



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

MATH0488-1 ÉLÉMENTS DE PROCESSUS STOCHASTIQUES

---

# Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov pour la détection de communautés dans un graphe

---

*Professeur :*  
Pierre GEURTS

*Groupe :*  
Maxime FIRRINCIELI  
Romain LAMBERMONT  
Arthur LOUIS

7 avril 2022

## Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Première partie : chaînes de Markov et algorithme MCMC</b>                         | <b>1</b> |
| 1.1      | Chaînes de Markov . . . . .   | 1        |
| 1.1.1    | . . . . .   | 1        |
| 1.1.2    | . . . . .   | 2        |
| 1.1.3    | . . . . .   | 2        |
| 1.1.4    | . . . . .   | 2        |
| 1.2      | Méthode MCMC : analyse théorique dans le cas fini . . . . .                           | 2        |
| 1.2.1    | . . . . .   | 3        |
| 1.2.2    | . . . . .   | 3        |
| 1.3      | Méthode MCMC : illustration sur un exemple simple . . . . .                           | 3        |
| 1.3.1    | . . . . .   | 4        |
| 1.3.2    | . . . . .   | 4        |
| 1.3.3    | . . . . .   | 4        |
| <b>2</b> | <b>Deuxième partie : détection de communautés dans un graphe par algorithmes MCMC</b> | <b>4</b> |
| 2.1      | Etude théorique . . . . .   | 4        |
| 2.1.1    | . . . . .   | 4        |
| 2.1.2    | . . . . .   | 4        |
| 2.1.3    | . . . . .   | 4        |
| 2.1.4    | . . . . .   | 4        |
| 2.2      | Analyse expérimentale . . . . .   | 4        |
| 2.2.1    | . . . . .   | 4        |
| 2.2.2    | . . . . .   | 4        |
| 2.3      | Application à un grand graphe . . . . .   | 4        |

## Table des figures

|   |  |   |
|---|--|---|
| 1 | Évolution des probabilités dans une distribution de départ uniforme . . . . .    | 1 |
| 2 | Évolution des probabilités dans une distribution de départ fixée sur 3 . . . . . | 2 |

## Liste des tableaux

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | Proportion des états obtenus en fonction de nombre de pas . . . . . | 2 |
|---|---|---|

## Introduction

Ce projet a pour but de détecter les communautés dans un graphe grâce aux chaînes de Markov et par les méthodes de Monte-Carlo. L'utilisation de ces outils nous permettra de détecter efficacement les communautés dans un graphe. Le projet sera constitué en deux parties. Une première se focalisera sur la familiarisation avec les chaînes de Markov et les méthodes de Monte-Carlo, plus précisément l'algorithme de Metropolis-Hastings, tandis que la seconde sera le cœur du projet avec la recherche de communautés dans un graphe.

## 1 Première partie : chaînes de Markov et algorithme MCMC

### 1.1 Chaînes de Markov

Rappelons d'abord brièvement ce qu'est une chaîne de Markov. Une chaîne de Markov est un outil mathématique stochastique, qui utilise un principe de "non-mémoire". Tout état d'un système est simplement calculé à partir du précédent, ce qui en facilite l'analyse.

Ces chaînes sont simplement décrites mathématiquement comme suit avec  $X_1, X_2, \dots, X_t$  une suite de variables aléatoires qui définit une chaîne de Markov si (pour  $t > 1$ ) elle suit cette relation :

$$\mathbb{P}(X_1, X_2, \dots, X_t) = \mathbb{P}(X_1) \prod_{l=2}^t \mathbb{P}(X_l | X_{l-1})$$

#### 1.1.1

Nous calculons donc pour des valeurs de  $t$  croissantes les différentes valeurs demandées, ici avec  $t = 20$  (suffit pour avoir convergé) :

- Cas de base distribué uniformément :  $\mathbb{P}(X_t = x) = (0.3488 \quad 0.0698 \quad 0.2326 \quad 0.3488)$  avec  $x = 1, 2, 3, 4$
- Cas de base fixé :  $\mathbb{P}(X_t = x) = (0.3488 \quad 0.0698 \quad 0.2326 \quad 0.3488)$  avec  $x = 1, 2, 3, 4$

$$Q^t = \begin{pmatrix} 0.3488 & 0.0698 & 0.2325 & 0.3488 \\ 0.3488 & 0.0698 & 0.2326 & 0.3488 \\ 0.3488 & 0.0698 & 0.2326 & 0.3488 \\ 0.3488 & 0.0698 & 0.2326 & 0.3488 \end{pmatrix}$$

On remarque donc bien une convergence vers des probabilités et ceci peut importe le cas de départ, on peut montrer cette convergence sur les figures ci-dessous :

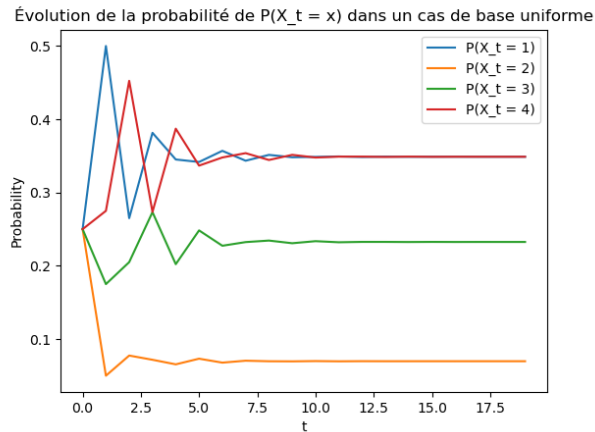


FIGURE 1 – Évolution des probabilités dans une distribution de départ uniforme

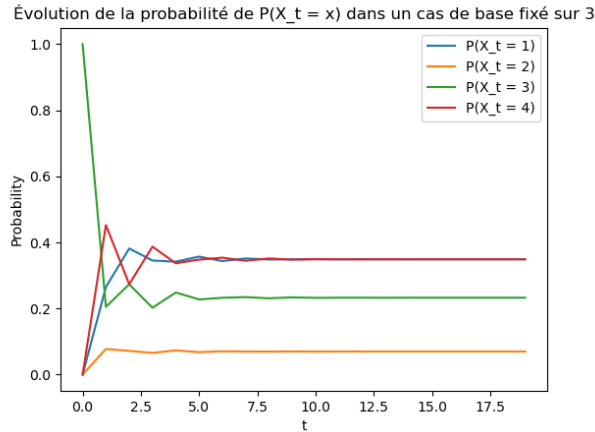


FIGURE 2 – Évolution des probabilités dans une distribution de départ fixée sur 3

### 1.1.2

Afin de déduire la distribution stationnaire  $\pi_\infty$  de notre chaîne qui est décrite comme suit :

$$[\pi_\infty]_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = j)$$

Nous allons simplement calculer  $\mathbb{P}(X_t)$  avec un grand  $t$  ce qui nous donne :

$$\pi_\infty = (0.3488 \quad 0.0698 \quad 0.2326 \quad 0.3488)$$

### 1.1.3

Afin de vérifier les résultats obtenus, nous effectuons des réalisations de notre chaîne de Markov. Nous pouvons mettre en tableau la proportion de réalisation de chaque état lors de tests avec un nombre de pas croissant. Nous utilisons un point de départ distribué uniformément entre les 4 états car il a été prouvé plus haut que ça n'avait pas d'influence.

| # Pas / État | 1       | 2      | 3       | 4       |
|--------------|---------|--------|---------|---------|
| 100          | 0.35    | 0.05   | 0.21    | 0.39    |
| 1000         | 0.351   | 0.075  | 0.23    | 0.344   |
| 10000        | 0.346   | 0.064  | 0.236   | 0.354   |
| 100000       | 0.3501  | 0.0722 | 0.228   | 0.3497  |
| 1000000      | 0.34902 | 0.0757 | 0.23422 | 0.34919 |

TABLE 1 – Proportion des états obtenus en fonction de nombre de pas

En comparant ce tableau avec les résultats obtenus avec les valeurs précédemment obtenus, on remarque bien que les proportions sont respectées et font sens, on converge bien vers les mêmes valeurs.

### 1.1.4

/!\ TODO /!\

## 1.2 Méthode MCMC : analyse théorique dans le cas fini

Nous allons maintenant nous attarder sur l'aspect théorique de l'algorithme de Metropolis-Hastings avant de passer à l'aspect pratique.

### 1.2.1

Soit  $\pi_0$  une distribution initiale d'une chaîne de Markov invariante dans le temps et  $Q$  la matrice de transition :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\} : \pi_0(i)[Q]_{i,j} = \pi_0(j)[Q]_{j,i}$$

Si  $\pi_0$  est une distribution stationnaire de notre chaîne de Markov alors, avec  $Q$  la matrice de transition :

$$[\pi_0 Q]_j = [\pi_0]_j \quad (1)$$

Partons du membre de gauche :

$$\begin{aligned} [\pi_0 Q]_j &= \sum_{k=1}^N \pi_k Q_{k,j} && \text{(définition du produit scalaire)} \\ &= \sum_{k=1}^N \pi_j Q_{j,k} && \text{(par hypothèse des équations de balance détaillées)} \\ &= [\pi_0]_j \underbrace{\sum_{k=1}^N Q_{j,k}}_{=1} && \text{(définition de la matrice de transition)} \\ &= [\pi_0]_j && \text{(peut donc bien être une distribution stationnaire)} \end{aligned}$$

On peut finalement conclure sur l'unicité de  $\pi_0$ . Pour que la distribution stationnaire soit unique, il faut que le chaîne de Markov soit irréductible, c'est-à-dire que si on représente notre chaîne selon un graphe avec un poids par arête représentant les probabilités, celui-ci doit être connexe.

### 1.2.2

## 1.3 Méthode MCMC : illustration sur un exemple simple

Nous allons maintenant nous attarder à un cas plus précis de l'algorithme de Metropolis-Hastings pour échantillonner des valeurs suivant la distribution binomiale définie comme suit avec  $p$  la probabilité de succès :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_K^k p^k (1-p)^{K-k}$$

Pour ce faire nous allons utiliser la distribution de proposition énoncée avec  $r \in ]0, 1[$  comme suit :

$$q(y|x) = \begin{cases} r & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0 \\ (1-r) & \text{si } x = K \text{ et } y = K \\ r & \text{si } 0 < x \leq K \text{ et } y = x-1 \\ (1-r) & \text{si } 0 \leq x < K \text{ et } y = x+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**1.3.1**

**1.3.2**

**1.3.3**

## **2 Deuxième partie : détection de communautés dans un graphe par algorithmes MCMC**

### **2.1 Etude théorique**

**2.1.1**

**2.1.2**

**2.1.3**

**2.1.4**

### **2.2 Analyse expérimentale**

**2.2.1**

**2.2.2**

### **2.3 Application à un grand graphe**