ヒルベルト空間入門の入門

大下範晃

May 2019

概要

線形空間からヒルベルト空間までの入門記事を書く．また，機械学習へのヒルベルト空間の応用も書く．

線形空間

定義　線形空間
以下の 2 条件件を満たす K 上の集合 V を線形空間という
(K とは厳密には加減乗除の四則演算ができる集合,「体」であるが，今回に限っては実数全体 R または複素数全体 C のどちらかと考えてもらっても支障はないと思う．)

（1）$u, v \in V$ に対して「和」と呼ばれる第三の元が定まり，次が成り立つ．
・任意の $u, v \in V$ について $u + v = v + u$
・任意の $u, v, w \in V$ について $(u + v) + w = u + (v + w)$
・ある $o \in V$ と任意の $v \in V$ に対して $v + o = v$ なる o が存在する．(零ベクトル)
・各 $v \in V$ に対して $v + w = o$ なる $w \in V$ が存在する.（逆ベクトル）

（2）各 $a \in K$ と $v \in V$ に対し $av \in V$ がただ一つに決まり，以下を満たす．(またこの av をベクトル v のスカラー倍または単に a 倍という)
・$1 \in K$ と任意の $v \in V$ に対し，$1v = v$
・任意の $a, b \in K$ と $u, v \in V$ に対して，$(ab)v = a(bv)$
・任意の $a, b \in K$ と $u, v \in V$ に対して $a(v + u) = au + av$ である．また,$(a + b)u = au + bu$ である．

定義を見てもらうと自然な性質，交換法則，結合法則，定数倍などの性質があることがわかる．また，普段何気なくベクトルとは,「向き」と「大きさ」をもった「量」であるなどの説明があったかもしれないが，数学的には線形空間の 2 条件を満たして，その元のことをベクトルという．

内積空間 (計量線形空間)

内積空間 (計量線形空間) とは線形空間に内積を導入した空間の事である．
なぜ内積を導入するのだろう．線形空間でも基底が指定されれば，基底を基準として座標が与えられる．それで足りないのだろうか．
実は線形空間では，基底を基準として座標を与えるが，その上に与えられている構造は「加法」と「スカラー積」だけである．
しかし，いつも私たちが想像している空間や平面は長さや角がある．
線形空間に内積を導入することによって，自然な空間へと拡張したいと思う．

定義　内積
V の 2 つのべくとる a, b に対して実数 (a, b) が対応して次の性質をみたすとき $< a, b >$ を a と b の内積という

・$< a, a >\geq 0;$ ＝がなりたつときは $a = 0$ のときに限る．
・$< a.b >=< b, a >$
・実数 α, β に対して

$$< \alpha a + \beta b, c >= \alpha < a, c > +\beta < b, c >$$

定義　内積空間 (計量線形空間)
線形空間に内積を導入した空間を内積空間 (計量線形空間) という．
数学的な定義は以下である．

K 上の線形空間 V がさらに次の公理を満たすとき V を内積空間（計量線形空間）という．任意の $u, v \in V$ に足して，内積と称する K の元（$< u, v >$ で表す.）が定まり次の性質をもつ．

・$< u, v_1 + v_2 >=< u, v_1 > + < u, v_2 >,$
　$< u_1 + u_2, v >=< u_1, v > + < u_2, v >$
・$< cu, v >= c < u, v >, \quad < u, cv >= \bar{c} < u, v >$ ・$< u, v >= \overline{< v, u >}$
・$< u, u >$ は 0 または正の実数である，$< u, u >= 0$ となるのは $x = o$ のときにかぎる．

$K = R$ ならばバーは不要である．実内積空間（実計量線形空間）のことをユークリッド（線形）空間ともいい，複素内積空間（複素計量線形空間）のことをユニタリ空間とも言う．

内積空間が自然な空間だとするならば，空間の座標を決定づける自然な基底が欲しい．
それが正規直交基底である．

定義　正規直交基底
内積空間 V のベクトル $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ が互いに直交し，かつどのベクトルの長さも 1 に等しいとき，正規直交系であるという．
とくにそれが内積空間 V の基底であるとき，正規直交基底であるという．
くどいようだが数式で書くと次のようになる．

・$\|e_i\| = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$
・$i \neq j$ のとき $< e_i, e_j >= 0$ を満たすとき正規直交基底であるという．

正規直交基底の作り方にはグラム・シュミットの直交化法がある．

定理　正規直交基底による表現定理
$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ が有限次元線形空間 V の正規直交基底ならば，任意のベクトル $v \in V$ は，
$v =< v, e_1 > e_1 + \cdots + < v, e_n > e_n \quad (1)$
と書ける．ゆえに
$\|v\|^2 = | < v, e_1 > |^2 + \cdots + | < v, e_n > |^2 \quad (2)$

証明

$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ が基底であることにより，$v = v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n$ と書ける．これと基底ベクトルの１つと e_j との内積をとると，$< e_i, e_j >= \delta_{ij}$（$\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ.）だから，

$$< v, e_j >=< v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n, e_j >= v_1 < e_1, e_j > + \cdots + v_n < e_n, e_j >= v_j$$

よって（１）がなりたつ．
（２）については $< v, v >= \sum |v_j|^2$ だから，この表現により定理はなりたつ．

ヒルベルト空間

完備（すなわち内積空間に存在する任意のコーシー列が収束すること）な内積空間のことをヒルベルト空間という.

References

線形という構造へ　志賀浩二
線形性・固有値・テンソル　原啓介
線型代数入門　齋藤正彦