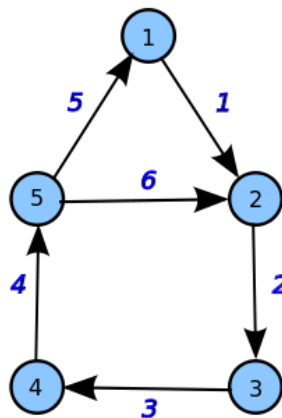


# Introduction à l'Algorithmique – TP 3

## Contexte

En informatique, on définit un graphe comme un ensemble de sommets (ou nœuds) reliés par des arêtes<sup>1</sup>. L'ensemble des arêtes (ou arcs) entre nœuds forme une figure similaire à un réseau comme par exemple sur le schéma ci-dessous :



Les sommets sont les cellules bleues et les arêtes les segments numérotés. On dira par exemple que le sommet 3 et le sommet 4 sont reliés par l'arête 3. On note que les arêtes ont une orientation. L'arête 3 sort du sommet 3 pour rentrer dans le sommet 4.

Il existe énormément de façons de représenter un graphe au niveau structure de données. On utilisera ici une représentation simple basée sur la notion de **matrice d'incidence**. On définit une matrice d'incidence comme une matrice qui décrit le graphe en indiquant quelles arêtes arrivent sur quels sommets.

Ainsi, le coefficient de la matrice d'incidence en ligne  $i$  et en colonne  $j$  a pour valeur :

- +1 si l'arête  $X_j$  entre dans le sommet  $V_i$
- -1 si l'arête  $X_j$  sort du sommet  $V_i$
- 0 sinon

Si l'on reprend le graphe précédent, qui possède 5 sommets et 6 arêtes, la matrice d'incidence aura donc 5 lignes et 6 colonnes :

- le sommet 1 est l'aboutissement des arcs 1 (qui sort) et 5 (qui entre)
- le sommet 2 est l'aboutissement des arcs 1 (qui entre), 2 (qui sort) et 6 (qui entre)
- le sommet 3 est l'aboutissement des arcs 2 (qui entre) et 3 (qui sort)
- le sommet 4 est l'aboutissement des arcs 3 (qui entre) et 4 (qui sort)
- le sommet 5 est l'aboutissement des arcs 4 (qui entre), 5 (qui sort) et 6 (qui sort)

<sup>1</sup> Définition et illustration issue de [https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice\\_d%27incidence](https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_d%27incidence)

Ce qui donne la matrice d'incidence :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que chaque colonne a une somme nulle, puisqu'un arc sort forcément d'un sommet pour entrer dans un autre, même s'il s'agit du même sommet (cas d'une boucle).

### Exercice 1

Définissez une structure de données représentant un graphe via sa matrice d'incidence. Ce type de données devra supporter les opérations suivantes :

- Ajouter un sommet en lui affectant un indice entier non encore attribué
- Ajouter une arête entre deux sommets repérés par leurs indices
- Donner la liste des sommets directement adjacent à un sommet donné
- Obtenir le nombre de sommets du graphe
- Obtenir le nombre d'arêtes du graphe ;

Donner une implémentation en C++ de cette structure de données et des fonctions associées. Utiliser cette implémentation pour représenter le graphe ci-dessus et vérifier le contenu de votre structure.

### Exercice 2

Donner l'algorithme et l'implémentation C++ d'une fonction permettant de déterminer le degré sortant d'un sommet, c'est-à-dire le nombre d'arêtes sortant d'un sommet donné ; et son degré entrant, c'est-à-dire le nombre d'arêtes entrant dans un sommet donné.

Quelles sont les complexités de chacune de ces fonctions ?

### Exercice 3

Donner l'algorithme et l'implémentation d'une fonction C++ qui permet de vérifier s'il existe un chemin entre deux sommets quelconques d'un graphe. Donner sa complexité en fonction du nombre de sommets et du nombre d'arêtes. Notez qu'on ne s'intéresse qu'à l'existence du chemin, pas à sa longueur qui peut être quelconque.