FONDAMENTI DI AUTOMATICA

CONCETTO DI EQUILIBRIO

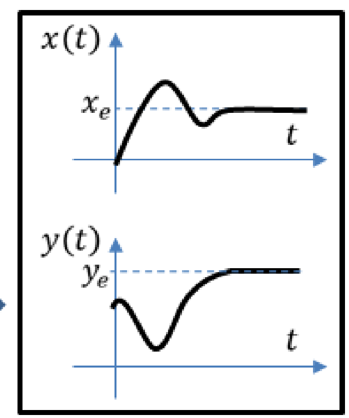
Concetto di equilibrio

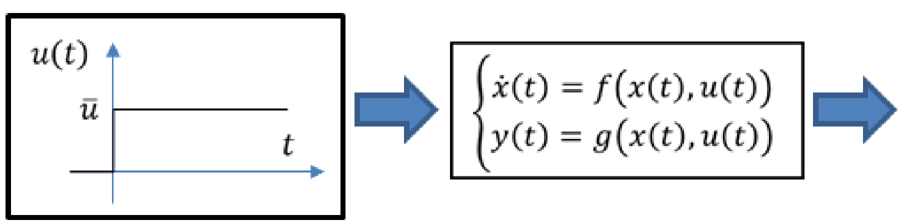
Stati di equilibrio

- Si consideri la classe dei sistemi dinamici stazionari, ossia descritti dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(x(t), u(t)\big) \end{cases} \quad x(t_0) = x_0$$

- Quando, in presenza di ingressi costanti $u(t) = \bar{u}$, risultano essere costanti anche le evoluzioni dello stato e dell'uscita si parla di **stati di equilibrio x_e** e **uscite di equilibrio y_e**. Un sistema che si trovi nello stato di equilibrio, quindi, sarà caratterizzato da variazioni dello stato nullo.
- Gli stati di equilibrio, se presenti, possono quindi esser determinati ponendo $\dot{x}(t) = 0$, ossia: $f(x_e, \bar{u}) = 0$
- Il valore (costante) delle uscite di equilibrio sono $y_e = g(x_e, \bar{u})$.



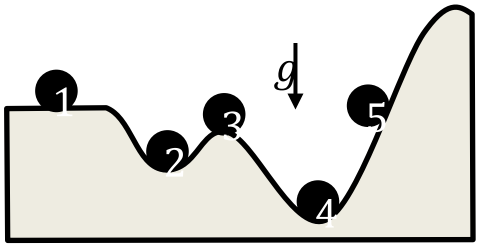


Stati di equilibrio

- Un sistema in uno stato di equilibrio, quindi, permane in tale stato indefinitamente purché le sollecitazioni a cui sia sottoposto rimangono costanti.
- Intuitivamente, esistono diversi tipi di equilibrio: si consideri un sistema in uno stato di equilibrio x_e soggetto ad una perturbazione di lieve entità. Una caratteristica che tipicamente si vuole avere è la capacità di tornare nello stato di equilibrio in presenza di perturbazioni.
- Questo aspetto è dovuto al fatto che, in genere, gli stati di equilibrio sono associati a condizioni operative desiderate in cui il comportamento del sistema coincide con il funzionamento desiderato.
- Risulta evidente che, dopo essersi assicurati che il valore delle variabili di interesse sia quello desiderato, si vuole che anche in presenza di perturbazioni tali valori siano mantenuti (o, più in generale, che il sistema reagisca alle perturbazioni e dopo un certo intervallo di tempo torni nelle condizioni desiderate).

Esempio

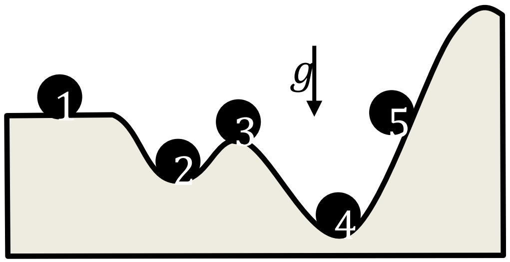
- Si consideri un corpo puntiforme su una superficie in assenza di in forzamento e soggetto alla forza di gravità. Le seguenti considerazioni risultano ovvie:
  - Nel caso (5) il sistema è soggetto ad un ingresso non costante (la forza di reazione del piano non bilancia la forza di gravità) e il corpo tenderà a scivolare verso il punto (4) - i.e. cambierà stato.
  - Per quanto riguarda il caso (1), se il corpo è fermo e non agiscono altre forze oltre alla forza di gravità e di reazione del piano (ovvero se gli ingressi rimangono costanti), il corpo rimarrà indefinitamente nel suo stato. Per quanto riguarda i casi (2) e (3) e (4) valgono le stesse considerazioni. Tuttavia, esistono delle differenze.



Esempio

- Nel caso (3), in presenza di perturbazioni minime il corpo tenderà a muoversi verso il punto (2) o (4).
- Se il corpo si trova nel punto (4) avrà maggiori probabilità di ritornarci una volta esaurite eventuali perturbazioni rispetto al punto (2) e, in particolare, l'entità massima della perturbazione per cui una volta nel punto (4) il corpo vi ritorni è sicuramente maggiore di quella per cui il corpo, una volta nel punto (2) vi rimanga

- Queste considerazioni mettono in luce il fatto che esistono diverse tipologie di stati di equilibrio. Intuitivamente, si può affermare che alcuni punti di equilibrio godono di una maggiore resilienza rispetto alle perturbazioni.



Esempio

- Si consideri un corpo puntiforme che si muove su una superficie piana di moto uniformemente accelerato. Come noto le equazioni che ne governano il moto sono:

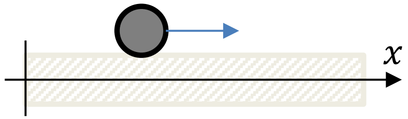
$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) & = & v_0 + at \\ a(t) & = & a \end{array} . \quad \text{Ponendo} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad \text{si ottiene} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & a \end{cases}$$

- Gli stati di equilibrio si ottengono risolvendo il sistema

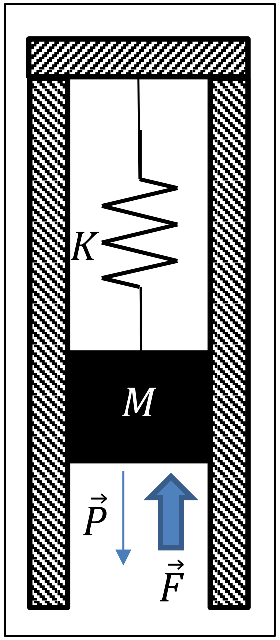
$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = 0 = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = 0 = & a \end{cases}$$

- Ovvero si arriva al risultato intuitivo per cui il corpo si trova in uno stato di equilibrio se e solo se non è soggetto ad accelerazione, indipendentemente dal valore della posizione:

$$x_e = \begin{bmatrix} \text{qualsiasi} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Esempio



- Si consideri il sistema massa-molla in figura. In assenza di forzamento e di forze di attrito il sistema è descritto dall'equazione

$$M\ddot{x} = P - F_{el} = Mg - kx$$

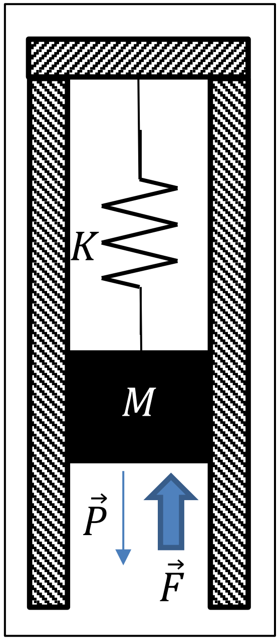
- Come abbiamo già visto, una scelta opportune delle variabili di stato per i sistemi meccanici sono le posizioni e le velocità dei vari elementi. In questo caso conviene quindi scegliere come variabili di stato
  - $x_1 = x$
  - $x_2 = \dot{x}$
- La precedente espressione diventa quindi

$$M\dot{x}_2 = Mg - kx_1$$

da cui

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & +g - \dfrac{k}{M}x_1 \end{cases}$$

Esempio



- Il punto di equilibrio si ottiene ponendo $\dot{x} = 0$:

$$f(x_e, \bar{u}) = \begin{cases} x_2 & = & 0 \\ +g - \dfrac{k}{M} x_1 & = & 0 \end{cases}$$

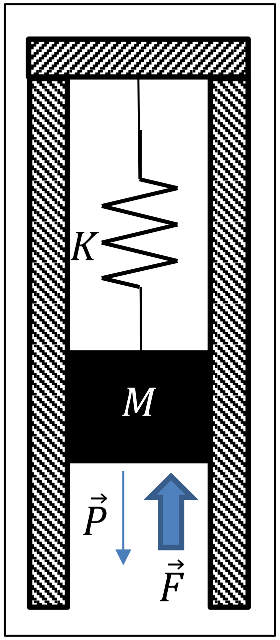
  - Dalla prima equazione si evince che, ovviamente, condizione necessaria per avere equilibrio è $x_2 = 0$ ossia che la velocità angolare sia nulla.
  - Dalla seconda equazione si ricavano invece le condizioni affinché l'accelerazione sia nulla:

$$x_1 = \frac{Mg}{K}$$

- La condizione trovata corrisponde al bilanciamento della forza peso e elastica $\vec{F}_{el} = \vec{P}$: il valore di x_1 trovato rappresenta quindi l'estensione della molla in una condizione di equilibrio in cui le due forze si bilanciano. Lo stato di equilibrio è quindi

$$x_e = \begin{bmatrix} \dfrac{Mg}{K} & 0 \end{bmatrix}^T$$

Esempio



- Si consideri ora il caso in cui sia presente dell'attrito e si assuma che sia direttamente proporzionale alla velocità con costante b.
- Usando le stesse scelte per le variabili di stato si può descrivere il sistema come:

$$M\ddot{x} = P - F_{el} - F_A = Mg - kx - b\dot{x}$$

da cui

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & +g - \dfrac{k}{M}x_1 - \dfrac{b}{M}x_2 \end{cases}$$

- È immediato verificare che per quanto riguarda il calcolo degli stati equilibri non cambia niente. La differenza rispetto al caso precedente sarà la velocità con il quale il sistema riesce a raggiungere lo stato di equilibrio $x_e = [Mg/K \quad 0]^T$.

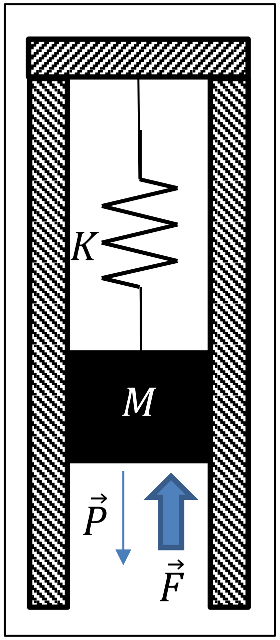
Esempio

- Prendendo in considerazione la forza $\vec{F}$ si ottiene

$$M\ddot{x} = P - F_{el} - F_A + F = Mg - kx - b\dot{x} + u$$

da cui

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & +g - \frac{k}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \end{cases}$$

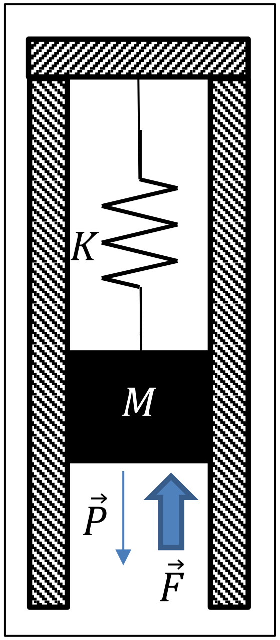


- Gli stati di equilibrio si ottengono come soluzione di $\dot{x} = 0$:

$$f(x_e, \bar{u}) = \begin{cases} x_2 & = & 0 \\ +g - \frac{k}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + u & = & 0 \end{cases}$$

- Se $u = -Mg$, ovvero se il forzamento bilancia esattamente la forza peso, è immediato verificare che esistono infiniti stati di equilibrio: $x_e = \begin{bmatrix} \text{qualsiasi} \\ 0 \end{bmatrix}$

Esempio



- Prendendo in considerazione la forza $\vec{F}$ si ottiene

$$M\ddot{x} = P - F_{el} - F_A + F = Mg - kx - b\dot{x} + u$$

da cui

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & +g - \frac{k}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \end{cases}$$

- Gli stati di equilibrio si ottengono come soluzione di $\dot{x} = 0$:

$$f(x_e, \bar{u}) = \begin{cases} x_2 & = & 0 \\ +g - \frac{k}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}u & = & 0 \end{cases}$$

  - Se $u = -Mg$, ovvero se il forzamento bilancia esattamente la forza peso, è immediato verificare che esistono infiniti stati di equilibrio: $x_e = \begin{bmatrix} \text{qualsiasi} \\ 0 \end{bmatrix}$
  - Nel caso generale, per $u = \bar{u}$ costante, si ha $x_e = \begin{bmatrix} \frac{(\bar{u}+Mg)}{K} \\ 0 \end{bmatrix}$

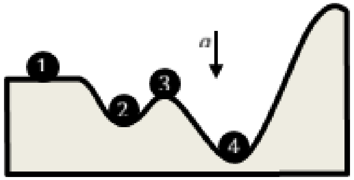
FONDAMENTI DI AUTOMATICA

STABILITÀ

Stabilità dell’equilibrio

Proprietà degli stati di equilibrio

- Negli esempi visti abbiamo calcolato gli stati di equilibrio per diversi sistemi e, in particolare, abbiamo visto che un sistema può
  - non avere stati di equilibrio
  - Avere infiniti stati di equilibrio
  - Avere un numero finito di stati di equilibrio
- Nell'esempio del corpo su una superficie in figura, abbiamo visto come gli stati di equilibrio possano avere diverse proprietà e, in particolare, si è accennato alla capacità del sistema di tornare in uno stato di equilibrio in presenza di perturbazioni.
- Per fissare questi concetti vedremo adesso un ulteriore esempio che mette in luce la differenza sostanziale che c'è tra diverse **tipologie di stati di equilibrio**.



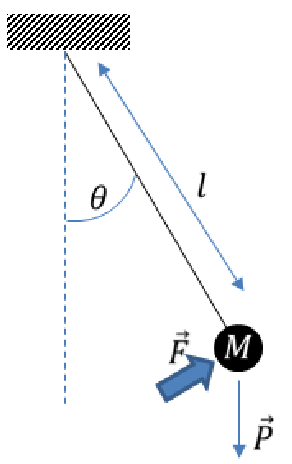
Esempio

- Si consideri un pendolo forzato di massa M, connesso al sostegno tramite una fune inestensibile, di massa trascurabile, e di lunghezza l. Si assuma che sia presente una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità angolare del pendolo di coefficiente k.

- Come abbiamo già visto, una scelta opportune delle variabili di stato per i sistemi meccanici sono le posizioni e le velocità dei vari elementi.
- In questo caso conviene quindi scegliere come variabile di stato lo spostamento angolare (ovvero l'angolo θ tra la posizione della massa e l'asse verticale centrato sul giunto).
  - Si ponga quindi $x_1 = \theta$ e $x_2 = \omega$, dove $\omega = \dot{\theta}$ indica la velocità angolare della massa.
  - Il sistema è descritto dall'equazione dinamica

$$Ml\dot{\omega} = u - k\omega - Mg\sin\theta$$

Pendolo forzato



Esempio

- Sostituendo le variabili di stato nell'equazione dinamica si ottiene

$$\frac{1}{lM}u-\frac{k}{lM}x_2-\frac{g}{l}\sin x_1-\dot{x}_2=0$$

- La rappresentazione nello spazio di stato assume quindi la forma

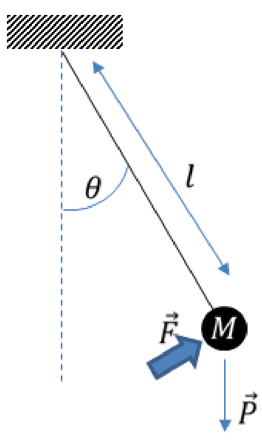
$$\begin{cases}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1-\frac{k}{lM}x_2+\frac{1}{lM}u\end{cases}$$

- Il punto di equilibrio si ottiene ponendo $\dot{x}=0$:

$$f(x_e,\bar{u})=\begin{cases}x_2 &= 0\\ -\frac{g}{l}\sin x_1-\frac{k}{lM}x_2+\frac{1}{lM} &= 0\end{cases}$$

- Si può subito osservare che, ovviamente, condizione necessaria per avere equilibrio è $x_2=0$ ossia che la velocità angolare sia nulla. Dalla seconda equazione si ricavano invece le condizioni affinché l'accelerazione sia nulla

Pendolo forzato



Esempio

- In assenza di forzamento all'equilibrio si ha

$$f(x_e, 0) = \begin{cases} x_2 = 0 \\ \sin x_1 = -\frac{k}{lM} x_2 = 0 \end{cases}$$

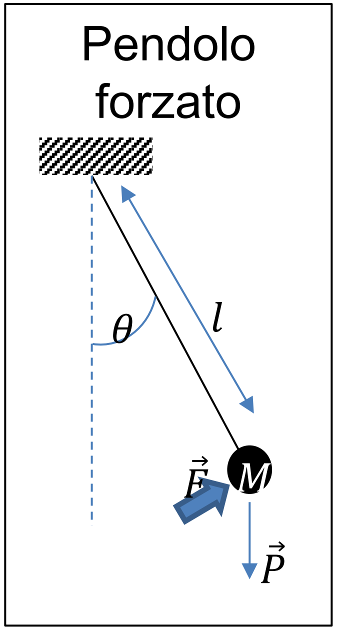
ossia $x_e = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$

- Se la variabile di ingresso vale $u = Mgl$, all'equilibrio si ha

$$x_e = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- Nel caso generale, all'equilibrio si ha

$$x_e = \begin{bmatrix} \arcsin\left(\frac{1}{Mg} u\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

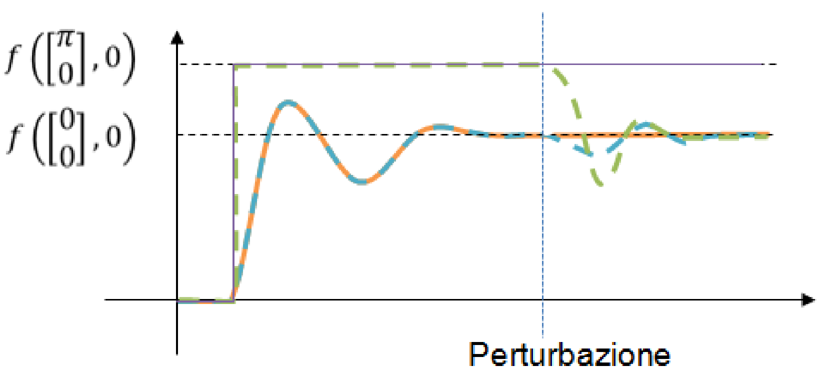


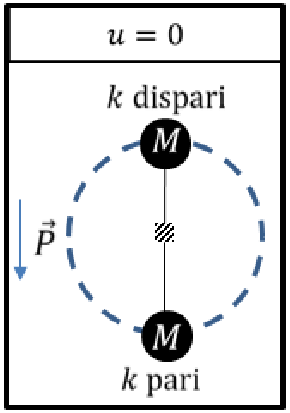
Tipologie di punti di equilibrio

- Nel caso di ingresso nullo, si è visto che gli stati di equilibrio sono descritti da

$$x_e = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

  - È immediato verificare che per $k = 1,3,5,\dots$ il sistema si trova in uno stato di equilibrio in cui, in caso di perturbazioni, è difficile che il sistemi ci torni
  - Per $k = 0,2,4,\dots$ invece si può affermare che il sistema riesce a tornare nello stato di equilibrio anche in presenza di perturbazioni limitate nel tempo:



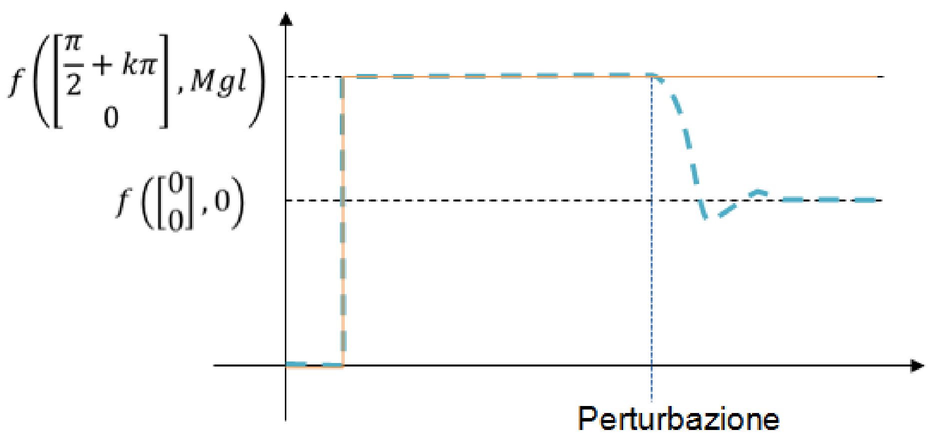


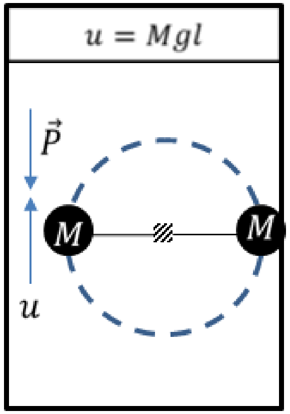
Tipologie di punti di equilibrio

- Nel caso in cui $u = Mgl$, si è visto che gli stati di equilibrio sono descritti da

$$x_e = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

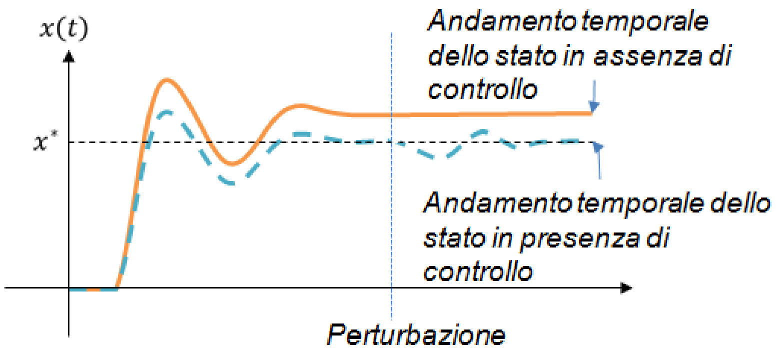
  - È immediato verificare che partendo da questi stati di equilibrio in caso di perturbazioni è difficile che il sistemi ci torni





Concetto di stabilità

- Si supponga di voler regolare il valore dello stato $x(t)$ di un sistema ad un certo valore costante desiderato x^*:



- Una caratteristica desiderabile del sistema è che in presenza di perturbazioni limitate nel tempo sia in grado di tornare nello stato di equilibrio desiderato x^*. Questo aspetto è legato ad una proprietà fondamentale: la **stabilità**.

Stati di equilibrio stabili, instabili e asintoticamente stabili

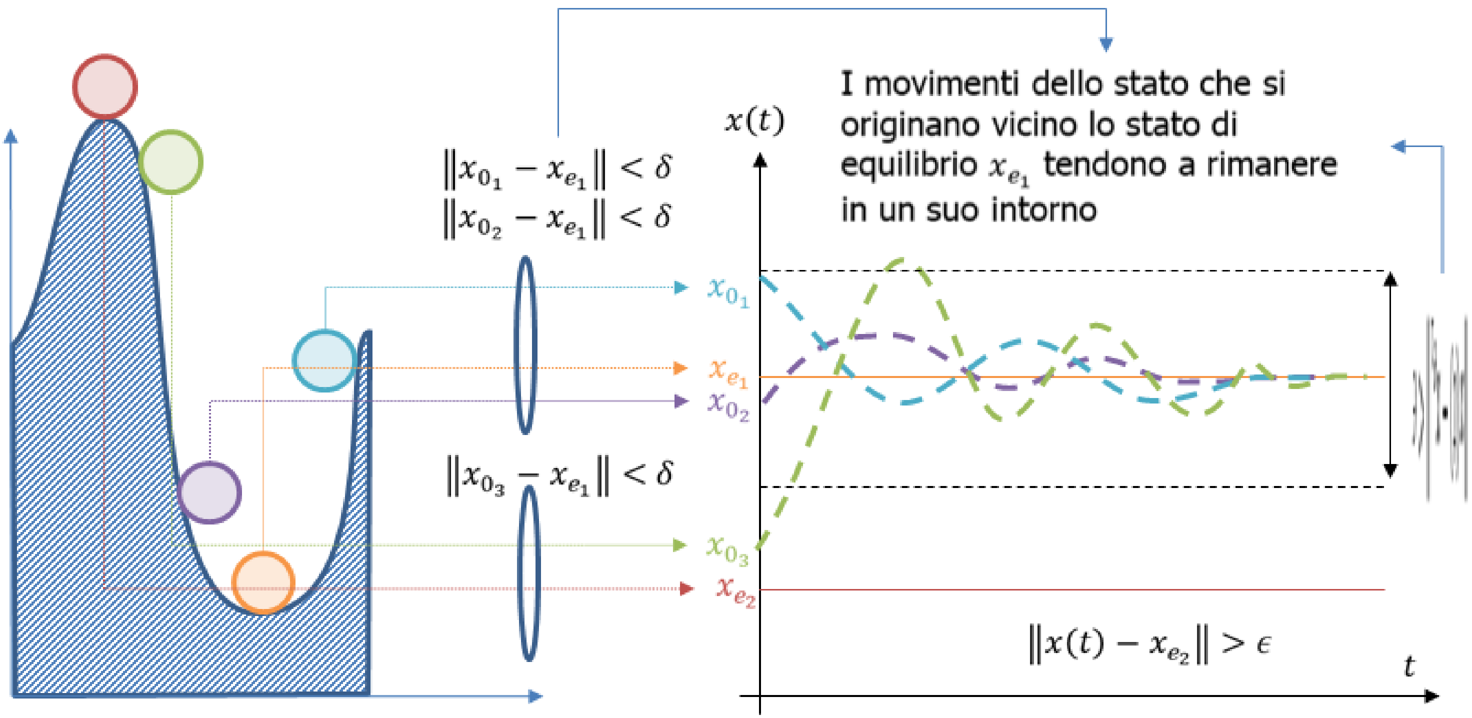
- Si consideri un sistema stazionario con ingressi costanti:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \bar{u}) \\ y(t) = g(x(t), \bar{u}) \end{cases} \quad x(t_0) = x_0$$

- Uno stato di **equilibrio** $\bar{x}$ è detto **stabile** se tutti i movimenti dello stato $x(t)$ che si generano da stati iniziali x_{0_i} sufficientemente vicini a $\bar{x}$ rimangono in suo intorno i.e. se $\exists \delta, \epsilon > 0 \colon \forall i$
  - $\|x_{0_i} - \bar{x}\| < \delta$
  - $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$
- L'equilibrio $\bar{x}$ è anche detto **equilibrio nominale**.
- Uno stato di **equilibrio** che non è stabile è detto **instabile**.
- Uno stato di equilibrio si dice **asintoticamente stabile** se è stabili e se inoltre si ha

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \bar{x}\|$$

Equilibrio stabile



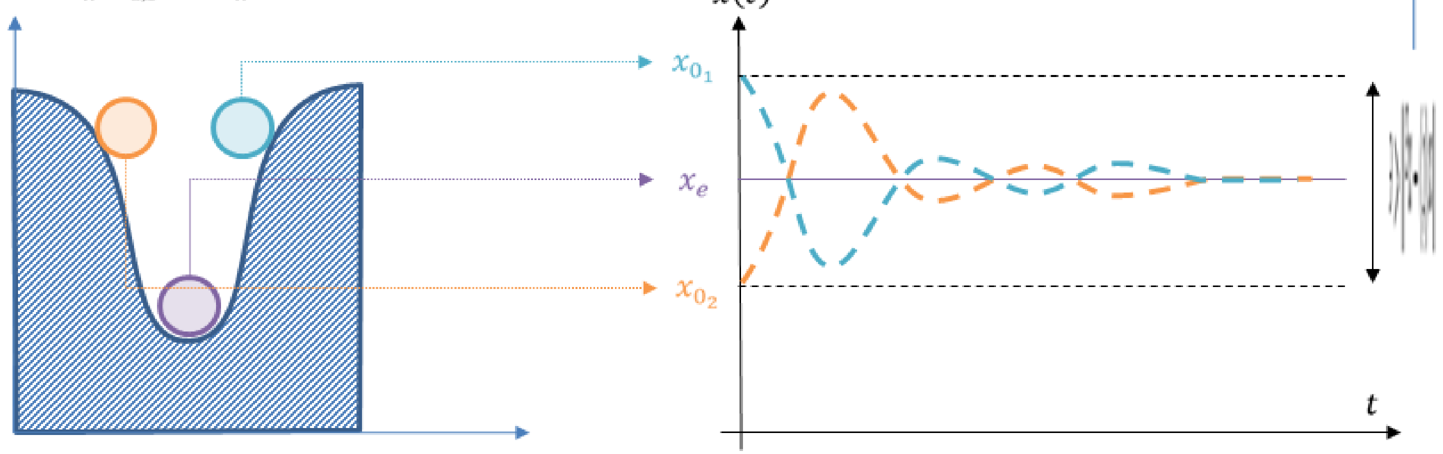
$\Rightarrow x_{e_1}$ è stabile, x_{e_2} è instabile

Equilibrio asintoticamente stabile

I movimenti dello stato che si originano vicino lo stato di equilibrio x_e tendono non solo a rimanere in un suo intorno ma a coincidere con x_e i.e.

$$\|x_{0_{1,2}} - x_e\| < \delta$$

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$



$\Rightarrow x_e$ è asintoticamente stabile

Eventi

- Nei sistemi in cui gli elementi sono rappresentativi di una realtà fisica, gli eventi sono collegabili in modo diretto o indiretto alla energia immessa o prelevata dal sistema. Nei sistemi in cui gli elementi non sono rappresentativi di una realtà fisica (realtà virtuale), gli eventi sono per lo più costituiti da dati
- Un sistema chiuso può presentare un'evoluzione solo se sottoposto ad eventi casuali. In un sistema aperto il comportamento dinamico è sempre collegato ad un evento che può essere intenzionale o casuale
- Le condizioni di funzionamento in cui si viene a trovare un sistema sono genericamente indicate come stato del sistema. Gli eventi sono le cause che alterano lo stato del sistema e quindi provocano l'evoluzione
- Come visto nei precedenti esempi, un sistema in una stato di equilibrio instabile può spostarsi da tale posizione in presenza di una perturbazione. Una perturbazione, o un evento, è quindi in grado di modificare il comportamento di un sistema.

Eventi ed evoluzione di un sistema

- Nell'analisi dei sistemi hanno interesse gli eventi che sono in grado di provocare una evoluzione. Un evento può: alterare
  - le caratteristiche intrinseche degli elementi che compongono un sistema
  - le modalità di funzionamenti di uno o più elementi
  - la configurazione e l'intensità delle interazioni
- Un sistema stabile è in grado di tornare nel suo stato di equilibrio a seguito di tali eventi sotto certe ipotesi. Intuitivamente, esistono diversi tipi di stabilità a seconda di quanto deve essere intensa una perturbazione affinché il sistema si sposti dal suo stato di equilibrio
- Inoltre, la stabilità può esser analizzata in funzione del tempo in base a quanto ci mette un sistema per tornare nel suo stato di equilibrio a seguito di una perturbazione

Eventi ed evoluzione di un sistema

- Se l'evento non è intenzionale, il sistema presenta una **evoluzione libera**. Se invece l'evento è intenzionale, l'evoluzione del sistema viene indicata come **evoluzione forzata**.
- Gli eventi intenzionali e predeterminati, in grado di provocare una significativa evoluzione forzata, sono indicati come **azioni di intervento**. Le azioni di intervento sono in genere strettamente collegate alle finalità che devono essere raggiunte dal sistema a seguito della loro applicazione.
- Per raggiungere le finalità desiderate i sistemi devono essere posti in condizione di funzionamento ben definite e devono rimanere in tali condizioni per intervalli di tempo prestabiliti. Ognuna di tale condizione di funzionamento corrisponde ad uno stato.
- Il passaggio da uno stato ad un altro avviene a seguito di una azione di intervento, ossia di un evento intenzionale.

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

CONCETTO DI EQUILIBRIO

Esercizio

Esercizio

- Si consideri un ecosistema in cui convivono solo due specie animali: prede e predatori. Si assuma che
  - la variazione della popolazione delle prede sia pari al numero di individui della popolazione per un fattore che dipende dalla differenza del numero di nascite meno il numero di morti
  - Il tasso di mortalità delle prede sia direttamente proporzionale al numero di predatori
  - La variazione della popolazione dei predatori sia pari al numero di individui della popolazione per un fattore che dipende dalla differenza tra le nascite e le morti
  - Il tasso di nascite dei predatori sia direttamente proporzionale al numero di prede
- Derivare il modello matematico del sistema dinamico descritto
- Calcolare i punti di equilibrio e discuterne le caratteristiche

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

CONCETTO DI EQUILIBRIO

Domande aperte ed esercizi

Domande aperte

- Dare la definizione di stato e uscita di equilibrio.
- Descrivere il processo per il calcolo degli stati di equilibrio di un sistema stazionario.
- Scrivere l'equazione dinamica di un sistema per cui, a seconda del valore dell'ingresso di controllo, o si hanno infiniti stati di equilibrio oppure non se ne ha nessuno.
- Si consideri un sistema caratterizzato da due stati di equilibrio x_{e_1} e x_{e_2}. Si assuma che il sistema, una volta nello stato di equilibrio x_{e_2} sia in grado di rimanerci in presenza di perturbazioni di entità arbitraria. Ipotizzare qualitativamente l'andamento dello stato nel caso in cui: $x(t_0) = x_{e_1}$ e al tempo $t_1 > t_0$ il sistema sia soggetto ad una perturbazione.
- Dare la definizione di equilibrio stabile, instabile, asintoticamente stabile.
- La proprietà di stabilità semplice implica la stabilità asintotica? E il viceversa?

Esercizi

- Si consideri il modello matematico del sistema preda-predatore:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & (A - Bx_2)x_1 \\ \dot{x}_2 & = & (Cx_1 - D)x_2 \end{cases}$$

  - Determinare gli stati di equilibrio e discuterne le proprietà

- Si consideri il circuito RLC descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & \frac{1}{C}x_2 \\ \dot{x}_2 & = & \frac{1}{L}(u - R_2x_2 - x_1) \end{cases}$$

  - Determinare gli stati di equilibrio e discuterne le proprietà

Esercizi

Esercizio #1:

- Si consideri il pendolo semplice (trascurare la forza F) in Figura #1 e si assuma che il corpo abbia massa M e che la corda sia inestensibile, di massa trascurabile e di lunghezza l. Determinare una rappresentazione nello spazio di stato del sistema e determinare tutti i punti di equilibrio del sistema

Esercizio #2:

- Risolvere l'Esercizio #1 prendendo in considerazione una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità angolare del pendolo di intensità k

Esercizio #3:

- Risolvere l'Esercizio #1 prendendo in considerazione una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità angolare del pendolo di intensità k e un forzamento.

Esercizio #4:

- Commentare le proprietà dei punti di equilibrio trovati nei precedenti punti

Figura #1.
Pendolo forzato