

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO

Leonardo Zapp

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO ALGORITMO
EVOLUTIVO MULTIOBJETIVO**

Florianópolis
2022

Leonardo Zapp

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO ALGORITMO
EVOLUTIVO MULTIOBJETIVO**

Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação submetido ao Curso de Ciências da Computação da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Bacharel em Ciências da Computação.

Orientador: Prof. Rafael Luiz Cancian, Dr.

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Zapp, Leonardo

Otimização de carteiras de investimentos utilizando
algoritmo evolutivo multiobjetivo / Leonardo Zapp ;
orientador, Rafael Luiz Cancian, 2022.

91 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico,
Graduação em Ciências da Computação, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Ciências da Computação. 2. Otimização de Portfólios. 3.
Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo. 4. Teoria Moderna de
Portfólio. 5. Fundos de Investimento. I. Cancian, Rafael
Luiz. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação
em Ciências da Computação. III. Título.

Leonardo Zapp

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO ALGORITMO
EVOLUTIVO MULTIOBJETIVO**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Bacharel em Ciências da Computação e aprovado em sua forma final pelo Curso de Ciências da Computação.

Florianópolis, 17 de Março de 2022.

Prof. Jean Everson Martina, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Rafael Luiz Cancian, Dr.
Orientador
INE / CTC / UFSC

Prof. Álvaro Junio Pereira Franco, Dr.
Avaliador
INE / CTC / UFSC

Prof. Mauro Roisenberg, Dr.
Avaliador
INE / CTC / UFSC

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Leonildo e Cirlene.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Leonildo e Cirlene, que nunca mediram esforços, tiveram paciência, e sempre me apoiaram para que eu chegasse até aqui. À minha avó Madalena e ao meu irmão Eduardo pelo apoio ao longo dos anos, e à minha namorada Rita por todo o amor e incentivo.

Ao professor Cancian pela orientação e dedicação ao longo deste trabalho, aos professores da banca pelos comentários e sugestões, e aos demais professores que contribuíram com a minha formação.

Aos meus amigos pelo companheirismo e bons momentos.

RESUMO

Investidores em geral buscam maximizar seus retornos ao mesmo tempo em que minimizam seus riscos. Porém, a escolha dos ativos e seus pesos dentro de uma carteira de investimentos para a obtenção dos objetivos citados, não é uma tarefa trivial. Devido a isso, pesquisadores desenvolveram ao longo dos anos modelos e técnicas de otimização de portfólios para auxiliar na tomada de decisão do investidor. O mais simplista deles utiliza o conceito de média-variância para obtenção da solução ótima, e pode ser resolvido através de programação quadrática. Contudo, no mundo real os objetivos não se limitam apenas a esses, e podem estar sujeitos a várias restrições que tornam o problema pertencente à classe NP-difícil, e portanto consideravelmente mais difícil de ser resolvido. Uma alternativa, é o uso de Algoritmos Evolutivos Multiobjetivos (MOEA). Este trabalho possui como objetivo principal o desenvolvimento de um sistema web para otimização de carteiras de investimentos compostas por fundos de investimento, utilizando como base a teoria moderna de portfólios e algoritmos evolutivos multiobjetivo, para que investidores inexperientes possam cadastrar, otimizar e comparar a rentabilidade de diferentes carteiras.

Palavras-chave: otimização de portfólios; algoritmos evolutivos multiobjetivo; teoria moderna de portfólio; fundos de investimento.

ABSTRACT

Investors in general seek to maximize their returns while minimizing their risks. However, the choice of assets and their weights within an investment portfolio to achieve the aforementioned objectives is not a trivial task. Because of this, researchers have developed over the years models and portfolio optimization techniques to assist in investor decision making. The most simplistic of them uses the concept of mean-variance to obtain the optimal solution, and can be solved through quadratic programming. However, in the real world the goals are not limited to these, and may be subject to several restrictions that make the problem be in NP-hard class, and therefore considerably more difficult to solve. An alternative is the use of Multiobjective Evolutionary Algorithms (MOEA). This work has as main objective the development of a web system for the optimization of investment portfolios composed of investment funds, using as a basis the modern theory of portfolios and multi-objective evolutionary algorithms, so that inexperienced investors can register, optimize and compare the profitability of different wallets.

Keywords: portfolio optimization; multi-objective evolutionary algorithms; modern portfolio theory; investment funds.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mercado de Capitais	15
Figura 2 – VaR e CVaR	20
Figura 3 – Representação das relações de dominância de Pareto relativas ao ponto B	22
Figura 4 – Representação de soluções na fronteira de Pareto. Os círculos preenchidos correspondem as soluções dominantes	23
Figura 5 – Funcionamento básico de um algoritmo evolutivo	24
Figura 6 – Representação do algoritmo NSGA-II	27
Figura 7 – Tela de cadastro de operações financeiras em uma carteira	30
Figura 8 – Tela de comparação de carteiras de investimentos	30
Figura 9 – Diagrama de pacotes do framework de otimização.	32
Figura 10 – Fronteira de Pareto do problema de teste ZDT1.	33
Figura 11 – Fronteira de Pareto do problema de teste ZDT2.	33
Figura 12 – Fronteira de Pareto do problema de teste ZDT3.	34
Figura 13 – Fronteiras de Pareto e resultados das soluções ótimas para o conjunto de testes ZDT1, ZDT2 e ZDT3	34
Figura 14 – Soluções obtidas para o problema de otimização de portfólio. Em vermelho, as 25 melhores soluções.	37
Figura 15 – Convergência dos objetivos ao longo das gerações	39
Figura 16 – Rentabilidade acumulada das carteiras otimizadas, do Ibovespa e do CDI para o ano de 2021.	40
Figura 17 – Rentabilidade acumulada das carteiras da população inicial, do Ibovespa e CDI para o ano de 2021.	40
Figura 18 – Tela apresentando o resultado da otimização de uma carteira	41
Figura 19 – Tela apresentando a continuação do resultado da otimização de uma carteira	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados dos objetivos para as 25 melhores carteiras do conjunto de soluções	38
Tabela 2 – Valores médios de rentabilidade e risco (desvio padrão) das soluções iniciais e finais para os modelos tri-objetivo e mono-objetivo . .	38

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	PROBLEMATIZAÇÃO	13
1.2	OBJETIVOS	13
1.3	METODOLOGIA	14
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	MERCADOS DE CAPITAIS E INVESTIMENTOS	15
2.1.1	Mercados eficientes	15
2.1.2	Ativos financeiros	16
2.1.3	Fundos de Investimentos	17
2.2	MODELOS DE MERCADOS DE CAPITAIS E DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS	17
2.2.1	Carteira de investimentos	17
2.2.2	Risco	18
2.2.3	Variância e desvio padrão	19
2.2.4	Valor em Risco	19
2.2.5	Valor Condicional em Risco	19
2.2.6	Modelo de Precificação de Ativos Financeiros	19
2.2.7	Modelo de múltiplos fatores	20
2.3	OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO	21
2.3.1	Técnicas de Otimização	23
2.3.2	Algoritmos Evolucionários	23
2.3.3	Nondominated Sorting Genetic Algorithm II	25
2.4	O PROJETO FUNDOSINVEST	26
3	SOLUÇÃO PROPOSTA	29
3.1	PROJETO	29
3.1.1	Requisitos	31
3.1.2	Framework de otimização	31
3.2	EXPERIMENTOS E RESULTADOS	32
3.2.1	Problemas de Benchmark	32
3.2.2	Otimização de carteira	35
3.2.2.1	Seleção de fundos	35
3.2.2.2	Configuração do algoritmo	35
3.2.2.3	Modelo e resultados	36
3.2.2.4	Teste retroativo	39
3.3	INTEGRAÇÃO COM O FUNDOSINVEST	41
4	CONCLUSÕES	43

REFERÊNCIAS	45
APÊNDICE A – LISTA DE FUNDOS SELECIONADOS	48
APÊNDICE B – CÓDIGO FONTE DO OTIMIZADOR	62
APÊNDICE C – ARTIGO NO FORMATO SBC	81

1 INTRODUÇÃO

A seleção de ativos para composição de uma carteira de investimentos é um problema conhecido e enfrentado por investidores institucionais e individuais há muito tempo. De maneira geral, investidores procuram maximizar seu retorno e ao mesmo tempo minimizar o risco de perdas ao montarem uma carteira. Com a vasta opção de ativos financeiros disponíveis no mercado de capitais, encontrar uma boa seleção de ativos que atendam a esses objetivos de maneira satisfatória tende a ser uma tarefa difícil e custosa. Para que esse processo de tomada de decisão não seja baseado apenas com base no sentimento do investidor em relação aos ativos e ao mercado, modelos de alocação de ativos foram desenvolvidos ao longo dos anos.

A Teoria Moderna de Portfólio (MARKOWITZ, 1952) é considerada por muitos como o trabalho precursor da área. Desenvolvida em 1952 por Harry Markowitz, rendeu ao autor um prêmio Nobel de Economia em 1990, dado o seu pioneirismo e significância dentro do setor econômico. Markowitz criou o modelo de otimização de portfólios conhecido como média-variância, em que estima o retorno utilizando o valor esperado do ativo e o risco utilizando o valor da variação da distribuição dos retornos do ativo. A principal contribuição de Markowitz, foi demonstrar que a rentabilidade de uma carteira de investimentos não depende apenas do retorno e do risco individual dos seus ativos, mas também da correlação entre eles.

O modelo de otimização proposto por Markowitz é determinístico e se enquadra na categoria de Otimização Quadrática. Nele, dado um conjunto de ativos, busca-se minimizar o risco dos portfólios compostos por esses ativos para um dado nível de retorno. Apesar de muito difundido e utilizado, o modelo média-variância apresenta algumas limitações ao se tentar aplicar restrições encontradas pelos investidores no mundo real. O simples objetivo de limitar a quantidade de ativos que compõem uma carteira, acaba sendo de difícil aplicação no modelo quadrático, e outras restrições como o capital total investido no portfólio e a realocação de ativos considerando valores máximo e mínimo para cada um, por exemplo, podem inviabilizar a obtenção de soluções através de métodos exatos (CHANG *et al.*, 2000).

Tendo em vista as limitações encontradas, trabalhos surgiram com o intuito de propor alternativas para a resolução do problema através de métodos heurísticos. Em seu trabalho, Chang *et al.* estudou o uso de três métodos para a obtenção do conjunto ótimo de carteiras de investimentos: algoritmos genéticos, busca tabu e recozimento simulado. Deste modo, mais de uma função objetivo pode ser aplicada ao modelo, assim como restrições de valores inteiros como a cardinalidade da carteira, tornando o mesmo um problema de otimização multiobjetivo.

1.1 PROBLEMATIZAÇÃO

A busca por melhores rendimentos nas aplicações financeiras tem levado muitos investidores a se aventurar na bolsa de valores e em investimentos mais arriscados que a tradicional poupança ou renda fixa. Apesar do mercado financeiro não seguir um padrão e dar garantias de ganhos futuros com base em rendimentos passados, investidores tendem a avaliar o desempenho de seus investimentos de modo a ter um maior embasamento para a tomada de decisão no que diz respeito à escolha dos ativos financeiros e aplicação dos seus recursos.

A análise de ativos e de carteiras de investimentos pode ser feita de diversas maneiras, desde métodos manuais utilizando planilhas eletrônicas para computar os ganhos e perdas, até programas mais avançados que oferecem análises ao longo do tempo e diversos indicadores para comparação. Entretanto, a otimização de uma carteira para a obtenção da melhor alocação de ativos, ainda é um problema pouco explorado por essas aplicações. Sendo assim, este trabalho visa preencher essa lacuna e oferecer a possibilidade de otimização de carteiras tendo como foco ativos pertencentes à classe dos fundos de investimentos.

Este trabalho tem como proposta oferecer a investidores pouco experientes a possibilidade de otimização de seus portfólios de fundos de investimentos. Aplicando técnicas de otimização multiobjetivo e algoritmo evolutivo, espera-se desenvolver um modelo que permita gerar soluções otimizadas para carteiras de um investidor. Esta solução será integrada ao projeto de extensão desenvolvido pelo professor orientador, de modo que os usuários possam otimizar seus portfólios cadastrados.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho consiste em desenvolver um sistema web para otimização de carteiras de investimentos compostas por fundos de investimento, utilizando como base a teoria moderna de portfólios e algoritmos evolutivos multiobjetivo, para que investidores inexperientes possam cadastrar, otimizar e comparar a rentabilidade de diferentes carteiras.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Analisar o estado da arte em relação a otimização de carteiras de investimentos utilizando MOEA;
- Desenvolver o modelo considerando os objetivos de maximização da rentabilidade, minimização do risco, maximização da quantidade de classes de fundos, a restrição de quantidade de fundos, e a restrição de pesos mínimos e máximos para cada fundo;
- Implementar o MOEA e o modelo proposto e validar a eficácia;

- Implementar demais partes do sistema (integração com o projeto de extensão);
- Documentar o processo de pesquisa e implementação.

1.3 METODOLOGIA

O trabalho foi iniciado realizando uma busca em repositórios científicos (Elsevier, IEEE, Springer, etc) por publicações que contemplassem a temática referente à otimização de portfólios e algoritmos evolutivos multiobjetivos. Foram utilizados livros e artigos para adquirir uma boa base sobre o assunto e produzir a seção referente à fundamentação teórica do capítulo 2. Na etapa de elaboração da solução proposta foram aplicadas técnicas de engenharia de software e orientação a objetos para o desenvolvimento do modelo e do algoritmo evolutivo multiobjetivo. Na etapa de experimentação foram utilizados problemas de teste conhecidos da literatura para a validação da implementação do algoritmo evolutivo multiobjetivo e testes retroativos para a validação das soluções obtidas do otimizador. Também comparou-se os valores médios de rentabilidade e risco das soluções do modelo proposto com os valores médios das soluções de um modelo mono-objetivo.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho de conclusão de curso está organizado em quatro capítulos. O capítulo de Introdução que apresenta a contextualização e descreve o problema abordado pelo trabalho, apresenta uma proposta de solução e também descreve os objetivos a serem alcançados. O capítulo de Fundamentação Teórica que aborda os principais conceitos para a compreensão do tema abordado e os trabalhos existentes na literatura relacionados à otimização de portfólios através de algoritmos evolutivos multiobjetivos. O capítulo de Solução Proposta que contém o projeto, o desenvolvimento, os experimentos e os resultados alcançados. E por último as Conclusões que apresentam um compilado do trabalho desenvolvido e algumas sugestões de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MERCADOS DE CAPITALIS E INVESTIMENTOS

Mercado de Capitais é um segmento do Mercado Financeiro Brasileiro que tem como principal objetivo facilitar operações financeiras diretamente entre poupadores e tomadores de recursos. Nesse mercado empresas tomam recursos diretamente de investidores através da venda de suas ações, títulos patrimoniais, debêntures, títulos de crédito, com o objetivo de viabilizar algum projeto ou financiar suas atividades (VALORES MOBILIÁRIOS, 2019). Os principais participantes desse mercado são os investidores, as empresas e as instituições financeiras prestadoras de serviços, como Bancos de Investimento, as Corretoras e Distribuidoras de Títulos e Valores Mobiliários, as entidades administradoras de mercado de bolsa e balcão, entre outros. Deste modo, ao comprar títulos chamados de valores mobiliários, que representam as condições estabelecidas no negócio, os investidores emprestam seus recursos diretamente para as empresas e assumem o risco do negócio em troca de uma compensação futura. As instituições financeiras atuam apenas como um prestador de serviços, não tendo qualquer responsabilidade quanto ao cumprimento das obrigações estabelecidas, esta relação pode ser observada na Figura 1. Para seu bom funcionamento o Mercado de Capitais precisa ser livre, competitivo e eficiente.

2.1.1 Mercados eficientes

A Hipótese de Mercado Eficiente (HME) surgiu da análise dos preços de ações e da tentativa de encontrar um padrão para as séries temporais dos preços das mesmas.

Figura 1 – Mercado de Capitais



Fonte: (VALORES MOBILIÁRIOS, 2019).

Os primeiros trabalhos desenvolvidos na área chegaram a conclusão de que os preços seguem um **caminho aleatório**, fazendo com que sejam imprevisíveis. Porém, foi com Fama (1965-70) que a hipótese foi desenvolvida e aperfeiçoada, e sua definição é que o preço dos ativos em um mercado eficiente "reflete inteiramente todas as informações disponíveis"(FAMA, 1970), de modo que não seria possível a obtenção de ganhos extraordinários em períodos predeterminados.

Segundo (FAMA, 1970), para que os mercados sejam eficientes, algumas condições suficientes devem ser atendidas: (1) Não há custo de transação na negociação de ativos; (2) Todas as informações estão disponíveis a todos os participantes do mercado sem custos e (3) Todos concordam que as informações refletem nos preços atuais e futuros de cada ativo.

Em relação à eficiência de mercados, ela pode ser classificada em:

- **Eficiência fraca:** as informações para precificação dos ativos são apenas referentes aos preços e retornos históricos dos mesmos;
- **Eficiência semi-forte:** engloba a eficiência fraca e adiciona novas informações públicas disponíveis a todos os agentes, como dados referentes às empresas ou relacionados a mercados específicos;
- **Eficiência forte:** engloba todas as demais e adiciona novas informações privilegiadas, aquelas que são de conhecimento de poucos e geralmente são utilizadas para obter vantagem financeira;

Para (BODIE; KANE; MARCUS, 2014), caso os preços das ações fossem previsíveis, isso demonstraria uma "evidência desfavorável de ineficiência do mercado", pois uma vez que os preços pudessem ser previstos, isso "indicaria que todas as informações disponíveis ainda não repercutiram nos preços das ações". Já no trabalho realizado por (FORTI; PEIXOTO; PAULO SANTIAGO, 2009) em que é feito um estudo sobre a aceitação ou rejeição, por outros autores, da hipótese no mercado brasileiro; é observado que o mercado não possui eficiência em sua totalidade, pois não há uma concordância desses autores em relação à aceitação ou a rejeição de cada uma das formas analisadas.

2.1.2 Ativos financeiros

No Mercado de Capitais, os ativos financeiros são chamados de valores mobiliários e podem ser ações, debêntures, fundos de investimentos, fundos imobiliários e diversos outros produtos listados nos incisos I ao VIII do artigo 2º da Lei 6.385/76 que trata do tema. Além dos ativos pertencentes ao mercado de capitais, diversos outros tipos de investimentos estão disponíveis aos investidores, como: Poupança, Certificados de Depósitos Bancários (CDB), Letras de Crédito Imobiliários (LCI), Títulos Públicos entre outros. Esses investimentos podem ser classificados de diversas

maneiras, sendo que as mais comuns são (1) quanto à sua rentabilidade (renda fixa ou variável), (2) quanto ao risco (risco baixo, médio ou alto), (3) quanto ao prazo (curto, médio ou longo) e (4) quanto à sua liquidez (baixa liquidez ou alta liquidez).

Devido à grande variedade de tipos de investimentos e às diferentes características pertencentes a cada um deles, este trabalho terá como foco apenas os fundos de investimentos, que podem incorporar muitos dos demais ativos citados anteriormente (ex: fundos de investimentos em ações, fundos de investimento de renda fixa, etc).

2.1.3 Fundos de Investimentos

Um Fundo de Investimentos é um tipo de aplicação financeira que reúne diversos investidores com o propósito de investir coletivamente (VALORES MOBILIÁRIOS, 2019). Os fundos reúnem os recursos de investidores individuais os quais são aplicados no mercado financeiro por um gestor, formando dessa forma uma espécie de condomínio de investimento. Essas aplicações seguem uma estratégia de alocação previamente definida, a qual determina a classificação do fundo conforme as regras da Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (AMBIMA). Logo, os fundos são uma forma organizada de investimento que traz algumas vantagens principalmente para o investidor iniciante e para investidores de pequeno porte, pois contam com um gestor profissional que procura os melhores ativos para compor a carteira do fundo e também por proporcionar a compra de cotas de um investimento que dificilmente poderia ser adquirido individualmente. Sendo assim, são uma excelente porta de entrada para novos investidores no mercado financeiro.

2.2 MODELOS DE MERCADOS DE CAPITAIS E DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS

2.2.1 Carteira de investimentos

Uma carteira de investimentos consiste em um conjunto de ativos que pertencem a um investidor. Esses ativos possuem proporções específicas dentro da carteira e podem ser de diferentes tipos (ações, fundos de investimento, etc). A valoração e consequentemente o retorno esperado de uma carteira é calculada através da média ponderada dos ativos que constituem a mesma. O risco é calculado através das variâncias de cada ativo e também das covariâncias entre os ativos que a compõem (MARKOWITZ, 1952) (entre outras formas possíveis). *Portanto, quanto maior a diversificação dos ativos que formam a carteira, maior a segurança do investidor no que diz respeito ao risco e a possíveis perdas, pois a correlação entre os ativos tende a ser menor, o que diminui o risco.*

Ao escolher os ativos para compor a carteira, o investidor pode se deparar com diversos problemas que dificultam a execução da tarefa, como analisar se o ativo está adequado ao seu perfil de investidor, os diferentes prazos de investimento, as proporções relativas a cada ativo escolhido, e os riscos inerentes às escolhas feitas, por exemplo. Formas de auxiliar essa escolha podem ser muito úteis.

2.2.2 Risco

O risco está diretamente ligado ao rendimento da aplicação. Quanto maiores os rendimentos desejados, maiores serão os riscos a serem assumidos. Sabendo que todo investimento tem um risco, o investidor deve conhecer, avaliar e aceitar esse risco em uma aplicação financeira, porém, isso nem sempre acontece. Esses riscos variam de um produto para outro, podendo assumir maior ou menor grau, e variam ao longo do tempo. Segundo (VALORES MOBILIÁRIOS, 2019), os três principais riscos ligados aos ativos financeiros são: risco de mercado, risco de liquidez e risco de crédito.

- Risco de mercado: está relacionado às oscilações nos preços dos ativos que compõem a carteira. Quanto maiores as oscilações nos preços ao longo do tempo, maior será o risco do ativo. De forma mais simples, maior a chance de ganhar ou perder dinheiro no investimento.
- Risco de crédito: está relacionado com possíveis perdas devido à incapacidade do tomador de recursos cumprir com o acordado, deixando de pagar juros ou o capital da dívida. Também ocorre quando as notas de classificação de risco dos tomadores são rebaixadas.
- Risco de liquidez: está associado à capacidade de comprar ou vender um ativo, pois caso um ativo tenha pouca procura, o investidor corre o risco de não conseguir vender toda a quantidade que lhe pertence pois o volume na negociação pode ser maior do que é geralmente negociado em certo período de tempo.

No âmbito das carteiras de investimentos, esses riscos compõem o *risco não-sistêmicos*, pois podem ser mitigados com uma maior diversificação dos ativos que compõem a carteira. Contudo, outro tipo de risco estará sempre presente, o *risco sistêmico*. Esse risco refere-se as condições macroeconômicas, e afeta a economia em geral, como é o caso das recessões e a falência de grandes instituições que geram um efeito cascata.

Com a finalidade de calcular o risco de um portfólio de ativos financeiros, algumas métricas foram desenvolvidas e têm sido muito utilizadas ao longo do tempo. São elas: a variância e desvio padrão, o valor em risco e o valor condicional em risco.

2.2.3 Variância e desvio padrão

A variância e o desvio padrão podem ser aplicados à taxa histórica de retornos de um investimento para medir sua volatilidade, e são métricas mais tradicionais de risco. Quando aplicamos esta métrica estamos interessados na probabilidade dos desvios em relação ao retorno esperado. Dessa forma, estimamos a variância calculando a média dos desvios ao quadrado em relação à nossa estimativa de retorno esperado, formalmente definida na equação (1), onde p_i é a probabilidade de ocorrência, r_i é a taxa de retorno e $E(r)$ é o retorno esperado.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N p_i [r_i - E(r)]^2 \quad (1)$$

2.2.4 Valor em Risco

O valor em risco ou, em inglês, Value at Risk (VaR), é uma medida amplamente utilizada para avaliar o risco de operações financeiras em um determinado horizonte de tempo. O VaR é a avaliação da potencial máxima perda a um intervalo de confiança especificado que um investidor estaria exposto dentro do período de tempo considerado (JORION, 2003). Em termos matemáticos, o VaR corresponde a um determinado percentil da distribuição de retornos projetada sobre o intervalo de tempo planejado. Sendo α o nível de confiança desejado, o VaR sinaliza o $(1 - \alpha)$ percentil da distribuição. Para um nível de confiança de 95%, por exemplo, o valor em risco deve ser tal que exceda 5% do número total de observações da distribuição.

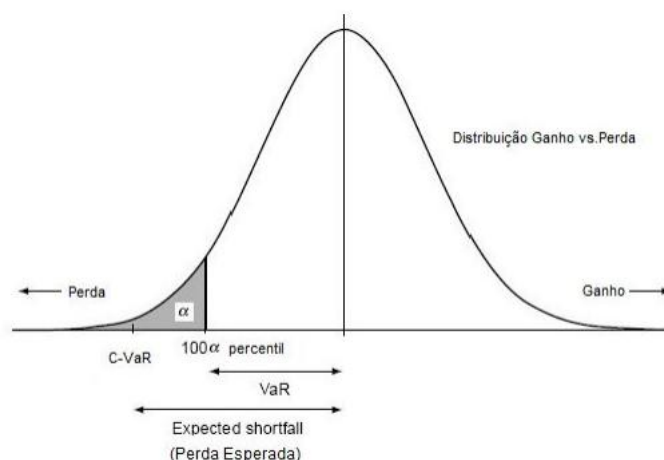
2.2.5 Valor Condicional em Risco

O valor condicional em risco (CVaR), também conhecido como perda excessiva média, em inglês, Expected Shortfall (ES), foi proposto por (ARTZNER *et al.*, 1999) e é uma métrica que indica a perda média que excede o VaR. É uma técnica de avaliação de risco usada com frequência para reduzir a probabilidade de uma carteira sofrer grandes perdas. De maneira mais formal, CVaR é derivado tomando uma média ponderada entre o valor em risco e perdas que excedem o valor em risco. Foi criado devido às críticas ao VaR no meio acadêmico, como ao fato de não fornecer uma estimativa do tamanho da perda esperada uma vez que a perda tenha excedido o valor crítico.

2.2.6 Modelo de Precificação de Ativos Financeiros

O *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) foi proposto por Willian Sharp em 1964 e considera que os ativos se comportam de acordo com os movimentos do mercado

Figura 2 – VaR e CVaR



Fonte: Adaptado da internet (2021).

(up e down market)(SHARPE, 1964). Diferenciando ativos em função de sua aderência ao comportamento de mercado, é possível quantificar o retorno exigido em função de seu risco sistêmico (não-diversificável). Dentro da CAPM, o valor da sensibilidade aos movimentos do mercado é o indicativo do grau de risco sistemático do ativo ou carteira. Essa propriedade é medida pela covariância do ativo com a carteira de mercado dividido pela variância da carteira representante do mercado, popularmente conhecido por índice beta. Um beta igual a 1 indica que o ativo tende a ter a mesma variação que o mercado, e valores de beta maiores que 1 indicam que o ativo é mais "sensível", ou seja, varia mais que o mercado. Como exemplo, se o mercado render 30% e o ativo possuir beta igual a 1,1, o rendimento do papel tende a ser 10% (1,1) maior que o mercado (30%), ou seja, 33%. Este modelo pode ser considerado de fator único, representado neste caso pelo índice beta.

2.2.7 Modelo de múltiplos fatores

Após a formulação do modelo CAPM, estudos analisaram a capacidade do modelo de prever o preço dos ativos utilizando apenas o risco de mercado, e identificaram que apenas com o índice beta não era possível prever o retorno dos ativos de maneira satisfatória. Com base nas evidências encontradas e tentando capturar as anomalias do mercado, (FAMA; FRENCH, 1993) formularam um novo modelo baseado no CAPM composto por três fatores: 1) o risco de mercado, conforme definido pelo modelo CAPM; 2) o tamanho da empresa, definido pelo valor de mercado do patrimônio líquido; e 3) o índice B/M (*Book-To-Market*), definido pela divisão do valor contábil das ações pelo valor de mercado das mesmas. (CARHART, 1997) desenvolveu o modelo de quatro fatores, que tomou como base o modelo de três fatores de Fama e French, e adicionou o fator momento. Em seu trabalho, Carhart analisou a persistência do desempenho

dos fundos mútuos de investimentos, pois segundo (JEGADEESH; TITMAN, 1993), o modelo de três fatores não era capaz de explicar a persistência dos retornos de curto prazo testados. Posteriormente, (FAMA; FRENCH, 2015) adicionaram dois novos fatores ao seu modelo de três fatores: 1) RMW, a diferença entre o retorno da rentabilidade de empresas de portfólios diversificados e classificados como *robust* e *weak* e 2) CMA, composto pela diferença entre empresas com baixo e elevado investimento, chamadas de *conservative* e *aggressive*.

Esses modelos não serão apresentados mais a fundo pois são utilizados para precificação de ativos de carteiras compostas por ações e fundos de ações, o que acaba extrapolando o escopo deste trabalho. Para a realização do mesmo, optou-se por utilizar o modelo de Markowitz por possibilitar o cálculo dos retornos esperados sem a aplicação de um índice específico, tendo em vista que vários índices podem ser aplicados dependendo da classificação do fundo de investimento.

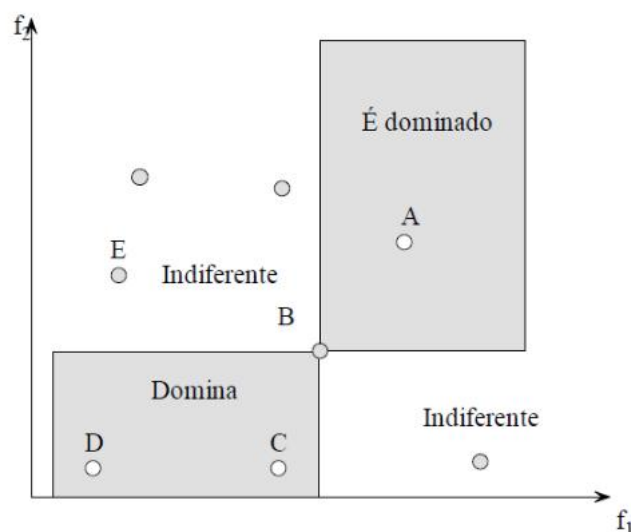
2.3 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

O processo de otimização simples visa encontrar o mínimo ou máximo de uma função matemática (ou outro modelo) com o objetivo de determinar o melhor resultado possível para o problema proposto. Quando tratamos de mais de um objetivo, esses problemas são conhecidos como problemas de otimização multiobjetivo, e representam grande parte dos problemas de otimização do mundo real. São chamados assim pois envolvem a minimização (ou maximização) simultânea de um conjunto de objetivos satisfazendo a um conjunto de restrições. Segundo (DEB, Kalyanmoy; KALYANMOY, 2001), um problema de otimização multiobjetivo (MOP - Multiobjective Problem), pode ser definido como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar/Maximizar} && f_m(x), && m = 1, 2, \dots, M; && (2) \\ &\text{sujeito à} && g_j(x) \geq 0, && j = 1, 2, \dots, J; \\ & && h_k(x) = 0, && k = 1, 2, \dots, K; \\ & && x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, && i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

onde $x \in R^n$ é um vetor de n variáveis de decisão $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, denominado de solução. Os valores $x_i^{(L)}$ e $x_i^{(U)}$ representam os limites inferior e superior, respectivamente, para a variável x_i . As J desigualdades (g_j) e as K igualdades (h_k) são conhecidas como funções de restrição. As soluções que satisfazem as restrições e os limites variáveis constituem a região factível ou espaço de busca $S \subset R^n$. As *funções-objetivos* constituem um espaço multidimensional chamado de *espaço de objetivos*, $Z \subset R^M$, tendo uma função objetivo denotada por $f(x) = z = (z_1, z_2, \dots, z_M)^T$. Para cada solução x no espaço de decisão, existe um z no *espaço de objetivos*, e cada função $f_m(x)$ deve ser minimizada.

Figura 3 – Representação das relações de dominância de Pareto relativas ao ponto B



Fonte: (ZITZLER, Eckart, 1999 apud CHEUNG, s.d.).

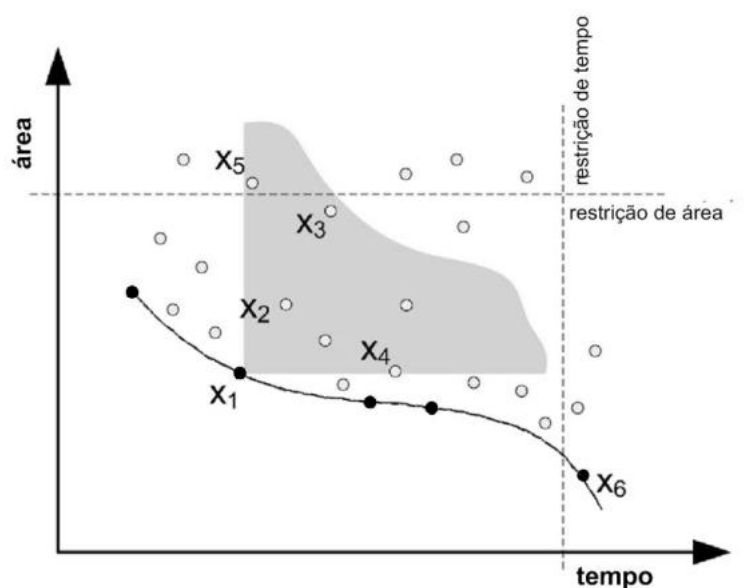
A **dominância de Pareto** é utilizada para comparar soluções que podem apresentar vantagens em determinados objetivos e desvantagens em outros. Uma solução pertence ao *conjunto de Pareto*, se não é possível encontrar alguma outra que melhore pelo menos uma das funções objetivo sem piorar outra função. Para (DEB, Kalyanmoy; KALYANMOY, 2001), dadas duas soluções \mathbf{x} e \mathbf{y} , diz-se que \mathbf{x} domina \mathbf{y} se ambas as seguintes condições forem satisfeitas:

1. A solução \mathbf{x} não é pior do que \mathbf{y} em todos os objetivos;
2. A solução \mathbf{x} é melhor do que \mathbf{y} em pelo menos um objetivo.

Esse conjunto de soluções ótimas que não são dominadas, constituem o *conjunto de Pareto*, e os valores das funções objetivos formam a *fronteira de Pareto*. A **fronteira de Pareto** é comumente utilizada para a visualização gráfica dos *trade-offs* entre as soluções (CANCIAN *et al.*, 2011). As Figuras 3 e 4, apresentam exemplos de dominância de Pareto e fronteira de Pareto respectivamente.

Apesar de conceitualmente simples, encontrar o conjunto de Pareto é uma tarefa complexa ou até mesmo impossível. Entre os problemas encontrados na literatura e citados por (CANCIAN *et al.*, 2011), estão: a possibilidade do conjunto ser infinito; a possibilidade da fronteira de Pareto ser complexa e soluções não-dominadas estarem mal distribuídas; e o fato da dominância não funcionar bem para problemas com muitos objetivos, pois a conversão para a fronteira de Pareto fica comprometida quando muitas soluções passam a ser dominantes.

Figura 4 – Representação de soluções na fronteira de Pareto. Os círculos preenchidos correspondem as soluções dominantes



Fonte: (ZITZLER, E.; THIELE, L., 1999 apud CANCIAN *et al.*, 2011).

2.3.1 Técnicas de Otimização

Tendo em vista as características de um problema de otimização multiobjetivo, a utilização de técnicas determinísticas, programação linear e programação não-linear, torna-se de difícil aplicação quando a complexidade das funções objetivos é muito alta. Nesse cenário, os métodos estocásticos de otimização surgem como uma alternativa viável para se determinar o conjunto de soluções ótimas. Técnicas como Busca Tabu (*Tabu Search*), Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*), Colônia de Formigas (*Ant Colony*), Algoritmos Evolucionários (*Evolutionary Algorithm*) e Enxame de Partículas (*Particle Swarm*), por exemplo, foram desenvolvidas ao longo dos anos para a resolução deste tipo de problema. Dentre essas técnicas, os Algoritmos Evolucionários tem sido muito explorados em problemas de otimização pois possibilitam em encontrar soluções ótimas para um problema complexo sem utilizar informações adicionais, como cálculos de derivadas de funções (GOLDBERG, 1989 apud DEB, Kalyanmoy, 2011).

2.3.2 Algoritmos Evolucionários

Algoritmos Evolucionários são métodos de busca e otimização inspirados nos mecanismos naturais da evolução e da genética. Aplicam conceitos da Teoria da Evolução, inicialmente proposta por Darwin (1859, 1871), para procurar soluções de problemas complexos ou com espaço de busca muito grandes. Holland (1975) foi um dos precursores dos estudos na área, e posteriormente, Goldberg (1989) foi de fundamen-

tal importância para o seu desenvolvimento e consolidação.

Em um algoritmo evolucionário, variáveis associadas ao problema são mapeadas para *genes* codificados em unidades binárias ou reais. Esses genes formam um cromossomo que comumente estão associados à mesma função objetivo. Um indivíduo geralmente é representado por um cromossomo, e equivale a uma possível solução do problema. O conjunto de indivíduos de uma determinada geração, forma a população daquela geração.

A estrutura de funcionamento de um algoritmo evolutivo pode ser descrita como a seguir. Partindo um conjunto inicial de soluções (população inicial), são aplicados processos iterativos que modificam os indivíduos, como a variação e a seleção, para gerar uma nova população com indivíduos mais adaptados, ou seja, que possuem maior probabilidade de perpetuação de genes. A seleção representa a aproximação das soluções da solução ótima e a variação representa a exploração de novas soluções através de recombinação e mutação. A Figura 5 apresenta o funcionamento básico deste tipo de algoritmo.

Figura 5 – Funcionamento básico de um algoritmo evolutivo

```

1  entrada: critério de parada, parâmetros de recombinação e mutação,
    tamanho da população, critérios de seleção
2  saída: pool de melhores indivíduos (A)
3  início
4      t = 0;
5       $\mathcal{A}_t = \emptyset$ 
6      inicialize  $\mathcal{P}_t$ ;
7      faça
8           $\mathcal{P}_t' = \text{recombinação } \mathcal{P}_t$ ;
9           $\mathcal{P}_t'' = \text{mutação } \mathcal{P}_t'$ ;
10         calcule aptidão  $\phi$  de  $\mathcal{P}_t''$ ;
11          $\mathcal{A}_{t+1} = \text{selecione } (\mathcal{P}_t'' \cup \mathcal{A}_t)$ ;
12          $\mathcal{P}_{t+1} = \text{selecione } (\mathcal{P}_t'' \cup \mathcal{A}_t)$ ;
13         t = t+1;
14     enquanto critério de parada não atingido;
15 fim

```

Fonte: (CANCIAN *et al.*, 2011).

Algoritmos genéticos (GA), os quais representam uma classe dos algoritmos evolucionários, foram desenvolvidos à priori para lidar com problemas mono objetivos através de uma medida de desempenho (*fitness*). Quando há a necessidade de otimizar mais de um objetivo, sem a possibilidade de agregar todos eles na mesma função de avaliação, é preciso comparar as possíveis soluções de tal forma que cada objetivo seja considerado individualmente. Goldberg (1989) propôs uma ordenação de soluções baseado na dominância de Pareto, onde a aptidão de uma solução é proporcional ao número de soluções que ela domina.

Com o tempo, diversos algoritmos evolucionários multiobjetivos (MOEA) foram propostos, como o *Vector Evaluated Genetic Algorithm* (VEGA) (SCHAFER, 1985), *Multi-Objective Genetic Algorithms* (MOGA) (MURATA; ISHIBUCHI *et al.*, 1995),

Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA) (ZITZLER, Eckart; THIELE, Lothar, 1998), *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) (DEB, Kalyanmoy *et al.*, 2002) entre outros (COELLO, 2000). Para o desenvolvimento deste trabalho foi escolhido o algoritmo NSGA-II devido a sua grande utilização na otimização de portfólios de ações e devido a sua popularidade na literatura.

2.3.3 Nondominated Sorting Genetic Algorithm II

O NSGA-II é um algoritmo baseado em classificação por não dominância para calcular a aptidão de um indivíduo (solução) da população genética (DEB, Kalyanmoy *et al.*, 2002). A ideia principal é classificar uma população por meio da formação de frentes não dominadas, selecionando os melhores indivíduos de uma geração para a próxima, e promover a diversidade da população aplicando uma métrica livre de parâmetros chamada distância de multidão (*Crowding Distance* - CD).

Para encontrar as frentes não-dominadas F_i , primeiro deve-se calcular dois atributos para cada solução p : 1) S_p , o conjunto de soluções que p domina e 2) n_p , o número de soluções que dominam p . Depois, para cada solução p da frente F_i começando em $i = 1$, cada membro q do conjunto S_p de p é visitado e é diminuído 1 do contador n_q , caso n_q seja zero, q é colocado em um novo conjunto Q que corresponde a próxima frente. O Algoritmo 1 apresenta um pseudocódigo para o método de classificação. As frentes não dominadas de uma população vão diretamente para a próxima geração, enquanto as demais podem ser usadas para selecionar indivíduos a fim de completar o tamanho da população para a próxima geração. A diversidade da população não-dominada é preservada ao utilizar a distância de multidão, onde a aptidão da solução é dada segundo suas distâncias euclidianas. A Figura 6 mostra a representação de uma iteração do NSGA-II segundo (TICONA, s.d.). Nela, a população combinada $R_t = P_t + Q_t$, onde P_t é a população pré-existente e Q_t é a população de descendentes, é ordenada pelo critério de não-dominância. Depois, as soluções pertencentes as melhores frentes F_i , são selecionadas com base na classificação (*rank*) para a população P_{t+1} enquanto o número de soluções for menor que o tamanho definido para a população. Caso a última frente faça com que P_{t+1} exceda o tamanho definido, as soluções dessa frente são ordenadas por *crowding distance* em ordem decrescente, e apenas o número faltante de indivíduos são selecionados para P_{t+1} . Para o cálculo da distância de multidão, os indivíduos da população são ordenados em ordem crescente de acordo com os valores da função objetivo. Depois, são atribuídos valores infinitos para as soluções com o menor e o maior valor da função objetivo, e as demais soluções intermediárias são calculadas a partir das soluções adjacentes através da diferença normalizada absoluta nos valores da função. O valor geral para um indivíduo é obtido somando todos os valores individuais do cálculo para cada objetivo. O Algoritmo 2 apresenta o pseudocódigo para o cálculo de *crowding*

distance das soluções não-dominadas de um conjunto I . Nele, $I[i].m$ corresponde ao valor do m -ésimo objetivo do i -ésimo indivíduo do conjunto I , e f_m^{max} e f_m^{min} são os valores máximo e mínimo da m -ésima função objetivo (DEB, Kalyanmoy *et al.*, 2002).

Algoritmo 1 Pseudocódigo para classificação baseada em não-dominância do NSGA-II

entrada: P

saída: F

para cada $p \in P$ **faça**

$S_p \leftarrow \emptyset$

$n_p \leftarrow 0$

para cada $q \in P$ **faça**

se $p \prec q$ **então** // se p domina q

$S_p \leftarrow S_p \cup \{q\}$ // adiciona q ao conjunto de soluções dominadas por p

senão se $q \prec p$ **então**

$n_p \leftarrow n_p + 1$ // incrementa o contador de dominação de p

fim se

fim para

se $n_p = 0$ **então** // se nenhuma solução domina p , p pertence à primeira frente

$p_{rank} \leftarrow 1$

$F_1 \leftarrow F_1 \cup \{p\}$

fim se

fim para

$i \leftarrow 1$

enquanto $F_i \neq \emptyset$ **faça**

$Q \leftarrow \emptyset$

para cada $p \in F_i$ **faça**

para cada $q \in S_p$ **faça**

$n_q \leftarrow n_q - 1$

se $n_q = 0$ **então** // q pertence à próxima frente

$q_{rank} \leftarrow i + 1$

$Q \leftarrow Q \cup \{q\}$

fim se

fim para

fim para

$i \leftarrow i + 1$

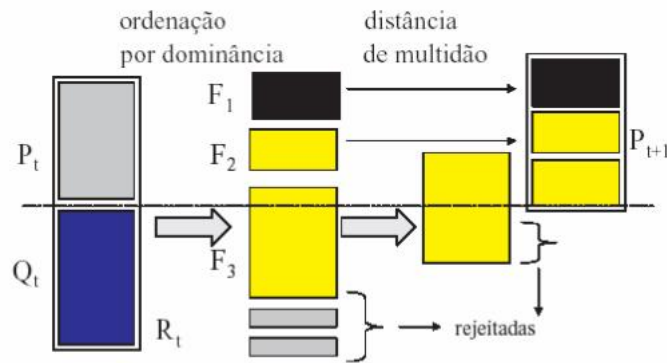
$F_i \leftarrow Q$

fim enquanto

2.4 O PROJETO FUNDOSINVEST

FundosInvest é um projeto de extensão coordenado pelo professor Rafael Cancian e em execução no INE/UFSC. O objetivo geral do projeto FundosInvest é o de desenvolver e disponibilizar gratuitamente serviços e um sistema web que forneçam aos usuários informações úteis para comparação e escolha de fundos de investimento,

Figura 6 – Representação do algoritmo NSGA-II



Fonte: (DEB, Kalyanmoy; KALYANMOY, 2001 apud TICONA, s.d.).

Algoritmo 2 Pseudocódigo para cálculo de *crowding distance*

entrada: I

saída: I

$I \leftarrow |I|$ // número de soluções em I

para cada $i \in I$ **faça**

$i_{distancia} \leftarrow 0$ // inicializa distância

fim para

para cada $m \in \text{objetivos}$ **faça**

$I \leftarrow \text{ordena}(I, m)$ // ordena utilizando cada objetivo

$I[1]_{distancia} \leftarrow \infty$, $I[I]_{distancia} \leftarrow \infty$ // atribui infinito para que as fronteiras sejam sempre selecionadas

para $i \leftarrow 2$ **até** $(I - 1)$ **faça**

$I[i]_{distancia} \leftarrow I[i]_{distancia} + (I[i + 1].m - I[i - 1].m) / (f_m^{max} - f_m^{min})$

fim para

fim para

em especial o índice de Sharpe, o índice beta e o índice de correlação, configuráveis e para diferentes períodos de tempo.

O acesso facilitado a plataformas de investimentos está provocando a migração de recursos financeiros de investimentos seguros para outros mais arriscados, mas que permitem rentabilidade real positiva. Contudo, o poupador brasileiro não tem muito conhecimento para escolher os melhores investimentos. Então é de importância significativa para a qualidade de vida dessas pessoas que elas escolham bem os instrumentos de investimento que utilizarão. Embora bancos, corretoras e influenciadores façam recomendações, é o investidor que precisa fazer a escolha, e para isso ele precisa de informações que ele nem sabe quais são (como indicadores de Sharpe e Beta, por exemplo) e, se souber, normalmente não estão disponíveis. Sistemas que fornecem essas informações já existem, mas são pagas ou dedicadas a um público-alvo experiente.

O projeto também prevê que outros serviços podem ser disponibilizados no

futuro, como o cálculo do risco conjunto de diferentes investimentos que compõem uma carteira e a otimização da carteira de investimentos. É justamente neste contexto que este Trabalho de Conclusão de Curso se enquadra.

3 SOLUÇÃO PROPOSTA

Neste capítulo são apresentadas as etapas envolvidas na realização do atendimento dos objetivos descritos no capítulo 1. A solução é proposta a partir das definições dos requisitos para seu desenvolvimento, questões relacionadas a tecnologias para implementação e integração com o projeto FundosInvest. Também é apresentada a experimentação realizada para validação da solução proposta e os resultados obtidos.

3.1 PROJETO

Este trabalho de conclusão de curso se propõe a oferecer a investidores pouco experientes a possibilidade de otimização de seus portfólios (carteiras) de fundos de investimentos. Como a solução será integrada ao projeto de extensão desenvolvido pelo professor orientador, o desenvolvimento terá como base o código e toda a arquitetura existente desse projeto.

O projeto de extensão FundosInvest está sendo desenvolvido na linguagem PHP com o auxílio do framework CakePHP. Para o armazenamento dos dados, é utilizado o banco de dados relacional MariaDB. Os dados dos fundos de investimentos são obtidos a partir do site da CVM, e são coletados, processados e armazenados no banco de dados diariamente. Dentre esses dados encontram-se informações cadastrais, tais como: denominação social, CNPJ, data de registro, classe, tipo de fundo, administrador, taxas, situação do fundo, entre outros. Também são coletados os dados dos informes diários, contendo informações como: valor total da carteira do fundo, patrimônio líquido, valor da cota, captações realizadas no dia, resgates pagos no dia e número de cotistas. A partir dos dados diários são gerados dados agregados em períodos mensais para obtenção de indicadores relativos aos fundos.

As carteiras de investimentos podem ser cadastradas pelos usuários via interface gráfica e para tal é necessário informar um nome e uma descrição. Após a criação da carteira o usuário pode cadastrar operações financeiras à mesma informando o fundo de investimento, a corretora ou distribuidora do fundo, o tipo de operação financeira, a data e o valor total, como pode ser visto na Figura 7.

As carteiras podem ser analisadas quanto ao seu patrimônio, a sua rentabilidade, *drawdown* (queda máxima da carteira num período de tempo), alocação por ativo e alocação por classe do ativo. Também será possível comparar carteiras, como na Figura 8, quanto aos seus patrimônios, as rentabilidades e os *drawdowns*.

Figura 7 – Tela de cadastro de operações financeiras em uma carteira

FundosInvest EDUCAÇÃO FINANCEIRA FUNDOS DE INVESTIMENTO EMPRESAS ABERTAS CARTEIRA DE INVESTIMENTO OLÁ, LEONARDO

Nova Operação Financeira da Carteira "Carteira Teste 1"

Fundo de investimento

Corretora ou Distribuidor do Fundo

Tipo da Operação Financeira

Data

Adicionar por

Valor Total

CADASTRAR

Projeto FundosInvest Coordenador: Prof. Dr. Eng. Rafael Luiz Cancian - rafael.cancian@ufsc.br

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 – Tela de comparação de carteiras de investimentos



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1.1 Requisitos

Para a obtenção dos objetivos propostos anteriormente, os seguintes requisitos funcionais foram definidos para o desenvolvimento deste trabalho:

1. Extrair informações dos fundos como rentabilidade e risco a partir do banco de dados e calcular suas covariâncias;
2. Construir o otimizador de carteiras baseado em algoritmos evolutivos multi-objetivos;
3. Construir o modelo de otimização multiobjetivo;
4. Aplicar o otimizador em um conjunto de fundos pré selecionados;
5. Integrar o otimizador de carteiras com o projeto FundosInvest.

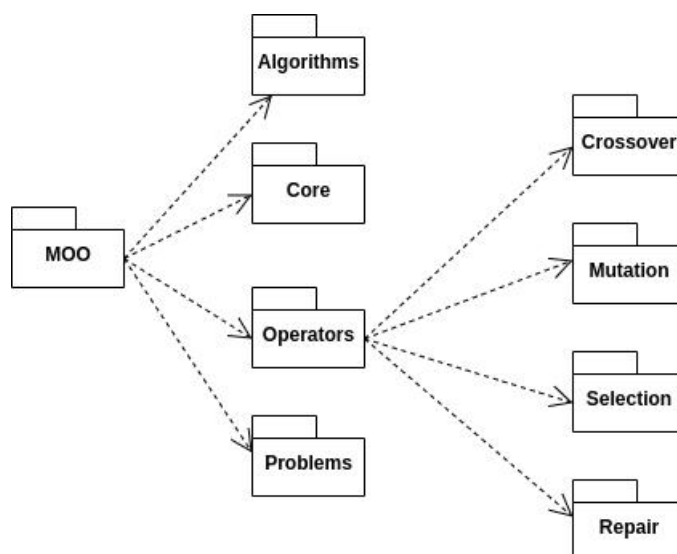
Após a definição dos requisitos funcionais, pôde-se definir os requisitos não funcionais como sendo:

1. Utilizar o banco de dados do projeto FundosInvest para a obtenção do conjunto de dados;
2. Utilizar a linguagem PHP para o desenvolvimento do otimizador;
3. Utilizar o framework CakePHP na integração com o projeto FundosInvest.

3.1.2 Framework de otimização

Para atender o objetivo de integração com o projeto de extensão, o otimizador foi desenvolvido na linguagem PHP utilizando-se o paradigma de orientação a objetos e baseando-se principalmente no framework *PYMOO* desenvolvido em Python e apresentado em (BLANK; DEB, K., 2020). O framework proposto conta com elementos que formam o núcleo da implementação, e podem ser estendidos para atender necessidades futuras. Entre os principais componentes estão a classe *Problem*, que representa o problema a ser otimizado e contém as informações referentes às funções objetivo e as restrições a serem aplicadas; a classe *Population* que representa uma população ao longo da execução do algoritmo; e a classe *Individual* que representa um indivíduo pertencente a uma população. Uma visão geral da estrutura de pacotes do otimizador pode ser vista na Figura 9. Para a implementação do algoritmo NSGAII, foram criadas as classes *NSGA2*, que contém o código responsável pela execução principal do mesmo, e as classes referentes as operações executadas por ele, como seleção (*BinaryTournamentSelection*), recombinação (*SinglePointCrossover*), mutação (*PolynomialMutation*) e reparação *Repair*. O algoritmo terá como saída um conjunto de soluções que representam os indivíduos da última população gerada pelo processo evolucionário.

Figura 9 – Diagrama de pacotes do framework de otimização.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 EXPERIMENTOS E RESULTADOS

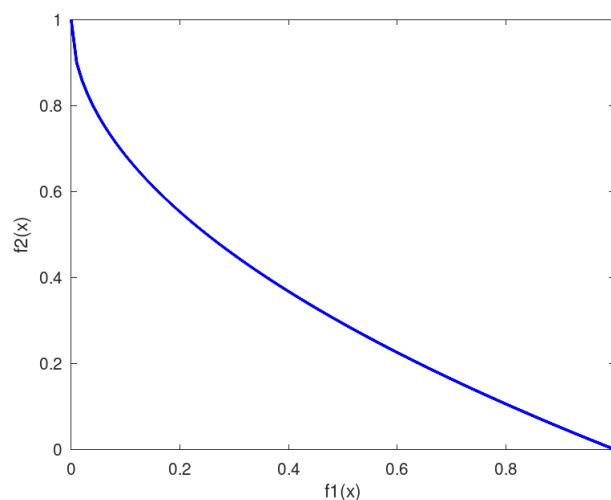
A avaliação do desempenho do otimizador se deu em dois passos: o primeiro utilizando problemas de testes já conhecidos da literatura (*benchmarks*) com o propósito de avaliar se as soluções obtidas se aproximam da fronteira de Pareto; e o segundo otimizando uma carteira composta por fundos de investimentos e aplicando um teste retroativo nas soluções obtidas a fim de avaliar se as carteiras geradas obtiveram retornos maiores que a carteira de pesos iguais para os mesmos fundos.

3.2.1 Problemas de Benchmark

Problemas de benchmark são de grande importância para a avaliação do otimizador por possibilitarem a validação de problemas com fronteiras de Pareto conhecidas. Para a avaliação do desempenho do otimizador foram utilizados 3 problemas de teste dos 6 disponíveis da classe ZDT. Esses problemas foram propostos por Zitzler, Deb e Thiele em (ZITZLER, Eckart; DEB, Kalyanmoy; THIELE, Lothar, 2000), com o propósito de avaliar o desempenho de diferentes algoritmos evolucionários multiobjetivos. Os problemas escolhidos foram:

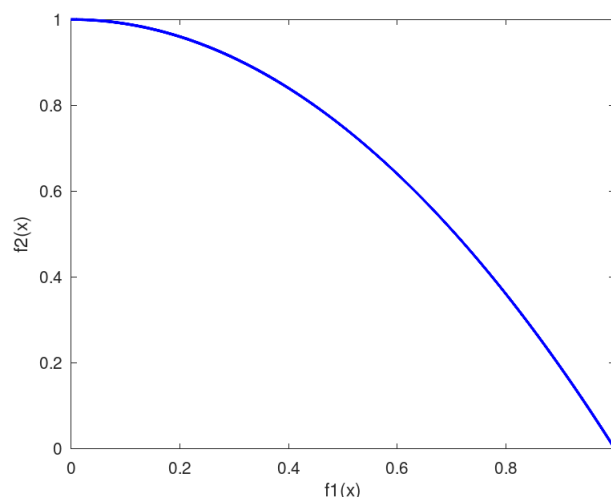
- **ZDT1**: possui 30 variáveis de decisão no intervalo $R[0,1]$ com uma fronteira de Pareto convexa e contínua apresentada na Figura 10;
- **ZDT2**: possui 30 variáveis de decisão no intervalo $R[0,1]$ com uma fronteira de Pareto não-convexa apresentada na Figura 11;
- **ZDT3**: possui 30 variáveis de decisão no intervalo $R[0,1]$ com fronteiras de Pareto desconexas apresentadas na Figura 12.

Figura 10 – Fronteira de Pareto do problema de teste ZDT1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

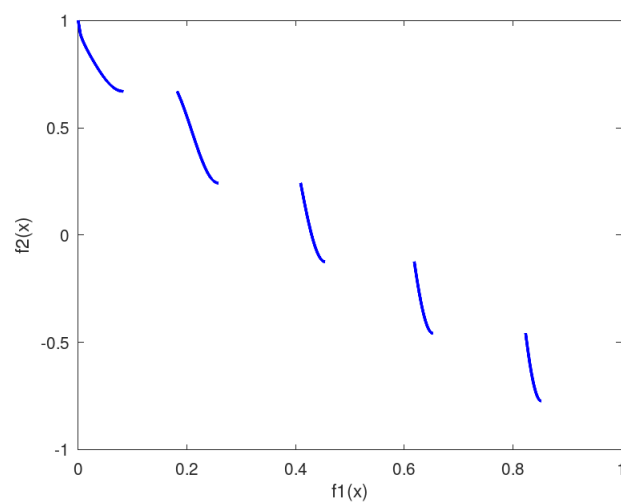
Figura 11 – Fronteira de Pareto do problema de teste ZDT2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

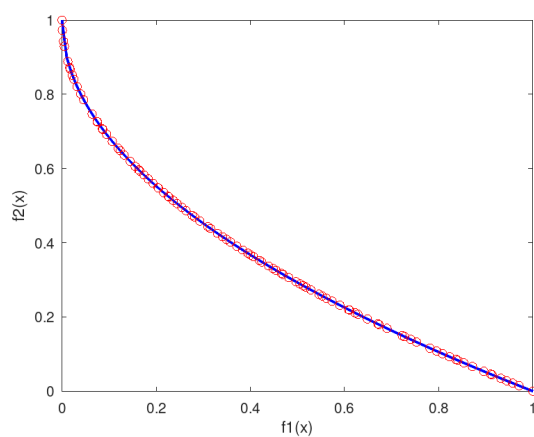
Nos experimentos realizados foram obtidos bons resultados para um número relativamente baixo de gerações (200 gerações), com uma população de 100 indivíduos, o que indica uma rápida convergência e que a exploração do espaço de busca está sendo feita de maneira eficiente. Ao analisar as figuras das fronteiras de Pareto com as soluções obtidas para cada um dos problemas, Figura 13, é possível notar que houve uma distribuição das soluções ao longo de toda a fronteira, indicando uma maior diversidade das soluções.

Figura 12 – Fronteira de Pareto do problema de teste ZDT3.

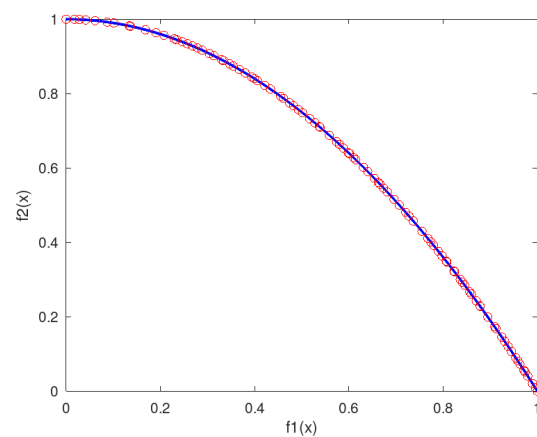


Fonte: Elaborado pelo autor.

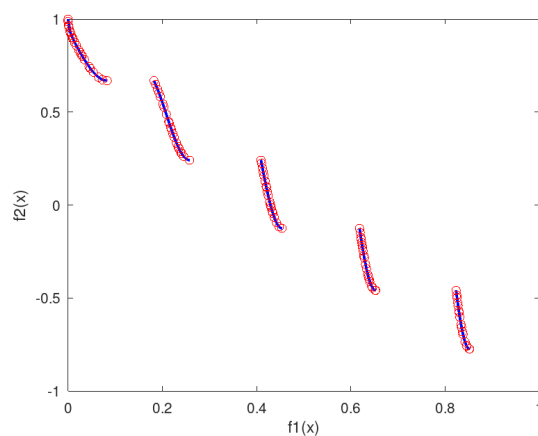
Figura 13 – Fronteiras de Pareto e resultados das soluções ótimas para o conjunto de testes ZDT1, ZDT2 e ZDT3



(a) ZDT1



(b) ZDT2



(c) ZDT3

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.2 Otimização de carteira

3.2.2.1 Seleção de fundos

Devido à grande quantidade de fundos de investimentos disponíveis no mercado de capitais brasileiro, atualmente em mais de 25.000 fundos, fez-se necessário a utilização de uma meta-heurística para a seleção inicial dos fundos participantes da carteira a ser otimizada. Foram escolhidos fundos com as seguintes características:

- abertos;
- não exclusivos, das 4 classes definidas pela CMV (Ações, Multimercado, Renda Fixa e Câmbio), com exceção de fundos de previdência;
- com mais de 100 cotistas;
- com patrimônio líquido superior à R\$ 50.000.000,00;
- sem aplicação inicial mínima;
- sem a necessidade de investidor qualificado;
- com ao menos 36 meses de dados históricos na data de 31/12/2020;
- abertos durante o ano de 2021.

A busca retornou um total de 474 fundos, os quais foram selecionados para a composição das carteiras a serem otimizadas pelo otimizador. Do total, 247 são fundos de Renda Fixa, 113 são fundos Multimercado, 114 são fundos de Ações e 9 são fundos de Câmbio. Os fundos selecionados podem ser observados na tabela do Apêndice A.

3.2.2.2 Configuração do algoritmo

Os parâmetros de configuração do algoritmo evolucionário para otimização multiobjetivo foram definidos com base em trabalhos relacionados (DEB, Kalyanmoy; KALYANMOY, 2001) (CANCIAN *et al.*, 2011) e testes com os dados a fim de minimizar o tempo necessário para a obtenção das soluções.

- **Codificação dos indivíduos:** Real (peso do fundo na carteira);
- **Tamanho da população (P):** 500;
- **Número de variáveis (n):** 474 (474 fundos);
- **Geração da população inicial:** Aleatório;
- **Método de seleção dos pais:** Torneio binário;
- **Método de recombinação :** Cruzamento de ponto único;
- **Método de mutação:** Mutação polinomial com $n_{mut} = 20$ e taxa de mutação igual à 0,1;
- **Método de parada:** Máximo de $P \times 2$ gerações.

Dessa forma, cada cromossomo está codificado como 474 variáveis reais entre [0,1]. Para a geração da população inicial foi utilizado um método de geração de números aleatórios para os valores dos pesos, apenas respeitando o valor máximo de 1 (100%) para a soma dos pesos (proporção do capital investido em cada ativo da carteira), como será visto no modelo a seguir.

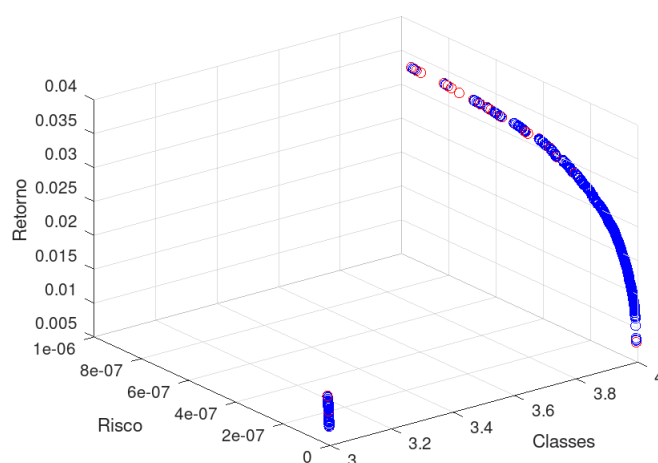
3.2.2.3 Modelo e resultados

O modelo proposto possui com três objetivos: (1) a maximização do retorno esperado; (2) a minimização do risco (variância da carteira) e (3) a maximização do número de classes de fundos da carteira, como definido na equação (3), onde μ_p é o retorno esperado da carteira, x_i é o peso do fundo i na carteira, μ_i é o retorno do fundo i na carteira, σ_p^2 é a variância da carteira, σ_{ij} é a covariância dos retornos dos ativos i e j , ρ_p é a soma das diferentes classes dos fundos da carteira, δ_i é a classe do fundo. Também suporta as seguintes restrições: (1) de igualdade em que a soma de todos os pesos de fundos deve ser igual a 1; (2) o peso de um fundo na carteira x_i deve ser maior ou igual a 2,5% e menor ou igual a 50% se presente e igual a zero se ausente; e (3) a restrição em que a soma do número de fundos na carteira deve ser maior ou igual a 8 e menor ou igual a 12, onde ζ_i é 1 se o fundo estiver presente e zero se estiver ausente. Essa restrição do número mínimo e máximo de fundos na carteira é para garantir uma maior diversificação e ao mesmo evitar que muitos fundos sejam selecionados, tornando a carteira de difícil gerenciamento pelo investidor.

$$\begin{aligned}
 \max \mu_p &= \sum_{i=1}^N x_i \mu_i \\
 \min \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \\
 \max \rho_p &= \sum_{i=1}^N \delta_i \\
 \text{sujeito à: } &\sum_{i=1}^N x_i = 1 \\
 &x_i = 0 \text{ ou } 0,025 \leq x_i \leq 0,50; \quad i = 1, \dots, N; \quad x_i \in [0, 1] \\
 &8 \leq \sum_{i=1}^N \zeta_i \leq 12
 \end{aligned} \tag{3}$$

Para o modelo tri-objetivo proposto, é possível perceber na Figura 14 uma distribuição satisfatória das melhores soluções com as 4 classes de fundos. Na Tabela 1 são apresentados os resultados dos objetivos das 25 melhores carteiras do conjunto

Figura 14 – Soluções obtidas para o problema de otimização de portfólio. Em vermelho, as 25 melhores soluções.



Fonte: Elaborado pelo autor.

de soluções ao término da otimização. Nela são mostrados os dados de rentabilidade, risco (desvio padrão), número de classes de fundos na carteira, número de fundos presentes na carteira e a razão entre a rentabilidade e o risco da carteira. Através da análise dos dados apresentados é possível validar que o otimizador atendeu o objetivo de maximização do número de classes de fundos e não violou a restrição de quantidade de fundos na carteira.

Para a validação da maximização da rentabilidade e minimização do risco também foi utilizado um modelo mono-objetivo, apenas para maximização da rentabilidade e com as mesmas restrições do problema tri-objetivo, para que fosse possível comparar os valores médios dos objetivos das soluções. Na Tabela 2, são apresentados os valores médios dos objetivos das soluções das populações iniciais e finais para o modelo utilizando 3 objetivos e para o modelo com apenas 1 objetivo. Na tabela é possível perceber que para ambos os modelos os valores iniciais de rentabilidade e risco são piores em relação aos valores finais. Em relação a comparação dos valores finais dos modelos, nota-se que com o modelo tri-objetivo é possível obter valores médios de rentabilidade muito próximos do modelo mono-objetivo com um risco médio 20% menor.

Para avaliar a evolução das soluções ao longo das gerações para o modelo tri-objetivo proposto são apresentadas nas Figuras 15a, 15b e 15c, os valores médios dos objetivos para os indivíduos das populações ao longo das gerações. Nelas é possível observar que as soluções médias tendem à estabilizar a partir de um número mais alto de gerações, a partir de 500 gerações.

Tabela 1 – Resultados dos objetivos para as 25 melhores carteiras do conjunto de soluções

Carteira	Rent(%)	Risco(%)	NumClasses	NumFundos	Rent/Risco
1	3,31	0,1	4	10	33,1
2	0,78	0,01	4	8	78,0
3	1,22	0,01	3	10	122,0
4	0,77	0,01	3	8	77,0
5	3,3	0,1	4	10	33,0
6	3,3	0,09	4	8	36,67
7	3,26	0,09	4	9	36,22
8	3,26	0,08	4	9	40,75
9	3,13	0,07	4	10	44,71
10	3,28	0,09	4	8	36,44
11	3,19	0,08	4	10	39,88
12	3,19	0,07	4	9	45,57
13	3,13	0,06	4	8	52,17
14	3,24	0,08	4	9	40,5
15	3,24	0,08	4	9	40,5
16	2,98	0,06	4	8	49,67
17	2,98	0,06	4	11	49,67
18	3,3	0,1	4	10	33,0
19	3,29	0,09	4	8	36,56
20	3,23	0,08	4	9	40,38
21	3,06	0,06	4	8	51,0
22	1,0	0,01	3	11	100,0
23	2,86	0,05	4	8	57,2
24	3,14	0,07	4	11	44,86
25	3,22	0,08	4	10	40,25

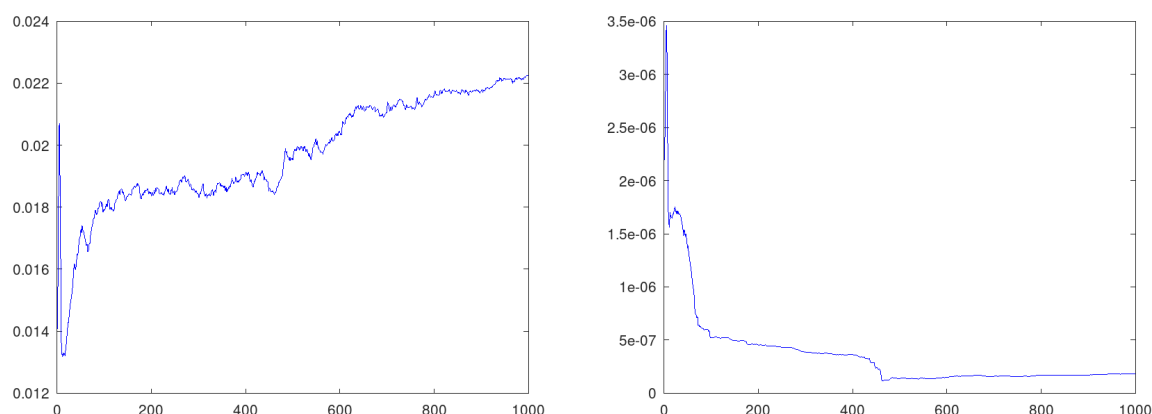
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Valores médios de rentabilidade e risco (desvio padrão) das soluções iniciais e finais para os modelos tri-objetivo e mono-objetivo

Soluções	Rent(%)	Risco(%)
Tri-objetivo inicial	1,25	0,14
Tri-objetivo final (otimizadas)	2,23	0,04
Mono-objetivo inicial	1,25	0,15
Mono-objetivo final (otimizadas)	2,55	0,2

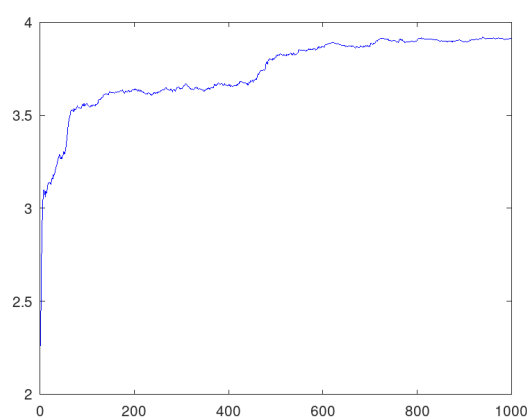
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – Convergência dos objetivos ao longo das gerações



(a) Rentabilidade média das soluções

(b) Risco médio das soluções



(c) Número médio de classes das soluções

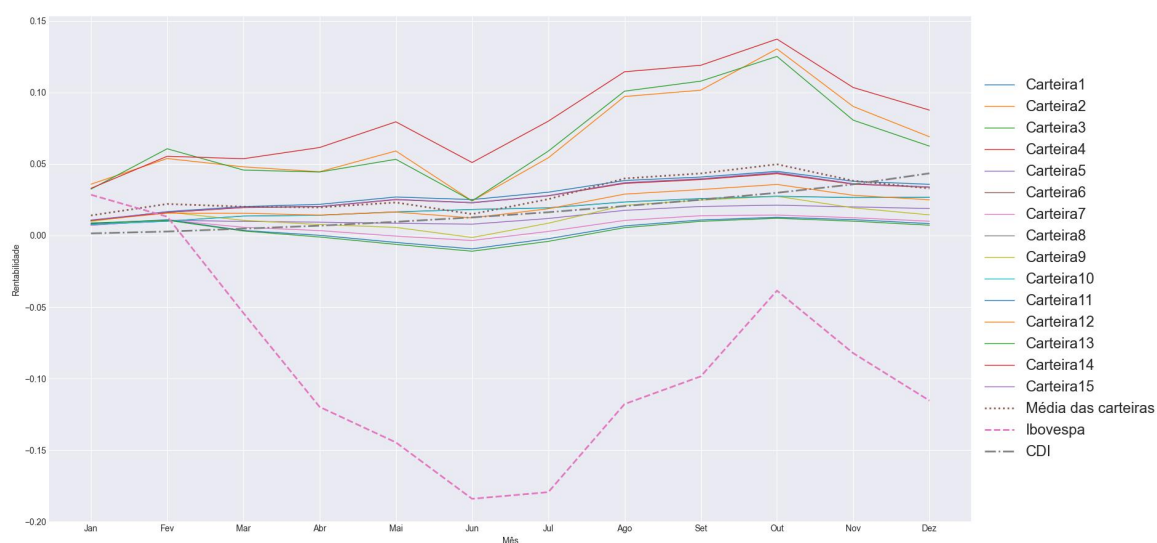
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.2.4 Teste retroativo

Teste retroativo (*backtesting*) é uma forma de verificação do modelo proposto e consiste na avaliação do desempenho de uma carteira num período histórico conhecido. Para isso é necessário situar o usuário num ponto específico no passado e gerar um conjunto de carteiras ótimas utilizando-se de dados históricos anteriores àquele ponto. Após isso, são utilizados os dados subsequentes de retornos dos ativos financeiros para determinar o desempenho da carteira para um período "futuro".

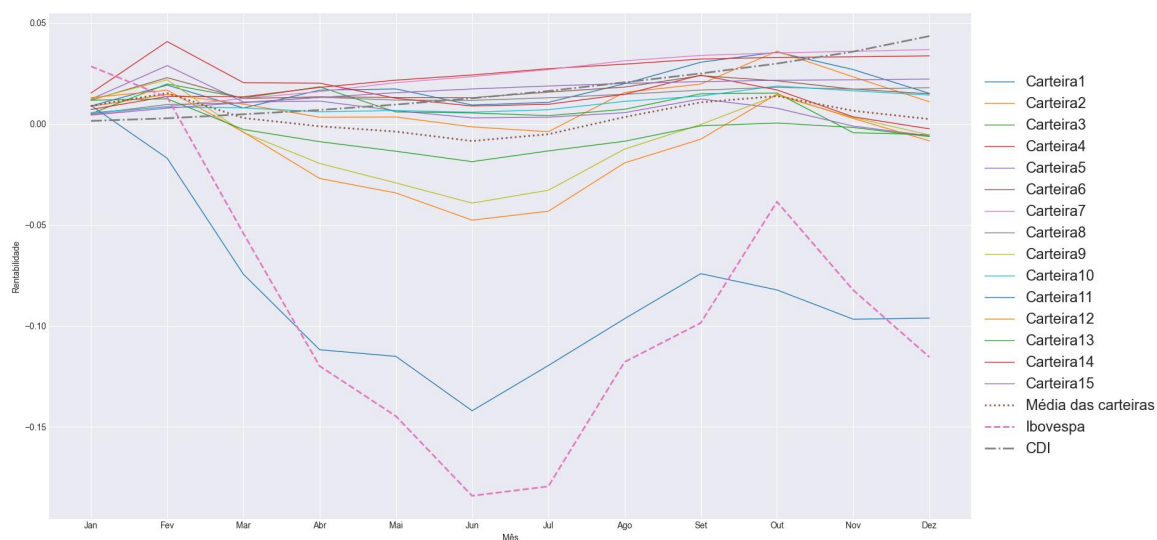
Para a validação das soluções obtidas pelo otimizador foram realizados testes com dados históricos dos retornos dos fundos para o ano de 2021. A Figura 16 mostra a rentabilidade acumulada das 15 melhores carteiras para os 12 meses do ano, apresenta a rentabilidade acumulada média das carteiras ao longo do período e o rendimento acumulado para os indicadores Ibovespa e CDI. Percebe-se que as carteiras otimizadas apresentaram um desempenho melhor que o Ibovespa ao final do ano; Já em relação ao CDI, 3 carteiras apresentaram rendimento superior, enquanto

Figura 16 – Rentabilidade acumulada das carteiras otimizadas, do Ibovespa e do CDI para o ano de 2021.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 – Rentabilidade acumulada das carteiras da população inicial, do Ibovespa e CDI para o ano de 2021.



Fonte: Elaborado pelo autor.

as outras ficaram um pouco abaixo do indicador. Outro ponto que chama a atenção é a volatilidade das soluções obtidas, pois foi menor do que a apresentada pelo Ibovespa, indicando um menor risco em relação ao índice. Esse é outro indicativo de que as carteiras foram geradas visando também o objetivo de minimização do risco. Para efeitos de comparação da maximização da rentabilidade, na Figura 17 é apresentada a rentabilidade acumulada no período para 15 carteiras da população inicial.

Figura 18 – Tela apresentando o resultado da otimização de uma carteira

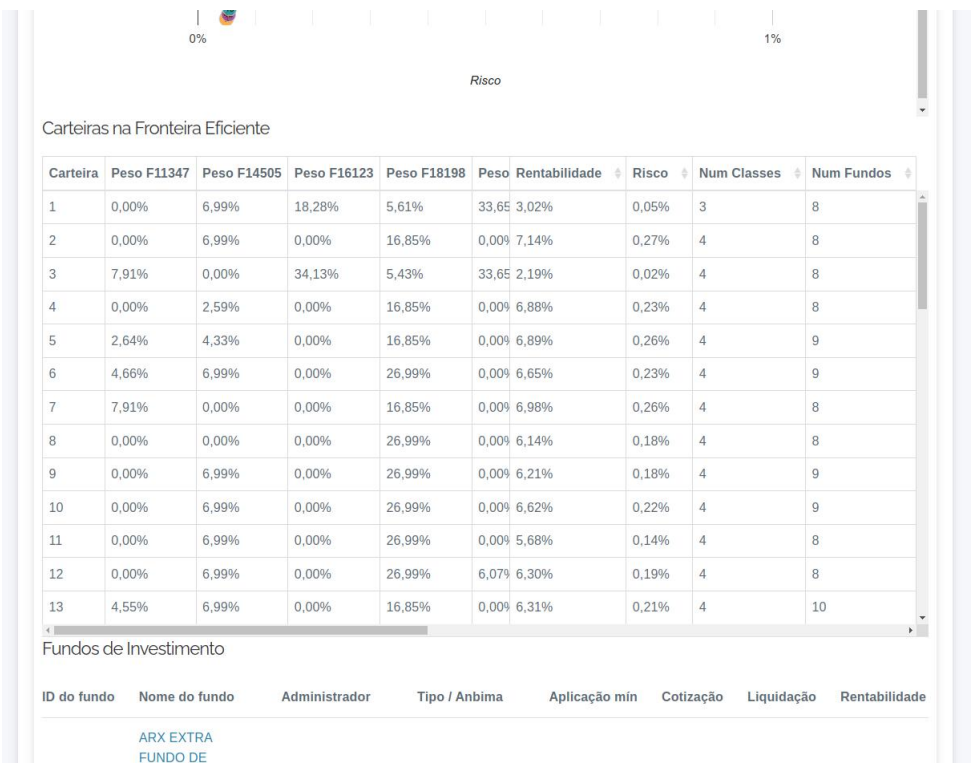


Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 INTEGRAÇÃO COM O FUNDOSINVEST

A integração do otimizador multiobjetivo com o projeto de extensão foi realizada a partir da criação de um pacote gerenciável através do gerenciador de pacotes *Composer*. Uma vez criado o pacote, o mesmo foi instalado no projeto FundosInvest. Após isso, foi adicionada a implementação do modelo tri-objetivo desenvolvido anteriormente, e implementado o controlador (*controller*) e a tela (*view*) responsáveis pela funcionalidade de otimização de uma carteira. Para a realização de uma otimização é dada a opção ao usuário de escolher uma carteira pré-cadastrada e após o processo de busca das melhores soluções é apresentado um gráfico da fronteira contendo as mesmas, como na Figura 18. Além disso, também são apresentadas as 50 melhores carteiras geradas com os respectivos pesos dos fundos na carteira e os valores objetivos otimizados como pode ser visto na Figura 19.

Figura 19 – Tela apresentando a continuação do resultado da otimização de uma carteira



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 CONCLUSÕES

Este trabalho buscou auxiliar na resolução do problema de seleção de fundos de investimentos, e de determinação de seus pesos para composição de carteiras por investidores pouco experientes. Foi proposto um modelo para otimização de portfólios utilizando-se um algoritmo evolutivo multiobjetivo e o modelo média-variância de Markowitz. Foi desenvolvido um otimizador baseado no NSGA-II e integrado ao projeto FundosInvest para gerar carteiras otimizadas a partir da carteira do investidor. Também foram desenvolvidas algumas funcionalidades básicas no projeto FundosInvest com a finalidade de permitir que os usuários cadastrem, analisem e comparem seus portfólios.

Nos experimentos realizados para os problemas de *benchmark* da classe ZDT, o otimizador se saiu muito bem e alcançou resultados satisfatórios após poucas gerações. Para o modelo de otimização de carteiras tri-objetivo proposto, foram apresentados alguns gráficos com os valores médios dos objetivos das soluções ao longo das gerações. Neles foi possível observar a convergência dos objetivos das soluções geradas. Também foram mostradas simulações de rentabilidade das melhores carteiras geradas para o ano de 2021, com o objetivo de analisar o desempenho das mesmas e comparar com a rentabilidade de um conjunto de carteiras não otimizadas. Apesar de ser um ano atípico devido à pandemia de COVID-19, algumas carteiras conseguiram performar melhor que o indicador de renda fixa utilizado na comparação, ao mesmo tempo em que todas elas se saíram melhor do que o índice Ibovespa. Para validar a maximização da rentabilidade e minimização do risco foi apresentado uma tabela comparativa dos valores médios dos objetivos dos indivíduos da população inicial e das soluções geradas pelo otimizador, tanto para o modelo tri-objetivo, como para um modelo mono-objetivo para maximização da rentabilidade. Após os experimentos e análise dos resultados foi possível chegar a conclusão de que o otimizador cumpriu seu papel na geração de carteiras otimizadas.

Ao longo do desenvolvimento do trabalho algumas dificuldades foram encontradas, como a determinação dos parâmetros para o algoritmo evolutivo que a princípio foi feita baseada em trabalhos relacionados e posteriormente analisando resultados obtidos com diferentes valores de entrada, e tempo elevado de execução da otimização, que era de aproximadamente 4,5h. Esse tempo pode ter relação com diversos fatores, como a linguagem utilizada na implementação do otimizador, o grande número de variáveis do problema, o tamanho da população e o número de gerações avaliadas. Tendo isso em vista, algumas possibilidades de trabalhos futuros podem ser exploradas, como a realização de experimentos para encontrar a melhor configuração de parâmetros para o otimizador; a implementação de diferentes algoritmos para os operadores do algoritmo evolutivo multiobjetivo a fim de possibilitar maior liberdade de

escolha para o utilizador; e a implementação de um método de geração da população inicial com o objetivo de melhorar a qualidade dos indivíduos pertencentes à ela, aumentando a variabilidade, e visando cobrir a maior parte do espaço de busca.

Por fim, espera-se que este trabalho possa ajudar investidores iniciantes no mercado financeiro a melhorarem suas carteiras de investimentos, possibilitando a escolha entre diversas soluções com diferentes níveis de risco e retorno.

REFERÊNCIAS

- ARTZNER, Philippe; DELBAEN, Freddy; EBER, Jean-Marc; HEATH, David. Coherent Measures of Risk. **Mathematical Finance**, Wiley, v. 9, n. 3, p. 203–228, jul. 1999.
- BLANK, J.; DEB, K. pymoo: Multi-Objective Optimization in Python. **IEEE Access**, v. 8, p. 89497–89509, 2020.
- BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A.J. **Investimentos - 10.ed.** [S.l.]: AMGH Editora, 2014. ISBN 9788580554205.
- CANCIAN, Rafael Luiz *et al.* Um Modelo evolucionário de otimização multiobjetivo para exploração do espaço de projeto em sistemas embarcados. Florianópolis, SC, 2011.
- CARHART, Mark M. On Persistence in Mutual Fund Performance. **The Journal of Finance**, v. 52, n. 1, p. 57–82, 1997. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1540-6261.1997.tb03808.x>.
- CHANG, T-J; MEADE, Nigel; BEASLEY, John E; SHARAIHA, Yazid M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 27, n. 13, p. 1271–1302, 2000.
- CHEUNG, Peter Batista. **Análise de reabilitação de redes de distribuição de água para abastecimento via algoritmos genéticos multiobjetivo.** Tese (Doutorado).
- COELLO, Carlos A. An Updated Survey of GA-Based Multiobjective Optimization Techniques. **ACM Comput. Surv.**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 32, n. 2, p. 109–143, jun. 2000. ISSN 0360-0300.
- DEB, Kalyanmoy. Multi-objective optimisation using evolutionary algorithms: an introduction. *In*: MULTI-OBJECTIVE evolutionary optimisation for product design and manufacturing. [S.l.]: Springer, 2011. P. 3–34.
- DEB, Kalyanmoy; KALYANMOY, Deb. **Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms.** USA: John Wiley & Sons, Inc., 2001. ISBN 047187339X.
- DEB, Kalyanmoy; PRATAP, Amrit; AGARWAL, Sameer; MEYARIVAN, TAMT. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. **IEEE transactions on evolutionary computation**, IEEE, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002.

FAMA, Eugene F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. **The Journal of Finance**, [American Finance Association, Wiley], v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970. ISSN 00221082, 15406261.

FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. A five-factor asset pricing model. **Journal of Financial Economics**, v. 116, n. 1, p. 1–22, 2015. ISSN 0304-405X.

FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. **Journal of Financial Economics**, v. 33, n. 1, p. 3–56, 1993. ISSN 0304-405X.

FORTI, Cristiano Augusto Borges; PEIXOTO, Fernanda Maciel; PAULO SANTIAGO, Wagner de. Hipótese da eficiência de mercado: um estudo exploratório no mercado de capitais brasileiro. **Gestão & Regionalidade**, v. 25, n. 75, 2009.

GOLDBERG, David E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. 1st. USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989. ISBN 0201157675.

JEGADEESH, NARASIMHAN; TITMAN, SHERIDAN. Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency. **The Journal of Finance**, v. 48, n. 1, p. 65–91, 1993. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1540-6261.1993.tb04702.x>.

JORION, Philippe. **Value at risk: a nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro**. [S.l.]: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2003.

MARKOWITZ, Harry. PORTFOLIO SELECTION*. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>.

MURATA, Tadahiko; ISHIBUCHI, Hisao *et al.* MOGA: multi-objective genetic algorithms. *In*: IEEE international conference on evolutionary computation. [S.l.: s.n.], 1995. v. 1, p. 289–294.

SCHAFFER, J. Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms. *In*: p. 93–100.

SHARPE, William F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.

TICONA, Waldo Gonzalo Cancino. **Aplicação de algoritmos genéricos multi-objetivo para alinhamento de seqüências biológicas**. Tese (Doutorado).

VALORES MOBILIÁRIOS, Comissão de. **Mercado de valores mobiliários brasileiro - 4.ed.** Rio de Janeiro: Comissão de Valores Mobiliários, 2019. ISBN 9788567896045.

ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 3, n. 4, p. 257–271, 1999.

ZITZLER, Eckart. **Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications**. [S.l.: s.n.], 1999.

ZITZLER, Eckart; DEB, Kalyanmoy; THIELE, Lothar. Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results. **Evolutionary Computation**, MIT Press - Journals, v. 8, n. 2, p. 173–195, jun. 2000.

ZITZLER, Eckart; THIELE, Lothar. An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: The strength pareto approach. **TIK-report**, Computer Engineering e Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute . . . , v. 43, 1998.

APÊNDICE A – LISTA DE FUNDOS SELECIONADOS

CNPJ	NOME
21.983.042/0001-60	ABSOLUTE ALPHA GLOBAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
00.575.922/0001-27	ALFA AÇÕES PREMIUM - FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
02.733.791/0001-94	ALFA MIX - FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LONGO PRAZO
13.608.337/0001-28	APEX EQUITY HEDGE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
03.168.062/0001-03	ARX INCOME FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
07.279.657/0001-89	AZ QUEST AÇÕES FIC FI DE AÇÕES
22.100.009/0001-07	AZ QUEST ALTRO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO CRÉDITO PRIVADO
25.213.405/0001-39	AZ QUEST DEBENTURES INCENTIVADAS FI EM COTAS DE FI MULTIMERCADO CRÉDITO PRIVADO
23.720.500/0001-01	AZ QUEST MISTRAL FI EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO CRÉDITO PRIVADO
26.323.079/0001-85	AZ QUEST MULTI MAX FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
11.392.165/0001-72	AZ QUEST SMALL MID CAPS FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
13.974.750/0001-06	AZ QUEST TOP LONG BIASED FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
14.812.722/0001-55	AZ QUEST TOTAL RETURN FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
16.599.968/0001-16	AZ QUEST YIELD FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LONGO PRAZO
00.838.267/0001-52	BANESTES INVESTIDOR AUTOMÁTICO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CURTO PRAZO
19.170.160/0001-07	BANESTES VALORES FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
01.587.403/0001-41	BANESTES VIP DI FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
21.743.480/0001-50	BANRISUL ABSOLUTO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LP
88.198.056/0001-43	BANRISUL AÇÕES FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
01.353.260/0001-03	BANRISUL AUTOMÁTICO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CURTO PRAZO
08.960.978/0001-07	BANRISUL FLEX CREDITO PRIVADO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA DE LONGO PRAZO
21.007.180/0001-03	BANRISUL FOCO IDKA IPCA 2A FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA
16.844.890/0001-58	BANRISUL FOCO IMA-B FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LONGO PRAZO
18.466.245/0001-74	BANRISUL FOCO IRF-M 1 FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA
16.844.885/0001-45	BANRISUL FOCO IRF-M FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LONGO PRAZO
01.822.655/0001-08	BANRISUL MASTER FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO-DI DE LONGO PRAZO
11.311.874/0001-86	BANRISUL SOBERANO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA SIMPLES LONGO PRAZO
06.251.554/0001-48	BB AÇÕES ALOCAÇÃO ETF FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
09.134.614/0001-30	BB AÇÕES BB FUNDO DE INVESTIMENTO
17.593.934/0001-87	BB AÇÕES BB SEGURIDADE FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
09.648.050/0001-54	BB AÇÕES CONSTRUÇÃO CIVIL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
08.973.942/0001-68	BB AÇÕES CONSUMO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
05.100.191/0001-87	BB AÇÕES DIVIDENDOS FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO

14.213.331/0001-14	BB AÇÕES DIVIDENDOS MIDCAPS FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
18.690.918/0001-75	BB AÇÕES DUAL STRATEGY PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
02.020.528/0001-58	BB AÇÕES ENERGIA FUNDO DE INVESTIMENTO
05.100.213/0001-09	BB AÇÕES EXPORTAÇÃO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
22.632.237/0001-28	BB AÇÕES GLOBAIS FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES - BDR NÍVEL I
00.822.059/0001-65	BB AÇÕES IBOVESPA ATIVO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
09.005.823/0001-84	BB AÇÕES IBOVESPA INDEXADO ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
09.004.364/0001-14	BB AÇÕES IBRX INDEXADO ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
30.847.180/0001-02	BB AÇÕES IBRX INDEXADO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
11.328.904/0001-67	BB ACOES INFRAESTRUTURA FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
07.882.792/0001-14	BB AÇÕES MULTI SETORIAL QUANTITATIVO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
03.920.413/0001-82	BB AÇÕES PETROBRAS FUNDO DE INVESTIMENTO
09.005.805/0001-00	BB AÇÕES RETORNO TOTAL ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
08.973.948/0001-35	BB ACOES SETOR FINANCEIRO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
08.973.951/0001-59	BB AÇÕES SIDERURGIA FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
05.100.221/0001-55	BB AÇÕES SMALL CAPS FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
01.578.474/0001-88	BB AÇÕES TECNOLOGIA FUNDO DE INVESTIMENTO
04.881.682/0001-40	BB AÇÕES VALE FUNDO DE INVESTIMENTO
03.298.200/0001-60	BB AMPLO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LONGO PRAZO CRÉDIT PRIV
00.842.960/0001-07	BB BESC RENDA FIXA PREMIUM FUNDO DE INVESTIMENTO
04.061.044/0001-82	BB CAMBIAL DOLAR LP 100 MIL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
04.128.893/0001-06	BB CAMBIAL DOLAR LP ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
04.305.193/0001-40	BB CAMBIAL EURO LP ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
04.857.834/0001-79	BB COMERCIAL 17 LONGO PRAZO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA
26.751.296/0001-76	BB ESPELHO MULTIMERCADO ARX EXTRA PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
28.015.594/0001-23	BB ESPELHO MULTIMERCADO BAHIA AM MARAÚ PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI
20.162.353/0001-03	BB ESPELHO MULTIMERCADO BRASIL PLURAL EQUITY HEDGE 30 PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI
26.739.055/0001-01	BB ESPELHO MULTIMERCADO GÁVEA MACRO PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
20.162.345/0001-59	BB ESPELHO MULTIMERCADO IBIUNA HEDGE PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI
02.998.773/0001-34	BB EXCLUSIVE 3 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LONGO PRAZO

13.079.634/0001-23	BB MULTIMERCADO DINÂMICO LP ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
11.046.635/0001-46	BB MULTIMERCADO LONGO PRAZO BALANCEADO DIVIDENDOS ESTILO FI EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
10.869.591/0001-91	BB MULTIMERCADO LONGO PRAZO BALANCEADO DIVIDENDOS PRIVATE FIC FI
10.525.583/0001-28	BB MULTIMERCADO LONGO PRAZO JUROS E MOEDAS PRIVATE FI EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
06.015.361/0001-98	BB MULTIMERCADO LP ARBITRAGEM ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
17.940.400/0001-80	BB MULTIMERCADO LP CLARITAS LONG & SHORT PRIVATE FI EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
21.502.318/0001-40	BB MULTIMERCADO LP GLOBAL INNOVATION PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO
06.015.368/0001-00	BB MULTIMERCADO LP JUROS E MOEDAS ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
13.322.192/0001-02	BB MULTIMERCADO LP MULTIESTRATÉGIA ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
26.786.653/0001-31	BB MULTIMERCADO LP MULTIESTRATÉGIA PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
05.962.491/0001-75	BB MULTIMERCADO MACRO LP ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
05.786.944/0001-50	BB MULTIMERCADO MODERADO LP CORPORATIVO 10 MIL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI
13.703.282/0001-35	BB MULTIMERCADO MULTIGESTOR MÓDULO MACRO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
18.270.783/0001-99	BB PREVIDENCIÁRIO ACOES ALOCAÇÃO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
10.418.335/0001-88	BB PREVIDENCIÁRIO AÇÕES GOVERNANÇA FUNDO DE INVESTIMENTO
13.077.415/0001-05	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA FLUXO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
13.322.205/0001-35	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA IDKA 2 TÍTULOS PÚBLICOS FUNDO DE INVESTIMENTO
14.964.240/0001-10	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA IMA GERAL EX-C TÍTULOS PÚBLICOS FUNDO DE INVESTIMENTO
03.543.447/0001-03	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA IMA-B 5 LONGO PRAZO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI
07.442.078/0001-05	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA IMA-B TÍTULOS PÚBLICOS FUNDO DE INVESTIMENTO
07.111.384/0001-69	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA IRF-M TÍTULOS PÚBLICOS FUNDO DE INVESTIMENTO
11.328.882/0001-35	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA IRF-M1 TÍTULOS PÚBLICOS FIC FI
13.077.418/0001-49	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA PERFIL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
19.303.795/0001-35	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA TÍTULOS PÚBLICOS IPCA III FUNDO DE INVESTIMENTO
19.515.015/0001-10	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA TÍTULOS PÚBLICOS IPCA IV FUNDO DE INVESTIMENTO
19.523.305/0001-06	BB PREVIDENCIÁRIO RENDA FIXA TÍTULOS PÚBLICOS VII FUNDO DE INVESTIMENTO
00.756.851/0001-69	BB RENDA FIXA 500 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
05.102.500/0001-58	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO 200 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO
04.061.762/0001-59	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO ABSOLUTO SETOR PÚBLICO FIC FI
00.071.477/0001-68	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO AUTOMÁTICO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
02.010.147/0001-98	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO CLÁSSICO SETOR PÚBLICO FIC FI
11.351.449/0001-10	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO CORPORATIVO 10 MILHOES FIC FI

05.775.723/0001-86	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO CORPORATIVO 400 MIL FIC FI
07.214.377/0001-92	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO DIFERENCIADO SETOR PÚBLICO FIC FI
03.308.718/0001-38	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
26.786.661/0001-88	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO FLUXO AUTOMÁTICO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
09.632.730/0001-80	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO SOBERANO SETOR PÚBLICO FIC FI
04.288.966/0001-27	BB RENDA FIXA CURTO PRAZO SUPREMO SETOR PUBLICO FIC FI
00.360.293/0001-18	BB RENDA FIXA DIVIDA EXTERNA MIL FUNDO INVESTIMENTO
18.249.239/0001-65	BB RENDA FIXA LONGO PRAZO INDICE DE PRECO IMA-B 5 PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI
68.599.141/0001-06	BB RENDA FIXA LP 100 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
04.061.079/0001-11	BB RENDA FIXA LP CORPORATIVO 10 MILHÕES FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
05.786.938/0001-00	BB RENDA FIXA LP CORPORATIVO 3 MILHOES FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
09.324.673/0001-71	BB RENDA FIXA LP DEDICADO ANS 5 MIL FUNDO DE INVESTIMENTO
08.980.715/0001-60	BB RENDA FIXA LP ÍNDICE DE PREÇO ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
07.861.571/0001-60	BB RENDA FIXA LP PARCERIA 10 MIL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI
28.015.623/0001-57	BB RENDA FIXA LP PRÉ 5 ANOS PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI
15.037.554/0001-30	BB RENDA FIXA LP PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
04.128.704/0001-03	BB RENDA FIXA MARKET PLUS IRF-M LP PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI
08.080.680/0001-02	BB RENDA FIXA PRE LP ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO
10.304.401/0001-99	BB RENDA FIXA REF DI LP PREMIUM ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
25.244.537/0001-28	BB RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO SOBERANO PRIVATE FIC DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
01.996.007/0001-78	BB RENDA FIXA REFERENCIADO DI LP 50 MIL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
03.504.010/0001-52	BB RENDA FIXA REFERENCIADO DI LP MEGA FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
04.128.562/0001-76	BB RENDA FIXA REFERENCIADO DI LP PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
04.061.224/0001-64	BB RENDA FIXA REFERENCIADO DI LP VIP ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
05.943.661/0001-74	BB RENDA FIXA REFERENCIADO DI PLUS ESTILO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
05.080.623/0001-35	BB RENDA FIXA REFERENCIADO DI SOCIAL 50 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
22.051.699/0001-51	BB RENDA FIXA SIMPLES FUNDO DE INVESTIMENTO
08.973.918/0001-29	BB TOP AÇÕES IBOVESPA INDEXADO FUNDO DE INVESTIMENTO
03.504.023/0001-21	BB TOP PRINCIPAL RENDA FIXA REFERENCIADO DI LP FUNDO DE INVESTIMENTO
08.915.927/0001-63	BEM FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI TPF
00.539.553/0001-17	BLUE CAPITAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO CRÉDITO PRIVADO
08.627.607/0001-08	BM&FBOVESPA MARGEM GARANTIA REFERENCIADO DI FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
00.812.433/0001-41	BNB AUTOMÁTICO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CURTO PRAZO
07.371.945/0001-69	BNB CLASSICO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI

19.273.198/0001-05	BNB ESSENCIAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
27.347.367/0001-32	BNB FUNCIONÁRIO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
21.307.581/0001-89	BNB INSTITUCIONAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
06.124.241/0001-29	BNB PLUS FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LONGO PRAZO
19.320.686/0001-26	BNB RESERVA FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
08.266.261/0001-60	BNB RPPS PREVIDÊNCIA FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA
63.375.216/0001-51	BNB SELEÇÃO FUNDO DE INVESTIMENTO AÇÕES
12.239.939/0001-92	BNP PARIBAS ACTION FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO AÇÕES
25.108.905/0001-00	BNP PARIBAS DEBÊNTURES INCENTIVADAS DE INFRAESTRUTURA FI MULTIMERCADO CRÉDITO PRIVADO
09.636.393/0001-07	BNP PARIBAS MATCH DI FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO CRÉDITO PRIVADO
11.108.013/0001-03	BNP PARIBAS SMALL CAPS FUNDO DE INVESTIMENTO AÇÕES
05.862.906/0001-39	BNP PARIBAS TARGUS DI FIC DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO
17.898.543/0001-70	BNY MELLON ARX LIQUIDEZ FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO
18.416.618/0001-00	BNY MELLON ARX LIQUIDEZ FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO II
18.418.915/0001-87	BNY MELLON ARX LIQUIDEZ FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO IX
08.323.402/0001-39	BOGARI VALUE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
23.186.354/0001-78	BONSUCESSO DEBÊNTURES INCENTIVADAS FI MULTIMERCADO DEBÊNTURES DE INFRAESTRUTURA CRÉDITO PRIVADO
05.629.904/0001-02	BRADERCO EMPRESAS FIC DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI FEDERAL
07.192.409/0001-04	BRADERCO EMPRESAS FIC DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI TOP
07.192.395/0001-10	BRADERCO EMPRESAS FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO REND FIXA CRÉDITO PRIVADO
08.674.732/0001-79	BRADERCO EMPRESAS FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA DURATION
05.629.893/0001-52	BRADERCO EMPRESAS FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RF REFERENCIADO DI PLUS
05.084.445/0001-10	BRADERCO FDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA MULTI-ÍNDICES LONGO PRAZO
03.766.575/0001-08	BRADERCO FIC DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI HIPERFUNDO
06.916.384/0001-73	BRADERCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES DIVIDENDOS
03.660.879/0001-96	BRADERCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES SELECTION
06.988.623/0001-09	BRADERCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES SMALL CAP PLUS
15.714.222/0001-43	BRADERCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM AÇÕES DIVIDENDOS
28.428.226/0001-07	BRADERCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO CAPITAL KAPPA
01.606.546/0001-53	BRADERCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA MERCÚRIO
04.237.569/0001-26	BRADERCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI SAFIRA

04.237.578/0001-17	BRABESCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA SIMPLES BRILHANTE
00.793.947/0001-05	BRABESCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA VÊNUS
13.401.510/0001-12	BRABESCO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RF CURTO PRAZO RIO DE JANEIRO
08.702.804/0001-44	BRABESCO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA DEDICADO AO SETOR DE SAÚDE SUPLEMENTAR - ANS
24.022.566/0001-82	BRABESCO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA IDKA PRÉ 2
11.484.558/0001-06	BRABESCO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA IRF-M 1 TÍTULOS PÚBLICOS
03.256.793/0001-00	BRABESCO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI FEDERAL EXTRA
03.399.411/0001-90	BRABESCO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI PREMIUM
04.831.907/0001-53	BRABESCO FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI SKY
08.154.725/0001-46	BRABESCO H FICFI DE AÇÕES SMALL CAPS
03.583.239/0001-20	BRABESCO H FICFI MULTIMERCADO LONGO PRAZO AQUAMARINE
04.823.412/0001-82	BRABESCO H FICFI RENDA FIXA CURTO PRAZO
06.127.871/0001-57	BRABESCO H FICFI RENDA FIXA LONGO PRAZO 1.000
01.114.310/0001-08	BRABESCO H FICFI RENDA FIXA LONGO PRAZO PLUS
12.092.501/0001-24	BRABESCO H FICFI RENDA FIXA REFERENCIADO DI CRÉDITO PRIVADO NOVO EXECUTIVO
05.635.774/0001-02	BRABESCO H FICFI RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO 1.000
00.885.760/0001-23	BRABESCO H FICFI RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO 50
04.044.634/0001-05	BRABESCO H FICFI RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO PJ
02.294.024/0001-26	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO CAMBIAL LONGO PRAZO DÓLAR
11.675.309/0001-06	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO DE AÇÕES IBOVESPA VALUATION
42.469.023/0001-90	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES IBOVESPA
04.892.107/0001-42	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES VALE DO RIO DOCE
13.898.197/0001-70	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI MULTIMERCADO PORTFOLIO LONG AND SHORT
06.077.638/0001-07	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CRÉDITO PRIVADO LONGO PRAZO PERFORMANCE
10.813.716/0001-61	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CRÉDITO PRIVADO LONGO PRAZO PERFORMANCE INSTITUCIONAL
09.522.470/0001-90	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LONGO PRAZO PREÇOS
00.322.699/0001-06	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI CRÉDITO PRIVADO LONGO PRAZO EXECUTIVO
00.975.480/0001-06	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO
00.885.762/0001-12	BRABESCO H FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO TÍTULOS PÚBLICOS
10.986.880/0001-70	BRABESCO INSTITUCIONAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVEST RF IMA-B TÍT. PÚBLICOS
08.702.798/0001-25	BRABESCO INSTITUCIONAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA IMA-B
20.216.216/0001-04	BRABESCO INSTITUCIONAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA IMA-B 5
05.222.533/0001-31	BRABESCO PRIME FDO DE INVEST EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA MULTI-ÍNDICES LONGO PRAZO
05.222.547/0001-55	BRABESCO PRIME FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA
05.222.510/0001-27	BRABESCO PRIME FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RF REFERENCIADO DI
10.601.349/0001-32	BRAM FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI FEDERAL II
18.316.558/0001-46	BRASIL PLURAL CRÉDITO CORPORATIVO II FI EM COTAS DE FI MULTIMERCADO CRÉDITO PRIVADO

15.578.417/0001-03	BRASIL PLURAL INSTITUCIONAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO II
11.616.354/0001-81	BRASIL PLURAL YIELD FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
00.832.587/0001-03	BRB FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM RENDA FIXA DI LONGO PRAZO 25 MIL
07.351.138/0001-84	BRB FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM RENDA FIXA PÚBLICO LONGO PRAZO 25MIL
11.977.794/0001-64	BTG PACTUAL ABSOLUTO INSTITUCIONAL FIQ DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
09.518.581/0001-22	BTG PACTUAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM QUOTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA INFLATION
04.128.522/0001-24	BTG PACTUAL HEDGE MULTIMERCADO PRIVATE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO
05.892.566/0001-99	BTGP ACCESS BALANCEADO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
22.344.837/0001-90	BUTIÁ FUNDAMENTAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
22.344.843/0001-48	BUTIÁ TOP CRÉDITO PRIVADO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA
12.796.232/0001-87	CA INDOSUEZ AGILITÉ FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CRÉDITO PRIVADO
02.536.364/0001-16	CA INDOSUEZ DI MASTER FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO
18.623.722/0001-68	CA INDOSUEZ INFRAESTRUTURA INCENTIVADO CRÉDITO PRIVADO FIC FI MULTIMERCADO
11.447.124/0001-36	CA INDOSUEZ VITESSE FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CRÉDITO PRIVADO
12.907.125/0001-89	CANVAS CLASSIC II FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
10.565.506/0001-00	CASH BLUE FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
15.019.684/0001-40	CASH STAR FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI - CREDITO PRIVADO
13.547.640/0001-68	CITIFIRST CAPITAL PROTEGIDO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
05.488.919/0001-90	CLARITAS HEDGE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO LONGO PRAZO
11.403.850/0001-57	CLARITAS VALOR FEEDER FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
06.871.308/0001-99	CSHG TOP 30 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
00.826.903/0001-26	CSHG TOP FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
01.221.890/0001-24	CSHG VERDE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
18.558.694/0001-42	CTM ESTRATEGIA FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
18.956.729/0001-00	CTM HEDGE FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO - LONGO PRAZO
10.783.480/0001-68	DAYCOVAL CLASSIC FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CRÉDITO PRIVADO
26.142.614/0001-00	DAYCOVAL DEBÊNTURES INCENTIVADAS CRÉDITO PRIVADO FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
12.672.120/0001-14	DAYCOVAL FUNDO DE RENDA FIXA IMA-B 5
13.155.995/0001-01	DAYCOVAL IBOVESPA ATIVO FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
09.274.058/0001-06	DAYCOVAL PARNAMIRIM FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
00.807.777/0001-62	DAYCOVAL RENDA FIXA FUNDO DE INVESTIMENTO
12.004.203/0001-35	EQUITAS SELECTION FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
15.569.128/0001-48	EQUITAS SELECTION INSTITUCIONAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
11.186.674/0001-49	FATOR AÇÕES FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES

21.312.739/0001-09	FLAG FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
02.895.694/0001-06	FRANKLIN VALOR E LIQUIDEZ FVL FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
09.548.729/0001-71	FUNDO DE INVEST EM COTAS DE FUNDOS DE INVEST CAIXA FOCO ÍNDICE DE PREÇOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
05.357.507/0001-10	FUNDO DE INVESTIMENTO BANESTES INSTITUCIONAL RENDA FIXA
36.347.706/0001-71	FUNDO DE INVESTIMENTO BANESTES INVEST PUBLIC RENDA FIXA
20.230.719/0001-26	FUNDO DE INVESTIMENTO BANESTES LIQUIDEZ RENDA FIXA REFERENCIADO DI
05.164.358/0001-73	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA ALIANÇA TÍTULOS PÚBLICOS RENDA FIXA
18.598.288/0001-03	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL 2024 I TÍTULOS PÚBLICOS RENDA FIXA
14.508.643/0001-55	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL DISPONIBILIDADES RENDA FIXA
14.386.926/0001-71	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL IDKA IPCA 2A TITULOS PUBLICOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
10.577.503/0001-88	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL IMA B 5+ TITULOS PÚBLICOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
11.061.217/0001-28	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL IMA GERAL TÍTULOS PÚBLICOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
11.060.913/0001-10	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL IMA-B 5 TÍTULOS PÚBLICOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
10.740.658/0001-93	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL IMA-B TÍTULOS PÚBLICOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
10.740.670/0001-06	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL IRF-M 1 TÍTULOS PÚBLICOS RENDA FIXA
10.577.519/0001-90	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL IRF-M 1+ TITULOS PÚBLICOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
14.508.605/0001-00	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL IRF-M TITULOS PUBLICOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
03.737.206/0001-97	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO
05.164.356/0001-84	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL TÍTULOS PÚBLICOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
11.061.230/0001-87	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA CORPORATIVO II RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO
10.384.413/0001-70	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA CORPORATIVO RENDA FIXA LONGO PRAZO
09.181.287/0001-78	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA FIDELIDADE RENDA FIXA LONGO PRAZO
14.120.520/0001-42	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA JUROS E MOEDAS MULTIMERCADO LONGO PRAZO
03.737.188/0001-43	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA MULTIMERCADO RV 30 LONGO PRAZO
22.791.329/0001-50	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA RENDA FIXA SIMPLES LONGO PRAZO
09.181.268/0001-41	FUNDO DE INVESTIMENTO CAIXA SAÚDE SUPLEMENTAR - ANS RENDA FIXA LONGO PRAZO
17.503.172/0001-80	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA BDR NÍVEL I
13.058.816/0001-18	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA BRASIL IBOVESPA
10.551.375/0001-01	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA CONSTRUÇÃO CIVIL
10.577.512/0001-79	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA CONSUMO
05.900.798/0001-41	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA DIVIDENDOS
01.525.057/0001-77	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA IBOVESPA
08.046.355/0001-23	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA IBOVESPA ATIVO
05.164.370/0001-88	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA IBRX ATIVO
10.551.382/0001-03	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA INFRAESTRUTURA
17.502.937/0001-68	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA INSTITUCIONAL BDR NÍVEL I
03.914.671/0001-56	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA PETROBRAS
11.060.594/0001-42	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA PETROBRAS PRÉ-SAL
05.164.361/0001-97	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA PIBB - SEM OPÇÃO DE VENDA
15.154.220/0001-47	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA SMALL CAPS ATIVO
04.885.820/0001-69	FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES CAIXA VALE DO RIO DOCE

14.120.511/0001-51	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI CAIXA OBJETIVO PRÉ RENDA FIXA LONGO PRAZO
15.154.319/0001-49	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INV CAIXA EXCLUSIVO FUNCIONÁRIOS RF CREDITO PRIVADO LP
10.740.552/0001-90	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVEST CAIXA TRANSFERENCIA VOLUNTÁRIA RENDA FIXA CP
02.201.164/0001-02	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA ABSOLUTO PRÉ RENDA FIXA LONGO PRAZO
17.687.735/0001-38	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA APORTE IMEDIATO 216 RENDA FIXA LP
00.834.072/0001-34	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA BETA RENDA FIXA REF DI LONGO PRAZO
23.215.097/0001-55	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA BRASIL GESTÃO ESTRATÉGICA RENDA FIXA
05.114.733/0001-70	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA CAMBIAL DÓLAR
14.239.659/0001-00	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA CAP PROT IBOVESPA CÍCLICO I MULT
03.218.183/0001-04	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA CAPITAL ÍNDICE DE PREÇOS RF LP
01.165.796/0001-03	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA CLÁSSICO RENDA FIXA LONGO PRAZO
15.154.422/0001-99	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA E-FUNDO RENDA FIXA LP
03.737.190/0001-12	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA ESPECIAL RENDA FIXA LONGO PRAZO
03.737.200/0001-10	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA ESTRATÉGICO MULTIMERCADO LONGO PRAZO
01.165.781/0001-37	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA EXECUTIVO RENDA FIXA LONGO PRAZO
10.646.888/0001-98	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA EXPERTISE RENDA FIXA CRED PRIV LP
05.114.716/0001-33	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA FÁCIL RENDA FIXA SIMPLES
07.986.172/0001-25	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA FORTALECER RENDA FIXA LONGO PRAZO
16.916.063/0001-22	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA GIRO EMPRESAS RENDA FIXA REF DI LP
17.502.869/0001-37	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA GIRO IMEDIATO RENDA FIXA REF DI LP
10.551.370/0001-70	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA GIRO MPE RENDA FIXA REF DI LP
03.164.294/0001-85	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA INVESTIDOR RENDA FIXA LONGO PRAZO
03.737.208/0001-86	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA LIQUIDEZ RENDA FIXA CURTO PRAZO
17.322.725/0001-07	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA MAXI RENDA FIXA CRÉD PRIV LP
14.508.652/0001-46	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA MOVIMENTAÇÕES AUTOMÁTICAS RF CP
10.646.895/0001-90	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA NOVO BRASIL IMA-B RENDA FIXA LP
14.120.488/0001-03	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA OAB RENDA FIXA CRÉDITO PRIVADO LP
03.191.874/0001-61	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA PATRIMÔNIO ÍNDICE DE PREÇOS RF LP

02.201.163/0001-68	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA PERSONAL RENDA FIXA LONGO PRAZO
08.070.841/0001-87	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA PLATINUM MULTIMERCADO LONGO PRAZO
10.740.508/0001-80	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA PLENO RENDA FIXA REFERENCIADO DI LP
00.834.074/0001-23	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA PRÁTICO RENDA FIXA CURTO PRAZO
03.737.211/0001-08	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA PREFERENCIAL RENDA FIXA REF DI LP
10.646.885/0001-54	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA PREMIUM RENDA FIXA REFERENCIADO DI LP
10.577.509/0001-55	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA RELACIONAMENTO PERSONAL RF LP
10.731.794/0001-17	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA SIGMA RENDA FIXA REF DI LONGO PRAZO
02.323.746/0001-61	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA SOBERANO RENDA FIXA LONGO PRAZO
07.986.178/0001-00	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA SUPREMO RENDA FIXA LONGO PRAZO
19.769.018/0001-80	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAIXA TOP RENDA FIXA REF DI LONGO PRAZO
21.287.436/0001-83	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM AÇÕES ACUMULAÇÃO 157
13.962.947/0001-25	FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM AÇÕES VOKIN GBV ACONCÁGUA
06.275.894/0001-09	FUNDO DE INVESTIMENTO SITA MIX MULTIMERCADO CREDITO PRIVADO
13.476.201/0001-01	FUNDO FATOR SINERGIA V - FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
08.912.569/0001-35	GAP AÇÕES FUNDO DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
19.366.052/0001-04	GAP LONG SHORT 2X FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
03.804.917/0001-37	GAP MULTIPORTFOLIO FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
01.675.497/0001-00	GERAÇÃO FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
21.720.791/0001-02	GERAÇÃO FUTURO PERFORMANCE GENIAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULT
10.292.302/0001-34	HAYP FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
23.000.848/0001-16	INFINITY HEDGE FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
24.874.367/0001-00	INTERINVEST IBOVSPA ATIVO FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
20.057.798/0001-15	INTERMEDIUM PRIMUS FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO MULTIESTRATÉGIA - CREDITO PRIVADO
19.549.470/0001-37	J.P. MORGAN MULTIESTRATÉGIA GOLD F.I.C. DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
03.119.883/0001-41	JGP HEDGE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
08.545.330/0001-74	JOULE VALUE FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
08.621.010/0001-56	JPM AÇÕES FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
12.518.210/0001-55	JPM FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI - CLASSE A
12.518.192/0001-01	JPM SOVEREIGN FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI RENDA FIXA REFERENCIADO DI - CLASSE A
09.441.308/0001-47	KADIMA II FIC FI MULTIMERCADO
19.351.273/0001-09	LEROSA ANTARES FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
24.325.422/0001-03	LIS VALUE FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
10.237.480/0001-62	LONG TERM FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
27.249.950/0001-00	MANAGER ADAM MACRO STRATEGY FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS FIM

22.654.439/0001-70	MANAGER APEX EQUITY HEDGE 30 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
15.674.503/0001-10	MANAGER BRASIL PLURAL EQUITY HEDGE 30 FIC FI MULTI
21.940.710/0001-71	MANAGER GAP LONG SHORT 2X FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
13.667.312/0001-03	MANAGER IBIUNA HEDGE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
21.940.681/0001-48	MANAGER IBIUNA HEDGE STH FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
28.144.844/0001-25	MANAGER OCEANA LONG BIASED FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
19.436.830/0001-94	MANAGER SPX FALCON FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO AÇÕES
12.483.948/0001-24	MANAGER SPX NIMITZ FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
07.187.591/0001-05	MAPFRE INVERSION FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
05.903.038/0001-98	MAUÁ MACRO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
07.899.238/0001-40	META VALOR FUNDO DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
13.554.383/0001-91	MIRAE ASSET IMA-B RENDA FIXA FUNDO DE INVESTIMENTO
20.658.576/0001-58	MOAT CAPITAL FUNDO DE INVESTIMENTO AÇÕES
06.893.041/0001-30	MODAL LION FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO CRÉDITO PRIVADO
13.033.721/0001-40	MONETUS FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
23.600.995/0001-27	MORE GLOBAL FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CRÉDITO PRIVADO LONGO PRAZO
13.608.335/0001-39	MULTINVEST FUNDO DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
23.333.855/0001-30	NTN-B ATIVO FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
19.496.576/0001-10	OCEANA LONG BIASED FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
17.157.131/0001-80	OCEANA SELECTION FUNDO DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
00.185.259/0001-54	OPPORTUNITY LOGICA II FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM ACOES
18.471.807/0001-78	OPPORTUNITY LONG BIASED FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
15.390.811/0001-13	ÓRAMA BOGARI VALUE FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
24.552.346/0001-60	ÓRAMA DEBENTURES INCENTIVADAS CRÉDITO PRIVADO FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
12.823.610/0001-74	ÓRAMA DI TESOIRO - FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI LONGO PRAZO
09.601.190/0001-77	ÓRAMA OURO FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
14.083.797/0001-42	PACIFICO AÇÕES FUNDO DE INVESTIMENTO EM QUOTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
17.002.861/0001-01	PACIFICO LB FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
27.347.332/0001-01	POLO LONG BIAS FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
19.726.255/0001-64	PRESERVAÇÃO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO CRÉDITO PRIVADO
10.756.685/0001-54	PRÓPRIO CAPITAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
27.932.683/0001-71	RATIONAL INVESTOR FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
10.500.884/0001-05	REAL INVESTOR FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
23.960.625/0001-09	SAFARI FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO II
17.254.044/0001-40	SAFRA CAPITAL MARKET PREMIUM FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RF REF DI CP
04.103.968/0001-02	SAFRA CARTEIRA CAMBIAL FUNDO DE INVESTIMENTO CAMBIAL

08.160.794/0001-62	SAFRA CARTEIRA INSTITUCIONAL - FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
17.253.869/0001-40	SAFRA CARTEIRA PREMIUM FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
19.436.818/0001-80	SAFRA CONSUMO AMERICANO FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES BDR-NÍVEL I PB
14.476.729/0001-43	SAFRA EQUITY PORTFOLIO PB FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTOS EM AÇÕES
10.787.647/0001-69	SAFRA EXECUTIVE 2 FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA
17.254.088/0001-70	SAFRA EXECUTIVE PREMIUM FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA
17.161.620/0001-05	SAFRA EXTRA 90 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CREDITO PRIVADO
18.168.479/0001-35	SAFRA FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES BDR-NIVEL I PB
27.249.881/0001-35	SAFRA GALILEO AG FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
21.940.736/0001-10	SAFRA GALILEO ALOCAÇÃO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
19.390.876/0001-10	SAFRA GALILEO SPECIAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
27.202.414/0001-50	SAFRA INFRAESTRUTURA MAX FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO CP
27.146.983/0001-25	SAFRA INFRAESTRUTURA VIP FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO CP
10.225.692/0001-20	SAFRA MIX 15 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
11.083.403/0001-68	SAFRA MIX 30 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
09.137.336/0001-75	SAFRA MIX I FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
02.097.252/0001-06	SAFRA MULTIDIVIDENDOS PB FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
08.160.753/0001-76	SAFRA PERFORMANCE II FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI CRÉDITO PRIVADO
07.470.226/0001-03	SAFRA PETROBRAS - FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
10.787.741/0001-18	SAFRA PRÁTICO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FI RENDA FIXA CURTO PRAZO - APLICAÇÃO AUTOMÁTICA
15.674.619/0001-59	SAFRA S&P FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
21.595.829/0001-54	SAFRA S&P REAIS PB FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
16.617.446/0001-08	SAFRA SMALL CAP PB FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
08.935.364/0001-75	SAFRA SOBERANO INSTITUCIONAL FIC DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
10.347.195/0001-02	SAFRA SOBERANO REGIME PRÓPRIO FIC DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENC DI
12.483.978/0001-30	SAFRA TOP FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA LONGO PRAZO
07.470.234/0001-41	SAFRA VALE DO RIO DOCE - FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
18.599.673/0001-75	SANTANDER FI IMA-B 5 TOP RENDA FIXA LONGO PRAZO
17.138.474/0001-05	SANTANDER FI MASTER RENDA FIXA CREDITO PRIVADO LONGO PRAZO
10.362.043/0001-70	SANTANDER FI VIP CAMBIAL
00.222.725/0001-24	SANTANDER FIC FI CENTRUM MIX VAN GOGH RENDA FIXA
03.069.104/0001-40	SANTANDER FIC FI CORPORATE RENDA FIXA REFERENCIADO DI
04.616.277/0001-02	SANTANDER FIC FI ETHICAL AÇÕES
17.803.780/0001-00	SANTANDER FIC FI EXCELLENCE MULTIMERCADO CREDITO PRIVADO LONGO PRAZO

17.804.757/0001-30	SANTANDER FIC FI GLOBAL MULTIMERCADO
14.504.578/0001-90	SANTANDER FIC FI IMA-B INSTITUCIONAL TÍTULOS PÚBLICOS RENDA FIXA LONGO PRAZO
02.908.347/0001-62	SANTANDER FIC FI INTELIGENTE RENDA FIXA CURTO PRAZO
11.714.716/0001-77	SANTANDER FIC FI MACRO MULTIMERCADO
09.300.201/0001-89	SANTANDER FIC FI MAX RENDA FIXA REFERENCIADO DI
00.813.342/0001-20	SANTANDER FIC FI MIX RENDA FIXA
05.563.613/0001-50	SANTANDER FIC FI MULTISTRATEGIA MULTIMERCADO
11.714.860/0001-03	SANTANDER FIC FI PB TOP MANAGERS MULTIMERCADO
02.910.278/0001-21	SANTANDER FIC FI PB VIP RENDA FIXA REFERENCIADO DI
03.765.626/0001-87	SANTANDER FIC FI PERFORMANCE FIX MULTIMERCADO
03.029.216/0001-78	SANTANDER FIC FI PERFORMANCE MULTIMERCADO
08.992.335/0001-45	SANTANDER FIC FI RECOMPENSA MASTER RENDA FIXA
09.300.166/0001-06	SANTANDER FIC FI RECOMPENSA PREMIUM RENDA FIXA
07.907.396/0001-02	SANTANDER FIC FI RENDA FIXA REFERENCIADO DI
02.436.763/0001-05	SANTANDER FIC FI SELEÇÃO TOP AÇÕES
23.682.485/0001-46	SANTANDER FIC FI SELECT RENDA FIXA
20.977.499/0001-07	SANTANDER FIC FI SELECT YIELD RENDA FIXA CREDITO PRIVADO LONGO PRAZO
02.498.204/0001-20	SANTANDER FIC FI TOP CAMBIAL
08.545.860/0001-12	SANTANDER FIC FI VINTAGE RENDA FIXA CRÉDITO PRIVADO LONGO PRAZO
01.615.744/0001-83	SANTANDER FIC FI YIELD VIP RENDA FIXA REFERENCIADO DI CREDITO PRIVADO
17.138.466/0001-50	SANTANDER FUNDO DE INVESTIMENTO ANS II RENDA FIXA CREDITO PRIVADO
09.075.440/0001-82	SANTANDER FUNDO DE INVESTIMENTO DEDICADO AO SETOR DE SAÚDE SUPLEMENTAR-ANS RENDA FIXA
11.714.770/0001-12	SANTANDER FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DIVERSIFICAÇÃO MULTIMERCADO
13.455.174/0001-90	SANTANDER FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DIVIDENDOS VIP ACOES
14.504.196/0001-66	SANTANDER FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO INFLAÇÃO RENDA FIXA
02.367.527/0001-84	SANTANDER FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MASTER RENDA FIXA REFERENCIADO DI
26.507.132/0001-06	SANTANDER RENDA FIXA ATIVO FIC FI
23.682.676/0001-08	SANTANDER SELECT MULTISTRATÉGIA MULTIMERCADO FIC FI
24.986.084/0001-42	SANTANDER STAR LONG & SHORT DIRECIONAL MULTIMERCADO FIC FI
11.301.137/0001-00	SEIVAL FGS AGRESSIVO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
14.287.871/0001-42	SICOOB DI FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA REFERENCIADO DI
06.051.151/0001-55	SICREDI - FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES IBOVESPA
08.336.054/0001-34	SICREDI - FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES PETROBRAS
03.564.809/0001-34	SICREDI - FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA PREMIUM LONGO PRAZO
16.938.231/0001-80	SICREDI - FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA SELETO LONGO PRAZO
09.498.697/0001-47	SICREDI FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO PERFIL CLASSICO LONGO PRAZO
26.759.909/0001-11	SPARTA DEBENTURES INCENTIVADAS FUNDO DE INVESTIMENTO RENDA FIXA CREDITO PRIVADO
14.180.011/0001-05	SPARTA DINÂMICO FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
17.164.804/0001-29	STK LONG ONLY INSTITUCIONAL FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
11.372.045/0001-03	VERDE AM VALOR DIVIDENDOS FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
13.083.227/0001-90	VF FUNDO DE INVESTIMENTO DE ACOES INVESTIMENTO NO EXTERIOR
12.440.825/0001-06	VINCI MULTISTRATÉGIA FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
11.052.478/0001-81	VISIA ZARATHUSTRA FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO

05.384.841/0001-63	VITÓRIA RÉGIA FUNDO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES
09.344.799/0001-08	VOTORANTIM FUNDO DE INV EM COTAS DE FUNDOS DE INV INFLATION RENDA FIXA
04.240.128/0001-83	VOTORANTIM FUNDO DE INV. EM COTAS DE FUNDOS DE INV. VINTAGE RENDA FIXA - CRÉDITO PRIVADO
00.836.263/0001-35	VOTORANTIM FUNDO DE INVESTIMENTO EAGLE MULTIMERCADO - CRÉDITO PRIVADO
03.319.016/0001-50	VOTORANTIM FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO CAMBIAL DOLAR
08.669.394/0001-87	VOTORANTIM FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO FEDERAL RF REFERENCIADO DI
05.090.771/0001-30	WESTERN ASSET CREDIT EXCELLENT FIC FI RENDA FIXA CRÉDITO PRIVADO
00.819.915/0001-23	WESTERN ASSET DI EXCELLENT FICFI RENDA FIXA REFERENCIADO
05.090.757/0001-37	WESTERN ASSET DI MAX EXCELLENT FICFI RENDA FIXA REFERENCIADO
07.892.311/0001-51	WESTERN ASSET DI MAX TOP FICFI RENDA FIXA REFERENCIADO
09.087.590/0001-06	WESTERN ASSET INFLATION GOLD FIC FI RENDA FIXA
04.514.122/0001-57	WESTERN ASSET MULTI RF TOP FIC FI RENDA FIXA
05.090.920/0001-61	WESTERN ASSET MULTITRADING TOP FIC FI MULTIMERCADO
00.817.677/0001-17	WESTERN ASSET PENSION RENDA FIXA FI CRÉDITO PRIVADO
03.068.246/0001-93	WESTERN ASSET RF ATIVO TOP FIC FI RENDA FIXA
09.087.618/0001-05	WESTERN ASSET SELIC SOBERANO RENDA FIXA REFERENCIADO FICFI
22.773.421/0001-98	WESTERN ASSET SOBERANO II FIC FI RENDA FIXA REFERENCIADO SELIC
15.636.949/0001-50	WM RENDA FIXA FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO RENDA FIXA - CREDITO PRIVADO
19.657.463/0001-59	XP DEBENTURES INCENTIVADAS CRÉDITO PRIVADO FI EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
26.773.140/0001-96	XP DIVIDENDOS 30 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
16.575.255/0001-12	XP DIVIDENDOS FUNDO DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
22.963.439/0001-52	XP GOLD FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
26.718.169/0001-75	XP INVESTOR 30 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
07.152.170/0001-30	XP INVESTOR FUNDO DE INVESTIMENTO DE AÇÕES
25.224.843/0001-00	XP LONG BIASED 30 FUNDO DE INVESTIMENTO EM COTAS DE FUNDOS DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO
23.922.063/0001-09	XP MACRO FUNDO DE INVESTIMENTO MULTIMERCADO

APÊNDICE B – CÓDIGO FONTE DO OTIMIZADOR

Código Fonte B.0.1 – MOO/Core/Algorithm.php

```

1  <?php
2
3  declare(strict_types=1);
4
5  namespace MOO\Core;
6
7  use MOO\Core\Problem;
8
9  abstract class Algorithm implements AlgorithmInterface
10 {
11     protected int $populationSize;
12     protected int $numGenerations;
13     protected object $selection;
14     protected object $crossover;
15     protected object $mutation;
16     protected Problem $problem;
17     protected ?object $repair;
18
19     protected int $currentGeneration;
20     protected array $populations = array();
21     protected array $solutions = array();
22
23     public function __construct(int $populationSize, int $numGenerations, object
        ↪ $selection, object $crossover, object $mutation, Problem $problem, ?object
        ↪ $repair = null)
24     {
25         $this->populationSize = $populationSize;
26         $this->numGenerations = $numGenerations;
27         $this->selection = $selection;
28         $this->crossover = $crossover;
29         $this->mutation = $mutation;
30         $this->problem = $problem;
31         $this->repair = $repair;
32
33         $this->currentGeneration = 0;
34     }
35
36     public function getNumGenerations()
37     {
38         return $this->numGenerations;
39     }
40
41     public function getCurrentGeneration()
42     {

```

```
43     return $this->currentGeneration;
44 }
45
46 public function getPopulations()
47 {
48     return $this->populations;
49 }
50 }
```

Código Fonte B.0.2 – MOO/Core/Individual.php

```
1  <?php
2
3  declare(strict_types=1);
4
5  namespace MOO\Core;
6
7  class Individual
8  {
9      private array $chromosome;
10     private array $objectives = [];
11     private int $rank = -1;
12     private float $crowdingDistance = 0.0;
13     private bool $feasible = False;
14     private float $constrainsViolated = 0.0;
15
16     protected $dominatedIndividuals = [];
17     protected $dominatedCount = 0;
18
19     public function __construct(array $chromosome)
20     {
21         $this->chromosome = $chromosome;
22     }
23
24     public function getChromosome(): array
25     {
26         return $this->chromosome;
27     }
28
29     public function setChromosome(array $chromosome)
30     {
31         $this->chromosome = $chromosome;
32     }
33
34     public function setGene(int $pos, float $value)
35     {
```



```
36         $this->chromosome[$pos] = $value;
37     }
38
39     public function getObjectives(): array
40     {
41         return $this->objectives;
42     }
43
44     public function setObjectives(array $objectives)
45     {
46         $this->objectives = $objectives;
47     }
48
49     public function getCrowdingDistance(): float
50     {
51         return $this->crowdingDistance;
52     }
53
54     public function setCrowdingDistance(float $crowdingDistance)
55     {
56         $this->crowdingDistance = $crowdingDistance;
57     }
58
59     public function addDominatedIndividual(Individual $individual)
60     {
61         array_push($this->dominatedIndividuals, $individual);
62     }
63
64     public function incrementDominatedCount(int $incrementValue)
65     {
66         $this->dominatedCount += $incrementValue;
67     }
68
69     public function getDominatedCount()
70     {
71         return $this->dominatedCount;
72     }
73
74     public function setDominatedCount(int $dominatedCount)
75     {
76         $this->dominatedCount = $dominatedCount;
77     }
78
79     public function getDominatedIndividuals()
80     {
81         return $this->dominatedIndividuals;
82     }
83
```

```
84     public function setDominatedIndividuals(array $dominatedIndividuals)
85     {
86         $this->dominatedIndividuals = $dominatedIndividuals;
87     }
88
89     public function getRank(): int
90     {
91         return $this->rank;
92     }
93
94     public function setRank(int $rank)
95     {
96         $this->rank = $rank;
97     }
98
99     public function getCV(): float
100    {
101        return $this->constrainsViolated;
102    }
103
104    public function setCV(float $cv)
105    {
106        $this->constrainsViolated = $cv;
107    }
108
109    public function isFeasible(): bool
110    {
111        return $this->feasible;
112    }
113
114    public function setFeasible(bool $feasible)
115    {
116        $this->feasible = $feasible;
117    }
118
119    public function reset()
120    {
121        $this->dominatedCount = 0;
122        $this->rank = -1;
123        $this->dominatedChromosomes = [];
124    }
125
126    public function equal(Individual $otherIndividual): bool
127    {
128        return $this->chromosome === $otherIndividual->getChromosome();
129    }
130
131    public function __toString(): string
```

```
132     {
133         return "Individual: [" . implode($this->chromosome) . "];
134     }
135 }
```

Código Fonte B.0.3 – MOO/Core/Optimizer.php

```
1  <?php
2
3  declare(strict_types=1);
4
5  namespace MOO\Core;
6
7  use MOO\Core\Algorithm as Algorithm;
8
9  class Optimizer
10 {
11     protected Problem $problem;
12     protected Algorithm $algorithm;
13
14     public function __construct(Problem $problem, Algorithm $algorithm)
15     {
16         $this->problem = $problem;
17         $this->algorithm = $algorithm;
18     }
19
20     public function execute()
21     {
22         $this->algorithm->initialize();
23
24         while ($this->algorithm->getCurrentGeneration() <
25             ⇨ $this->algorithm->getNumGenerations()) {
26             $this->algorithm->execute($this->problem);
27         }
28
29         return $this->buildResult();
30     }
31
32     protected function buildResult()
33     {
34         $pop = $this->algorithm->getPopulations();
35
36         $result = [];
37         $last = $pop[count($pop) - 1]->getIndividuals();
38
39         foreach ($last as $ind) {
```

```
39         $data = array('objectives' => $ind->getObjectives(), 'weights' =>
40             ↳ $ind->getChromosome());
41         array_push($result, $data);
42     }
43     return $result;
44 }
45 }
```

Código Fonte B.0.4 – MOO/Core/Population.php

```
1  <?php
2
3  declare(strict_types=1);
4
5  namespace MOO\Core;
6
7  class Population
8  {
9      protected int $generation;
10     protected array $individuals;
11
12     public function __construct(array $individuals = [])
13     {
14         $this->individuals = $individuals;
15     }
16
17     public function getGeneration(): int
18     {
19         return $this->generation;
20     }
21
22     public function setGeneration(int $generation)
23     {
24         $this->generation = $generation;
25     }
26
27     public function addIndividual(Individual $individual)
28     {
29         array_push($this->individuals, $individual);
30     }
31
32     public function getIndividuals(): array
33     {
34         return $this->individuals;
35     }
36 }
```

```
36
37     public function setIndividuals(array $individuals)
38     {
39         $this->individuals = $individuals;
40     }
41
42     public function size(): int
43     {
44         return count($this->individuals);
45     }
46
47     public function calculateFitness(Problem $problem)
48     {
49         foreach ($this->individuals as $individual) {
50             $objectives = $problem->evaluate($individual->getChromosome());
51             $individual->setObjectives($objectives);
52
53             $numViolations =
54                 ↪ $problem->evaluateConstraintsViolation($individual->getChromosome());
55             $individual->setCV($numViolations);
56
57             if ($numViolations == 0) {
58                 $individual->setFeasible(true);
59             }
60         }
61
62     public function evaluateConstraintsViolation(Problem $problem)
63     {
64         foreach ($this->individuals as $individual) {
65             $numViolations =
66                 ↪ $problem->evaluateConstraintsViolation($individual->getChromosome());
67             $individual->setCV($numViolations);
68
69             if ($numViolations === 0) {
70                 $individual->setFeasible(true);
71             }
72         }
73
74     public function getLast()
75     {
76         return end($this->individuals);
77     }
78 }
```

Código Fonte B.0.5 – MOO/Core/Problem.php

```
1  <?php
2
3  declare(strict_types=1);
4
5  namespace MOO\Core;
6
7  abstract class Problem
8  {
9      protected int $numVariables;
10     protected array $lowerBounds;
11     protected array $upperBounds;
12     protected array $objectiveFunctions;
13     protected array $cvFunctions;
14
15     public function __construct(int $numVariables, array $objectiveFunctions, array
        ↪ $lowerBounds, array $upperBounds, array $cvFunctions = [])
16     {
17         $this->numVariables = $numVariables;
18         $this->objectiveFunctions = $objectiveFunctions;
19         $this->lowerBounds = $lowerBounds;
20         $this->upperBounds = $upperBounds;
21         $this->cvFunctions = $cvFunctions;
22     }
23
24     public function getNumVariables(): int
25     {
26         return $this->numVariables;
27     }
28
29     public function getNumObjectives(): int
30     {
31         return count($this->objectiveFunctions);
32     }
33
34     public function getLowerBounds(): array
35     {
36         return $this->lowerBounds;
37     }
38
39     public function getUpperBounds(): array
40     {
41         return $this->upperBounds;
42     }
43
44     abstract public function evaluate(array $variables): array;
45     abstract public function evaluateConstraintsViolation(array $variables): float;
```

46 }

Código Fonte B.0.6 – MOO/Algorithms/NSGA2.php

```
1  <?php
2
3  declare(strict_types=1);
4
5  namespace MOO\Algorithms;
6
7  use MOO\Core\Algorithm;
8  use MOO\Core\Individual;
9  use MOO\Core\Population;
10 use MOO\Core\Problem;
11
12 class NSGA2 extends Algorithm
13 {
14     protected int $populationSize;
15     protected int $numGenerations;
16     protected object $selection;
17     protected object $crossover;
18     protected object $mutation;
19     protected Problem $problem;
20     protected ?object $repair;
21
22     protected int $currentGeneration;
23     protected array $populations = array();
24     protected array $solutions = array();
25
26     public function __construct(int $populationSize, int $numGenerations, object
    ↪ $selection, object $crossover, object $mutation, Problem $problem, ?object
    ↪ $repair = null)
27     {
28         $this->populationSize = $populationSize;
29         $this->numGenerations = $numGenerations;
30         $this->selection = $selection;
31         $this->crossover = $crossover;
32         $this->mutation = $mutation;
33         $this->problem = $problem;
34         $this->repair = $repair;
35
36         $this->currentGeneration = 0;
37     }
38
39     public function initialize()
40     {
```

```
41     $population = $this->createInitialPopulation();
42
43     if ($this->repair) {
44         $population = $this->repair->execute($population);
45     }
46
47     $population->calculateFitness($this->problem);
48
49     $fronts = $this->fastNonDominatedSort($population);
50
51     foreach ($fronts as $front) {
52         $this->crowdingDistance($front);
53     }
54
55     array_push($this->populations, $population);
56 }
57
58 public function execute()
59 {
60     $this->currentGeneration += 1;
61     $population = $this->populations[count($this->populations) - 1];
62     $offspring = new Population();
63
64     while ($offspring->size() < $population->size()) {
65         $parents = $this->selection->execute($population, 2);
66         $children = $this->crossover->execute($this->problem, $parents);
67
68         $c1 = $this->mutation->execute($this->problem, $children[0]);
69         $c2 = $this->mutation->execute($this->problem, $children[1]);
70
71         $newIndividuals = $offspring->getIndividuals();
72
73         $c1Equal = false;
74         $c2Equal = false;
75
76         foreach ($newIndividuals as $newIndividual) {
77             if ($newIndividual->equal($c1)) {
78                 $c1Equal = true;
79             }
80
81             if ($newIndividual->equal($c2)) {
82                 $c2Equal = true;
83             }
84         }
85
86         if ($c1Equal === false) {
87             $offspring->addIndividual($c1);
88         }
```



```

89         if ($c2Equal === false) {
90             $offspring->addIndividual($c2);
91         }
92     }
93
94     if ($this->repair) {
95         $offspring = $this->repair->execute($offspring);
96     }
97
98     $offspring->calculateFitness($this->problem);
99     $R = new Population(array_unique(array_merge($population->getIndividuals(),
100 ↪     $offspring->getIndividuals())));
101
102     $feasible = [];
103     $infeasible = [];
104     foreach ($R->getIndividuals() as $individual) {
105         if ($individual->isFeasible()) {
106             $feasible[] = $individual;
107         } else {
108             $infeasible[] = $individual;
109         }
110     }
111
112     $feasiblePop = new Population($feasible);
113     $fronts = $this->fastNonDominatedSort($feasiblePop);
114
115     $solution = [];
116
117     foreach ($fronts as $front) {
118         $this->crowdingDistance($front);
119
120         if (count($solution) + count($front) <= $this->populationSize) {
121             $solution = array_merge($solution, $front);
122         } else {
123             $count = $this->populationSize - count($solution);
124
125             usort($front, function ($a, $b) {
126                 if ($a->getCrowdingDistance() < $b->getCrowdingDistance()) {
127                     return 1;
128                 } elseif ($a->getCrowdingDistance() ===
129 ↪                 $b->getCrowdingDistance()) {
130                     return 0;
131                 } else {
132                     return -1;
133                 }
134             });
135
136             $solution = array_merge($solution, array_slice($front, 0, $count));

```

```

135     }
136 }
137
138 $nRemain = $this->populationSize - count($feasible);
139
140 if ($nRemain > 0) {
141     usort($infeasible, function ($a, $b) {
142         if ($a->getCV() < $b->getCV()) {
143             return -1;
144         } elseif ($a->getCV() === $b->getCV()) {
145             return 0;
146         } else {
147             return 1;
148         }
149     });
150
151     $solution = array_merge($solution, array_slice($infeasible, 0,
152         ↪ $nRemain));
153 }
154
155 $newPopulation = new Population($solution);
156 $newPopulation->setGeneration($this->currentGeneration);
157
158 array_push($this->populations, $newPopulation);
159 }
160
161 protected function crowdingDistance($front)
162 {
163     $numIndividuals = count($front);
164
165     if ($numIndividuals <= 2) {
166         foreach ($front as $individual) {
167             $individual->setCrowdingDistance(PHP_FLOAT_MAX);
168         }
169     } else {
170         foreach ($front as $individual) {
171             $individual->setCrowdingDistance(0.0);
172         }
173     }
174
175     $numObjectives = $this->problem->getNumObjectives();
176
177     for ($i = 0; $i < $numObjectives; $i++) {
178         usort($front, function ($a, $b) use ($i) {
179             if ($a->getObjectives()[$i] == $b->getObjectives()[$i]) {
180                 return 0;
181             }
182             return ($a->getObjectives()[$i] < $b->getObjectives()[$i]) ? -1 : 1;

```

```

182         });
183
184         $front[0]->setCrowdingDistance(PHP_FLOAT_MAX);
185         $front[$numIndividuals - 1]->setCrowdingDistance(PHP_FLOAT_MAX);
186
187         $objectiveValues = array_column(array_map(function ($o) {
188             return $o->getObjectives();
189         }, $front), $i);
190         $min = min($objectiveValues);
191         $max = max($objectiveValues);
192
193         $scale = $max - $min;
194         if ($scale == 0.0) {
195             $scale = 1;
196         }
197
198         for ($k = 1; $k < $numIndividuals - 1; $k++) {
199             $front[$k]->setCrowdingDistance($front[$k]->getCrowdingDistance() +
200                 ↪ (($front[$k + 1]->getObjectives()[$i] - $front[$k -
201                 ↪ 1]->getObjectives()[$i]) / $scale));
202         }
203     }
204
205     protected function createInitialPopulation()
206     {
207         $population = new Population();
208
209         while ($population->size() < $this->populationSize) {
210             $numVariables = $this->problem->getNumVariables();
211
212             $chromosome = array_fill(0, $numVariables, 0.0);
213
214             $indexes = [];
215             $total = 0.0;
216
217             while ($total < 1.0) {
218                 $index = rand(0, $numVariables - 1);
219
220                 if (!in_array($index, $indexes)) {
221                     $w = mt_rand() / mt_getrandmax();
222
223                     if ($total + $w < 1.0) {
224                         $chromosome[$index] = $w;
225                     } else {
226                         $chromosome[$index] = 1.0 - $total;
227                     }

```

```

228         $total += $w;
229     }
230 }
231
232     $individual = new Individual($chromosome);
233     $population->addIndividual($individual);
234 }
235
236     return $population;
237 }
238
239 protected function fastNonDominatedSort($population)
240 {
241     $individuals = $population->getIndividuals();
242
243     if (count($individuals) === 0) {
244         return [];
245     }
246
247     foreach ($individuals as $individual) {
248         $individual->reset();
249     }
250
251     $fronts = [];
252
253     foreach ($individuals as $individual1) {
254         foreach ($individuals as $individual2) {
255             if (dominates($individual1, $individual2)) {
256                 $individual1->addDominatedIndividual($individual2);
257             } elseif (dominates($individual2, $individual1)) {
258                 $individual1->incrementDominatedCount(1);
259             }
260         }
261
262         if ($individual1->getDominatedCount() === 0) {
263             $individual1->setRank(0);
264             $fronts[0][] = $individual1;
265         }
266     }
267
268     $i = 0;
269     while (count($fronts[$i]) > 0) {
270         $temp = [];
271         foreach ($fronts[$i] as $individual) {
272             foreach ($individual->getDominatedIndividuals() as $otherIndividual)
273                 ↪ {
274                 $otherIndividual->setDominatedCount(
275                     $otherIndividual->getDominatedCount() - 1

```

```

275         );
276
277         if ($otherIndividual->getDominatedCount() === 0) {
278             $otherIndividual->setRank($otherIndividual->getRank() + 1);
279             $temp[] = $otherIndividual;
280         }
281     }
282 }
283 $i += 1;
284
285 $fronts[$i] = $temp;
286 }
287
288 return array_slice($fronts, 0, count($fronts) - 1);
289 }
290 }
291
292 function dominates(Individual $individual1, Individual $individual2)
293 {
294     $lt = 0;
295     $eq = 0;
296     $gt = 0;
297
298     for ($i = 0; $i < count($individual1->getObjectives()); $i++) {
299         $ind1Objectives = $individual1->getObjectives();
300         $ind2Objectives = $individual2->getObjectives();
301
302         if ($ind1Objectives[$i] < $ind2Objectives[$i]) {
303             $lt += 1;
304         } elseif ($ind1Objectives[$i] > $ind2Objectives[$i]) {
305             $gt += 1;
306         } else {
307             $eq += 1;
308         }
309     }
310
311     if ($gt === 0 && $lt > 0) {
312         return true;
313     } else {
314         return false;
315     }
316 }

```

```
1  <?php
2
3  declare(strict_types=1);
4
5  namespace MOO\Operators\Crossover;
6
7  use MOO\Core\Individual;
8
9  class SinglePointCrossover
10 {
11     public function execute($problem, $parents)
12     {
13         $point = rand(0, count($parents[0]->getChromosome()));
14
15         $parent1 = $parents[0];
16         $parent2 = $parents[1];
17
18         $child1 = new Individual(array_replace($parent1->getChromosome(),
19             ↪ array_slice($parent2->getChromosome(), $point, null, true)));
20         $child2 = new Individual(array_replace($parent2->getChromosome(),
21             ↪ array_slice($parent1->getChromosome(), $point, null, true)));
22
23         return array($child1, $child2);
24     }
25 }
```

Código Fonte B.0.8 – MOO/Operators/Mutation/PolynomialMutation.php

```
1  <?php
2
3  declare(strict_types=1);
4
5  namespace MOO\Operators\Mutation;
6
7  use MOO\Core\Individual;
8  use MOO\Core\Problem;
9
10 class PolynomialMutation
11 {
12     private float $prob;
13     private int $num_mutations;
14
15     public function __construct(int $num_mutations, float $prob)
16     {
17         $this->num_mutations = $num_mutations;
18         $this->prob = $prob;
19     }
20 }
```

```

19     }
20
21     public function execute(Problem $problem, Individual $individual): Individual
22     {
23         $lowerBounds = $problem->getLowerBounds();
24         $upperBounds = $problem->getUpperBounds();
25
26         $values = $individual->getChromosome();
27
28         foreach ($values as $key => $xp) {
29             $rand = mt_rand() / mt_getrandmax();
30
31             if ($rand <= $this->prob) {
32                 $lowerBound = $lowerBounds[$key];
33                 $upperBound = $upperBounds[$key];
34
35                 $delta1 = ($xp - $lowerBound) / ($upperBound - $lowerBound);
36                 $delta2 = ($upperBound - $xp) / ($upperBound - $lowerBound);
37
38                 $r = mt_rand() / mt_getrandmax();
39
40                 if ($r <= 0.5) {
41                     $power = pow(1 - $delta1, $this->num_mutations + 1);
42                     $dq = 2 * $r + (1 - 2 * $r) * $power;
43                 } else {
44                     $power1 = pow(1 - $delta2, $this->num_mutations + 1);
45                     $power2 = pow(2 * (1 - $r) + 2 * ($r - 0.5) * $power1, 1 /
46                         ↳ ($this->num_mutations + 1));
47                     $dq = 1 - $power2;
48                 }
49
50                 $values[$key] = $xp * $dq * ($upperBound - $lowerBound);
51             }
52
53             $individual->setChromosome($values);
54             return $individual;
55         }
56     }

```

Código Fonte B.0.9 – MOO/Operators/Selection/BinaryTournamentSelection.php

```

1  <?php
2
3  declare(strict_types=1);
4

```

```

5 namespace MOO\Operators\Selection;
6
7 use MOO\Core\Population;
8
9 class BinaryTournamentSelection
10 {
11     function execute(Population $population, int $num_individuals = 1): array
12     {
13         $selected_individuals = [];
14
15         while (count($selected_individuals) < $num_individuals) {
16             $individuals = $population->getIndividuals();
17             $indexes = array_rand($individuals, 2);
18             $individual1 = $individuals[$indexes[0]];
19             $individual2 = $individuals[$indexes[1]];
20
21             $best = null;
22
23             $cv1 = $individual1->getCV();
24             $cv2 = $individual2->getCV();
25
26             if ($cv1 > 0 || $cv2 > 0) {
27                 if ($cv1 < $cv2) {
28                     $best = $individual1;
29                 } elseif ($cv1 > $cv2) {
30                     $best = $individual2;
31                 } else {
32                     $ind = [$individual1, $individual2];
33                     $index = array_rand($ind, 1);
34                     $best = $ind[$index];
35                 }
36             } else {
37                 if ($individual1->getRank() < $individual2->getRank()) {
38                     $best = $individual1;
39                 } elseif ($individual1->getRank() == $individual2->getRank()) {
40                     if ($individual1->getCrowdingDistance() >=
41                         ⇨ $individual2->getCrowdingDistance()) {
42                         $best = $individual1;
43                     } else {
44                         $best = $individual2;
45                     }
46                 } else {
47                     $best = $individual2;
48                 }
49             }
50
51             if (count($selected_individuals) > 0) {
52                 $equal = false;

```



```
52         foreach ($selected_individuals as $individual) {
53             if ($best->equal($individual)) {
54                 $equal = true;
55                 break;
56             }
57         }
58
59         if ($equal === false) {
60             $selected_individuals[] = $best;
61         }
62     } else {
63         $selected_individuals[] = $best;
64     }
65 }
66
67 return $selected_individuals;
68 }
69 }
```

APÊNDICE C – ARTIGO NO FORMATO SBC

Início na próxima página.

Otimização de carteiras de investimentos utilizando algoritmo evolutivo multiobjetivo

Leonardo Zapp¹, Rafael Luiz Cancian¹

¹Departamento de Informática e Estatística – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
88040-900 – Florianópolis – SC – Brasil

leonardo.zapp@outlook.com, rafael.cancian@ufsc.br

Abstract. *Investors in general seek to maximize their returns while minimizing their risks. However, choosing assets and their weights within an investment portfolio is not a trivial task. Over the years, models and portfolio optimization techniques have been developed to assist in investor decision making. However, optimization objectives may not be limited to risk and return and may be subject to several constraints that make the NP-hard class problem. An alternative is the use of Multiobjective Evolutionary Algorithms (MOEA). This article presents the development of a web system for the optimization of investment portfolios composed of investment funds, based on modern portfolio theory and multi-objective evolutionary algorithms, so that inexperienced investors can optimize different objectives of investment portfolios.*

Resumo. *Investidores em geral buscam maximizar seus retornos ao mesmo tempo em que minimizam seus riscos. Porém, a escolha dos ativos e seus pesos dentro de uma carteira de investimentos não é uma tarefa trivial. Ao longo dos anos tem sido desenvolvidos modelos e técnicas de otimização de portfólios para auxiliar na tomada de decisão do investidor. Contudo, objetivos de otimização podem não se limitar a risco e retorno e podem estar sujeitos a várias restrições que tornam o problema da classe NP-difícil. Uma alternativa, é o uso de Algoritmos Evolutivos Multiobjetivos (MOEA). Este artigo apresenta o desenvolvimento de um sistema web para otimização de carteiras de investimentos compostas por fundos de investimento, utilizando como base a teoria moderna de portfólios e algoritmos evolutivos multiobjetivo, para que investidores inexperientes possam otimizar diferentes objetivos de carteiras de investimentos.*

1. Introdução

A seleção de ativos para composição de uma carteira de investimentos é um problema conhecido e enfrentado por investidores institucionais e individuais há muito tempo. De maneira geral, investidores procuram maximizar seu retorno e ao mesmo tempo minimizar o risco de perdas ao montarem uma carteira. Com a vasta opção de ativos financeiros disponíveis no mercado de capitais, encontrar uma boa seleção de ativos que atendam a esses objetivos de maneira satisfatória, tende a ser uma tarefa difícil e custosa.

A Teoria Moderna de Portfólio [Markowitz 1952] é considerada por muitos como o trabalho precursor da área. Desenvolvida em 1952 por Harry Markowitz, rendeu ao autor um prêmio Nobel de Economia em 1990, dado o seu pioneirismo e significância

dentro do setor econômico. Markowitz criou o modelo de otimização de portfólios conhecido como média-variância, em que estima o retorno utilizando o valor esperado do ativo e o risco utilizando o valor da variação da distribuição dos retornos do ativo. A principal contribuição de Markowitz, foi demonstrar que a rentabilidade de uma carteira de investimentos não depende apenas do retorno e do risco individual dos seus ativos, mas também da correlação entre eles. O modelo de otimização proposto por Markowitz é determinístico e se enquadra na categoria de Otimização Quadrática. Apesar de muito difundido e utilizado, o modelo média-variância apresenta algumas limitações ao se tentar aplicar restrições encontradas pelos investidores no mundo real [Chang et al. 2000].

A busca por melhores rendimentos nas aplicações financeiras tem levado muitos investidores a se aventurar na bolsa de valores e em investimentos mais arriscados que a tradicional poupança ou renda fixa. Apesar do mercado financeiro não seguir um padrão e dar garantias de ganhos futuros com base em rendimentos passados, investidores tendem a avaliar o desempenho de seus investimentos de modo a ter um maior embasamento para a tomada de decisão no que diz respeito à escolha dos ativos financeiros e aplicação dos seus recursos.

A análise de ativos e de carteiras de investimentos pode ser feita de diversas maneiras, desde métodos manuais utilizando planilhas eletrônicas para computar os ganhos e perdas, até programas mais avançados que oferecem análises ao longo do tempo e diversos indicadores para comparação. Entretanto, a otimização de uma carteira para a obtenção da melhor alocação de ativos, ainda é um problema pouco explorado por essas aplicações. Sendo assim, o projeto descrito neste artigo visou preencher parcialmente essa lacuna. Seu objetivo geral consistiu em desenvolver um sistema web para otimização de carteiras de investimentos compostas por fundos de investimento, utilizando como base a teoria moderna de portfólios e algoritmos evolutivos multiobjetivo, para que investidores inexperientes possam cadastrar, otimizar e comparar a rentabilidade de diferentes carteiras.

2. Fundamentação

Mercado de Capitais é um segmento do Mercado Financeiro Brasileiro que tem como principal objetivo facilitar operações financeiras diretamente entre poupadores e tomadores de recursos. Nesse mercado, empresas tomam recursos diretamente de investidores através da venda de suas ações, títulos patrimoniais, debêntures, títulos de crédito, com o objetivo de viabilizar algum projeto ou financiar suas atividades [de Valores Mobiliários 2019]. o Mercado de Capitais, os ativos financeiros são chamados de valores mobiliários e podem ser ações, debêntures, fundos de investimentos, fundos imobiliários e diversos outros produtos listados nos incisos I ao VIII do artigo 2o da Lei 6.385/76 que trata do tema. Além dos ativos pertencentes ao mercado de capitais, diversos outros tipos de investimentos estão disponíveis aos investidores, como: Poupança, Certificados de Depósitos Bancários (CDB), Letras de Crédito Imobiliários (LCI), Títulos Públicos entre outros. Esses investimentos podem ser classificados de diversas maneiras, sendo que as mais comuns são (1) quanto à sua rentabilidade (renda fixa ou variável), (2) quanto ao risco (risco baixo, médio ou alto), (3) quanto ao prazo (curto, médio ou longo) e (4) quanto à sua liquidez (baixa liquidez ou alta liquidez). Devido à grande variedade de tipos de investimentos e às diferentes características pertencentes a cada um deles, este artigo foca apenas os fundos de investimentos, que podem incorporar

muitos dos demais ativos citados anteriormente (ex: fundos de investimentos em ações, fundos de investimento de renda fixa, etc).

Um Fundo de Investimentos é um tipo de aplicação financeira que reúne diversos investidores com o propósito de investir coletivamente [de Valores Mobiliários 2019]. Os fundos reúnem os recursos de investidores individuais os quais são aplicados no mercado financeiro por um gestor, formando dessa forma uma espécie de condomínio de investimento. Essas aplicações seguem uma estratégia de alocação previamente definida, a qual determina a classificação do fundo conforme as regras da Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (AMBIMA). Logo, os fundos são uma forma organizada de investimento que traz algumas vantagens principalmente para o investidor iniciante e para investidores de pequeno porte, pois contam com um gestor profissional que procura os melhores ativos para compor a carteira do fundo e também por proporcionar a compra de cotas de um investimento que dificilmente poderia ser adquirido individualmente. Sendo assim, são uma excelente porta de entrada para novos investidores no mercado financeiro.

Uma carteira de investimentos consiste de um conjunto de ativos que pertencem a um investidor. Esses ativos possuem proporções específicas dentro da carteira e podem ser de diferentes tipos (ações, fundos de investimento, etc). A valoração e consequentemente o retorno esperado de uma carteira é calculada através da média ponderada dos ativos que constituem a mesma. O risco é calculado através das variâncias de cada ativo e também das covariâncias entre os ativos que a compõem [Markowitz 1952] (entre outras formas possíveis). *Portanto, quanto maior a diversificação dos ativos que formam a carteira, maior a segurança do investidor no que diz respeito ao risco e a possíveis perdas, pois a correlação entre os ativos tende a ser menor, o que diminui o risco.*

processo de otimização simples visa encontrar o mínimo ou máximo de uma função matemática (ou outro modelo) com o objetivo de determinar o melhor resultado possível para o problema proposto. Quando tratamos de mais de um objetivo, esses problemas são conhecidos como problemas de otimização multiobjetivo, e representam grande parte dos problemas de otimização do mundo real. São chamados assim pois envolvem a minimização (ou maximização) simultânea de um conjunto de objetivos satisfazendo a um conjunto de restrições [Deb and Kalyanmoy 2001].

A *dominância de Pareto* é utilizada para comparar soluções que podem apresentar vantagens em determinados objetivos e desvantagens em outros. Uma solução pertence ao *conjunto de Pareto*, se não é possível encontrar alguma outra que melhore pelo menos uma das funções objetivo sem piorar outra função. Para [Deb and Kalyanmoy 2001], dadas duas soluções x e y , diz-se que x domina y se ambas as seguintes condições forem satisfeitas: (1) A solução x não é pior do que y em todos os objetivos; e (2) A solução x é melhor do que y em pelo menos um objetivo. Esse conjunto de soluções ótimas que não são dominadas, constituem o *conjunto de Pareto*, e os valores das funções objetivos formam a *fronteira de Pareto*. A fronteira de Pareto é comumente utilizada para a visualização gráfica dos *trade-offs* entre as soluções [Cancian et al. 2011]. Apesar de conceitualmente simples, encontrar o conjunto de Pareto é uma tarefa complexa ou até mesmo impossível. Entre os problemas encontrados na literatura e citados por [Cancian et al. 2011], estão: a possibilidade do conjunto ser infinito; a possibilidade da fronteira de Pareto ser complexa e soluções não-dominadas estarem mal distribuídas; e o fato da dominância não funcionar

bem para problemas com muitos objetivos, pois a conversão para a fronteira de Pareto fica comprometida quando muitas soluções passam a ser dominantes.

Algoritmos genéticos (GA), os quais representam uma classe dos algoritmos evolucionários, foram desenvolvidos à priori para lidar com problemas mono objetivos através de uma medida de desempenho (*fitness*). Quando há a necessidade de otimizar mais de um objetivo, sem a possibilidade de agregar todos eles na mesma função de avaliação, é preciso comparar as possíveis soluções de tal forma que cada objetivo seja considerado individualmente. Goldberg (1989) propôs uma ordenação de soluções baseado na dominância de Pareto, onde a aptidão de uma solução é proporcional ao número de soluções que ela domina. Com o tempo, diversos algoritmos evolucionários multiobjetivos (MOEA) foram propostos, como o *Vector Evaluated Genetic Algorithm* (VEGA) [Schaffer 1985], *Multi-Objective Genetic Algorithms* (MOGA) [Murata et al. 1995], *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA) [Zitzler and Thiele 1998], *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) [Deb et al. 2002] entre outros [Coello 2000]. Para o desenvolvimento deste trabalho foi escolhido o algoritmo NSGA-II devido a sua grande utilização na otimização de portfólios de ações e devido a sua popularidade na literatura.

3. Método e Solução

Os dados dos fundos de investimentos são obtidos a partir do site da CVM, e são coletados, processados e armazenados no banco de dados diariamente. Dentre esses dados encontram-se informações cadastrais, tais como: denominação social, CNPJ, data de registro, classe, tipo de fundo, administrador, taxas, situação do fundo, entre outros. Também são coletados os dados dos informes diários, contendo informações como: valor total da carteira do fundo, patrimônio líquido, valor da cota, captações realizadas no dia, resgates pagos no dia e número de cotistas. A partir dos dados diários, são gerados dados agregados em períodos mensais para obtenção de indicadores relativos aos fundos. As carteiras de investimentos podem ser cadastradas pelos usuários via interface gráfica, para tal é necessário informar um nome e uma descrição. Após a criação da carteira o usuário pode cadastrar operações financeiras à mesma informando o fundo de investimento, a corretora ou distribuidora do fundo, o tipo de operação financeira, a data e o valor total

Foi desenvolvido um otimizador multi-objetivo baseado em algoritmo evolucionário (MOES) na linguagem PHP utilizando-se o paradigma de orientação a objetos e baseando-se principalmente no framework *PYMOO* desenvolvido em Python e apresentado em [Blank and Deb 2020]. Entre os principais componentes desenvolvidos estão a classe *Problem*, que representa o problema a ser otimizado e contém as informações referentes às funções objetivo e as restrições a serem aplicadas; a classe *Population* que representa uma população ao longo da execução do algoritmo; e a classe *Individual* que representa um indivíduo pertencente a uma população. Para a implementação do algoritmo NSGAII, foram criadas as classes *NSGA2* (que contém o código responsável pela execução principal do mesmo) e as classes referentes às operações executadas por ele, como seleção (*BinaryTournamentSelection*), recombinação (*SinglePointCrossover*), mutação (*PolynomialMutation*) e reparação *Repair*. O algoritmo evolucionário gera como saída um conjunto de soluções que representam os indivíduos da última população gerada pelo processo evolucionário, e que devem se aproximar da fronteira de Pareto do problema sendo otimizado.

A avaliação do otimizador multiobjetivo se deu em dois passos: o primeiro utilizando problemas de testes (*benchmarks*) já conhecidos da literatura com o propósito de avaliar se as soluções obtidas se aproximam da fronteira de Pareto; e o segundo otimizando uma carteira composta por fundos de investimentos e aplicando um teste retroativo nas soluções obtidas a fim de avaliar se as carteiras geradas obtiveram retornos maiores que a carteira de pesos iguais para os mesmos fundos. Como *benchmark* no primeiro passo foram utilizados 3 problemas de teste (ZDT1, ZDT2 e ZDT3) dos 6 disponíveis da classe ZDT. Esses problemas foram propostos por Zitzler, Deb e Thiele em [Zitzler et al. 2000] com o propósito de avaliar o desempenho de diferentes algoritmos evolucionários multiobjetivos. Nos experimentos realizados foram obtidos bons resultados para um número relativamente baixo de gerações (200 gerações), com uma população de 100 indivíduos, o que indica uma rápida convergência e que a exploração do espaço de busca está sendo feita de maneira eficiente pelo otimizador desenvolvido.

O segundo passo trata da otimização de carteiras de investimentos. Devido à grande quantidade de fundos de investimentos disponíveis no mercado de capitais brasileiro (atualmente em mais de 25.000 fundos), fez-se necessário a utilização de uma meta-heurística para a seleção inicial dos fundos participantes da carteira a ser otimizada. Foram escolhidos fundos com as seguintes características:

- abertos;
- não exclusivos, das 4 classes definidas pela CMV (Ações, Multimercado, Renda Fixa e Câmbio), com exceção de fundos de previdência;
- com mais de 100 cotistas;
- com patrimônio líquido superior à R\$ 50.000.000,00;
- sem aplicação inicial mínima;
- sem a necessidade de investidor qualificado;
- com ao menos 36 meses de dados históricos na data de 31/12/2020;
- abertos durante o ano de 2021.

A busca retornou um total de 474 fundos, os quais foram selecionados para a composição das carteiras a serem otimizadas pelo otimizador. Do total, 247 são fundos de Renda Fixa, 113 são fundos Multimercado, 114 são fundos de Ações e 9 são fundos de Câmbio. Os parâmetros do algoritmo evolucionário foram definidos com base em trabalhos relacionados [Deb and Kalyanmoy 2001] [Cancian et al. 2011] e testes com os dados a fim de minimizar o tempo necessário para a obtenção das soluções. São eles:

- *Codificação dos indivíduos*: Real (peso do fundo na carteira);
- *Tamanho da população (P)*: 500;
- *Número de variáveis (n)*: 474 (474 fundos);
- *Geração da população inicial*: Aleatório;
- *Método de seleção dos pais*: Torneio binário;
- *Método de recombinação*: Cruzamento de ponto único;
- *Método de mutação*: Mutação polinomial com $n_{mut} = 20$ e taxa de mutação igual à 0,1;
- *Método de parada*: Máximo de $P \times 2$ gerações.

Dessa forma, cada cromossomo está codificado como 474 variáveis reais entre [0,1]. Para a geração da população inicial, foi utilizado um método de geração de números aleatórios para os valores dos pesos, de modo que a soma dos pesos (proporção do capital investido em cada ativo) seja 1 (100% do capital).

O modelo proposto conta com três objetivos, a maximização do retorno esperado, a minimização do risco (variância da carteira) e a maximização do número de classes de fundos da carteira, como definido na equação (1), onde μ_p é o retorno esperado da carteira, x_i é o peso do fundo i na carteira, μ_i é o retorno do fundo i na carteira, σ_p^2 é a variância da carteira, σ_{ij} é a covariância dos retornos dos ativos i e j , ρ_p é a soma das diferentes classes dos fundos da carteira, δ_i é a classe do fundo. Também deverá suportar a restrição de igualdade em que a soma de todos os pesos de fundos deve ser igual a 1; a restrição em que o peso de um fundo na carteira x_i deve ser maior ou igual a 2,5% e menor ou igual a 50% se presente e igual a zero se ausente; e a restrição em que a soma do número de fundos na carteira deve ser maior ou igual a 8 e menor ou igual a 12, onde ζ_i é 1 se o fundo estiver presente e zero se estiver ausente. Essa restrição do número mínimo e máximo de fundos na carteira é para garantir uma maior diversificação e ao mesmo evitar que muitos fundos sejam selecionados, tornando a carteira de difícil gerenciamento pelo investidor.

$$\begin{aligned}
\max \mu_p &= \sum_{i=1}^N x_i \mu_i \\
\min \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \\
\max \rho_p &= \sum_{i=1}^N \delta_i \\
\text{sujeito à: } &\sum_{i=1}^N x_i = 1 \\
&x_i = 0 \text{ ou } 0,025 \leq x_i \leq 0,50; i = 1, \dots, N; x_i \in [0, 1] \\
&8 \leq \sum_{i=1}^N \zeta_i \leq 12
\end{aligned} \tag{1}$$

4. Resultados

Para o modelo tri-objetivo apresentado na seção anterior, é possível perceber na Figura 1, uma distribuição satisfatória das melhores soluções com as 4 classes de fundos. Para termos uma ideia da evolução das soluções ao longo das gerações para o modelo tri-objetivo proposto, são apresentadas nas Figuras 2a, 2b e 2c, os valores médios dos objetivos para os indivíduos das populações ao longo das gerações. Nelas é possível observar que as soluções médias tendem à estabilizar a partir de um número mais alto de gerações, a partir de 500 gerações.

Teste retroativo (*backtesting*) é uma forma de verificação do modelo proposto e consiste na avaliação do desempenho de uma carteira num período histórico conhecido. Para isso, é necessário situar o usuário num ponto específico no passado, e gerar um conjunto de carteiras ótimas utilizando-se de dados históricos anteriores àquele ponto. Após isso, são utilizados os dados subsequentes de retornos dos ativos financeiros para determinar o desempenho da carteira para um período "futuro".

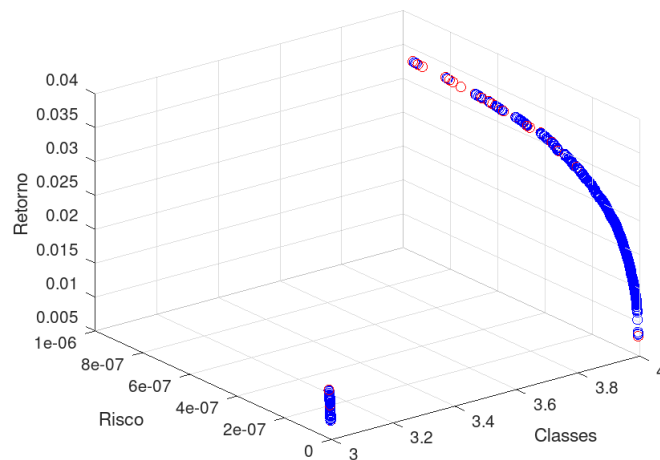
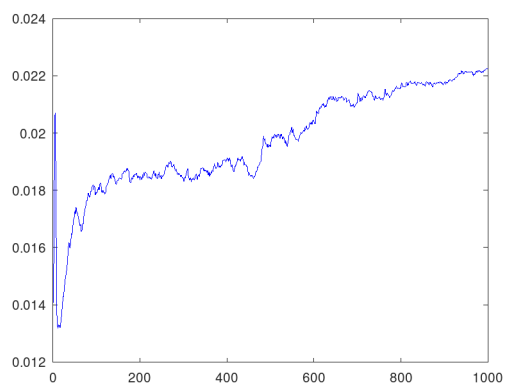
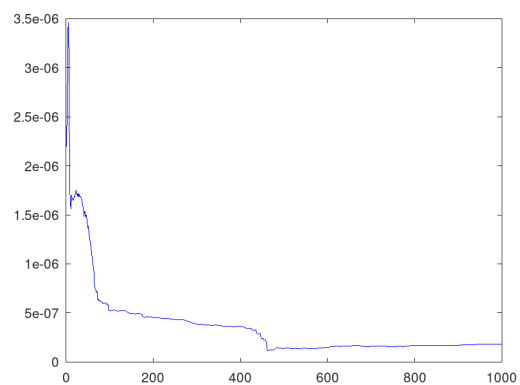


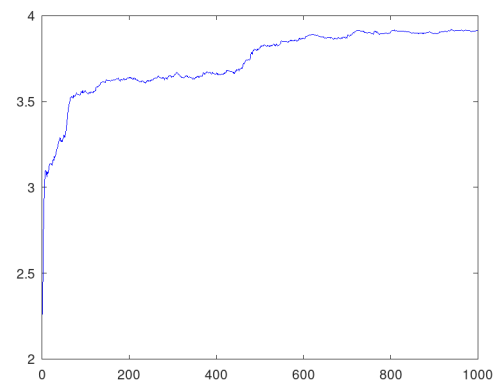
Figura 1. Soluções obtidas para o problema de otimização de portfólio. Em vermelho, as 25 melhores soluções.



(a) Rentabilidade média das soluções



(b) Risco médio das soluções



(c) Número médio de classes das soluções

Figura 2. Convergência dos objetivos ao longo das gerações

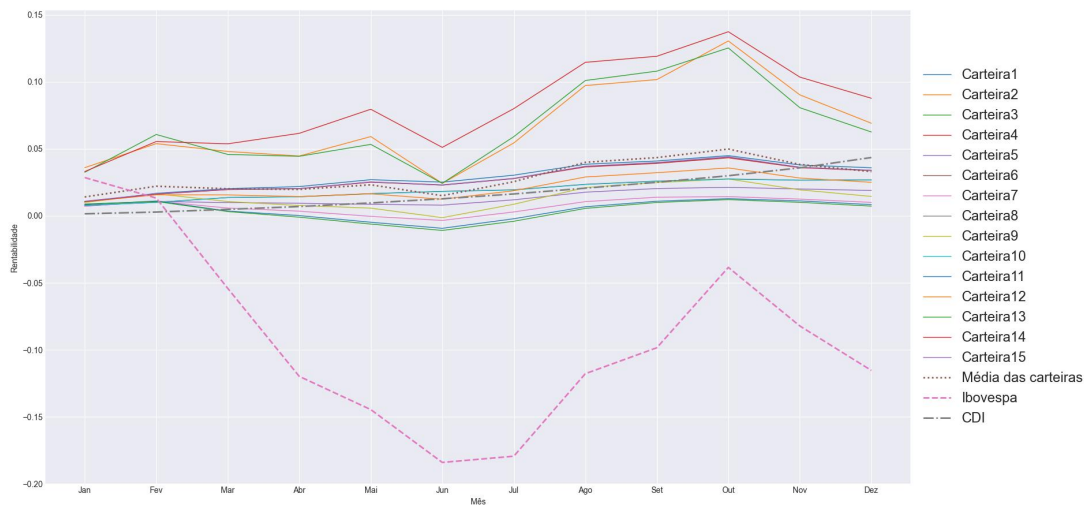


Figura 3. Rentabilidade acumulada das carteiras otimizadas, do Ibovespa e do CDI para o ano de 2021.

Para a validação das soluções obtidas pelo otimizador, foram realizados testes com dados históricos dos retornos dos fundos para o ano de 2021. A Figura 3 mostra a rentabilidade acumulada das 15 melhores carteiras para os 12 meses do ano, apresenta a rentabilidade acumulada média das carteiras ao longo do período e o rendimento acumulado para os indicadores do Ibovespa e do CDI. Percebe-se que as carteiras otimizadas apresentaram um desempenho melhor que o Ibovespa ao final do ano, já em relação ao CDI, 3 carteiras apresentaram rendimento superior, enquanto as outras ficaram um pouco abaixo do indicador. Outro ponto que chama a atenção, é a volatilidade das soluções obtidas, pois foi menor do que a apresentada pelo Ibovespa, indicando um menor risco em relação ao índice. Esse é outro indicativo de que as carteiras foram geradas atingindo o objetivo de minimização do risco. Para efeitos de comparação da maximização da rentabilidade, na Figura 4 é apresentada a rentabilidade acumulada no período para 15 carteiras da população inicial.

5. Discussão e Conclusões

Este artigo descreveu um trabalho que buscou ajudar a resolver o problema de seleção de fundos de investimentos e composição de carteiras por investidores pouco experientes. Foi proposto um modelo para otimização de portfólios utilizando-se um algoritmo evolutivo multiobjetivo e o modelo média-variância de Markowitz. Foi desenvolvido um otimizador multiobjetivo baseado para gerar carteiras otimizadas a partir da carteira do investidor.

Nos experimentos realizados para os problemas de *benchmark* da classe ZDT, o otimizador se saiu muito bem e alcançou resultados satisfatórios após poucas gerações. Para o modelo de otimização de carteiras tri-objetivo proposto foi possível observar a convergência dos objetivos das soluções geradas. Também foram feitas simulações de rentabilidade das melhores carteiras geradas para o ano de 2021, com o objetivo de analisar o desempenho das mesmas e comparar com a rentabilidade de um conjunto de carteiras não otimizadas. Apesar de ser um ano atípico devido à pandemia de COVID-19,

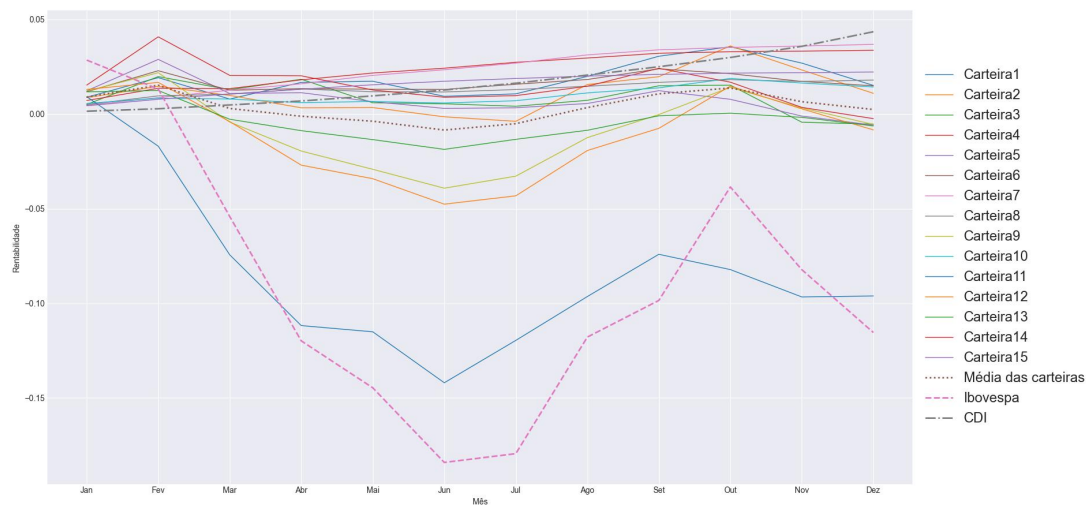


Figura 4. Rentabilidade acumulada das carteiras da população inicial, do Ibovespa e CDI para o ano de 2021.

algumas carteiras conseguiram performar melhor que o indicador de renda fixa utilizado na comparação, ao mesmo tempo em que todas elas se saíram melhor do que o índice Ibovespa. Após os experimentos e análise dos resultados, foi possível chegar a conclusão de que o otimizador cumpriu seu papel na geração de carteiras otimizadas. Espera-se que este trabalho possa ajudar investidores iniciantes no mercado financeiro a melhorarem suas carteiras de investimentos, possibilitando a escolha entre diversas soluções com diferentes níveis de risco e retorno.

Referências

- Blank, J. and Deb, K. (2020). pymoo: Multi-objective optimization in python. *IEEE Access*, 8:89497–89509.
- Cancian, R. L. et al. (2011). Um modelo evolucionário de otimização multiobjetivo para exploração do espaço de projeto em sistemas embarcados.
- Chang, T.-J., Meade, N., Beasley, J. E., and Sharaiha, Y. M. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 27(13):1271–1302.
- Coello, C. A. (2000). An updated survey of ga-based multiobjective optimization techniques. *ACM Comput. Surv.*, 32(2):109–143.
- de Valores Mobiliários, C. (2019). *Mercado de valores mobiliários brasileiro - 4.ed.* Comissão de Valores Mobiliários, Rio de Janeiro.
- Deb, K. and Kalyanmoy, D. (2001). *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons, Inc., USA.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2):182–197.

- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection*. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- Murata, T., Ishibuchi, H., et al. (1995). Moga: multi-objective genetic algorithms. In *IEEE international conference on evolutionary computation*, volume 1, pages 289–294.
- Schaffer, J. (1985). Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. pages 93–100.
- Zitzler, E., Deb, K., and Thiele, L. (2000). Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*, 8(2):173–195.
- Zitzler, E. and Thiele, L. (1998). An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: The strength pareto approach. *TIK-report*, 43.