



第五章 微分方程模型

- **微分方程**~含自变量、未知函数及其导数的方程.
- 描述随时间连续变化物体或过程的**动态变化**规律.
- 采用**机理分析**方法或**类比法**建立微分方程.

物理领域 ~工程技术, 科学研究 **牛顿定律** **电路原理**

例. 火箭发射——由燃料燃烧推力发射的火箭
加速度、速度、高度的微分方程.

非物理领域 ~人口,经济,生态等 **特定的内在规律**

例. 人口预测——含人口数量及增长率的微分方程.



第
五
章

微
分
方
程
模
型

5.2 药物中毒急救

5.3 捕鱼业的持续收获

5.7 食饵与捕食者模型

5.10 传染病模型和SARS的传播



5.2 药物中毒急救

场景

两位家长带着孩子急匆匆来到医院急诊室。

诉说两小时前孩子一次误吞下**11片**治疗哮喘病、剂量**100mg/片**的氨茶碱片，已出现呕吐、头晕等不良症状。

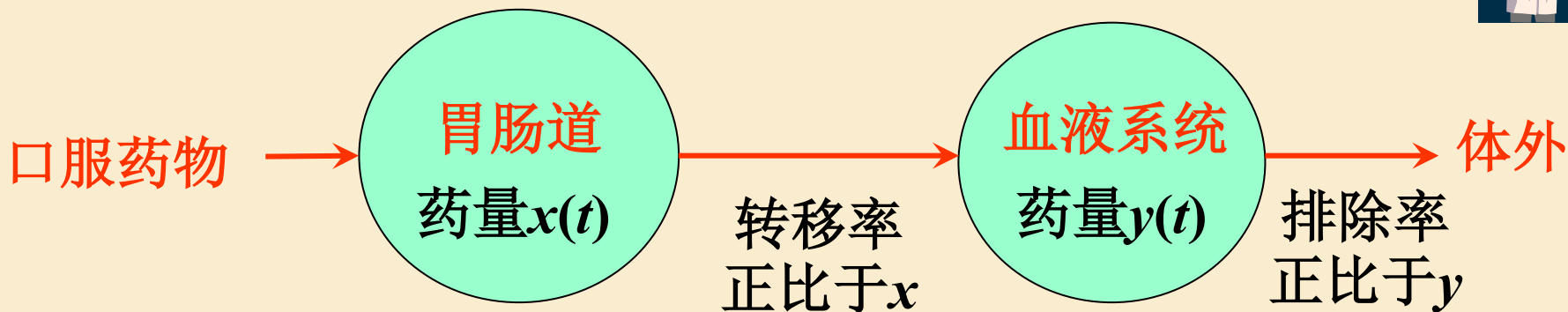
按照药品说明氨茶碱的每次用量成人是100~200mg，儿童是2~3mg/kg (按30~40kg计，约100mg)。

过量服用可使血药浓度(单位血液容积中的药量)过高，**100 μ g/ml**浓度会出现**严重中毒**，200 μ g/ml浓度可致命。

医生需要判断：孩子的血药浓度会不会达到100~200 μ g/ml；如果会达到，应采取怎样的**紧急施救**方案。



调查与分析



认为血液系统内药物的分布，即血药浓度是均匀的，
可以将血液系统看作一个房室，建立“**一室模型**”。

血液系统对药物的吸收率（胃肠道到血液系统的转移率）和排除率可以由**半衰期**确定。

半衰期可以从药品说明书上查到。

调查与分析

$$\text{血药浓度} = \text{药量} / \text{血液总量}$$

通常，**血液总量**约为人体体重的**7 % ~ 8 %**，体重50~60 kg的成年人有4000ml左右的血液。

目测这个孩子的体重约为成年人的一半，可认为其血液总量约为2000ml.

临床施救的办法

- **口服活性炭**来吸附药物，可使药物的**排除率****增加**到原来（人体自身）的2倍。
- **体外血液透析**，药物排除率可增加到原来的6倍，但是安全性不能得到充分保证。

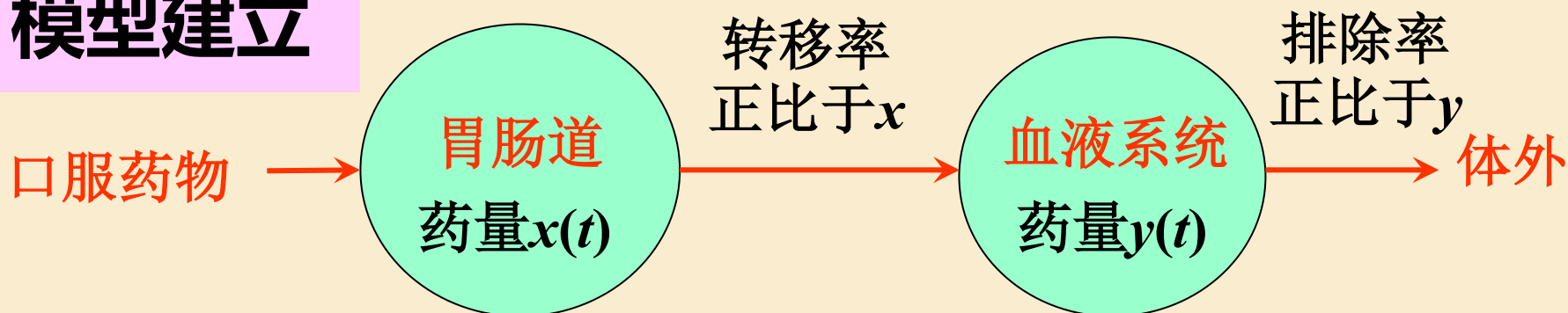


模型假设

胃肠道中药量 $x(t)$, 血液系统中药量 $y(t)$, 时间 t 以孩子误服药的时刻为起点 ($t=0$) .

1. 胃肠道中药物向血液的转移率与 $x(t)$ 成正比, 比例系数 $\lambda(>0)$, 总剂量1100 mg药物在 $t=0$ 瞬间进入胃肠道.
2. 血液系统中药物的排除率与 $y(t)$ 成正比, 比例系数 $\mu(>0)$, $t=0$ 时血液中无药物.
3. 氨茶碱被吸收的半衰期为5 h, 排除的半衰期为6 h.
4. 孩子的血液总量为2000 ml.

模型建立



$x(t)$ 下降速度与 $x(t)$ 成正比(比例系数 λ), 总剂量1100mg药物在 $t=0$ 瞬间进入胃肠道.

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x, \quad x(0) = 1100$$

$y(t)$ 由吸收而增长的速度是 λx , 由排除而减少的速度与 $y(t)$ 成正比(比例系数 μ), $t=0$ 时血液无药物.

$$\frac{dy}{dt} = \lambda x - \mu y, \quad y(0) = 0$$

模型求解

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x, \quad x(0) = 1100 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1100e^{-\lambda t}$$

药物吸收的半衰期为5 h $\Rightarrow x(5) = x(0) / 2$

$$\Rightarrow 1100e^{-5\lambda} = 1100 / 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = (\ln 2) / 5 = 0.1386(1/h)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda x - \mu y = -\mu y + 1100\lambda e^{-\lambda t}$$

$$y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1100\lambda}{\lambda - \mu} (e^{-\mu t} - e^{-\lambda t})$$

药物排除的半衰期为6 h 只考虑血液对药物的排除

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\mu y \quad \Rightarrow \quad y(t) = ae^{-\mu(t-\tau)}$$

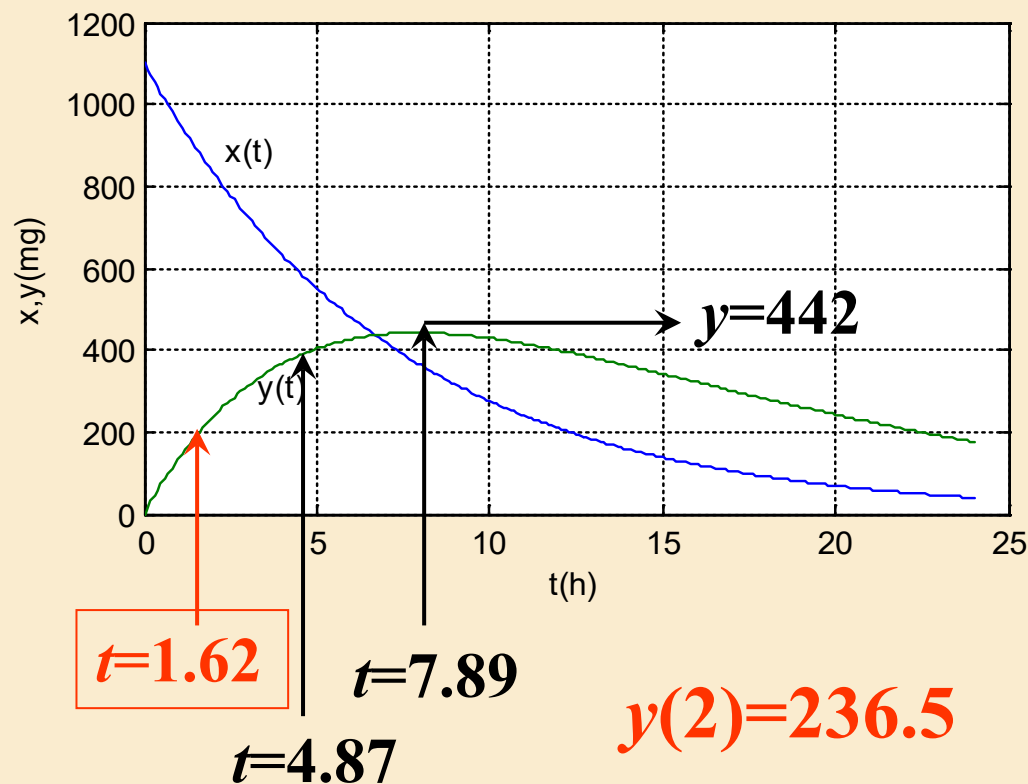
$$y(\tau) = a, \quad y(\tau + 6) = a / 2$$

$$\Rightarrow \mu = (\ln 2) / 6 = 0.1155(1/h)$$

结果及分析

胃肠道药量 $x(t) = 1100e^{-0.1386t}$

血液系统药量 $y(t) = 6600(e^{-0.1155t} - e^{-0.1386t})$



血液总量 2000ml

血药浓度 $100\mu\text{g/ml}$

$y(t) = 200\text{mg}$

严重中毒

血药浓度 $200\mu\text{g/ml}$

$y(t) = 400\text{mg}$

致命

孩子到达医院前已严重中毒，如不及时施救，约3h后将致命！



施救方案

- 口服活性炭使药物排除率 μ 增至原来的2倍.

孩子到达医院($t=2$)就开始施救, 血液中药量记作 $z(t)$

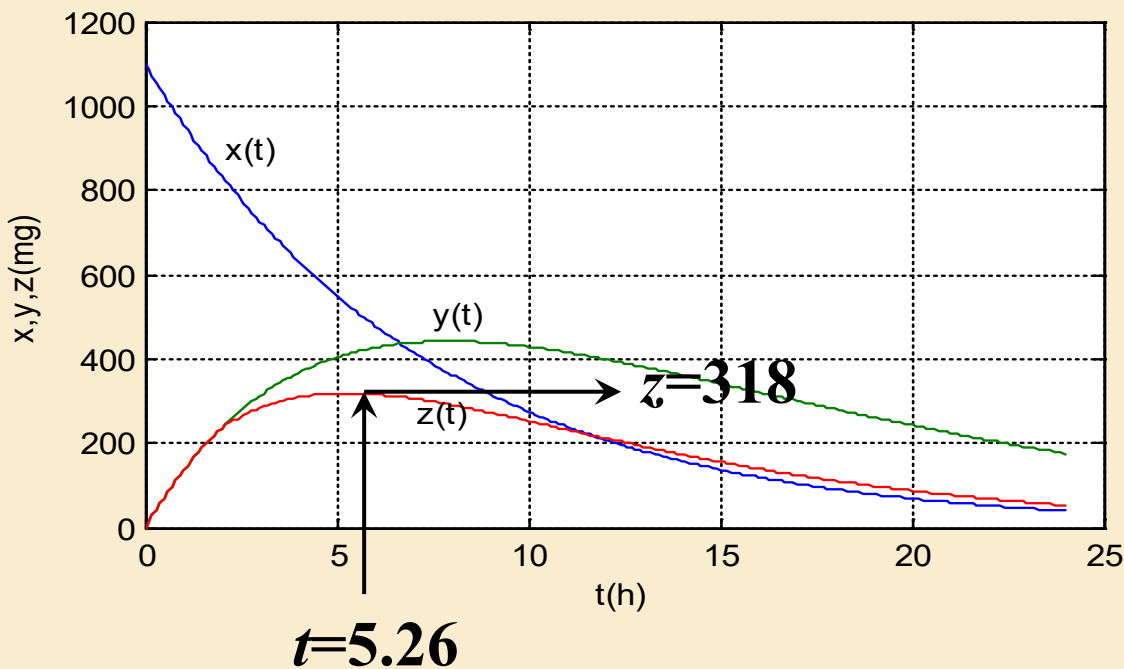
$$\frac{dz}{dt} = \lambda x - \mu z, \quad t \geq 2, \quad x = 1100e^{-\lambda t}, \quad z(2) = 236.5$$

$$\lambda = 0.1386 \text{ (不变)}, \quad \mu = 0.1155 \times 2 = 0.2310$$

$$z(t) = 1650e^{-0.1386t} - 1609.5e^{-0.2310t}, \quad t \geq 2$$

施救方案

- 施救后血液中药量 $z(t)$ 显著低于 $y(t)$.
- $z(t)$ 最大值低于致命水平.
- 要使 $z(t)$ 在施救后立即下降，可算出 μ 至少应为 0.4885.



若采用体外血液透析， μ 可增至 $0.1155 \times 6 = 0.693$ ，血液中药量下降更快；临床上是否需要采取这种方法，当由医生综合考虑并征求病人家属意见后确定。

小结与评注

- 以药物中毒急救为背景，研究药物通过胃肠向血液系统的**转移**，以及从血液系统的**排除**。
- “**转移率和排除率与血药浓度成正比**”是药物动力学建立**房室模型**的基本假设。
- 假定整个血液系统的**血药浓度均匀**（用一个时间函数表示），建立最简单的一**室模型**，用一阶微分方程即可求解。

5.3 捕鱼业的持续收获



背景

- 再生资源（渔业、林业等）与非再生资源（矿业等）。
- 再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益。

问题 及 分 析

- 在**捕捞量稳定**的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳？
- 如果使捕捞量等于自然增长量，**渔场鱼量将保持不变**，则捕捞量稳定。

产量模型

 $x(t) \sim$ 渔场鱼量

假设

- 无捕捞时鱼的自然增长服从 Logistic 规律.

$$\dot{x}(t) = f(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) \quad \begin{array}{l} r \sim \text{固有增长率,} \\ N \sim \text{最大鱼量} \end{array}$$

- 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比.

$$h(x) = Ex, \quad E \sim \text{捕捞强度}$$

建模

$$\text{记 } F(x) = f(x) - h(x)$$

有捕捞情况下
渔场鱼量满足

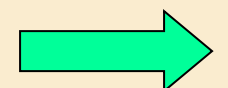
$$\dot{x}(t) = F(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex$$

- 不要求解 $x(t)$, 只需知道 $x(t)$ 稳定的条件.

产量模型

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex$$

$$F(x) = 0$$



平衡点

$$x_0 = N(1 - \frac{E}{r}), \quad x_1 = 0$$

稳定性判断

$$F'(x_0) = E - r, \quad F'(x_1) = r - E$$

$$E < r \Rightarrow F'(x_0) < 0, F'(x_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 稳定}, x_1 \text{ 不稳定}$$

$$E > r \Rightarrow F'(x_0) > 0, F'(x_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 不稳定}, x_1 \text{ 稳定}$$

 E ~捕捞强度 r ~固有增长率 x_0 稳定, 可得到稳定产量 x_1 稳定, 渔场干枯

产量模型

在捕捞量稳定的条件下，
控制捕捞强度使产量最大。

图解法

$$F(x) = f(x) - h(x)$$

$$f(x) = rx(1 - \frac{x}{N})$$

$$h(x) = Ex$$

$$F(x) = 0 \iff f \text{ 与 } h \text{ 交点 } P$$

$$E < r \Rightarrow x_0 \text{ 稳定}$$

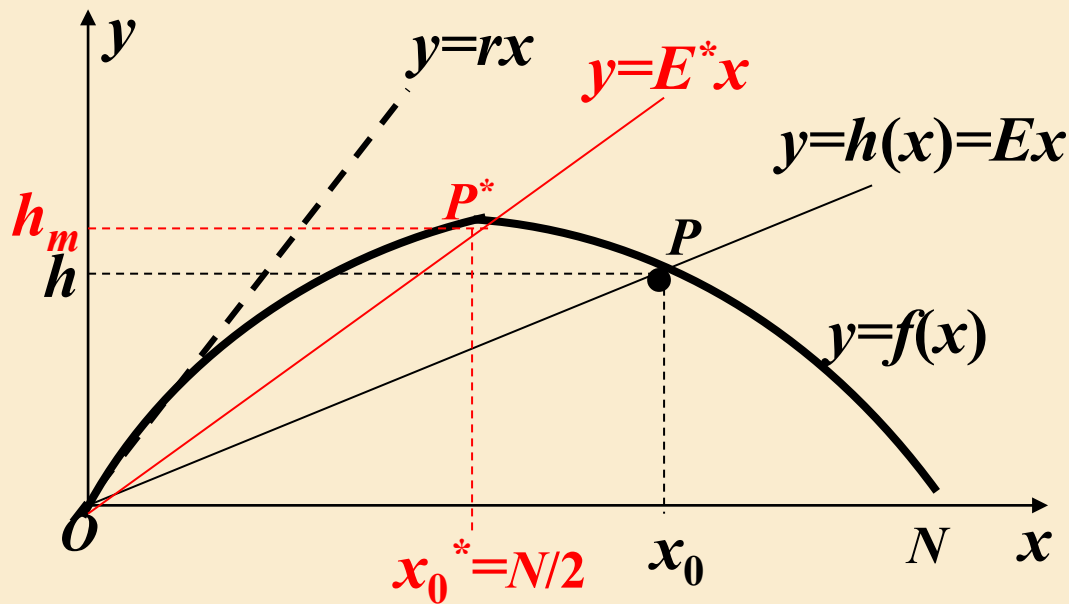
P 的横坐标 $x_0 \sim$ 平衡点

P 的纵坐标 $h \sim$ 产量

产量最大

$$P^*(x_0^* = N/2, h_m = rN/4) \quad E^* = h_m / x_0^* = r/2$$

控制渔场鱼量为最大鱼量的一半



效益模型

在捕捞量稳定的条件下，控制
捕捞强度使效益最大。

假设 • 鱼销售价格 p • 单位捕捞强度费用 c

收入 $T = ph(x) = pEx$ 支出 $S = cE$

单位时间利润

$$R = T - S = pEx - cE$$

稳定平衡点 $x_0 = N(1 - E / r)$ \Downarrow

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE$$

求 E 使 $R(E)$ 最大 $\Rightarrow E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN}) < E^* = \frac{r}{2}$

渔场
鱼量 $x_R = N(1 - \frac{E_R}{r}) = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}, \quad h_R = \frac{rN}{4}(1 - \frac{c^2}{p^2 N^2})$

捕捞 过度

- 封闭式捕捞追求利润 $R(E)$ 最大
- 开放式捕捞只求利润 $R(E) > 0$

$$E_R = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{c}{pN}\right)$$

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE \left(1 - \frac{E}{r}\right) - cE \stackrel{\text{令}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad E_s = r \left(1 - \frac{c}{pN}\right)$$

$R(E)=0$ 时的捕捞强度 $E_s=2E_R$

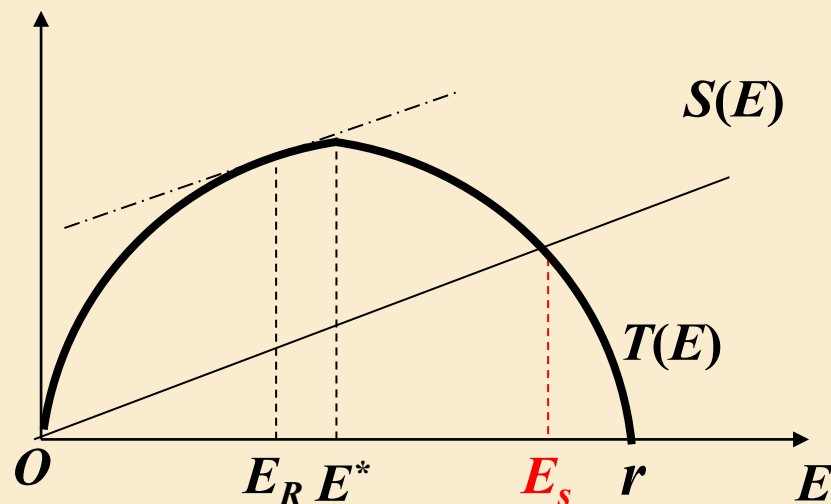
~ 临界强度

临界强度下的渔场鱼量

$$x_s = N \left(1 - \frac{E_s}{r}\right) = \frac{c}{p}$$

x_s 由成本—价格比决定

$p \uparrow, c \downarrow \Rightarrow E_s \uparrow, x_s \downarrow \Rightarrow$ 捕捞过度



捕捞过度

收入 $T(E) = pNE(1 - \frac{E}{r})$

利润 $R(E) = T(E) - S(E)$

支出 $S(E) = cE$

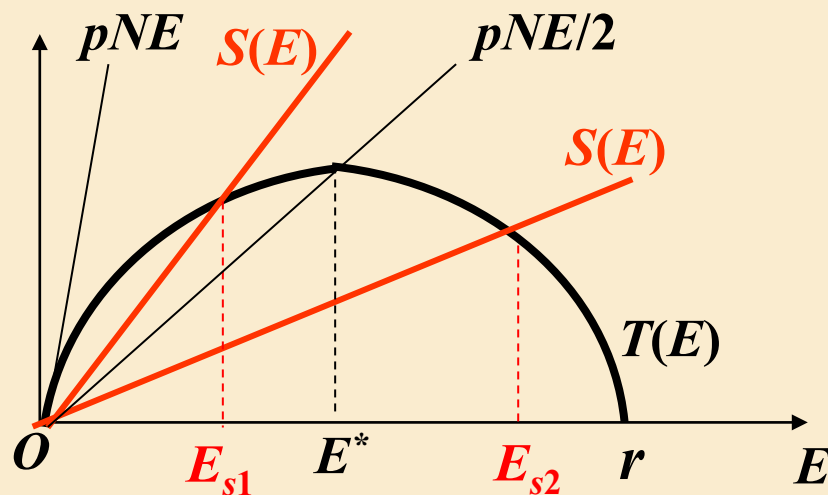
$=0 \Rightarrow$ 临界强度 E_s

$pN/2 < c < pN \quad (c/N < p < 2c/N)$

$\Rightarrow E_s = E_{s1} < E^*$ 经济学捕捞过度

$c < pN/2 \quad (p > 2c/N)$

$\Rightarrow E_s = E_{s2} > E^*$ 生态学捕捞过度



小结

- 在自然增长和捕捞情况的合理假设下建模.
- 用平衡点稳定性分析确定渔场鱼量稳定条件, 讨论产量、效益和捕捞过度3个模型.

5.7 食饵与捕食者模型



- 种群甲靠丰富的天然资源生存，种群乙靠捕食甲为生，形成**食饵-捕食者系统**，如食用鱼和鲨鱼，美洲兔和山猫，害虫和益虫.
- **模型的历史背景**——一次世界大战期间地中海渔业的捕捞量下降(食用鱼和鲨鱼同时捕捞)，但是其中鲨鱼的比例却增加，为什么？

食饵与捕食者模型(Volterra)

食饵(甲)数量 $x(t)$, 捕食者(乙)数量 $y(t)$

甲独立生存的增长率 r

$$\dot{x} = rx$$

乙使甲的增长率减小,
减小量与 y 成正比.

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy \quad (1)$$

乙独立生存的死亡率 d

$$\dot{y} = -dy$$

甲使乙的死亡率减小,
减小量与 x 成正比.

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy \quad (2)$$

a ~ 捕食者掠取食饵能力

b ~ 食饵供养捕食者能力

方程(1),(2) 无解析解

Volterra模型的平衡点及其稳定性

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy$$

稳定性分析

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy$$

平衡点

$$P(d/b, r/a), P'(0,0)$$

$$A = \begin{bmatrix} r - ax & -ax \\ by & -d + bx \end{bmatrix}$$

$$A|_P = \begin{bmatrix} 0 & -ad/b \\ br/a & 0 \end{bmatrix}$$

$p=0, q>0$
P: 临界状态

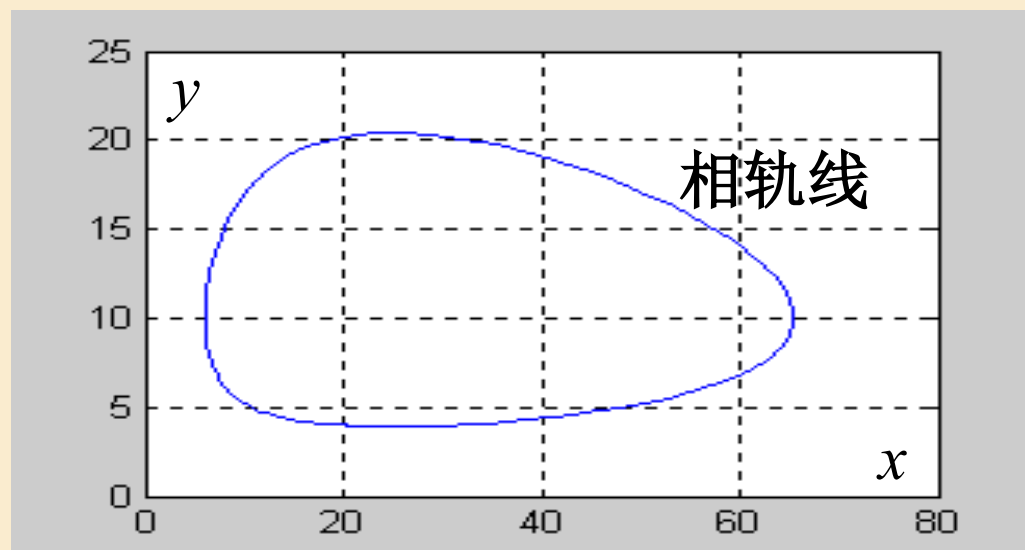
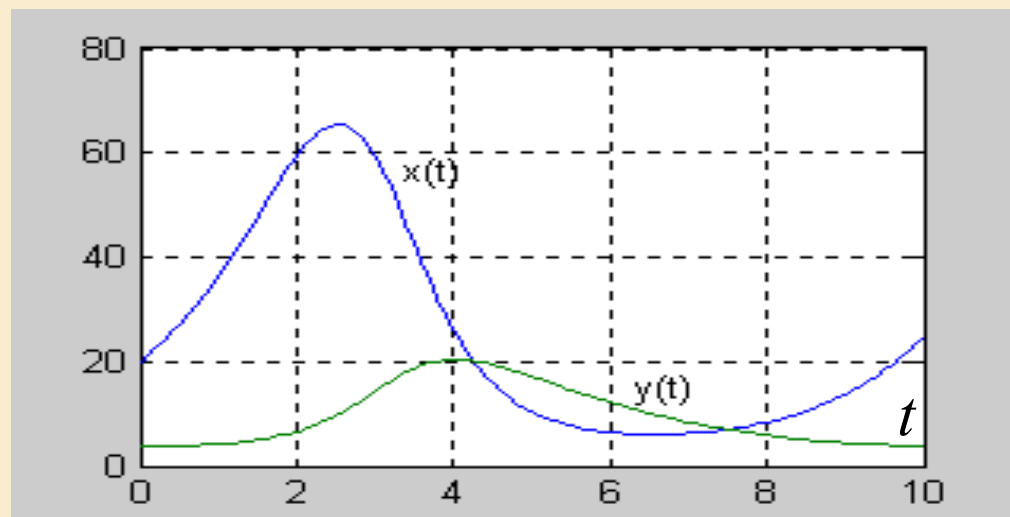
$$A|_{P'} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

$q<0$
P' 不稳定

P点稳定性不能用近似线性方程分析

用MATLAB求微分方程数值解

t	$x(t)$	$y(t)$
0	20.0000	4.0000
0.1000	21.2406	3.9651
0.2000	22.5649	3.9405
0.3000	23.9763	3.9269
...
5.1000	9.6162	16.7235
5.2000	9.0173	16.2064
...
9.5000	18.4750	4.0447
9.6000	19.6136	3.9968
9.7000	20.8311	3.9587

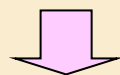


食饵与捕食者模型(Volterra)



$$\dot{x}(t) = (r - ay)x \quad \dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

计算结果（数值，图形）



观察，猜测

$x(t), y(t)$ 是周期函数，相图 (x, y) 是封闭曲线

$x(t), y(t)$ 的周期约为9.6

$$x_{\max} \approx 65.5, x_{\min} \approx 6, y_{\max} \approx 20.5, y_{\min} \approx 3.9$$

用数值积分可算出 $x(t), y(t)$ 一周期的平均值：

$x(t)$ 的平均值约为25, $y(t)$ 的平均值约为10.

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (r - ay)x \\ \dot{y}(t) &= (-d + bx)y \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{消去 } dt} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x(r - ay)}{y(-d + bx)}$$

$$\Rightarrow \frac{-d + bx}{x} dx = \frac{r - ay}{y} dy$$

$$\Rightarrow -d \ln x + bx = r \ln y - ay + c_1$$

$$\Rightarrow (x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$

取指数

 c 由初始条件确定

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$



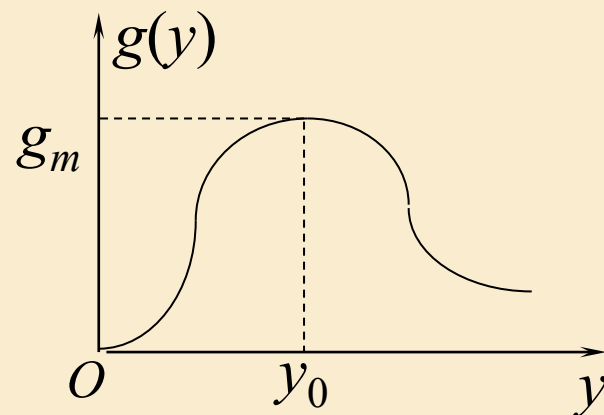
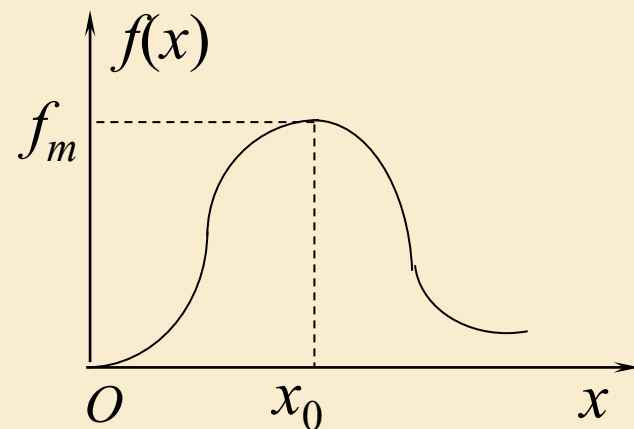
$$f(x)$$



$$g(y)$$

相轨线

$$f(x)g(y) = c$$



在相平面上讨论相轨线的图形

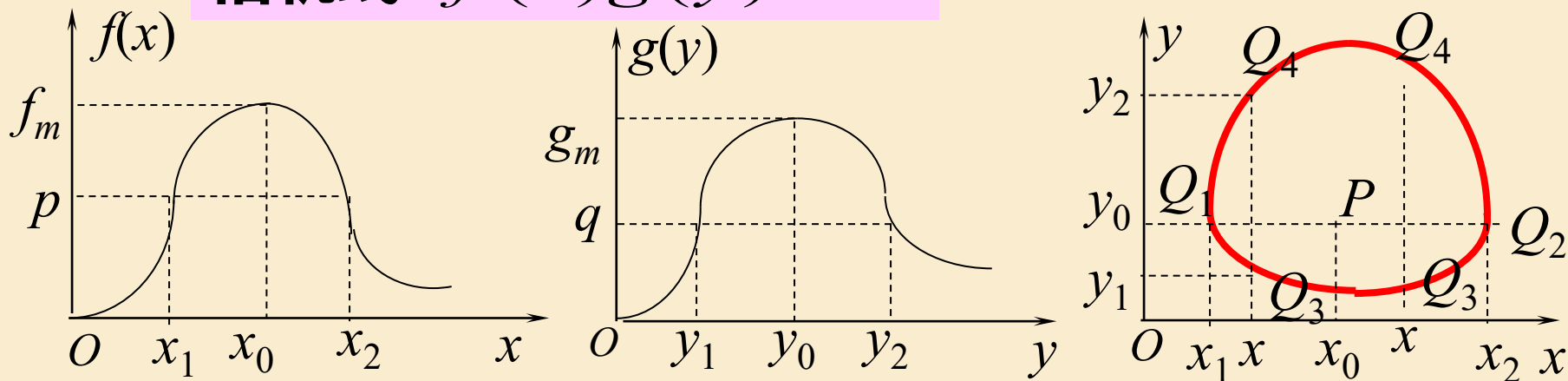
$$f(0) = f(\infty) = 0, \quad f(x_0) = f_m, \quad x_0 = d/b$$

$$g(0) = g(\infty) = 0, \quad g(y_0) = g_m, \quad y_0 = r/a$$

$c > f_m g_m$ 时无相轨线

以下设 $c \leq f_m g_m$

相轨线 $f(x)g(y) = c$



$c = f_m g_m \Rightarrow x = x_0, y = y_0 \Rightarrow$ 相轨线退化为 P 点 $P \sim$ 中心

$c < f_m g_m \Rightarrow$ 设 $c = p g_m$ 令 $y = y_0 \Rightarrow g(y) = g_m \quad f(x) = p < f_m$

\Rightarrow 存在 $x_1 < x_0 < x_2$, 使 $f(x_1) = f(x_2) = p \Rightarrow Q_1(x_1, y_0), Q_2(x_2, y_0)$

考察 $x \in [x_1, x_2] \quad f(x)g(y) = p g_m \quad f(x) > p \quad g(y) = q < g_m$

\Rightarrow 存在 $y_1 < y_0 < y_2$, 使 $g(y_1) = g(y_2) = q \Rightarrow Q_3(x, y_1), Q_4(x, y_2)$

x 是 $[x_1, x_2]$ 内任意点 \Rightarrow 相轨线是封闭曲线族

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

相轨线是封闭曲线 \Leftrightarrow $x(t), y(t)$ 是周期函数(周期记 T)

求 $x(t), y(t)$ 在一周期的平均值 \bar{x}, \bar{y}

$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{b} \left(\frac{\dot{y}}{y} + d \right) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{b} \left(\frac{\dot{y}}{y} + d \right)$$

$$= \frac{1}{T} \left(\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{b} + \frac{dT}{b} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = d/b$$

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\bar{y} = r/a$$

轨线中心

$$P(x_0, y_0) : x_0 = d/b, y_0 = r/a \Rightarrow \bar{x} = x_0, \bar{y} = y_0$$

模型解释

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

初值 $P_0(x'_0, y'_0)$

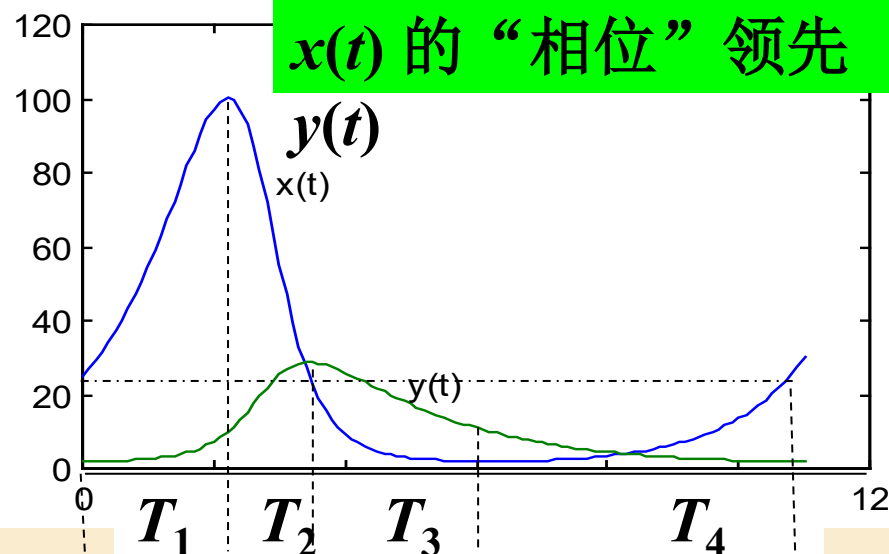
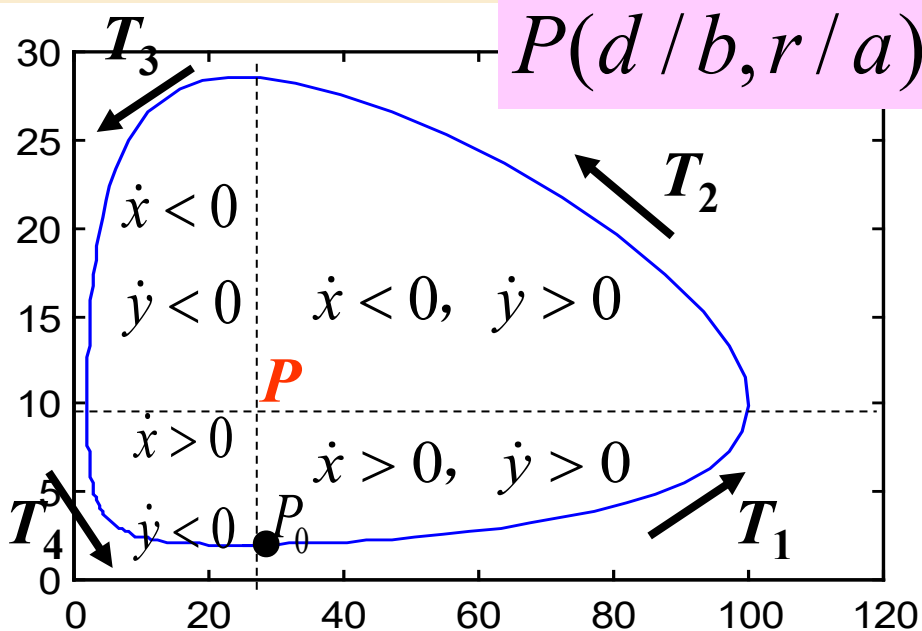
相轨线的方向

$T_1 : x(t) \uparrow y(t) \uparrow$

$T_2 : x(t) \downarrow y(t) \uparrow$

$T_3 : x(t) \downarrow y(t) \downarrow$

$T_4 : x(t) \uparrow y(t) \downarrow$

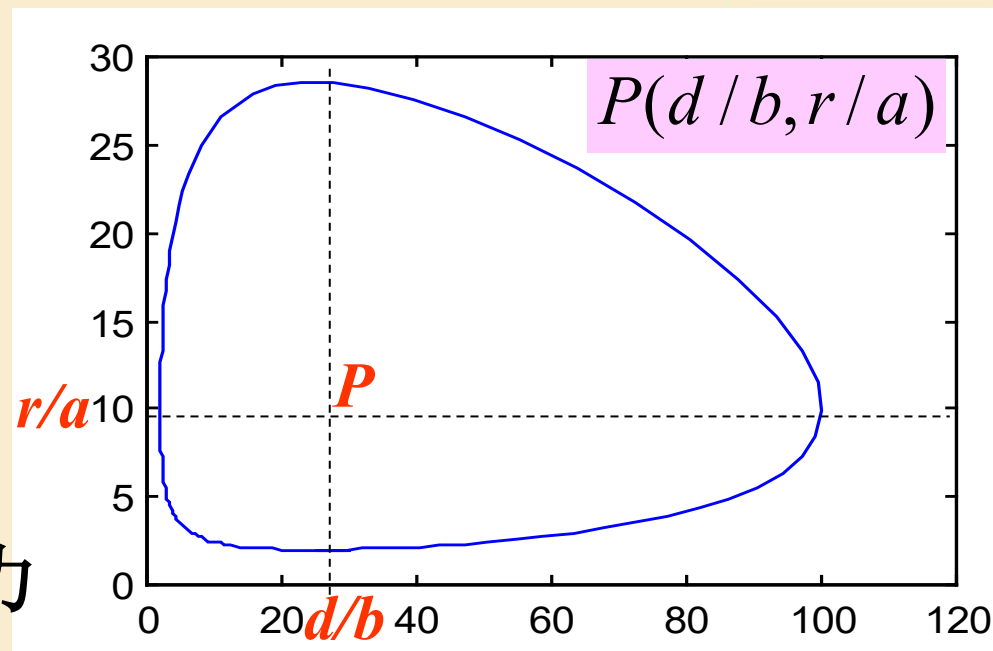


模型解释

捕食者
数量 $\bar{y} = \frac{r}{a}$

$r \sim$ 食饵增长率

$a \sim$ 捕食者掠取食饵能力



捕食者数量与 r 成正比，与 a 成反比

食饵
数量 $\bar{x} = \frac{d}{b}$

$d \sim$ 捕食者死亡率

$b \sim$ 食饵供养捕食者能力

食饵数量与 d 成正比，与 b 成反比

模型解释

一次大战期间地中海渔业的捕捞量下降，但是其中鲨鱼的比例却在增加，为什么？



自然环境

$$P(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{x} = d/b, \bar{y} = r/a$$

捕捞

$$r \rightarrow r - \varepsilon_1, d \rightarrow d + \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 > \bar{x}, \bar{y}_1 < \bar{y}$$

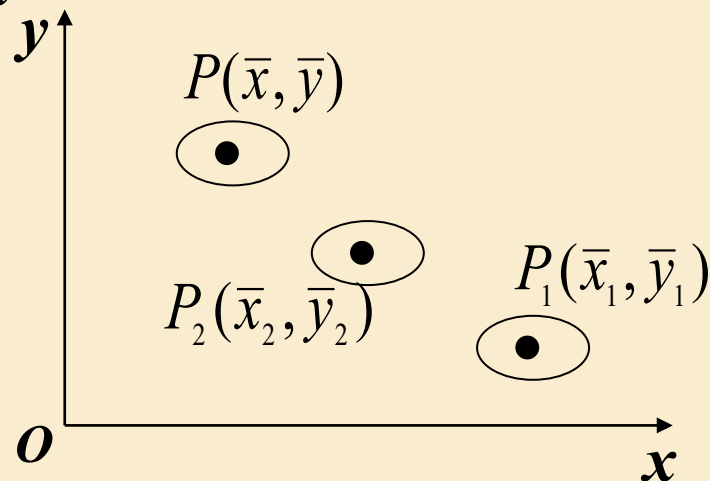
$$P \rightarrow P_1$$

战时捕捞

$$r \rightarrow r - \varepsilon_2, d \rightarrow d + \varepsilon_2, \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \bar{x}_2 < \bar{x}_1, \bar{y}_2 > \bar{y}_1$$

$$P_1 \rightarrow P_2$$



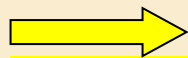
食饵(鱼)减少，
捕食者(鲨鱼)增加

$P \rightarrow P_1$ 还表明：对害虫(食饵)—益虫(捕食者)系统，使用灭两种虫的杀虫剂，会使害虫增加，益虫减少.

Volterra模型的局限性

多数食饵—捕食者系统**观察不到周期震荡**，
而是趋向某个平衡状态，即**存在稳定平衡点**。

Volterra模型 $\dot{x}(t) = (r - ay)x \quad \dot{y}(t) = -(d - bx)y$

 **改写** $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} \right)$

增加logistic项 

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

存在稳定平衡点

Volterra模型的局限性

- 相轨线是封闭曲线，结构不稳定——一旦离开某一条闭轨线，就进入另一条闭轨线，不恢复原状。
- 自然界存在的周期性平衡生态系统是**结构稳定的**，即偏离周期轨道后，内部制约使系统恢复原状。

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{1 + w x_1} \right)$$

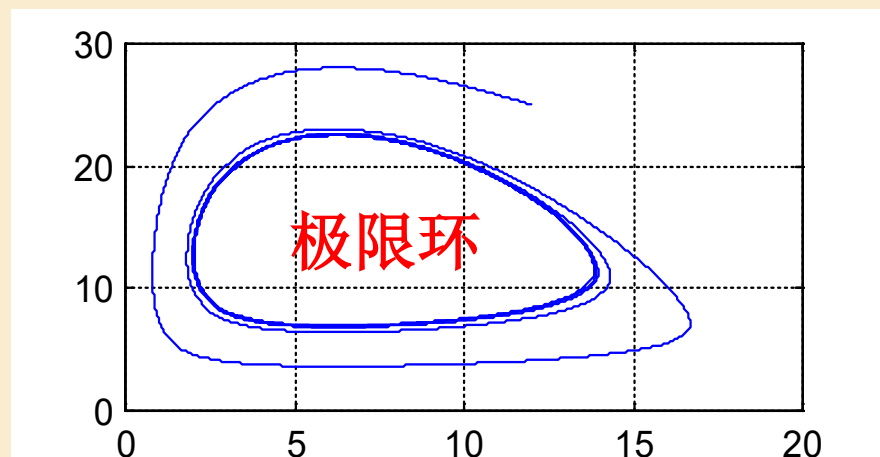
$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{1 + w x_1} \right)$$

$$r_1=1, N_1=20, \sigma_1=0.1, \\ w=0.2, r_2=0.5, \sigma_2=0.18$$

相轨线趋向极限环



结构稳定



5.10 传染病模型和SARS的传播

2002年冬到2003年春，一种名为**SARS**（Severe Acute Respiratory Syndrome，严重急性呼吸道综合症，民间俗称**非典**）的传染病肆虐全球。

SARS首发于中国广东，迅速扩散到30多个国家和地区，多名患者死亡引起社会恐慌、媒体关注，以及各国政府和联合国、世界卫生组织的高度重视、积极应对，直至最终控制住疫情的蔓延。

SARS被控制住不久，**2003年9月**全国大学生数学建模竞赛以“**SARS的传播**”命名当年A题和C题。

赛题要求

- **建立你们自己的模型**；特别要说明怎样才能建立真正能**预测**以及能**为预防和控制提供**可靠、足够**信息**的模型，这样做的困难在哪里？
- 对于卫生部门所采取的措施做出评论，如：提前或延后5天**采取严格的隔离措施**，对疫情传播所造成的**影响**做出估计。

北京市从2003年4月20日至6月23日逐日的疫情数据

日期	已确诊病例累计	现有疑似病例	死亡累计	治愈出院累计
4月20日	339	402	18	33
4月21日	482	610	25	43
.....
6月23日	2521	2	191	2277

传染病模型和SARS的传播

- 介绍数学医学领域中基本的传染病模型.
- 结合赛题介绍几个描述、分析SARS传播过程的模型及求解结果.

基本的传染病模型

- 不从医学角度分析各种传染病的特殊机理.
- 按照传播过程的规律建立微分方程模型.

SI 模型

将人群分为两类：易感染者(**S**usceptible, 健康人)和已感染者(**I**nfective, 病人).

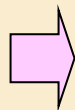
假设

1. 总人数 N 不变，时刻 t 健康人和病人所占比例分别为 $s(t)$ 和 $i(t)$ ，有 $s(t)+i(t)=1$.
2. 每个病人每天有效接触人数为 λ (日接触率)，且使接触的健康人致病.

建模

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = [\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt} = \lambda s i$$

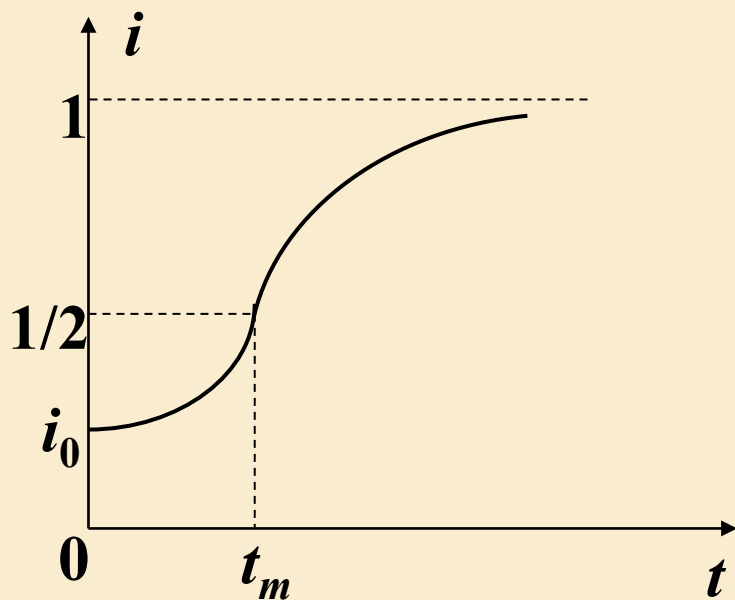


$$s(t) + i(t) = 1$$

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

SI 模型

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{logistic 模型}$$



$t=t_m$, di/dt 最大

$t_m \sim$ 传染病高潮到来时刻

λ (日接触率) $\downarrow \rightarrow t_m \uparrow$

$t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 1$?

没有考虑病人可以治愈!

SIS 模型

传染病**无免疫性**如伤风、痢疾等——病人治愈成为健康人，**健康人可再次被感染**。

增加假设

3. 病人每天治愈的比例为 μ (日治愈率)

建模

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda Ns(t)i(t)\Delta t - \mu Ni(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i = -\lambda i\left[i - \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\right] \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

$$\sigma = \lambda / \mu$$

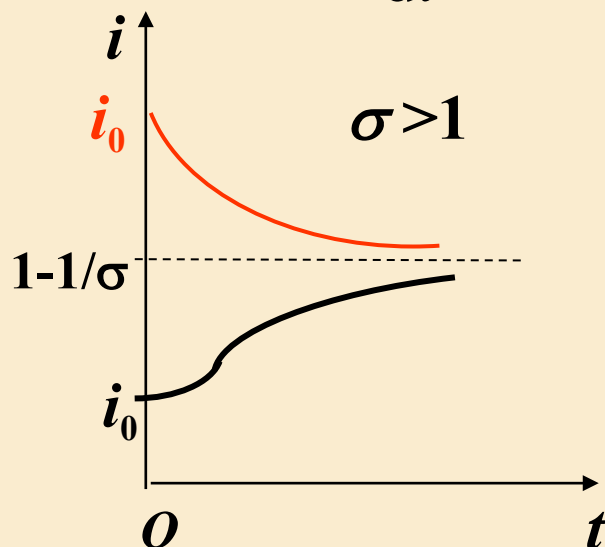
$\lambda \sim$ 日接触率

$1/\mu \sim$ 感染期

$\sigma \sim$ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**。

SIS 模型

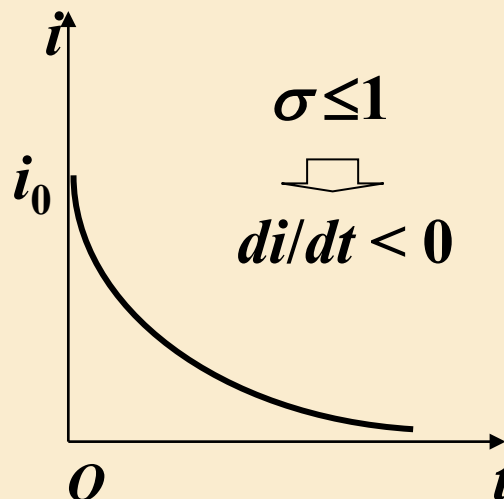
$$\frac{di}{dt} = -\lambda i \left[i - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right] \quad \sigma \sim \text{接触数}$$



$$i(\infty) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma > 1, i_0 < 1 - 1/\sigma$$

$\Rightarrow i(t)$ 按S形曲线增长



$\sigma \leq 1 \Rightarrow i(t)$ 单调下降

感染期内有效接触使健康者感染的人数不超过原有的病人数

接触数 $\sigma = 1 \sim$ 阈值

SIR模型

传染病有免疫性如天花、麻疹等——病人治愈后移出感染系统，称移出者(Removed).

假设

1. 总人数 N 不变，健康人、病人和移出者的比例分别为 $s(t), i(t), r(t)$.
2. 病人的日接触率为 λ ，日治愈率为 μ ，接触数 $\sigma = \lambda / \mu$.

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程.

SIR模型

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda N s(t) i(t) \Delta t - \mu N i(t) \Delta t$$

$$N[s(t + \Delta t) - s(t)] = -\lambda N s(t) i(t) \Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

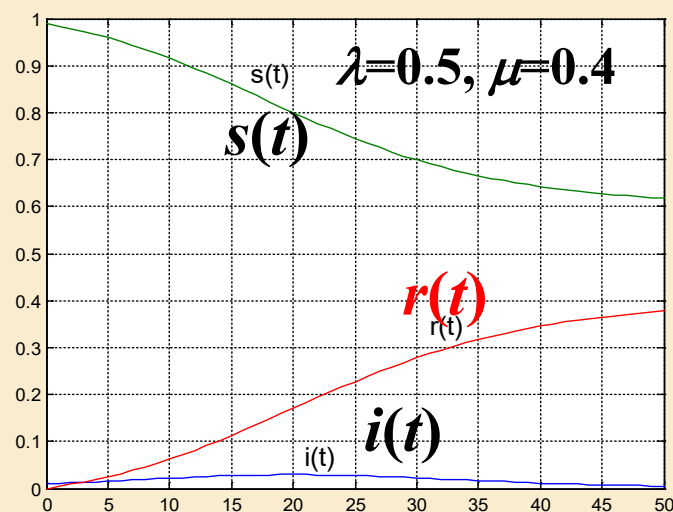
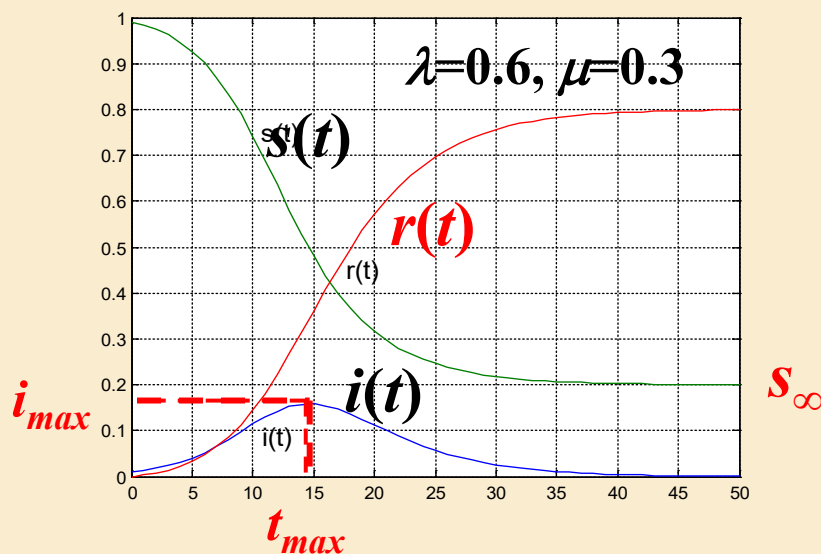
关于 $i(t)$, $s(t)$ 的**非线性**微分方程组，
没有解析解，只能通过**数值计算**得到
 $s(t)$, $i(t)$, $r(t)$ 的曲线.

$$i_0 + s_0 \approx 1 \quad (\text{通常 } r(0)=r_0 \text{ 很小})$$

SIR模型的数值计算

设 $s(0)=0.99, i(0)=0.01$

健康人 $s(t)$, 病人 $i(t)$, 移除者 $r(t)$. 接触率 λ , 治愈率 μ .



$s(t)$ 单调减, $r(t)$ 单调增, 都趋于稳定, $i(t)$ 先增后减趋于 0.

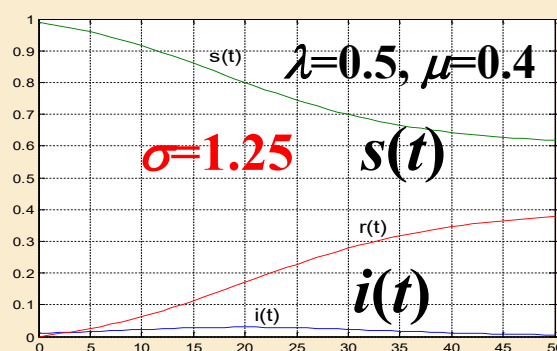
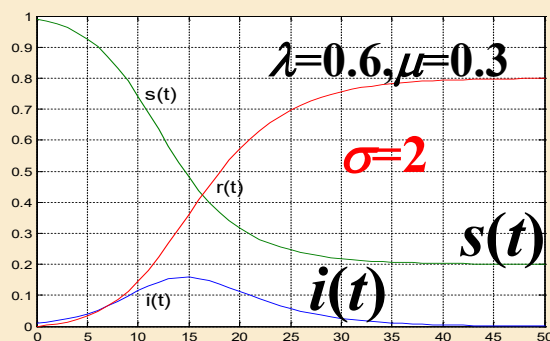
s_{∞} ~ 最终未被感染的比例

衡量传染病

$i_{\max}(t_{\max})$ ~ 传染病高潮时的比例

传播的强度

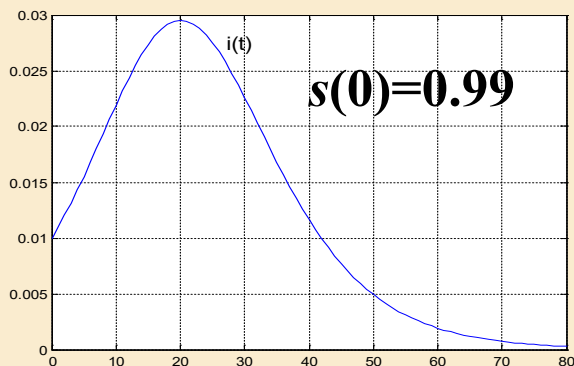
结果分析

接触率 λ , 治愈率 μ $1/\mu$ ~平均传染期 (病人治愈所需平均时间) $\sigma=\lambda/\mu$ ~接触数 (感染期内每个病人有效接触人数)卫生水平高 \Rightarrow 接触率 λ 小医疗水平高 \Rightarrow 治愈率 μ 大接触数 σ 小——
有助于控制传播.接触数 σ 变小 \Rightarrow 健康人 $s(t)$ 增加, 病人 $i(t)$ 减少.

结果分析

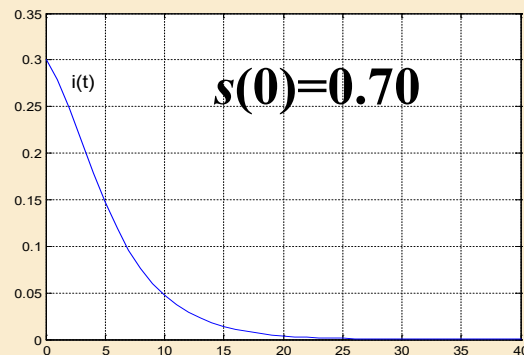
健康人 $s(t)$, 病人 $i(t)$. $\sigma = \lambda/\mu \sim$ 接触数.

$\sigma = 1.25$



$\sigma(0) > 1$, $i(t)$ 先增后减

\sim 传染病蔓延



$\sigma(0) \leq 1$, $i(t)$ 单调减少

\sim 传染病不蔓延

- 一般情况下 $s(0) \approx 1$, 控制蔓延需要 $\sigma < 1$.
- 预防接种使群体免疫, 提高 $r(0)$ 使 $s(0)$ 减小, 满足 $\sigma(0) \leq 1$.

SARS 的传播模型

- 2003年SARS爆发初期，处于几乎不受制约的自然传播形式，后期的传播则受到严格控制。
- 虽然影响因素众多，不只有健康人、病人、移除者3个人群，但是仍然可以用愈后免疫的SIR模型来描述。
- 越复杂的模型包含的参数越多，为确定这些参数所需要的疫情数据就越全面，而实际上能够得到的数据是有限的。

模型一 参数时变的SIR模型

模型建立

$s(t), i(t), r(t) \sim$ 第 t 天健康人、病人、移除者(病愈与死亡之和)的数量, $s(t) + i(t) + r(t) = N$.

$\lambda(t), \mu(t) \sim$ 第 t 天感染率, 移除率(治愈率与死亡率之和).

$$\frac{di}{dt} = \lambda(t)s(t)i(t) - \mu(t)i(t)$$

\Downarrow s 远大于 i, r , $s(t)$ 视为常数.

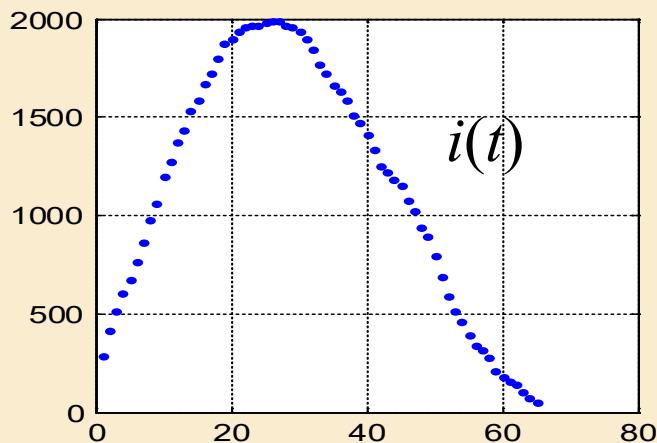
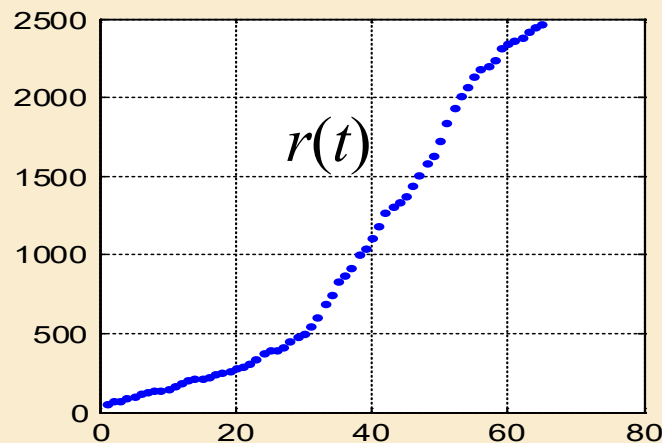
$$\frac{di}{dt} = \lambda(t)i(t) - \mu(t)i(t)$$

$$\frac{dr}{dt} = \mu(t)i(t)$$

参数时变的SIR模型

参数估计与拟合

日期	已确诊病例累计	现有疑似病例	死亡累计	治愈出院累计
4月20日	339	402	18	33
4月21日	482	610	25	43
.....
6月23日	2521	2	191	2277

确诊- $r(t) = i(t)$ 死亡 + 治愈 $= r(t)$ 

参数估计与拟合

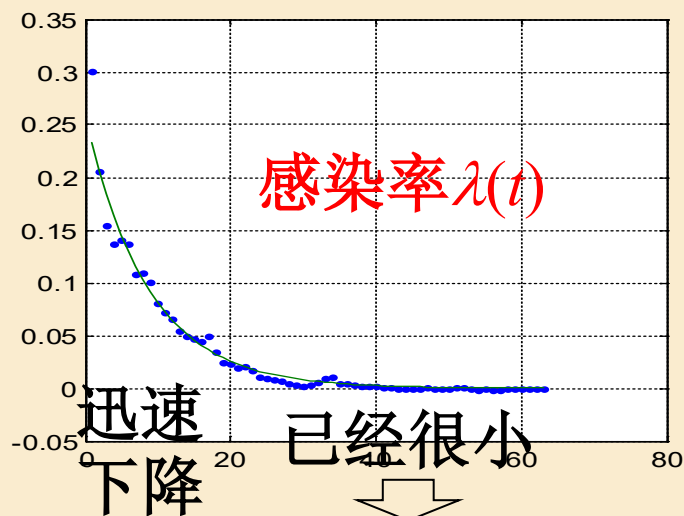
$$\frac{dr}{dt} = \mu(t)i(t)$$

$$\frac{di}{dt} = \lambda(t)i(t) - \mu(t)i(t)$$

取差分近似导数

$$\mu(t) = \Delta r(t) / i(t)$$

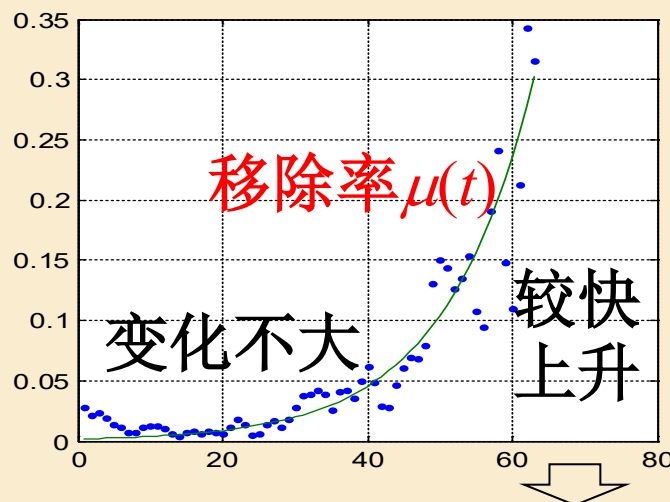
$$\lambda(t) = (\Delta i(t) + \Delta r(t)) / i(t)$$



疫情受到有力制约

用 $t=1\sim 20$ 的数据拟合得

$$\hat{\lambda}(t) = 0.2612e^{-0.1160t}$$



$\lambda(t), \mu(t)$
图中圆点

高潮时的大量病人被治愈

用 $t=20\sim 50$ 的数据拟合得

$$\hat{\mu}(t) = 0.0017e^{-0.0825t}$$

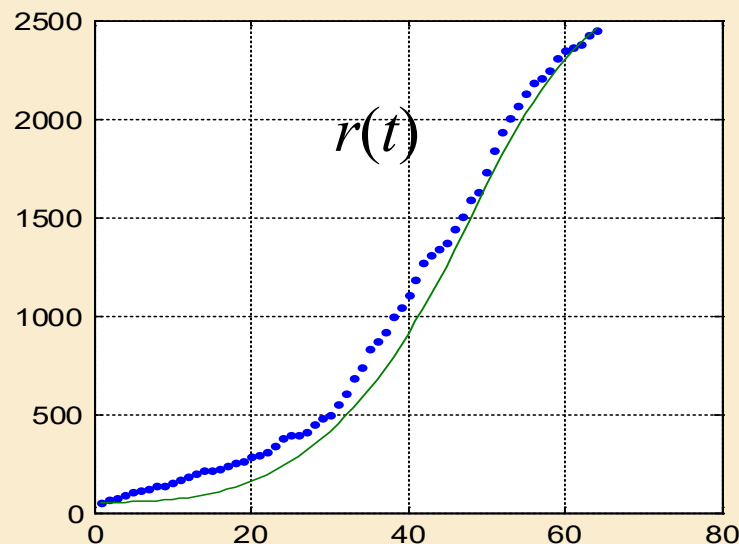
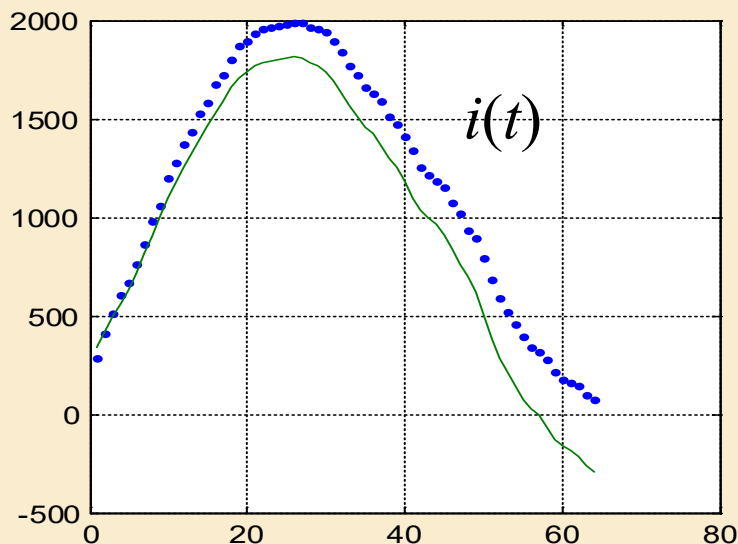
模型求解与检验

$$\hat{\lambda}(t) = 0.2612e^{-0.1160t} \quad \hat{\mu}(t) = 0.0017e^{-0.0825t}$$

代入方程

$$\frac{di}{dt} = \lambda(t)i(t) - \mu(t)i(t)$$

$$\frac{dr}{dt} = \mu(t)i(t)$$

求 $i(t)$, $r(t)$ 的数值解

$i(t)$ 的计算值整体偏小，且 $t=50$ 后下降过快.

在模型构造、参数拟合等方面仍需改进.

模型二 引入不可控带菌者和疑似已感染者的模型

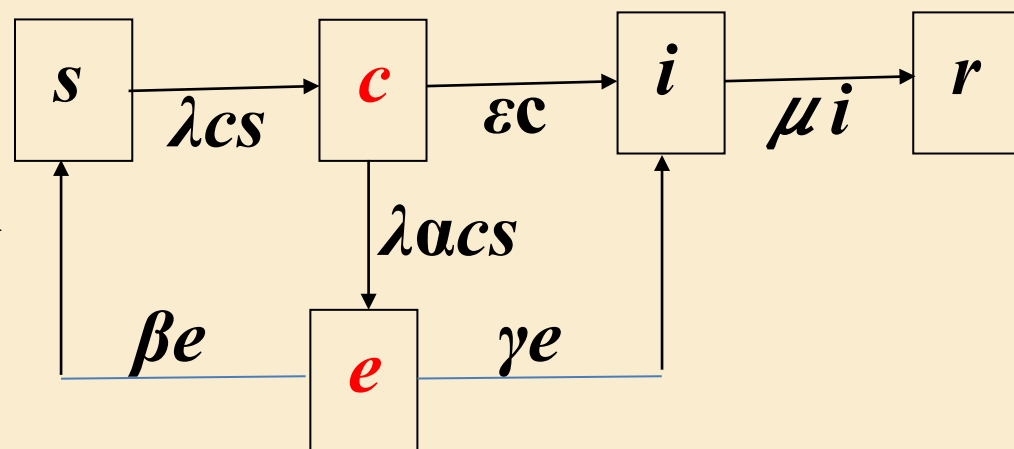
$s(t)$ ~未感染者比例

$i(t)$ ~已感染者比例

$r(t)$ ~移除者比例 μ ~移除率

$c(t)$ ~不可控带菌者比例

$e(t)$ ~疑似已感染比例



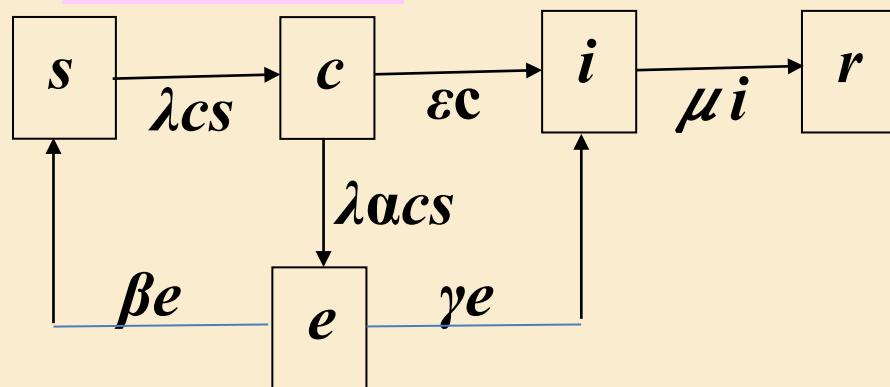
λ ~每个不可控带菌者收治前每天有效感染的人数

α ~ λ 中可以控制的比例

ε ~不可控带菌者每天转化为已感染者的比例

β ~疑似已感染者每天被排除的比例 γ ~每天被确诊的比例

模型建立



$$\frac{ds}{dt} = \beta e - \lambda cs$$

$$\frac{dc}{dt} = \lambda(1-\alpha)cs - \varepsilon c$$

$$\frac{de}{dt} = -(\beta + \gamma)e + \lambda \alpha cs$$

$$\frac{di}{dt} = \varepsilon c - \mu i + \gamma e$$

$$\frac{dr}{dt} = \mu i$$

$$s(t) + c(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1$$

参数 $\lambda, \mu, \varepsilon, \alpha, \beta, \gamma$ 确定后，由任意5个方程及任意4个初值计算5类人群的比例 $s(t), c(t), e(t), i(t), r(t)$ 。

参数估计

- 直接利用实际数据。
- 由经验估计初值，代入模型计算，根据计算值与实际值的偏差调整估计值。

小结与评注

- 在SIR模型基础上建立的模型, 差别在于人群划分和参数定义.
- 模型求解结果是否与实际吻合的关键在参数估计, 而参数估计的结果依赖于是否有充分的数据.
- 人群的细分必然要引进更多的参数, 如果参数很难估计, 即便模型很精细也得不到好的结果.
- 传染病传播过程中的参数大多是变化的, 应根据数据拟合出参数的时间函数, 再用模型计算.