \sin \theta \quad (10)$$

$$\Delta y' = Ar^3 \cos \theta \quad (11)$$

以上の式より、球面収差は入射高の 3 乗に比例し、像の高さに依存しない。口径を絞り込むことによって収差は少なくなるといえる。

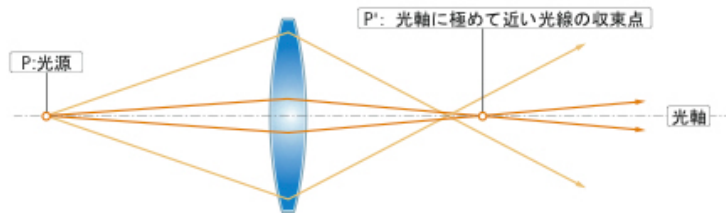


図 3: 球面収差 [5]

3.1.2 コマ収差

コマ収差とは、光軸より離れた物点の横倍率が物点の位置により異なる収差のことをいう。ここで、式 (14), 式 (15) からコマ収差の項のみを考える。つまり、

$$\Delta x' = Br^2 y \sin 2\theta \quad (12)$$

$$\Delta y' = Br^2 y (2 + \cos 2\theta) \quad (13)$$

以上の式より、コマ収差は入射高の 2 乗に比例し、像高に比例する。つまり、口径を絞り込むことによって収差は少なくなるといえる。

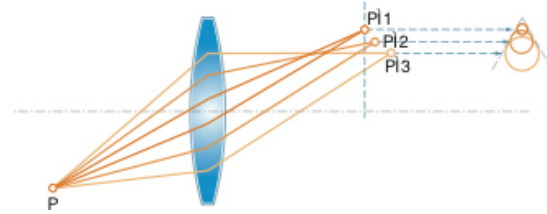


図 4: コマ収差 [5]

3.1.3 非点収差と像面収差

非点収差とは、子午光線と球欠光線に対する焦点距離の違いのことをいう。像面収差とは、光軸に平行な光線と傾いた光線が、光軸に垂直な同一面に結像しないことをいう。ここで、非点収差と像面収差の項を考える。したがって、

$$\Delta x' = D r y^2 \sin \theta \quad (14)$$

$$\Delta y' = (2C + D) r y^2 \cos \theta \quad (15)$$

以上の式から、どちらの収差も、入射高に比例し、像高の 2 乗する。また、像面収差は非点収差と異なり、湾曲も起こる。

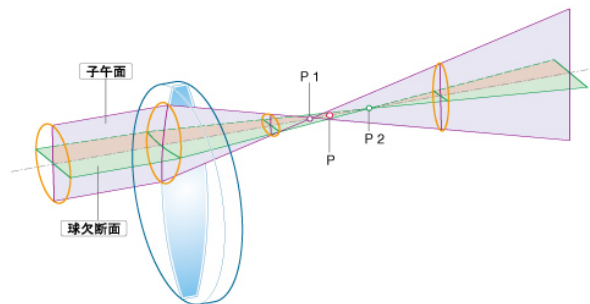


図 5: 非点収差 [5]

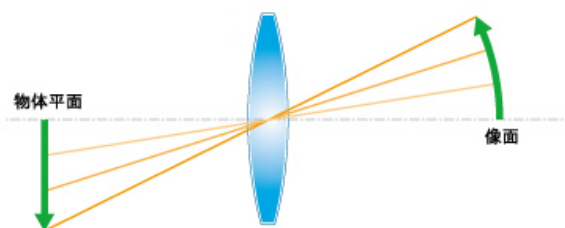


図 6: 像面収差 [5]

3.2 色収差

3.2.1 軸上色収差

軸上色収差とは、光の波長によって光軸上で結像位置が異なる収差のことをいう。凸レンズと凹レンズを組み合わせることによって防ぐことができる。

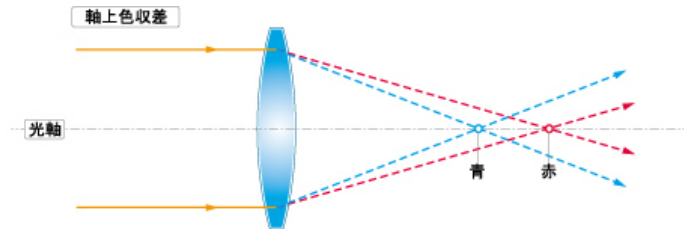


図 7: 軸上色収差 [5]

3.2.2 倍率色収差

倍率色収差とは、光の波長によって像の大きさが異なる収差のことをいう。この像の大きさの違いは波長による屈折率が異なることによって生じる。波長の像倍率の補正を行うことによって収差を防ぐことができる。

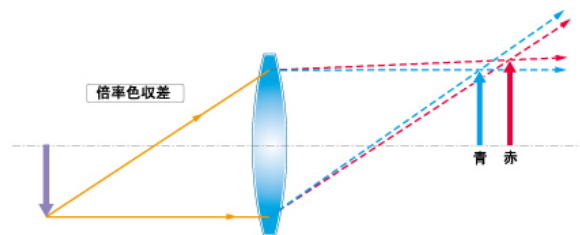


図 8: 倍率色収差 [5]

参考文献

- [1] M. ボウン, E. ウォルフ, (訳:草川徹・横田英嗣), " 光学の原理 I ", 1994 年第八版
- [2] Mejiro Genossen, " 光学設計の基礎知識 "
- [3] 左貝潤一, " 光学機器の知識 ", 2013 年第一版
- [4] G.Bradschi, A.Kaehler, (訳:松田晃一), " 詳解 OpenCV ", 2012 年第六版
- [5] ニコン, "双顕微鏡の構造と光学技術", http://www.nikonvision.co.jp/how_to/guide/binoculars/technologies/technologies_08.htm