

百發百中穿心龍爪板

學校:
明道中學

組員:
高二2 李俊翰
高二2 卓宇恩
高二2 黃承傑

指導老師:
葉珊伶 老師

目錄

摘要

第壹章 緒論

- 一、研究動機
- 二、研究目的
- 三、研究方法

第貳章 文獻探討

- 一、緣由
- 二、蒙地卡羅方法(Monte Carlo method)
- 三、電腦輔助設計(Computer Aided Design, CAD)
- 四、運動的獨立性
- 五、VPython

第參章 研究方法與設計

- 一、初步準備
- 二、曲面弧度的計算

第肆章 研究過程

- 一、籃球初速度分析
- 二、模擬數據視覺化
- 三、曲面的計算
- 四、籃板的製作

第伍章 參考文獻

摘要

本研究發想自youtuber「Stuff Made Here」的影片「My curved basketball hoop always goes in」，旨在透過物理分析、程式設計與3D列印實作一個具有高進球率的曲面籃板。最終的成果，透過電腦程式的物理引擎模擬可得曲面籃板進球率為61.3%，正常籃板的進球率為13.1%，並實際測得現實世界中做出來的曲面籃板進球率為46%。

第壹章 緒論

一、研究動機

「鏗一」數不清第幾次重複的聲響，重複的動作，伴隨著重複的結果。近在眼前的距離，隨著每一次的出手卻感覺越來越遙遠，所剩無幾的自尊似一隻自地面伸出的手，奮力抓著腳，「只剩不到三公尺了！」彷彿能感受到他這麼吶喊著阻止我再進一步的妥協。隨後，雙手再一次舉起，腳也跟著輕跳離地，接著順應著自腳底傳上來的一股勁將球投了出去，這一系列的動作，經過不斷反覆也越發精湛與熟練，「看來就是這次了」我在心中期待著，期待著終結這一次次迎來悲劇的輪迴，期待著在漫長的路途上刻下第一座里程碑，於是抬起頭，只見剛出手的球正碰上了籃板，並在短暫的瞬間將其自我手上得到的動能轉換成造成形變的位能又在些許的損耗後換回動能，其動量也因瞬間的阻力產生的衝量而改變了水平的方向與速度，眼看正準備朝著籃框，那近在咫尺的目標邁出最後一步，然而「鏗一」的一響，又一次將我拉回了現實，如同狗頭鏢上的刀片落下時的俐落，又一次砍下了我剛探出頭的希望，眼看著剛落地的球正隨著掉下後的慣性逐漸滾去，並在地面摩擦力的作用下愈趨愈緩，那不知遠在多久之前，燃燒於我心中的滿腔熱血，也正如被棄置於太空中隨者時間流失熱量，最後平息在冰冷的-273°C。

二、研究目的

1. 做出能模擬投籃狀況的程式
2. 計算出籃板需要的弧度
3. 製作出最大化進球數的籃板

三、研究方法

首先，透過程式設計模擬投籃的軌跡以及物體間的碰撞，並利用蒙地卡羅法分析數據，計算出籃板所需的彎曲弧度。經過大量數據收集後進行3D建模，並尋求學校生活科技老師提供技術與設備方面的協助，實際做出一個能最大化進球數的籃板。

第貳章 文獻探討

一、緣由

由於我們做的主題較無前人進行相關的學術研究或理論探討，並且在研究的過程中涉及了一些我們尚未熟悉的技術與知識，因此我們藉由探討所需的各領域之相關文獻分別來補足我們所需使用到的技能與知識，協助我們完成這項研究。

二、蒙地卡羅方法(Monte Carlo method)

蒙地卡羅方法是一種在電腦出現後普及的演算法，被大量使用於難以直接分析的現象。其運作原理是以機率統計學作為基礎，透過大量模擬樣本使結果趨近於真實狀況。常見的運用包括估計圓周率、函數積分等等。

此法的運作基礎在於「以極大數量的樣本盡可能逼近樣本空間中的全部元素」，因此在電腦出現前，人們只能手動製造樣本，導致效率低落、成效不佳。然而這並不代表沒人使用。舉例來說，投針實驗由法國科學家Buffon 在1777 年提出，方法是在桌面畫距離為 $2a$ 的平行橫線，再將長度為 $2l$ 的針反覆丟在桌面上，然後計算所投針的總次數(N)及針與橫線相交的次數(n)，如此Buffon 便宣稱：圓周率 $\pi \approx \frac{2lN}{an}$ 。(鄭文吉, 2012, P27)布豐的實驗極可能為歷史上最早的蒙地卡羅法原理應用，而其後也陸續出現更多以此方法來研究的實驗。

以我們的實驗來說，因為「投籃」這個行為包含極多不確定因素，難以用一個簡化過的運動狀態來描述，因此我們選擇以此演算法，在電腦上運行程式，並在每一次的投籃模擬中使用不同的亂數變數(像是投球出手點、投球初速、仰角等等)，以量取勝，希望達到我們預期的效果。

三、電腦輔助設計(Computer Aided Design, CAD)

電腦輔助設計是指運用了電腦的計算與圖形呈現功能協助進行設計。在設計的過程中可以利用電腦進行大量的運算、分析與比較來決定出最佳的方案。另外，還能將所有的設計資訊，包含文字、圖形以及參數儲存在電腦的記憶體中，快速檢索。並且透過特定的程式能夠將電腦計算的結果直接轉換成工作圖，節省其中複雜的程序，之後只需要在電腦計算出的圖形上再進行細項的調整，如：大小、方向、角度等，就能完成整個製圖的程序。

在這次進行的實驗當中，若以傳統的方式製圖將無法結合利用程式計算出的結果，而利用了電腦輔助設計的技術，就能夠把電腦計算出的組成籃板的最佳曲面轉換成3D的圖形呈現，作為最後成品的草圖。

四、運動的獨立性

若在忽略除重力之外一切外力之影響，以水平拋射與自由落體為例：**將一顆黃球與一顆綠球從相同的位置分別自由釋放和沿水平方向射出，每隔一段時間紀錄兩球的位置。被水平拋射的綠球，同時往前飛也往下掉，其在水平方向做等速運動，但在任意時刻，其在鉛直方向的位置與速度皆與黃球相同，亦即也做初速為零的自由落體運動，並不受水平方向運動的影響，由此可見物體沿相互垂直的方向之運動具有獨立性。**(龍騰文化 選修物理 I, p85)

在三維空間當中，一物體開始運動後，其隨時間變化所行經的各位置點可依笛卡爾座標表示為一個三維座標，並且依據運動的獨立性，其軌跡可以三個相互垂直的軸上位置對時間之變化圖表示。

五、VPython

VPython是運用Python的程式語言進行編譯的三維模擬動畫編譯器。結合了Python較簡潔的程式串與外掛模組visual的功能，VPython能夠以簡單的指令做出立體模型。例如：當你需要做出一顆球時，只需要在編譯的空間中輸入「`from visual import * sphere()`」並按下F5，即可呼叫出一個球體的模型。另外，利用滑鼠還可以改變視角以及遠近。除了預設的條件，在宣告時如果加入更多的指令也可以自訂出顏色、大小、材質…等細項使模型更貼近需求，接著加入有關運動方式的程式便能完成需要模擬的動畫。

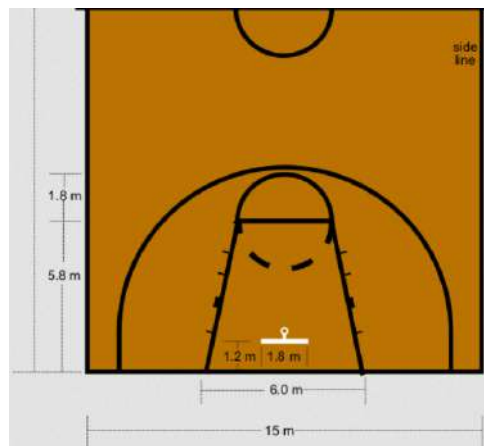
第參章 研究準備與設計

一、初步準備

要研究「投籃」的這個行為，不能光只是隨機生成一些數據，我們必須實際去籃球場投籃，蒐集真實的資料，才不會產出如「籃球投出去的初速度為秒速50公尺」等不切實際的參數。因此，我們利用一點時間拍下幾部正常的投籃影片，嘗試用我們所拍的影片找出投籃的初速度。同時，我們也上網查詢一些籃球場的規格規範，以便我們設計模擬用的程式碼。



圖（一）我們去籃球場投籃 蒐集數據



圖（二）一個標準籃球場的規格(圖源:截自維基百科)

在這裡，我們使用Tracker這款軟體作為分析工具。Tracker是一款物理分析程式，透過影片中的籃球定位，我們就可以分析每一幀畫面，看籃球移動了多遠，並藉此找出其移動速度(搭配前述的運動的獨立性做分析運算)。

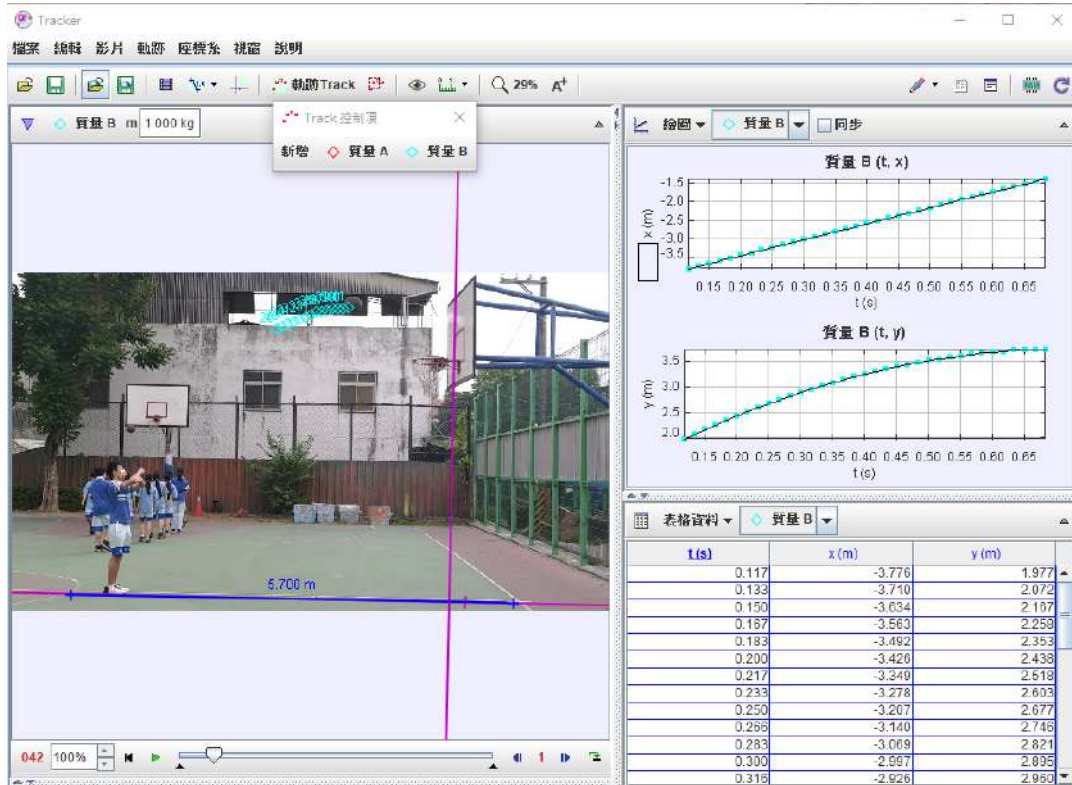
二、曲面弧度的計算

簡單來說，要使進球數最大化，勢必不能用平整的籃板，而這也是我們研究的重點之一。於第肆章會詳述我們打算如何執行這一部分。

第肆章 研究過程

一、籃球初速度分析

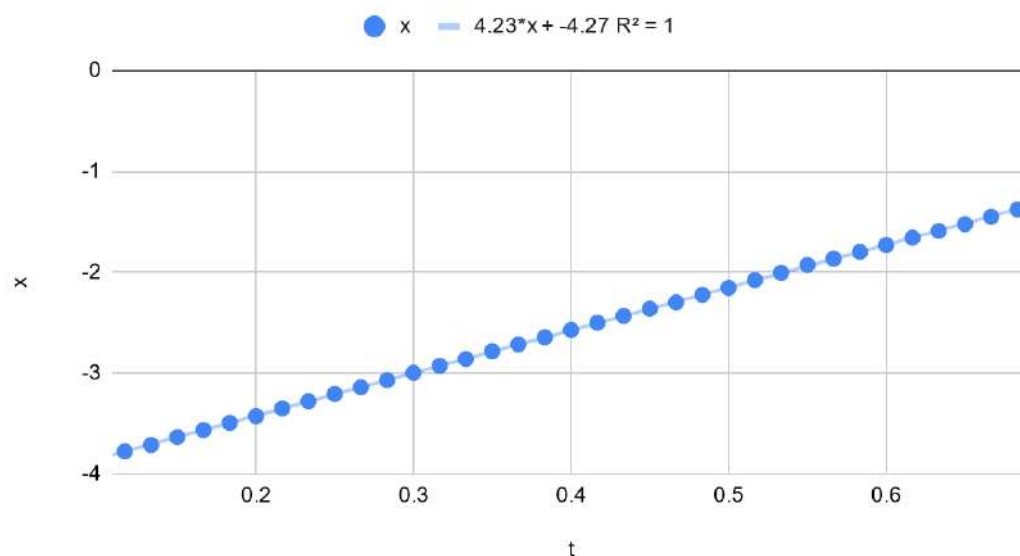
以下圖為例說明。



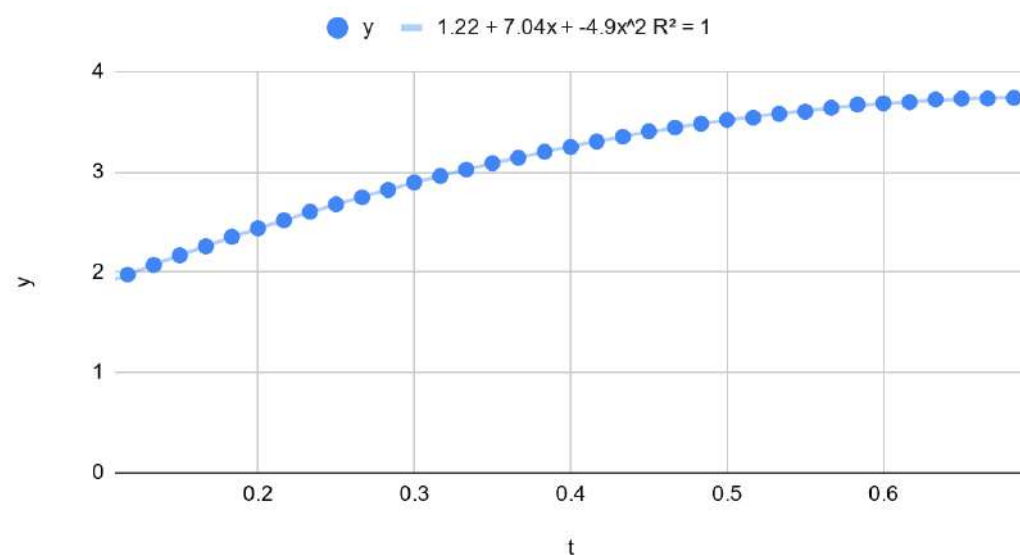
圖（三）某次投籃得到的數據

將影片導入Tracker後，我們在影片中架設虛擬座標軸(圖中兩條互相垂直的線)，並訂定比例尺。在拍攝影片時，我們刻意讓籃球場中線入鏡的目的，即為其可提供參考用距離做為比例尺。並且，我們在同一平面上投球，可以降低分析的複雜度。雖然後續模擬為三維斜拋，但為了方便分析初速，我們先簡化為二維斜拋運動。我們運用Tracker內建的質點追蹤功能尋找球的軌跡(圖右下角即為軌跡座標)，並將其數據做圖(如圖三右上角的系統內建圖，及圖四使用google試算表做圖)。

縱軸：x，橫軸：t



縱軸：y，橫軸：t



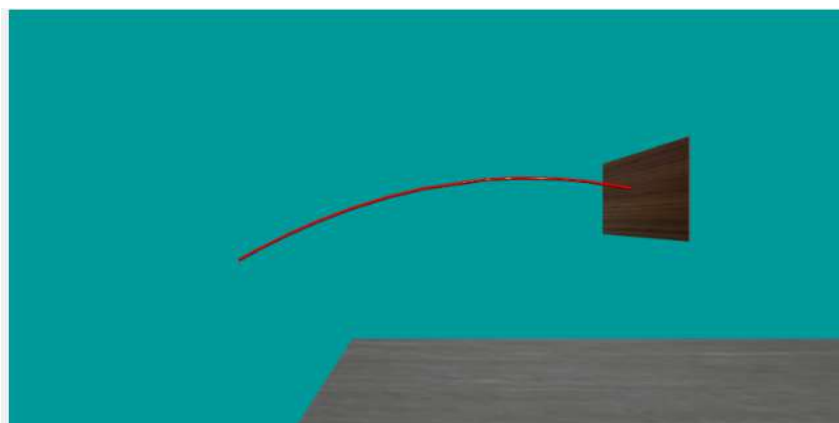
圖（四）數據作圖

根據二維斜拋公式 $x = x_0 + V_x \times t$ 及 $y = y_0 + V_y \times t - \frac{1}{2}gt^2$ ，將其與趨勢線方程式作比較，我們可以知道這兩條趨勢線的一次項即為 x 與 y 方向上的初速度。將其平方相加開根號即可得出我們的初速度 $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \approx 8.21(m/s)$ ，於是我們知道普通人投籃的初速度約為每秒8公尺左右。為了得出更好的範圍，我們多拍了幾部影片，做一樣的分析。

二、模擬數據視覺化

有了程式，我們便能把模擬投籃的工作交給電腦。我們提供實際測得的數據，並指定想模擬的投籃點與其他數據範圍，便能讓電腦產生隨機變數，自動運算出一次投籃運動的初速、仰角、投球點、位移、時間、落點等相關數值。透過更改程式碼的常數，我們便可以針對不同因素探討其對路徑的影響，且只要電腦跑得動，上億次都不是問題。

然而，單看程式碼是很不直觀的。甚至有時候連程式發生不明顯的問題都看不出來，導致錯誤資料的產生。為了將電腦的模擬過程視覺化，我們使用了vpython這個附加模組。



圖（五）VPython在執行時生成的動畫

VPython是Python中一個相當實用的三維圖形庫。只要在程式碼當中加上這幾行，便能在每次執行模擬時生成一個該次模擬的物體軌跡，讓我們確定模擬的結果是合理的。但是，動畫製作會更吃電腦性能及拖累程式運作速度，因此我們僅在確認程式的正確性時將結果視覺化，真正生成數據時我們將不會產生動畫。

三、曲面的計算

（一）失敗的嘗試

1、想法

對於每個籃板點位，隨機生成許多投籃點往該點位投籃，分析進球需要的籃板面法向量，即為(擊中籃板的法向量+擊中點到籃框的法向量)/2。得到盡可能多個位置的法向量後，透過微積分還原籃板的曲面方程式。

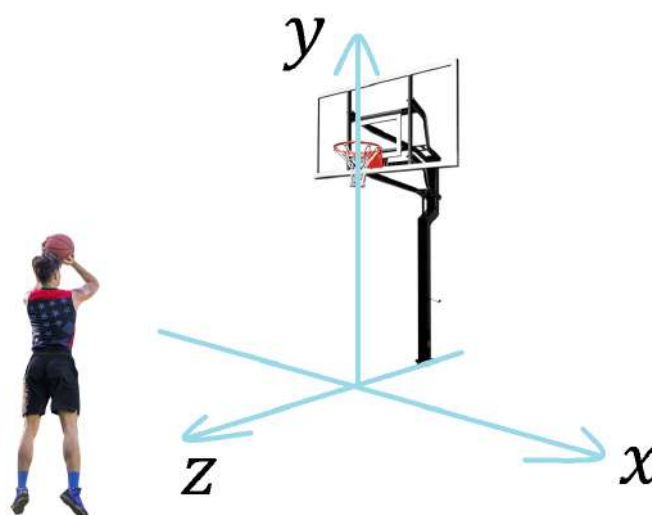
2、障礙與困難點

大量計算與近似造成誤差過大，且法向量不唯一，因而無法導出唯一的籃板曲面方程式。由於此方法效率差，不容易實作，因此我們用另一種方法來計算。

（二）成功的嘗試

1、建構方法

首先，我們先定義計算時的座標軸，定義Y軸朝上、X軸朝右、Z軸指向觀察者，並以籃板中央的底部為原點，如圖（六）。



圖（六）座標軸定義（圖源：研究者繪）

開始進行曲面的建構時，我們將其初始化為一個X-Y方向的平面，並於平面上等距放置許多座標點，使其成為棋盤式的網狀結構，藉此將曲面分割為眾多子面，以供接下來的計算使用。同時，我們先定義**最佳法向量**為能使最多球反彈至籃框的法向量，利用暴力枚舉法將各種初速與投籃仰角皆枚舉一輪，並取其法向量平均值，成為最佳法向量。以下建構過程中，皆只有改變各點Z座標，便能各子面符合最佳法向量。

棋盤式的網狀結構上有 $(w + 1) * (h + 1)$ 個座標點，也代表有 $w * h$ 個子面，而左下角的點為`mesh[0][0]`，右上角的點則為`mesh[w][h]`，且定義`mesh[w/2][0]`為基準點，在建構過程中座標不變。有了各點的命名，我們便

可以進入到計算的過程，可以分為兩部分：1. 基準線的建構 2. 剩餘點的建構。

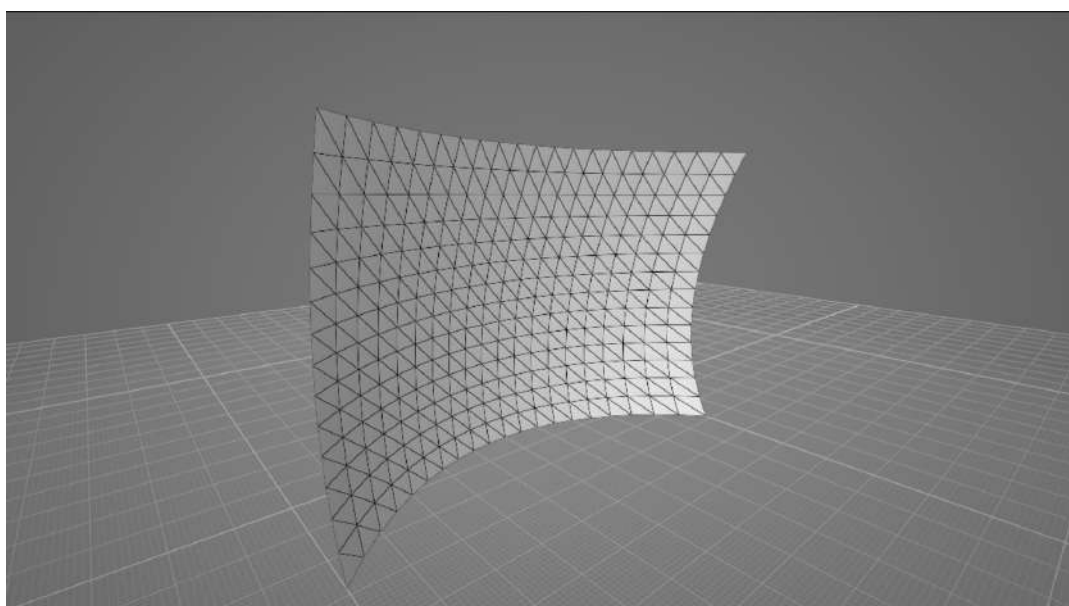
為了建立新點，我們必須知道該位置的法向量，但為了求其法向量，我們又必須知道其點座標，這便形成相當棘手的輪迴問題。為了簡化問題，我們使用一個折衷的方案——新點改用鄰居點的法向量。這將會帶來誤差，但如果把點間的距離不斷縮小，我們便可得到極近似的曲面，換句話說，隨著點的間距減少，我們的曲面變越接近正確值。

曲面上有些點較為特殊，與基準點有相同的 X 座標或 Y 座標，其所構成的線稱之為基準線。因為這個性質，使這些點僅需一個鄰居點即可計算出位置，這些點分別位於中央線($mesh[w/2][0 \sim (h + 1)]$)與底部線($mesh[0 \sim (w + 1)][0]$)上。利用外積，我們便可以一一建立曲面上倒 T 字形上的點。

至於剩下的點，便皆有兩個鄰居點可做為參考。利用兩個鄰居點的座標與最佳法向量，我們便可以算出平面方程式，而新點也會在此之上，套入 X Y 座標後便可求出新點座標（因為只改變 Z 座標）。

2、模型的生成

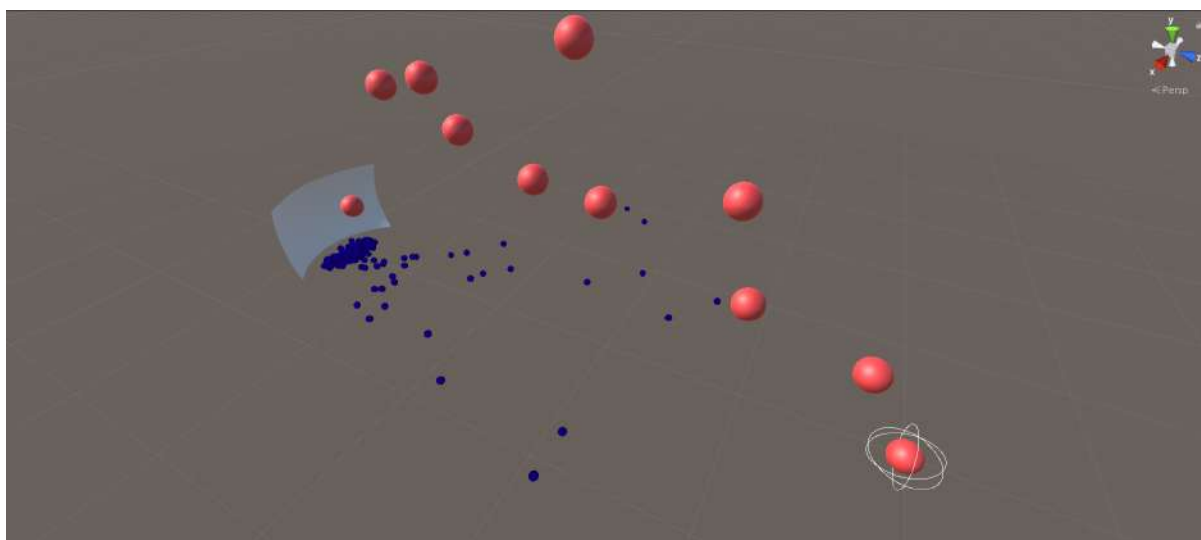
有了以整個曲面的各點座標後，我們便可以利用python中的meshio模組，將計算出的點座標輸出成3D檔案，供未來測試及成品製造應用，圖（七）為輸出後的模型。



圖（七）生成的模型範例

3、模型測試（軟體）

模型生成出來後，我們將其放入Unity遊戲引擎並編寫一小段程式碼進行測試，由圖（八）中可見，大多數反彈後的球的落點（圖中藍點）皆集中在籃框所在位置，而外圍零星散布的落點則為敲擊到板面邊緣任意反彈的結果，測試結果顯示籃板確實會使大部分的球彈向籃框所在位置。經過模擬統計，曲面籃板的進球率為61.3%，而一般平面籃板的進球率僅有13.1%。



圖（八）籃球落點分析

四、籃板的製作

（一）3D列印

我們選擇以3D列印的方式來製作出籃板的實體，優缺點分別如下：

表（一）3 D列印優缺點

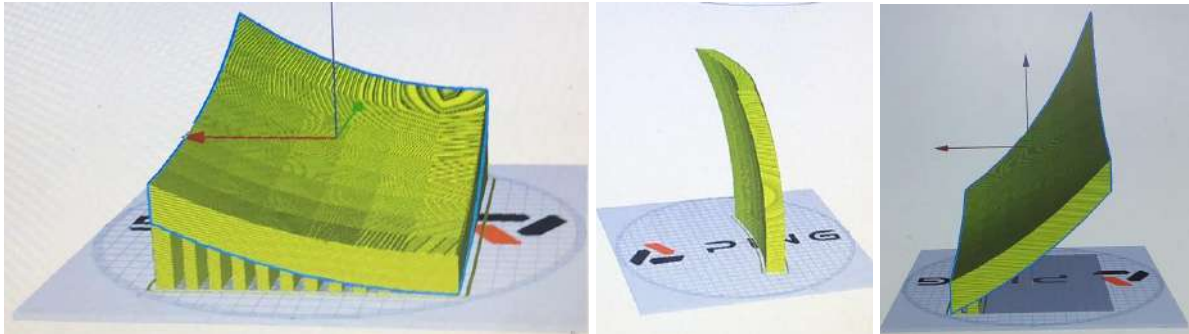
優點	缺點
成品較為精緻	成品較脆弱
材料相對便宜	大小因機器規模而有所限制
加工較容易	

針對強度不足的部分，我們預計在3D列印後，在表面塗上壓克力補強；至於大小的限制，我們首先將整個籃板的大小減少(60 cm * 45 cm)，曲面厚度設定為3cm，接著再將整塊模型切成8塊，一次印一塊，可以大幅降低3D列印的複雜度，完美解決機器大小限制的困難點。

（二）切塊與方向選定

在分塊列印時，也有一些細項需要考慮。考量到3D列印機的範圍有限以及支柱的成本，切塊後的方向調整相當重要，如下圖（九）及圖（十一）就不太可能成為我們的選擇，因為其下方需要大量的支架才能列印，大幅增加了成本。

因此，我們最後選擇圖（十）的方式列印。



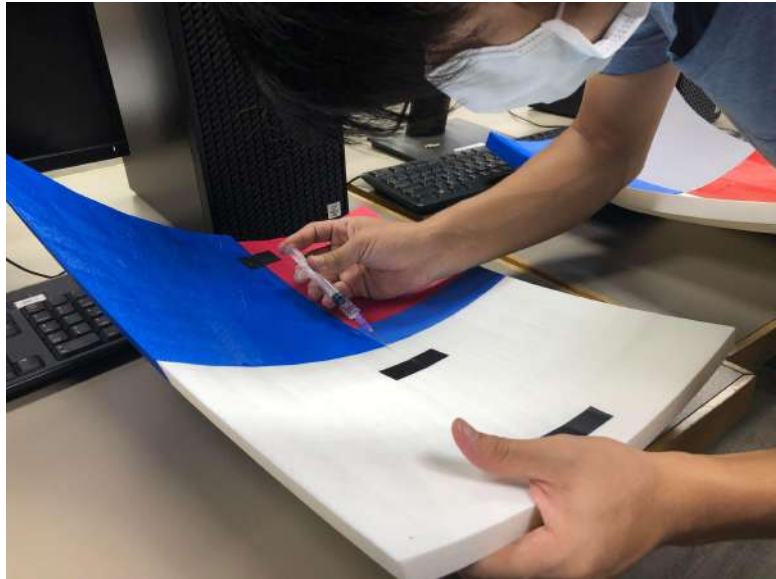
圖（九）至圖（十一） PING Slicer列印畫面



圖（十二） 3D印表機列印過程



圖（十三） 3D列印成品



圖（十四）黏合的過程



圖（十五）黏合後的成品

（三）實測

- 1、實測方式：我們實際對製作出的籃板投100顆球並記錄進球的數目。
- 2、實測結果：我們實測出的進球率為46%



圖（十六）睽違已久的進球

3、實測結果的機率與軟體模擬的機率相差了15.3%，兩者之間的落差經推測可能源於以下幾項原因：

（1）籃框高度與距離：僅能在家中進行實驗的情況下，難以滿足最初設定的兩米高的籃框，以及距離籃框兩米的距離。這樣會進而造成球的軌跡與入射時的角度和速度皆和模擬時不同。

（2）籃球材質不同：為了因應之前將籃框的尺寸縮小了，我們也只能找較小的球，然而無法找到與籃球相同材質的球，取而代之的是更有彈性的橡皮球。而造成的影響除了接觸時的彈性係數改變，另外也影響了出手時的速度。

（3）以桶子取代籃框：因為球的尺寸改變，我們找不到適當的籃框，只能改用口徑較恰當的桶子。然而這麼做的缺點便是球很容易進了之後碰到內緣又彈出來，影響對於進球數的觀測。

第伍章 參考文獻

1. 鄭文吉. 2012. 行政院農業委員會高雄區農業改良場研究彙報 第 23 卷第 1 期
 2. 龍騰文化 選修物理 I
 3. [VPython: 3D programming for ordinary mortals](#) 作者：B. Sherwood and R. Chabay
 4. C++程式設計導論
-

分工表

李俊翰	研究過程/生成模型程式/報告/籃板製作
卓宇恩	研究方法/動機/簡報/模型/報告/籃板製作/實測
黃承傑	研究方法與準備/生成動畫/報告/籃板製作

個人學習心得

李俊翰	我認為這次專題最困難的過程是籃板生成的部分，其中想過無數種生成方法，每種方案都有其不完美處，最後才選擇犧牲最少的做法。反覆失敗的過程訓練的是我的毅力，每當一方案失敗時，一切又必須重頭開始。專題研究彷彿是在挑戰我解決事情的能力，需要由各方面思考，並整合自己的想法，最後付諸實現。
卓宇恩	這次的專題我們是從YouTube上的影片進行發想的，而且又沒有其他先例所以在製作中要克服很多從來沒有接觸過的問題，並且都只能夠靠我們自己慢慢摸索。在過程中，我深刻的體會到擁有一個專長的能力有多麼的重要，因為我對很多東西的使用與操作都很陌生，所以經常幫不上忙，有時甚至需要其他人教我。但也因為有遇到那麼多的問題，我在製作的過程中也學到了很多。
黃承傑	儘管這件專題看起來很淺顯易懂，藏在程式裡面的計算量其實很龐大、複雜。實際上，我在執行的過程大部分都在兜一些沒意義的圈，但我不認為這是在浪費時間。因為這些錯誤，我們從中慢慢去修正問題，找出更好的方式，若不是這些錯誤，我們可能沒辦法完成這次的專題成果。