Calcul différentiel sur les espaces vectoriels normés

Version compilée du 26 mai 2015

Table des matières

Introduction

Ce cours se concentrera sur l'étude des applications différentiables dans les espaces de Banach (de dimension quelconques) construits sur le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. Certaines propriétés peuvent être généralisées à n'importe quel corps de base, comme les notions de différentielles.

Dans le chapitre 1, nous commencerons d'abord par rappeler quelques notions sur les normes, les applications linéaires et multilinéaires.

Dans le chapitre 2, nous regarderons les notions de différentiabilités de premier ordre et des propriétés s'y rapportant.

Dans le chapitre 3, nous enchainerons sur l'inégalité des accroissements finis après avoir rappelé quelques résultats de l'analyse réelle. Nous pourrons alors donner des conséquences sur les applications différentiables.

Dans le chapitre 4 et 5, nous verrons deux théorèmes importants : le théorème d'inversion locale et globale ainsi que le théorème des fonctions implicites.

Dans le chapitre 6, nous généraliserons les notions vues dans le chapitre 2. Nous regarderons aux différentielles d'ordre n.

Enfin, dans le chapitre 7, nous verrons les formules de Taylor. Celles-ci généralisent les formules de Taylor de l'analyse réelle.

Les notions d'espaces vectoriels, de dimension et de corps sont supposées connues. De même, les notions de topologies, de fermés, d'ouverts, de voisinages, de boules, de sphères et de continuité ne seront pas rappelées.

Les espaces vectoriels seront dénotés par les lettres E, F, G, H, ..., les applications linéaires par f, g, h, ... et le corps de base par $\mathbb{K}$ (qui sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Les termes d'applications, de fonctions et d'opérateurs seront utilisés pour décrire les mêmes objets. h

Chapitre 1

Normes, applications linéaires et multilinéaires

1.1 Normes et espace de Banach

Définition 1.1. *Soit E un espace vectoriel, et $N : E \to \mathbb{R}$ une fonction.*
N est ***une norme*** *si elle vérifie :*

1. $\forall x \in E$, $N(x) \geq 0$
2. $\forall x \in E$, $(N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$
3. $\forall x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $N(\lambda x) \leq |\lambda| N(x)$

Cette application est souvent dénotée par $\|.\|_E$ ou tout simplement $\|.\|$.

Exercice 1.1. *Montrer qu'on a $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$*

En particulier, on a que E est un espace métrique ($d(x, y) = \|x - y\|$).
La notion d'équivalence de norme est très intéressante, comme on le verra par après. Elle permet de classer les espaces vectoriels normés.

Définition 1.2. *Soient deux normes $\|.\|_1$ $\|.\|_2$ sur E. On dit qu'elles sont équivalentes si $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ $\forall x \in E$ tel que $k_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2 \|x\|_1$*

Le terme de normes équivalentes est bien choisie car cette notion est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes [1]. On peut donc **classer** les normes. Le terme de classe sera utilisé pour distinguer les liens entre les normes.

Définition 1.3. *Soit $(E, \|.\|)$. E est un espace de Banach si E est complet pour $\|.\|$.*

---

1. Il faut montrer que c'est un ensemble en terme de ZF.

Exercice 1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, N une norme quelconque sur E, et $\mathbb{K}$ complet. Montrez que E est un espace de Banach pour N.*

Pour cela, vous pouvez d'abord montrer que la convergence sur E se fait composante par composante. Il restera à déduire sa complétude suivant l'hypothèse sur $\mathbb{K}$.

Exemple 1.1. *Par l'exercice précédent, on en déduit que $M_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées de dimension n à cofficients dans un corps complet $\mathbb{K}$ est un espace de Banach. En effet, celui-ci est de dimension finie n^2.*

Proposition 1.4. *Soit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ où $(E_i, \|.\|_i)$ est un espace de Banach pour $1 \leq i \leq n$. On note pour $x \in E$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour $1 \leq i \leq n$.*

Alors, on peut définir les normes suivantes sur E :

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$.
2. $\|x\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max} \|x_i\|_i$

De plus, E est un espace de Banach pour ces deux normes.

Démonstration. □

Exemple 1.2. *On peut faire le lien avec la norme 1 et la norme infinie sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit alors que $\mathbb{R}^n$ est un espace de Banach, qui avait été montré précédemment.*

Questions.
1. *Peut-on construire une norme sur tout espace vectoriel ? Sinon, quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) a-t-on besoin ?*
2. *Est-ce qu'un produit quelconque d'espaces de Banach est un espace de Banach ? (En supposant qu'on peut constuire une norme sur le produit.)*

1.2 Topologie des normes

Sur un espace vectoriel normé donné, nous pouvons aussi construire une topologie. Cela permettra de définir la continuité.

Définition 1.5. *Soit une norme $\|.\|$ sur E. La topologie sur E associée à $\|.\|$ est définie par l'ensemble des unions quelconques et des intersections finies de boules ouvertes associées à la norme $\|.\|$.*

Proposition 1.6. *Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie.*

Démonstration. □

Regardons maintenant deux théorèmes très importants. Nous supposons que E est un espace vectoriel normé.

Théorème 1.7. *E est de dimension finie si et seulement si toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. □

Théorème 1.8. *E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*

Démonstration. □

On en déduit alors une propriété assez intéressante :

Proposition 1.9. *Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie définissent la même topologie. Nous parlerons alors de* ***la*** *topologie de* ***la*** *norme de E.*

Démonstration. □

1.3 Application linéaire

Nous allons maintenant étudier les applications linéaires. Nous savons déjà que celles-ci représentent les morphismes entre espaces vectoriels, c'est-à-dire qu'elles permettent de relier les structures entre deux espaces vectoriels.

Nous avons vu précédemment que lorsqu'on est sur un espace vectoriel normé, la norme définit une topologie. Nous pouvons alors parler de continuité.

Définition 1.10. *L'ensemble des applications linéaires forme un espace vectoriel pour la multiplication scalaire habituelle et l'addition de fonctions usuelle. Nous notons $Hom(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, $Hom(E, F) = End(E)$.*

Prenons une fonction $f \in Hom(E, F)$ et $a \in E$.

Proposition 1.11. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue.*
2. *f est continue en a.*
3. *f est continue en 0.*
4. *f est bornée sur la boule unité de E.*
5. *f est bornée sur tout ensemble bornée de E.*

6. $\exists k > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.
7. *f est lipschitzienne.*
8. *f est uniformément continue.*

Démonstration. □

On sait que la somme, le produit, la différence, ainsi que la multiplication par un scalaire d'une fonction continue reste continue. On a alors que l'ensemble des applications linéaire continues forment un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}(E;F)$. Si $E = F$, $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{L}(E)$.

En particulier, $\mathcal{L}(E;F)$ (resp $\mathcal{L}(E)$) est un sous espace vectoriel de $Hom(E,F)$ (resp $End(E)$).

Remarque. *Pour une fonction quelconque entre deux espaces métriques, nous avons toujours que la continuité uniforme implique la continuité, mais pas nécéssairement l'inverse (voir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$ qui est continue mais pas uniformément).*

Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour qu'une fonction continue soit uniformément continue.

Théorème 1.12 (Heine)**.** *Soit K un compact de E à valeur dans F, où E et F sont des espaces métriques. Soit $f : K \to F$ continue. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. □

Exemple 1.3. *Toute fonction f d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue, est uniformément continue, comme $f : [-1,1] \to \mathbb{R} : x \to x^2$.*

Encore une fois, nous allons montrer une résultat important quand E est de dimension finie.

Proposition 1.13. *Soit E de dimension finie, et F de dimension quelconque.*

Alors $Hom(E,F) = \mathcal{L}(E;F)$, c'est-à-dire toute application linéaire est continue lorsque l'espace de départ est de dimension finie.

Démonstration. Soit E de dimension n. On a que E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Prenons $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in Hom(E,F)$. Montrons que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. □

1.4 Projection et injection canonique

On a vu que si on prend un produit d'espace vectoriel normé, on pouvait contruire une structure d'espace vectoriel normé dessus (voir 1.4).

Définition 1.14 (Injection et projection canonique)**.** *Soit* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$. *Pour tout* k *allant de* 1 *à* n, *on définit* ***la projection canonique sur*** E_k *comme la fonction* $p_k : E \to E_k : (x_1, \ldots, x_n) \to x_k$ *et* ***l'injection canonique*** *comme la fonction* $i_k : E_k \to E : x_k \to (0, \ldots, x_k, \ldots, 0)$.

On remarque que $\sum_{k=0}^{n} i_k \circ p_k = Id_E$ et $p_k \circ i_k = Id_{E_k}$.

Il est facile de montrer que ces applications sont linéaires, et continues. On a donc $p_k \in \mathcal{L}(E; E_k)$ et $i_k \in \mathcal{L}(E_k; E)$.

De plus, pour la définition de l'injection canonique, nous pouvons remplacer les 0 par n'importe quelle autre valeur, tant que celle-ci reste constante.

Définition 1.15 (Fonction composante)**.** *Soient* $F_1, \cdots, F_n$ *et* E *des espaces vectoriels normés. Soit* $F = \prod_{i=1}^{n} F_i$.

Soit $f : E \to F$. *On définit, pour tout* k *entre* 1 *et* n, ***les applications composantes :***

$$f_k : E \to F_k : x \to (p_k \circ f)(x)$$

Cette définition permet alors la notation $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, ou tout simplement $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Définition 1.16 (Application partielle)**.** *Soient* $E_1, \cdots, E_n$ *et* F *des espaces vectoriels normés. Posons* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, *et définissons* $f : E \to F$.

On définit ***les applications partielles****, pour* k *de* 1 *à* n, *comme la fonction* $f_k = f \circ i_k$.

On a $f_k : E_k \to F$.

On utilisera ces notations dans le chapitre 2 lorsque nous étudierons la différentiabilité des applications à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels dans la section 2.4.

1.5 Application n-linéaire

Définition 1.17. *Soient* $E_1, \cdots, E_n$ *et* F *des espaces vectoriels normés. Posons* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$.

Soit $f : E \to F$. *Alors* f *est* n***-linéaire*** *si chaque application partielle* f_k *est linéaire. En d'autres termes,* f *est multilinéaire si elle est linéaire en chaque variable.*

Quand $n = 2$ *(resp.* $n = 3$*), on dit que* f *est* ***bilinéaire*** *(resp.* ***trilinéaire****).*

On peut alors généraliser la continuité à cette classe d'applications, et on obtient des assertions proches du cas linéaire.

Proposition 1.18. *Soient $E_1, \cdots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés. Posons $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$.*

Soit $f : E \to F$ une application n-linéaire. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est continue.*
2. *f est continue en $a = (a_1, \cdots, a_n)$.*
3. *f est continue en 0.*
4. *f est bornée sur la boule unité de E.*
5. *f est bornée sur tout ensemble bornée de E.*
6. *$\exists k > 0, \forall x \in E, \|f(x_1, \cdots, x_n)\|_F \leq k\|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}$*

Démonstration. □

On note $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ ou $\mathcal{L}_n(E; F)$ (dans le cas où $E = \prod_{i=1}^n E_i$) l'ensemble des applications n-linéaires continues, et $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n)$ ou $\mathcal{L}_n(E)$ (dans le cas où $E = \prod_{i=1}^n E_i$) si $F = \prod_{i=1}^{n} E_i = E$.

Remarque. *Toute application bilinéaire non nulle n'est pas uniformément continue. En particulier, elle n'est pas lipschitzienne.*

Dans le cas particulier où chaque E_i est de dimension finie, on a que chaque application linéaire continue, comme dans le cas linéaire.

Proposition 1.19. *Si chaque E_i est de dimension finie, alors $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F) = Hom(E_1, \ldots, E_n, F)$.*

1.6 Séries

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé E.

Définition 1.20. *La série $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E si la suite des sommes partielles converge dans E.*

Si la suite converge, on note la limite $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Définition 1.21. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ où E est un espace vectoriel normé.*

*On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge normalement** si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\|u_n\|_E}^{\in\mathbb{R}^+} < \infty$.

La définition de convergence normale se résume à l'étude d'une série réelle.

Proposition 1.22. *Soit E un espace de Banach. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement. De plus, on a*

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\|_E \leq \sum_{u=0}^{\infty} \|u_n\|_E$$

Démonstration. □

Définition 1.23. *Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit **la série de Neumann** comme la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ avec comme convention $u^0 = Id_E$.*

Proposition 1.24. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace de Banach, tel que $\|u\|_{\mathcal{L}_E} < 1$. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ converge.*

Démonstration. Comme E est de Banach, alors $\mathcal{L}(E)$ l'est aussi. Comme $\|u\| < 1$, on a que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|u^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u\|^n$ converge. Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ converge par 1.22. □

Proposition 1.25. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\|_{\mathcal{L}_E} < 1$. Alors $(Id_E - u)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. De plus $(Id_E - u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$.*

Démonstration. Par 1.22, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ qui converge, et par conséquence, u^n tend vers 0_E.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $(Id_E - u) \circ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u^n = \sum_{n=0}^{N} u^n - \sum_{n=1}^{N+1} u^n = u^0 - u^{N+1}$. Donc, quand N tend vers ∞, on a la dernière égalité qui tend vers $u^0 - 0_E = Id_E$. □

Corollaire 1.26. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\|_{\mathcal{L}_E} < 1$.*

Alors $u^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (Id_E - u)^n$.

Démonstration. Soit $v = Id_E - u$, alors $u = Id_E - v$. Il reste à montrer que $||v||_{\mathcal{L}_E} < 1$ pour rentrer dans les conditions de la proposition 1.25. □

1.7 Isomorphisme et isométrie

Proposition 1.27. *Toute application réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.*

Démonstration. □

Si on prend une application linéaire continue bijective entre deux espaces vectoriels normés quelconques, alors la réciproque n'est pas nécessairement continue.

Or, on dispose d'un théorème, appelé théorème de Banach, qui nous permet d'être sûr que la réciproque est continue.

Théorème 1.28 (Banach)**.** *Soient E et F deux espaces de **Banach**, et $f \in \mathcal{L}(E;F)$ et bijective. Alors l'application réciproque $f^{-1} \in \mathcal{L}(F;E)$, c'est-à-dire que f^{-1} est linéaire continue.*

Démonstration. □

Définition 1.29. *Soit $f : E \to F$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés. On dit que f est **un isomorphisme** si :*
- *f est linéaire continue, ie $f \in \mathcal{L}(E;F)$.*
- *il existe $g \in \mathcal{L}(F;E)$ tel que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.*

On définit alors $Isom(E;F)$ comme l'ensemble des isomorphismes de E dans F. Remarquons que la propriété d'être continue dépend de la norme, donc les isomorphismes ne sont pas nécessairement les mêmes avec des normes qui ne sont pas équivalentes. La norme définissant la topologie sur $\mathcal{L}(E;F)$ est donc liée aux applications d'$Isom(E;F)$.

Regardons le cas particulier des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Remarque. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors $\mathcal{L}(E) \simeq M_n(\mathbb{K})$, et l'espace $Isom(E) \simeq GL_n(\mathbb{K})$ où $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées de déterminant non nulle.*

L'application déterminant étant n-linéaire (et donc en particulier continue car nous sommes en dimension finie), nous avons que $Isom(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Donc, en dimension finie, les applications inversibles forment un ensemble ouvert de $\mathcal{L}(E)$. Est-ce le cas en dimension quelconque ?

Proposition 1.30. *$Isom(E;F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E;F)$.*

Démonstration. Prenons $u_0 \in Isom(E;F)$. Montrons que u_0 est le centre d'une boule de rayon r contenue dans $Isom(E;F)$.

Posons $r = \frac{1}{||u_0^{-1}||}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$ tel que $||u - u_0|| < r$. Montrons que $u \in Isom(E;F)$.

... □

On définit alors l'application inverse.

Définition 1.31. *Soient E, F deux espaces de Banach. On définit **l'application inverse***

$$\phi : Isom(E;F) \to \mathcal{L}(F;E) : u \to u^{-1}$$

Proposition 1.32. *Soit $S \in Isom(E;F)$, $T \in Isom(F;G)$. Alors $T \circ S \in Isom(E;G)$. De plus, $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$.*

Démonstration. □

Définition 1.33. *Soit $f \in Hom(E,F)$. Alors f est **une isométrie** si elle conserve les normes, c'est-à-dire si $\forall x \in E$, $||x||_E = ||f(x)||_F$.*

On obtient alors une propriété, qu'importe les espaces vectoriels donnés, et permet de savoir si $Isom(E;F)$ est vide ou non.

Proposition 1.34. *Une isométrie est toujours injective et continue. De plus, si f est une isométrie surjective, alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. □

Donc, si il existe une isométrie surjective continue entre deux espaces vectoriels, alors ils sont isomorphes.

Attention que tout isomorphisme n'est pas une isométrie. En effet, si on prend une fonction dilatant d'un facteur $\lambda \neq 1$, celle-ci ne conserve pas la norme.

Donnons une isométrie fondamentale :

Proposition 1.35. *Soit F un espace vectoriel normé. Alors $\mathcal{L}(F;\mathbb{K}) \simeq F$.*

Chapitre 2

Applications différentiables

Motivation

Étant donnée une application entre deux espaces vectoriels, on veut pouvoir approcher l'image de la fonction sur un interval grace à une fonction affine, facile à calculer.

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1 (Différentielle en un point a)**.** *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $a \in \mathcal{U}$.*

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application.

*On dit que f est **différentiable en** a s'il existe $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(E;F)$ tel que*

$$\forall h \in \mathcal{U}, f(a+h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + \psi(h) \tag{2.1}$$

où $\psi(h) = o(\|h\|_E)$.

*Si f est différentiable en tout point a de $\mathcal{U}$, on dit que f **est différentiable**.*

On appelle $\mathcal{L}$ **la différentielle de** f **en** a, et on la note $df(a)$. On a alors la définition de différentiabilité en a qui devient

$$\forall h \in \mathcal{U}, f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \psi(h) \tag{2.2}$$

Si f est différentiable en tout point $a \in \mathcal{U}$, on définit alors **la fonction différentielle** $df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E;F)$, qui a tout point a de $\mathcal{U}$, associe $df(a)$, l'application linéaire qui permet d'approximer la fonction dans un voisinage de a.

Pour pouvoir utiliser l'article **la** pour la différentielle, il faut montrer que celle-ci est unique :

Proposition 2.2. *Soient $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2 \in \mathcal{L}(E;F)$ vérifiant la définition 2.1 pour une fonction f.*

Alors $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Démonstration. □

De manière évidente, on a que si f est différentiable en a, alors $-f$ est différentiable en a.

Nous obtenons aussi la continuité de f si f est différentiable.

Proposition 2.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $a \in \mathcal{U}$.*

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable en a.

Alors f est continue en a.

Démonstration. □

La définition dépend, à première vue, de la norme choisie sur E, et F. Est-ce qu'une application différentiable pour une norme l'est telle également pour une autre ?

La proposition suivante nous montre que la notion de différentiabilité reste vraie dans une même classe de norme.

Proposition 2.4. *Soient deux normes équivalentes sur E, et deux normes équivalentes sur F, alors f est différentiable pour l'une d'entre elle ssi elle l'est pour l'autre.*

Démonstration. □

Questions. *Pouvons-nous caractériser la différentiabilité entre deux classes de normes ? C'est-à-dire, peut-on donner une condition nécéssaire et suffisante pour que la notion de différentiabilité reste vraie dans deux classes (ou sous-classes) de normes ?*

Intéressons nous maintenant à des fonctions particulières : **les applications linéaires continues**. Celles-ci ont la propriété suivante :

Proposition 2.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$ où E et F sont des espaces vectoriels normés. Alors f est différentiable en tout point a de E, et $df(a) = f$, c'est-à-dire que l'application df est constante.*

Démonstration. On a $f(a+h) = f(a) + f(h)$ par linéarité de f. On obtient directement ce qu'on souhaite en prenant $\mathcal{L} = f$, et en prenant $\psi(h) = 0$. □

2.2 Règles de calcul

Soient deux espaces vectoriels normés E et F.

Prenons un ouvert $\mathcal{U}$ de E, un point $a \in \mathcal{U}$ et deux fonctions f et g définies sur l'ouvert $\mathcal{U}$ à valeurs dans F.

Proposition 2.6. *Si f et g sont différentiables en a, alors $f+g$ est différentiable en a, et $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$.*

Démonstration. $\square$

Le théorème suivant, appelé parfois Chain Rule, donne un résultat intéressant lorsqu'on regarde la composition de deux fonctions différentiables. En effet, on peut se demander si, quand on a une composée de deux fontions différentiables si elle est elle-même différentiable, et comment calculer sa différentielle. La Chain Rules nous montre que c'est différentiable, et nous donne en plus une formule pour la calculer.

Théorème 2.7 (Chain Rule)**.** *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés.*
Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $\mathcal{V}$ un ouvert de F.
Soient $f : \mathcal{U} \to F$ et $g : \mathcal{V} \to G$.
Soit $a \in \mathcal{U}$. Supposons que $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$ pour pouvoir définir $g \circ f$.
Alors, si f est différentiable en a, et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ ***est différentiable en*** *a et*

$$\overbrace{d(g \circ f)(a)}^{\in \mathcal{L}(E;G)} = \overbrace{dg(f(a))}^{\in \mathcal{L}(F;G)} \circ \underbrace{df(a)}_{\in \mathcal{L}(E;F)}$$

Démonstration. $\square$

2.3 Différentielle de l'application inverse

On a parlé dans le premier chapitre de l'application inverse

$$\phi : Isom(E;F) \to \mathcal{L}(F;E) : u \to u^{-1}$$

qui est continue, et où $Isom(E;F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E;F)$. On peut alors se demander si ϕ est différentiable (en tout point de $Isom(E;F)$.

Remarquons d'abord que si ϕ est différentiable, sa différentielle serait une fonction allant de $Isom(E;F)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E;F), \mathcal{L}(F,E))$.

On va montrer que ϕ est différentiable et donner sa différentielle.

Théorème 2.8. *L'application inverse ϕ est différentiable en tout point $u \in Isom(E,F)$, et sa différentielle en u, appliquée en un point h vaut*

$$d\phi(u)(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$$

Démonstration. $\square$

2.4 Différentielle composante par composante

On a vu précédemment qu'on pouvait mettre une stucture d'espace vectoriel normé sur un produit fini d'espaces vectoriels normés (voir 1.4)

Soient E un espace vectoriel normé et $F = \prod_{i=1}^{n} F_i$ où chaque F_i est un espace vectoriel normé.

Soit $f : E \to F : x \to (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ (notation 1.15)

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.9. *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $a \in \mathcal{U}$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

— *$f = (f_1, \ldots, f_n)$ est différentiable en a*

— *Pour tout i entre 1 et n, f_i est différentiable en a.*

On a alors $df_i(a) = p_i \circ df(a)$.

Démonstration. Remarquons d'abord que les espaces auxquelles appartiennent les fonctions sont bonnes. On a $df_i(a) \in \mathcal{L}(E; F_i)$, $df(a) \in \mathcal{L}(E; F)$ et donc $p_i \circ df(a) \in \mathcal{L}(E; F_i)$ car $p_i \in \mathcal{L}(F; F_i)$.

Rappelons que $f_i := p_i \circ f$.

Dans un sens, si f est différentiable en a, et comme p_i est linéaire donc différentiable aussi en a, par composition, f_i est différentiable et $df_i(a) = p_i \circ df(a)$ (en se rappelant que $dp_i(a) = p_i$ car p_i linéaire). $\square$

2.5 Différentielle des applications multilinéaires

Soient E_1, E_2, F trois espaces vectoriels normés.

Prenons le cas où nous avons une fonction f qui est bilinéaire continue. Le cas multilinéaire pourra être déduit. Les résultats du cas multilinéaire seront donnés à la fin de cette section.

Proposition 2.10. *Prenons une fonction $f : E_1 \times E_2 \to F : (x, y) \to f(x, y)$ bilinéaire continue. Soit $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$.*

On a que f est différentiable en a, et

$$df(a)(h) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)$$

Démonstration. Posons $E = E_1 \times E_2$.

D'abord, si f est différentiable, alors $df \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ ce qui est bien le cas.

Soit $h \in E$, on a $f(a + h) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) + f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2) + f(h_1, h_2)$

On remarque alors que $f(a_1, a_2) = f(a)$, que $f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)$ est linéaire en h (1) et que $f(h_1, h_2) = o(||h||)$ (2).

(1) : conséquence que f est bilinéaire, donc linéaire en chaque variable.

(2) : f est continue, donc on a bien $\forall h \in E$, $||f(h)|| \leq ||f||\,||h||$, donc $f = o(||h||)$. $\square$

On peut alors généraliser ce résultat aux fonctions multilinéaires continues :

Proposition 2.11. *Soit* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ *et* F*. Soit* $f : E \to F$ *une fonction multilinéaire continue (ie* $f \in \mathcal{L}_n(E; F)$*).*

Alors f *est de classe* $\mathcal{C}^1$*,* $df(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ *avec*

$$\begin{aligned} df(a)(h) = f(&h_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \\ &+ f(a_1, h_2, a_3, \ldots, a_n) \\ &+ \ldots \\ &+ f(a_1, \ldots, a_{n-1}, h_n) \end{aligned}$$

Démonstration. □

2.6 Dérivée directionnelle et dérivée partielle

Prenons maintenant $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, et F des espaces vectoriels normés.

Soit $\mathcal{U}_i$ un ouvert de E_i et posons $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$.

Dans la section 2.4, nous avons étudié les fonctions f qui avaient comme espace d'arrivée un produit d'espaces vectoriels. Dans celle-ci, nous allons étudier les fonctions f qui ont comme espace de départ un produit d'espaces vectoriels.

Définition 2.12. *Soient* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$ *et* $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathcal{U}$*, et* $f : \mathcal{U} \to F$*.*

Posons

$$f_{e,a} : \mathbb{K} \to F : t \to f(a + te).$$

On définit ***la dérivée directionnelle de*** f ***en*** a ***suivant la direction (le vecteur)*** e*, comme la dérivée en* 0 *de la fonction* $f_{e,a}$*, si celle-ci existe et on la note* $\partial_e f(a)$*.*

Remarquons que $\partial_e f(a) \in F$*.*

Proposition 2.13. *Si* f *est différentiable en un point* $a \in \mathcal{U}$*, alors toutes les dérivées directionnels de* f *en* a *existent et on a*

$$\partial_e f(a) = df(a)(e)$$

Démonstration.

$$\frac{f(a+te) - f(a)}{t} = \frac{df(a)(te) + \phi(te)}{t} \tag{2.3}$$

$$= \frac{tdf(a)(e)}{t} + \frac{\phi(te)}{t} \tag{2.4}$$

$$= df(a)(e) + \frac{\phi(te)}{t} \tag{2.5}$$

Montrons que $\dfrac{\phi(te)}{t} \to 0$ quand $t \to 0$.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\|\phi(te)\|}{|t|} &= \frac{\|te\|\|\phi(te)\|}{|t|\|te\|}\\ &= \frac{\|te\|}{|t|}\frac{\|\phi(te)\|}{\|te\|}\\ &= \|e\|\frac{\|\phi(te)\|}{\|te\|} \to 0\end{aligned}$$

quand $t \to 0$ car $\phi = o(\|te\|)$ et $te \to 0$ quand $t \to 0$. □

Remarque. *La réciproque est fausse.*

Définition 2.14. *On dit que f* ***admet une dérivée partielle au point*** *a* ***selon*** *E_i si l'application :*

$$\mathcal{U}_i \to F : x \to f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

est différentiable au point a_i. Dans ce cas, on note sa différentielle $\underbrace{\partial_i f(a)}_{\in \mathcal{L}(E_i;F)}$ (ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$)

Proposition 2.15. *Supposons que f soit différentiable en a. Alors f admet des dérivées partielles en a par rapport à E_i pour tout $1 \leq i \leq n$.*

De plus, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in E$:

$$\underbrace{\overbrace{df(a)}^{\in \mathcal{L}(E;F)}\,(h)}_{\in F} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}^{\in \mathcal{L}(E_i;F)}(a)\,(h_i)}_{\in F}$$

Démonstration. □

2.7 Formule de Leibniz et produit de fonctions différentiables

Définition 2.16 (Algèbre)**.**

Définition 2.17 (Algèbre normée)**.**

Définition 2.18 (Algèbre de Banach)**.**

Définition 2.19 (Application produit)**.**

Définition 2.20. *Soit A une algèbre de Banach.*

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à coefficients dans A.

*On définit **le produit de Cauchy** comme la suite*

$$(x * y)_n = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k}.y_k$$

Théorème 2.21. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergent normalement, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (x * y)_n$ converge normalement. De plus, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x * y)_n = (\sum_{n=0}^{\infty} x_n).(\sum_{n=0}^{\infty} y_n)$$

Démonstration. □

Proposition 2.22 (Règle de Leibniz)**.** *Soient E, F_1, F_2, G des espaces vectoriels normés. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E.*

Soient $f : \mathcal{U} \to F_1$ et $g : \mathcal{U} \to F_2$ deux applications différentiables en un point $a \in \mathcal{U}$.

Soit $B \in \mathcal{L}_2(F_1, F_2; G)$.

Alors l'application

$$B(f, g) : \mathcal{U} \to G \tag{2.6}$$

$$x \to B(f(x), g(x)) \tag{2.7}$$

est différentiable en a et

$$dB(f, g)(a) = B(df(a), g(a)) + B(f(a), dg(a)) \tag{2.8}$$

De plus, si f et g sont différentiables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$), alors $B(f, g)$ est différentiable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$).

Démonstration. Posons $\gamma : \mathcal{U} \to F_1 \times F_2 : x \to (f(x), g(x))$. Cette fonction est différentiable en a car ses fonctions composantes sont différentiables en a par hypothèse.

De plus, B est différentiable en tout point de $F_1 \times F_2$ car bilinéaire continue. En particulier, elle est différentiable en $(f(a), g(a))$.

Pour finir, on remarque que $B(f, g) = B \circ \gamma$. Par la chain rule, $B(f, g)$ est différentiable en a car c'est une composition de fonctions différentiables en a. □

Remarque. *La règle de Leibniz telle que donnée précédemment généralise la proposition montrant la différentiabilité d'un produit de fonctions différentiables lorsque nous sommes dans une algèbre A. En effet, la seconde opération sur A est bilinéaire continue, ce qui permet d'utiliser la règle.*

Exemple 2.1. — *Dans le cas d'un espace de hilbert $\mathcal{H}$, nous avons que le produit scalaire répond à la règle de Leibniz car celui-ci est bilinéaire continue.*

2.8 Exemple fondamental

Prenons $E = F = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^{>0}$.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$.

Supposons que f soit différentiable sur $\mathcal{U}$, et notons f_i ses applications composantes.

Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$, les dérivées partielles de f_i existent pour tout j entre 1 et n. On peut alors définir $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Définition 2.23. *Soit $a \in \mathcal{U}$. On définit* ***la matrice Jacobienne de f en a****, notée $J_f(a)$ comme la matrice*

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Chapitre 3

Inégalité des accroissements finis (de la moyenne)

Motivation et rappel d'analyse réel

Théorème 3.1 (des accroissements finis)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tel que :*
- *f est continue sur $[a, b]$*
- *f est dérivable sur $]a, b[$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Démonstration. □

Proposition 3.2. *Supposons en plus que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.*

Démonstration. □

Remarquons que le théorème des accroissements finis n'est pas vrai dans le cas vectoriel. En effet, $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \to (cos(t), sin(t))$ est un contre exemple.

3.1 Cas où $E = \mathbb{R}$

Théorème 3.3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, et F un espace vectoriel normé.*

Soient $f : [a, b] \to F$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tel que :
- *f et g sont continues sur $[a, b]$.*
- *f et g sont dérivables sur $]a, b[$*
- *$\forall x \in]a, b[, \; \|f'(x)\|_F \leq g'(x)$.*

Alors on a $\|f(b) - f(a)\|_F \leq |g(b) - g(a)|$.

Démonstration. □

Corollaire 3.4. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et F un espace vectoriel normé.*

Soit $f : [a, b] \to F$ continues sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Supposons en plus qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $\|f'(x)\|_F \leq k$. Alors :

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq k(b - a).$$

Démonstration. □

3.2 Cas où E est un espace vectoriel normé

Soient E et F des espaces vectoriels normés. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E.

Rappelons d'abord quelques définitions.

Définition 3.5. *Soient $a, b \in E$. On définit* ***le segment d'extrémités** a **et** b l'ensemble $S(a, b) := \{(1 - t)a + tb \,|\, t \in [0, 1]\}$.*

Définition 3.6. *On dit que $\mathcal{U}$ est* ***convexe*** *si pour tout $a, b \in \mathcal{U}$, $S(a, b) \subseteq \mathcal{U}$.*

Théorème 3.7 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application différentiable en tout point de $\mathcal{U}$.*

Soient $a, b \in \mathcal{U}$ tel que $S(a, b) \subseteq \mathcal{U}$.

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \sup_{x \in S(a,b)} \|df(x)\| \|b - a\|_E.$$

Démonstration. □

Remarque.

- *Si $\mathcal{U}$ est convexe, alors on a :*

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \sup_{x \in \mathcal{U}} \|df(x)\| \|b - a\|_E.$$

- *Si la différentielle est nulle en tout point de $\mathcal{U}$ avec $\mathcal{U}$ convexe, alors f est constante.*

3.3 Applications du théorème des accroissements finis

3.3.1 Différentiabilité d'une limite d'applications différentiables

Corollaire 3.8. *Soient E, F deux espaces de Banach. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de E.*

Soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications différentiables de $\mathcal{U}$ dans F.

Supposons :

1. *qu'il existe* $a \in \mathcal{U}$ *tel que* $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *la suite* $(df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $\mathcal{U}$ *vers* $g : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E;F)$.

Alors :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur tout* $\mathcal{U}$. *La fonction limite est noté* f.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur toute partie bornée de* $\mathcal{U}$.
3. f *est différentiable sur* $\mathcal{U}$, *et sa différentielle vaut* g.
4. *Si les* f_n *sont continûment différentiables,* f *également.*

Démonstration. □

Corollaire 3.9. *Sous les mêmes hypothèses, avec* $f_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ *où* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions différentiables de* $\mathcal{U}$ *dans* F, *on a les mêmes résultats.*

Démonstration. □

3.3.2 Différentiabilité et existence des dérivées partielles

Théorème 3.10. *Soient* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, *et* $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$ *un ouvert de* E. *Soit* $f : \mathcal{U} \to F$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

– f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathcal{U}$.

– *Les dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E_i;F)$ *existent et sont continues sur* $\mathcal{U}$.

Démonstration. □

Chapitre 4

Théorème d'inversion locale

4.1 Homéomorphismes et difféomorphismes

Définition 4.1. *Soient* (X, τ_X) *et* (Y, τ_Y) *deux espaces topologiques.*

Une fonction $f : X \to Y$ *est* ***un homémorphisme*** *si elle est bijective, continue, et à réciproque continue (*f^{-1} *continue).*

Définition 4.2. *Soient* (X, τ_X) *et* (Y, τ_Y) *deux espaces topologiques.*

Une fonction $f : X \to Y$ *est* ***ouverte*** *(resp.* ***fermée****) si pour tout ouvert* $\mathcal{O}_X$ *de* (X, τ_X)*,* $f(\mathcal{O}_X)$ *est un ouvert de* (Y, τ_Y) *(resp. pour tout fermé* $\mathcal{F}_X$ *de* (X, τ_X)*,* $f(\mathcal{F}_X)$ *est un fermé de* (Y, τ_Y)*).*

Théorème 4.3. *Soient* (X, τ_X) *et* (Y, τ_Y) *deux espaces topologiques.*

Soit $f : X \to Y$ *une fonction bijective continue. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- f *est un homéomorphisme.*
- f *est ouverte.*
- f *est fermée.*

Démonstration. □

Définition 4.4. *Soient* E*,* F *des espaces vectoriels normés.*

Soient $\mathcal{U}$ *un ouvert de* E *et* $\mathcal{V}$ *un ouvert de* F*.*

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$*.*

On dit que f *est* ***un difféomorphisme*** *si elle est bijective, de classe* $\mathcal{C}^1$ *et sa réciproque est de classe* $\mathcal{C}^{-1}$*.*

Remarque.
- *Un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme est un homémorphisme.*
- *En revanche, un homéomorphisme de classe* $\mathcal{C}^1$ *n'est pas nécessairement un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme.*

Proposition 4.5. *Soient* E, F *deux espaces vectoriels normés.*

Soient $\mathcal{U}$ *un ouvert de* E*,* $\mathcal{V}$ *un ouvert de* F*, et* $a \in \mathcal{U}$*.*

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *une application bijective et différentiable en* a*.*

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

— *f^{-1} est différentiable en $b := f(a)$*
— *$df(a) \in Isom(E; F)$*
On a alors l'inverse de $df(a)$ qui est donné par $[df(a)]^{-1} = d(f^{-1})(b)$.

Démonstration. □

Proposition 4.6. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés.*
Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $\mathcal{V}$ un ouvert de F.
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors les assertions suivantes équivalentes :
— *f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme*
— *$df(a) \in Isom(E; F)$ pour tout $a \in \mathcal{U}$*

Démonstration. □

4.2 Exemple fondamental

Prenons $E = F = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^{>0}$.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$.

Supposons que f soit différentiable sur $\mathcal{U}$, et notions f_i ses applications composantes. Alors les dérivées partielles de f existent pour tout j entre 1 et n.

Notons $J_f(a)$ sa matrice jacobienne en a.

Supposons que $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ et que f soit un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$.

Alors, pour que f soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit, par 4.6, que pour tout $a \in \mathcal{U}$, $df(a)$ soit un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, par la correspondance matricielle, que $J_f(a)$ soit inversible (ie $det(J_f(a)) \neq 0$) pour tout $a \in \mathcal{U}$.

4.3 Théorème d'inversion locale

Théorème 4.7 (d'inversion locale)**.** *Soient E, F des espaces de Banach. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E.*
Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application différentiable sur $\mathcal{U}$.
Soit $a \in \mathcal{U}$ tel que $df(a) \in Isom(E; F)$.
Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a compris dans $\mathcal{U}$, et un voisinage $\mathcal{W}_b$ de $b := f(a)$ tel que
— *$f_{|\mathcal{V}_a}^{|\mathcal{W}_b}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme.*
— *$f(\mathcal{V}_a) = \mathcal{W}_b$.*

Démonstration. □

Rappelons la définition d'*une fonction (strictement) contractante.*

Définition 4.8. *Soient* (X, d_X)*,* (Y, d_Y) *deux espaces métriques.*

Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *une fonction.*

On dit que f *est* ***contractante*** *s'il existe* $k \in [0, 1]$ *tel que*

$$\forall x, y \in X, d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y)$$

Si $k \in [0, 1[$*, on dit que* f *est* ***strictement contractante****.*

Théorème 4.9 (du point fixe de Banach ou méthode des approximations successives)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique complet.*

Soit $f : (X, d) \to (X, d)$ *une fonction strictement contractante.*

Alors f *admet un unique point fixe* x^**. De plus, si* $a \in X$*, alors la suite de terme initiale* $x_0 = a$ *et* $x_{n+1} = f(x_n)$ *tend vers* x^**.*

Démonstration. □

Théorème 4.10. *Soient* E, F *deux espaces de Banach.*

Soit $\mathcal{U}$ *un ouvert de* E*.*

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *(ie continûment différentiable).*

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

— f *est un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* $\mathcal{U}$ *sur un ouvert de* F*.*

— f *est injective et* $\forall x \in \mathcal{U}$*,* $df(x) \in Isom(E; F)$

Démonstration. □

Donnons une application de ces deux théorèmes.

Exemple 4.1. *Il n'existe pas de sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$ *arbitrairement petit. C'est-à-dire qu'il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *ouvert de* 1_n *dans* $GL_n(\mathbb{R})$ *tel que si* G *est un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$ *avec* $G \subseteq \mathcal{V}$*, alors* $G = \{1_n\}$*.*

Chapitre 5

Théorème des fonctions implicites

5.1 Introduction et motivation

Problématique

Solution 1 : cas favorable

Solution 2 : cas défavorable

Interprétation heuristique

5.2 Enoncé et preuve du théorème des fonctions implicites

Théorème 5.1. *Soient E, F, G trois espaces de Banach.*

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $E \times F$, et $(a,b) \in \mathcal{U}$.

Soit $f : \mathcal{U} \to G$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (ie continûment différentiable) tel que

- $f(a,b) = 0$
- $\partial_2 f(a,b) \in Isom(F;G)$

Alors il existe

- *$\mathcal{V}_a$ voisinage ouvert de a dans E, $\mathcal{W}_b$ voisinage ouvert de b dans F tel que $\mathcal{V}_a \times \mathcal{W}_b \subseteq \mathcal{U}$.*
- *une application ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ (ie continûment différentiable) de $\mathcal{V}_a$ dans $\mathcal{W}_b$ tel que*

$$\left\{ \begin{array}{r} (x,y) \in \mathcal{V}_a \times \mathcal{W}_b \\ f(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \phi(x) = y \\ x \in \mathcal{V}_a \end{array} \right.$$

Démonstration. □

Remarque. *Le théorème nous dit que,* ***localement****, la ligne de niveau* 0*, c'est-à-dire les racines (locales), sont décrites par une fonction continûment différentiable.*

Chapitre 6

Différentielles d'ordre supérieur

6.1 Différentielle seconde

Notations et objectifs

Nous travaillerons pour l'instant avec E et F des espaces de Banach. $\mathcal{U}$ sera un ouvert de E.

On prendra aussi une fonction $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable, et sa différentielle sera notée $df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E; F) : x \to df(x)$.

On va s'intéresser à la différentielle de df.

6.1.1 Définitions et propriétés

Définition 6.1. *Soit $a \in \mathcal{U}$. On dit que f est* ***deux fois différentiable en a*** *s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_a \subseteq \mathcal{U}$ de a ouvert tel que :*

– f est différentiable sur $\mathcal{V}_a$.

– $df : \mathcal{V}_a \to \mathcal{L}(E; F)$ est diffentiable en a.

Dans ce cas, on note $d^2 f(a)$ la différentielle de df en a, et on dit que c'est ***la différentielle seconde de f en*** *a.*

Dans la définition, nous demandons que f soit différentiable sur un voisinage ouvert de a. Cela est motivé par le fait que nous souhaitons définir la différentielle de df, qui nécessite que df soit définie sur un ouvert.

Remarquons également que $d^2 f(a) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$.

Définition 6.2. *On dit que f* ***est deux fois différentiable*** *si f est deux fois différentiable en tout point de $\mathcal{U}$.*

On a alors :

- $f : \mathcal{U} \to F$.

- $df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E; F)$.

- $d^2 f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$.

Comme pour les fonctions dérivables, on définit les classes $\mathcal{C}^n$.

Définition 6.3. *On dit que $f \in \mathcal{C}^2$ si f est deux fois différentiable et que sa différentielle seconde d^2f est continue.*

La particularité de $d^2f(a)$ est d'appartenir à $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$ qui n'a pas l'air d'être un espace très facile à manipuler. Cependant, nous pouvons utiliser une isométrie vers un espace plus facile à manipuler : celui des fonctions bilinéaire de $E \times E$ dans F.

Proposition 6.4. *Soit E, F, G des espaces vectoriels normés.*
Alors $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G)) \simeq \mathcal{L}_2(E,F;G)$.

Démonstration. □

On se retrouve donc avec une identification de $d^2f(a)$ en tant qu'application bilinéaire de telle manière que pour tout $h \in E, k \in F$, on a $[d^2f(a)(h)](k) \simeq d^2f(a)(h,k)$.

Dans le premier membre de l'isométrie, on a $d^2f(a)(h) \in \mathcal{L}(E;F)$. Elle doit donc prendre une valeur dans E pour être évaluée dans F, et donc quand on applique en l'élément k, on obtient $[d^2f(a)(h)](k) \in F$.

L'autre membre prend un élément (h,k) de $E \times E$, attribue un élément de F.

Dans la suite, nous considérerons la différentielle seconde en a en tant qu'application bilinéaire continue, donnée à travers l'isométrie.

Donnons une propriété intéressante de la différentielle seconde.

Théorème 6.5 (symétrie de Schwarz [1]). *Si f est deux fois différentiable en a, alors $d^2f(a)(h,k) = d^2f(a)(k,h)$ pour tout $(h,k) \in E \times F$, c'est-à-dire que $d^2f(a)$ bilinéaire continue symétrique.*

Remarquons d'abord que ce théorème n'est pas si évident à voir si nous ne faisons pas l'identification à travers l'isométrie. En effet, la symétrie dirait que $[d^2f(a)(h)](k) = [d^2f(a)(k)](h)$

Démonstration. □

6.1.2 Dérivées partielles secondes

Soient $E_1, \cdots, E_d$ des espaces vectoriels normés, $E = \prod_{i=1}^{d} E_i$, et F un espace vectoriel normé.

Soient, pour chaque i, $\mathcal{U}_i$ un ouvert de E_i, et posons $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{d} \mathcal{U}_i$.

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application.

1. Karl Hermann Amandus Schwarz (25/01/1843 - 30/11/1921) mathématicien allemand. A ne pas confondre avec Laurant Schwarz**t**, mathématicien français mort en 2004

Proposition 6.6. *Supposons que f soit deux fois différentiable en un point $a \in \mathcal{U}$. Par définition, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a, compris dans $\mathcal{U}$ tel que f est différentiable sur $\mathcal{V}_a$. Nous savons que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{V}_a$.*

Alors, pour tout $1 \leq j \leq d$, les applications :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathcal{V}_a \to \mathcal{L}(E_j; F) \tag{6.1}$$

admettent des dérivées partielles selon E_i pour tout $1 \leq i \leq d$, en tout point $x \in \mathcal{V}_a$, et on note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) \tag{6.2}$$

où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathcal{L}(E_i; \mathcal{L}(E_j; F)) \simeq \mathcal{L}_2(E_i, E_j; F)$.

De plus, $d^2 f(a)$ peut être calculée grace à ces dernières avec la formule :

$$d^2 f(a)(h,k) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(h_i, k_j) \tag{6.3}$$

avec $h = (h_1, \cdots, h_d)$, et $k = (k_1, \cdots, k_d)$ dans E.

On appelle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

pour $1 \leq i, j \leq d$, **les dérivées partielles secondes de f en** a.

De plus, on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$$

pour $1 \leq i \leq d$.

Démonstration. □

Remarque. *Si f est deux fois différentiable au point a, on a f différentiable sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a contenu dans $\mathcal{U}$. Nous avons même que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}_a$ car df est différentiable sur $\mathcal{V}_a$ (et donc .continue en particulier). On a aussi que $df : \mathcal{V}_a \to \mathcal{L}(E; F)$ est différentiable en a.*

Donc, en particulier, df admet des dérivées partielles selon E_i pour chaque $1 \leq i \leq d$. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(df)(a) \in \mathcal{L}(E_i; \mathcal{L}(E; F)) \simeq \mathcal{L}_2(E_i, E; F)$$

On a en plus, pour $h = (h_1, \cdots, h_d) \in E$:

$$[d^2 f(a)](h) = \overbrace{[d(df)(a)]}^{\in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))}(h) = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{\overbrace{[\frac{\partial}{\partial x_i}(df)(a)]}^{\in \mathcal{L}(E_i;\mathcal{L}(E;F))}(h_i)}_{\in \mathcal{L}(E;F)}$$

ou encore, formulé autrement :

$$d^2 f(a)(h,k) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(df)(a)(h_i, k)$$

pour $h = (h_1, \cdots, h_d) \in E$ et $k \in E$.

Nous obtenons alors, pour le théorème de symétrie de Schwarz :

Théorème 6.7. *Si f est deux fois différentiable au point a, alors on a, pour tout $h, k \in E$, et pour tout $1 \leq i, j \leq n$:*

$$\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}^{\in \mathcal{L}_2(E_i,E_j;F)}(h_i, k_j) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)}_{\in \mathcal{L}_2(E_j,E_i;F)}(k_j, h_i) \tag{6.4}$$

Démonstration. □

Proposition 6.8. *Pour que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, il est nécessaire et suffisant que f admettent des dérivées partielles secondes en tout point de $\mathcal{U}$ et que les applications :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) : \mathcal{U} \to \mathcal{L}_2(E_i, E_j; F) \tag{6.5}$$

soient continues.

6.1.3 Dérivées directionnelles du second ordre

Soient E, F des espaces vectoriels normés, et $\mathcal{U}$ un ouvert de E.

Supposons que $f : \mathcal{U} \to F$ soit deux fois différentiable au point $a \in \mathcal{U}$. On sait donc qu'en particulier, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a tel que f est différentiable sur $\mathcal{V}_a$

On a alors vu au chapitre 2 que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions non nulles $k \in E$, et $\partial_k f(x) \in F$ pour tout $x \in \mathcal{V}_a$.

On a donc :

$$\partial_k f : \mathcal{V}_a \to F \tag{6.6}$$

Proposition 6.9. *Soit $k \in E$ non nul.*

La fonction $\partial_k f : \mathcal{V}_a \to F$ admet des dérivées directionnels dans toutes les directions non nulles $h \in E$, et on note :

$$\partial^2_{h,k} f(a) := \partial_h(\partial_k(f))(a) \tag{6.7}$$

De plus, $\partial^2_{h,k} f(a) = d^2 f(a)(h,k)$, et nous avons :

1. $\partial^2_{k_1+\lambda k_2,h} f(a) = \partial^2_{k_1,h} f(a) + \lambda \partial^2_{k_2,h} f(a)$
2. $\partial^2_{k,h_1+\lambda h_2} f(a) = \partial^2_{k,h_1} f(a) + \lambda \partial^2_{k,h_2} f(a)$
3. $\partial^2_{k,h} f(a) = \partial^2_{h,k} f(a)$

Démonstration. □

6.1.4 Exemple fondamental où $E = \mathbb{R}^n$

Posons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de R^n, et $E_i = \langle e_i \rangle \simeq \mathbb{R}$.

Prenons $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ où F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

On a alors l'identification

$$\mathcal{L}_2(E_i, E_j; F) \simeq F$$

et donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \in F$.

On obtient

$$d^2 f(a)(h,k) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \overbrace{h_i k_j}^{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}_{\in F}$$

pour tout $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a donc $d^2 f(a)(h,k) \in F$.

6.1.5 Exemple fondamental où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois différentiable en un point $a \in \mathcal{U}$.

Par les remarques précedentes, on a :

$$d^2 f(a)(h,k) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \overbrace{h_i k_j}^{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}_{\in \mathbb{R}}$$

pour tout $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a donc $d^2 f(a)(h,k) \in \mathbb{R}$.

Définition 6.10. *On appelle* ***matrice hessienne ou hessienne*** *de f au point a, notée $\mathcal{H}_f(a)$ la matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ suivante :*

$$\mathcal{H}_f(a) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

En particulier, $\mathcal{H}_f(a) \in S_n(\mathbb{R})$.

La matrice hessienne $\mathcal{H}_f(a)$ est la matrice représentative de la forme bilinéaire $d^2 f(a) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. En effet, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_f(a))_{ij} &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \\ &= d^2 f(a)(e_i, e_j) \end{aligned}$$

On obtient alors la formule, pour tout $h, k \in \mathbb{R}^n$:

Proposition 6.11. $d^2 f(a)(h,k) = H^t \mathcal{H}_f(a)\, K$ *où* $H = (h_1, \cdots, h_n)$, *et* $K = (k_1, \cdots, k_n)$ *(vus comme matrices).*

Démonstration. □

6.2 Différentielles d'ordre supérieur

6.2.1 Définitions et quelques propriétés

Nous allons généraliser la notion de différentielle, et particulièrement l'identification 6.4.

Proposition 6.12. *Soient $E_1, \cdots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés. Alors, pour tout $1 \leq p \leq n$, il existe une isométrie*

$$\phi : \mathcal{L}_n(E_1, \cdots, E_n; F) \to \mathcal{L}_p(E_1, \cdots, E_p; \mathcal{L}_{n-(p+1)}(E_{p+1}, \cdots, E_n; F))$$

Démonstration. □

Maintenant, passons à la notion de différentiabilité.

On va définir par récurrence la propriété pour une application $f : \mathcal{U} \to F$ d'être n-fois différentiable, et définir sa différentielle d'ordre n.

Définition 6.13. *Soit E un espace vectoriel normé. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $a \in \mathcal{U}$.*

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application différentiable. Soit $n \geq 2$.

On dit que f est ***n-fois différentiable en*** *a si f est $n-1$ fois différentiable sur un ouvert $\mathcal{V}_a$ compris dans $\mathcal{U}$, et si l'application*

$$d^{n-1}f : \mathcal{V}_a \to \mathcal{L}_{n-1}(E;F)$$

est différentiable en a. On note alors $d^n f(a) := d(d^{n-1}f)(a) \in \mathcal{L}_n(E;F)$ ***la différentielle d'ordre*** n ***de*** f ***en*** a*, qui est la différentielle de* $d^{n-1}f$ *au point* a*.*

Nous pouvons alors généraliser la notion *d'être de classe* $\mathcal{C}^n$.

Définition 6.14.
- *Si* f *est* n*-fois différentiable en tout point de* a *de* $\mathcal{U}$*, on dit que* f *est* n***-fois différentiable****.*
- *On dit que* f ***est de classe*** $\mathcal{C}^n$ *si* f *est* n*-fois différentiable et que l'application*

$$d^n f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}_n(E;F)$$

est continue.

Remarque. *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$*, alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^{n-1}$*.*

On définit alors une dernière classe d'applications, très utilisée (par exemple en géométrie différentielle, et en physique).

Définition 6.15. *On dit que* f ***est de classe*** $\mathcal{C}^\infty$ *ou* f ***est indéfiniment différentiable*** *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$*.*

On parle aussi ***d'application lisse (smooth map en anglais)****.*

Nous obtenons alors les mêmes résultats que lorsque nous avons défini la notion de différentielle et de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 6.16 (Linéarité)**.** *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés. Soient* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* E*, et* $a \in \mathcal{U}$*.*

Soient $f : \mathcal{U} \to F$ *et* $g : \mathcal{U} \to F$ *deux applications* n*-fois différentiables en* a *(resp. de classe* $\mathcal{C}^n$*). Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

Alors
- $f + g$ *est* n*-fois différentiable en* a *(resp. de classe* $\mathcal{C}^n$*) et* $d^n(f+g)(a) = d^n f(a) + d^n g(a)$ *(resp.* $d^n(f+g) = d^n f + d^n g$*).*
- λf *est* n*-fois différentiable en* a *(resp. de classe* $\mathcal{C}^n$*) et* $d^n(\lambda f)(a) = \lambda d^n f(a)$ *(resp* $d^n(\lambda f) = \lambda d^n f$*).*

Démonstration. □

Remarque. *En particulier, les applications* n*-fois différentiables en* a *(resp de classe* $\mathcal{C}^n$*) forment un sous espace vectoriel des fonctions de* $\mathcal{U}$ *dans* F*.*

$\mathcal{C}^n$ *est donc un espace vectoriel (normé).*

Continuons à généraliser les concepts de la section précédente. Passons au théorème de symétrie de Schwarz. Nous l'avions montré pour $n = 2$.

Cependant, avant de donner la généralisation du théorème de symétrie de Schwarz, il va nous falloir définir ce qu'est une application n-linéaire symétrique.

Définition 6.17. *Soit $n \in \mathbb{N}^{>0}$, on note S_n l'ensemble des applications bijectives de l'ensemble à n éléments sur lui-même, c'est-à-dire le groupe de permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$.*

Nous pouvons alors généraliser la notion de symétrie.

Définition 6.18 (Application symétrique)**.** *Soient $n \geq 1$ et $T : \overbrace{X \times \cdots \times X}^{n \text{ fois}} \to Y$ une application où X et Y sont des ensembles quelconques.*

*On dit que T est **symétrique** si pour tout $\sigma \in S_n$, pour tout $x_1, \cdots, x_n \in X$*

$$T(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = T(x_1, \cdots, x_n)$$

La définition d'application symétrique est simple à décrire : toute permutation des variables ne change rien à la valeur de sortie de l'application.

Remarque. *On note parfois $T_\sigma(x_1, \cdots, x_n) = T(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$. On construit alors l'application*

$$T_\sigma : X \times \cdots \times X \to Y : (x_1, \cdots, x_n) \to T(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

Dans notre cas, nous allons nous consacrer aux cas où $X = E$ et $Y = F$ où E et F sont des espaces vectoriels normés, et où T est une application n-linéaire continue.

Donnons d'abord un moyen de construire des fonctions symétriques.

Proposition 6.19. *Soit T une application n-linéaire de E^n dans F où E et F sont des espaces vectoriels normés.*

Alors l'application

$$\tilde{T} : E^n \to F : (x_1, \cdots, x_n) \to \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma(x_1, \cdots, x_n)$$

est symétrique.

Démonstration. □

Lemme 6.20. *Soient E et F des espaces vectoriels normés.*

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $a \in \mathcal{U}$.

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application différentiable en a.

*Soit G un sous-espace vectoriel **fermé** de F tel que $f(\mathcal{U}) \subseteq G$.*

Alors $\mathrm{Im}(df(a)) \subseteq G$, c'est-à-dire que nous avons $df(a) \in \mathcal{L}(E; G)$.

Démonstration. □

Lemme 6.21. *Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $1 \leq p \leq n-1$.*

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ est n-fois différentiable en a.

Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a dans E avec $\mathcal{V}_a \subseteq \mathcal{U}$ tel que f soit $(n-p)$-fois différentiable sur $\mathcal{V}_a$ et tel que $d^{n-p}f : \mathcal{V}_a \to \mathcal{L}_{n-p}(E; F)$ soit p-fois différentiable en a. On a alors $d^p(d^{n-p}f)(a) = d^n f(a)$

Démonstration. □

Théorème 6.22 (de symétrie de Schwarz généralisé). *Soient E et F des espaces vectoriels normés. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, $a \in \mathcal{U}$ et $n \geq 2$.*

Alors $d^n f(a) \in \mathcal{L}_n(E;F)$ est symétrique, c'est-à-dire pour tout $\sigma \in S_n$, pour tout $h = (h_1, \cdots, h_n) \in E^n$

$$d^n f(a)(h_{\sigma(1)}, \cdots, h_{\sigma(n)}) = d^n f(a)(h_1, \cdots, h_n)$$

Démonstration. □

On peut alors généraliser la notion de difféomorphisme.

Définition 6.23. *Soient E, F des espaces vectoriels normés, et $\mathcal{U}$ un ouvert de E.*

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application.

*On dit que f est **un $\mathcal{C}^n$ difféomorphisme** si f est bijective, de classe $\mathcal{C}^n$, et son application réciproque f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.*

6.2.2 Règles de calcul et résultats généralisés

Dans cette partie, nous allons étudier les propriétés de différentiabilité de certains opérateurs, comme les opérateurs linéaires.

Applications linéaires continues

Prenons $T \in \mathcal{L}(E;F)$ où E et F sont des espaces vectoriels normés. On a vu que T est différentiable et que $\forall x \in E$, $dT(x) = T$, c'est-à-dire que la fonction différentielle qui a un $x \in E$, associée la différentielle de T en x, est constante.

On a alors que la différentielle seconde de T est constante. En particulier, $T \in \mathcal{C}^\infty(E,F)$, et $d^n T = 0$ pour $n \geq 2$.

Applications bilinéaires

Soient E, F, G des espaces vectoriels normés. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F; G)$.

On sait que T est de classe $\mathcal{C}^1$, de plus :

$$\begin{aligned} dT : &E \times F \to \mathcal{L}(E,F;G) \\ &(x,y) \to dT(x,y) \end{aligned}$$

où on a :

$$\begin{aligned} dT(x,y) : &E \times F \to G \\ &(a,b) \to T(a,y) + T(x,b) \end{aligned}$$

et dT est linéaire et continue.

On a donc dT qui est différentiable, et sa différentielle est constante. Donc d^2T est aussi différentiable, et d^3T est nulle.

Nous avons donc $d^nT = 0$ pour $n \geq 3$. D'où $T \in \mathcal{C}^\infty(E \times F, G)$.

Applications k-linéaires

Nous pouvons alors généraliser aux applications k-linéaires.

Proposition 6.24. *Soient $E_1, \cdots, E_k, F$ des espaces vectoriels normés.*
Soit $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_k; F)$ une application k-linéaire.
Alors T est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $d^n T = 0$ pour tout $n \geq k+1$.

Démonstration. □

Règle de Leibniz

Proposition 6.25. *Soient E, F_1, F_2, G des espaces vectoriels normés.*
Soit $\mathcal{U} \subseteq E$ un ouvert de E.
Soient $f : \mathcal{U} \to F_1$, et $g : \mathcal{U} \to F_2$ des applications n-fois différentiables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$)
Soit $b \in \mathcal{L}_2(F_1, F_2; G)$. Alors l'application :

$$\begin{aligned} W : \mathcal{U} &\to G \\ x &\to b(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

est n-fois différentiables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$).

Démonstration. □

Règle de différentiabilité en chaîne

Nous avons vu la chain-rule (2.7) qui nous dit que la composition de deux fonctions différentiables est encore différentiable.

Nous allons généraliser ce théorème à des applications n-fois différentiables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$).

Proposition 6.26. *Soient E, F, G des espaces vectoriels normés.*
Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $\mathcal{V}$ un ouvert de F.
Soient $f : \mathcal{U} \to F$, et $g : \mathcal{V} \to G$ tel que $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$ et tel que f et g soient n-fois différentiables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$).
Alors $g \circ f : \mathcal{U} \to G$ est n-fois différentiable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$).

Démonstration. □

Différentielle composante par composante

Soient $E, F_1, \cdots, F_k$ des espaces vectoriels normés.

Proposition 6.27. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E. Soit $f : \mathcal{U} \to \displaystyle\prod_{l=1}^{k} F_l$ une application. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

— *Les applications composantes sont n-fois différentiables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$).*
— *f est n-fois différentiable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$).*
De plus, $d^n f_l(x) = p_{F_l} \circ d^n f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{U}$ et pour tout $1 \leq l \leq k$.

Démonstration. □

Applications inverses

Soient E et F des espaces de Banach.
Nous avons construit l'application :

$$\begin{aligned} \phi : Isom(E;F) \rightarrow & \quad Isom(F,E) \\ u \rightarrow & \quad\quad u^{-1} \end{aligned}$$

et avons montré qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Nous allons généraliser ce résultat.

Proposition 6.28. *L'application inverse ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Démonstration. □

Proposition 6.29. *Soient E, F des espaces de Banach. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $\mathcal{V}$ un ouvert de F.*
Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarquons que pour $n = 1$, on n'a pas toujours que $f^{-1} \in \mathcal{C}^1$. On a $f^{-1} \in \mathcal{C}^1$ ssi $df(x) \in Isom(E;F)$ pour tout $x \in \mathcal{U}$.

Démonstration. □

Théorème d'inversion locale généralisé

Il en résulte comme corollaire un théorème qui généralise le théorème d'inversion local (4.7).

Théorème 6.30. *Soient E, F des espaces de Banach. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.*
Si $df(a) \in Isom(E;F)$ pour un $a \in \mathcal{U}$, alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{W}_{f(a)}$ de $f(a)$ dans F, et $\mathcal{V}_a \subseteq \mathcal{U}$ tel que :
— *$f(\mathcal{V}_a) = \mathcal{W}_{f(a)}$*
— *$f_{\mathcal{V}_a}^{\mathcal{W}_{f(a)}} : \mathcal{V}_a \rightarrow \mathcal{W}_{f(a)}$ est un $\mathcal{C}^n$ difféomorphisme.*

Démonstration. □

Théorème des fonctions implicites généralisé

Théorème 6.31. *Soient E, F, G des espaces de Banach. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $E \times F$. Soit $(a,b) \in \mathcal{U}$.*

Soit $f : \mathcal{U} \to G$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ tel que :

— $f(a,b) = 0$

— $\partial_2 f(a,b) \in Isom(F;G)$

Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a dans E et $\mathcal{W}$ voisinage ouvert de b dans F tel que $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ et il existe une fonction $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ de classe $\mathcal{C}^n$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{r} (x,y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \\ f(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \phi(x) = y \\ x \in \mathcal{V} \end{array} \right.$$

Démonstration. □

6.2.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soient $E_1, \cdots, E_d$ et F des espaces vectoriels normés.

Soit $E = \prod_{i=1}^{d}$.

Soient $\mathcal{U}_i$ un ouvert de E_i et $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{d} \mathcal{U}_i$ un ouvert de E.

Alors, on définit par récurrence :

Définition 6.32. *Soit $a \in \mathcal{U}$. Soit $n \geq 2$. Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application n-fois différentiable en a.*

On sait qu'il existe $\mathcal{V}_a \subseteq \mathcal{U}$ tel que f soit $n-1$ fois différentiable sur $\mathcal{V}_a$.

Alors, pour tout $2 \leq l \leq n$ et pour tout $1 \leq j_l \leq d$, les applications

$$\frac{\partial f^{n-1}}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_3} \cdots \partial x_{j_n}} : \mathcal{V}_a \to \mathcal{L}_{n-1}(E_{j_2}, E_{j_3}, \cdots, E_{j_n}; F)$$

admettent une dérivée partielle suivant E_{j_1} ($1 \leq j_1 \leq n$) au point a. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_3} \cdots \partial x_{j_n}}\right)(a) \in \underbrace{\mathcal{L}(E_{j_1}; \mathcal{L}_{n-1}(E_{j_2}, E_{j_3}, \cdots, E_{j_n}; F))}_{\simeq \mathcal{L}_n(E_{j_1}, E_{j_2}, \cdots, E_{j_n}; F)}$$

On note alors cette dérivée partielle

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3} \cdots \partial x_{j_n}}(a)$$

et on l'appelle ***la dérivée partielle d'ordre n de f en a suivant*** *$E_{j_1}, \cdots, E_{j_n}$.*

Proposition 6.33. *Posons $S = \{j : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, d\}\}$.*

On a

$$d^n f(a)(h_1, \cdots, h_n) = \sum_{j \in S} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1}, \cdots, \partial x_{j_n}}(a)(h_{j_1}, \ldots, h_{j_n})$$

Démonstration. □

Dans ce cas, le théorème de Schwarz nous dit

Théorème 6.34. *Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application n-fois différentiable en un point $a \in \mathcal{U}$.*

Alors, pour tout $\sigma \in S_n$ et pour tout $j : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, d\}$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{j_{\sigma(n)}}}(a)(x_{j_{\sigma(1)}}, \cdots, x_{j_{\sigma(n)}}) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}}(a)(x_{j_1}, \cdots, x_{j_n})$$

En particulier, pour tout $1 \leq j \leq d$, l'application

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_j^n}(a) \in \mathcal{L}_n(E_j; F)$$

est symétrique.

Démonstration. □

Proposition 6.35 (Condition nécessaire et suffisante de classe $\mathcal{C}^n$)**.** *Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application.*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- *f est de classe $\mathcal{C}^n$*
- *f admet des dérivées partielles d'ordre n en tout point x de $\mathcal{U}$ et pour tout $j : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, d\}$*

  $$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}}(x)$$

  et les applications

  $$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}} : \mathcal{U} \to \mathcal{L}_n(E_{j_1}, \cdots, E_{j_n}; F)$$

  sont continues.

Démonstration. □

6.2.4 Exemple fondamental $E = \mathbb{R}^d$

Prenons le cas où, pour tout $1 \leq i \leq d$, $E_i = \mathbb{R}$.
On fait l'identification

$$\mathcal{L}_n(\overbrace{E_{j_1}}^{=\mathbb{R}}, \cdots, \overbrace{E_{j_n}}^{=\mathbb{R}}; F) \simeq F$$

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application n-fois différentiable en un point a de $\mathcal{U}$.
On regroupe alors les dérivées partielles par rapport à la même variable. Si $j \in S$, on a

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}^{r_1} \cdots \partial x_{i_m}^{r_m}}(a)$$

avec $m \leq n$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq d$, $r_k = \{l \,|\, 1 \leq l \leq n,\, i_k = j_k\}$ et où on note

$$\partial x_{i_k}^{r_k} = \overbrace{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_k}}^{r_k \text{ fois}}$$

6.2.5 Notations multi-indicielles

Nous allons donner des notations qui facilitent les notations pour les dérivées partielles d'ordre supérieur. On utilisera des objets appelés *multi-indices.*

Définitions

Définition 6.36 (Multi-indice)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$. – On dit que α est* ***un multi-indice d'ordre*** *d.*

– ***La longueur de*** *α, notée $|\alpha|$, est définie comme la somme des α_i, ie $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$.*

Nous allons définir quelques opérations sur ces objets.

Définition 6.37 (Somme de multi-indice)**.** *Soient α et β deux multi-indices d'ordre d. On définit* ***la somme de*** *α* ***et*** *β, noté $\alpha+\beta$ par $\alpha+\beta = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i+\beta_i$.*

Nous allons également définir un ordre partiel sur les multi-indices.

Définition 6.38 (Ordre partiel sur les multi-indices)**.** *Soient α et β deux multi-indices d'ordre d. On dit que α* ***est plus petit que*** *β, noté $\alpha \leq \beta$ si pour tout i entre 1 et d, $\alpha_i \leq \beta_i$.*

Cela implique que $|\alpha| = |\beta|$.

Définition 6.39. *Soit α un multi-indice d'ordre d. On définit* ***le factoriel de*** *α, noté $\alpha!$, par $\alpha! = \prod_{i=1}^{d} \alpha_i!$.*

Définition 6.40. *Soient α et β deux multi-indices d'ordre d tel que $\alpha \leq \beta$. On définit* ***le coefficient binomial*** *$\binom{\beta}{\alpha}$ par*

$$\binom{\beta}{\alpha} = \frac{\beta!}{\alpha!(\beta - \alpha)!}$$

Applications et propriétés

Définition 6.41. *Soit $h \in \mathbb{R}^d$, et α un multi-indice d'ordre d. On définit* ***la puissance*** *α* ***du vecteur*** *h, noté h^α, par*

$$h^\alpha = \prod_{i=1}^{d} h_i^{\alpha_i}$$

La principale motivation d'utiliser les multi-indices est de s'en servir pour écrire les dérivées partielles.

Proposition 6.42 (Formule du binôme)**.** *Soient α un multi-indice d'ordre d, et $x, y \in \mathbb{R}^d$.*

Alors $(x+y)^\alpha = \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \in \mathbb{N}^d}} \binom{\alpha}{\beta} x^\alpha y^{\beta - \alpha}$.

Démonstration. □

Proposition 6.43. *Soit $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, et soit $k \in \mathbb{N}$.*

On a :

$$(\sum_{i=1}^{d} x^i) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$$

Démonstration. □

Formule de Leibniz

Nous pouvons alors donner une notation plus compacte pour la règle de Leibniz.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient F_1, F_2 et G des espaces vectoriels normés. Soient $f : \mathcal{U} \to F_1$ et $g : \mathcal{U} \to F_2$ deux applications n-fois différentiables.

Soit $b \in \mathcal{L}(F_1, F_2; G)$. On a vu que :

$$\begin{array}{rrl} b(f,g): & \mathcal{U} \to & G \\ & x \to & b(f(x),g(x)) \end{array}$$

est n-fois différentiable.

Proposition 6.44. *Soit α un multi-indice d'ordre d. tel que $\alpha \leq n$ On a :*

$$\partial^\alpha b(f,g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} b(\partial^\beta f, \partial^{\alpha-\beta} g)$$

Démonstration. □

Dérivées partielles

On note

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1}^{r_1} \cdots \partial x_{j_n}^{r_n}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1}^{\alpha_1} \cdots \partial x_{j_n}^{\alpha_n}}(a)$$

où $\alpha_{i_k} = r_k$ pour $1 \leq k \leq n$ et $\alpha_l = 0$ si $l \neq i_k$.

Remarque. *Par convention, $\partial_{x_j}^{\alpha_j}$ si $\alpha_j = 0$ signifie qu'on ne dérive pas par rapport à x_j.*

On note alors

$$\partial^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(a)$$

la dérivée partielle de f en a suivant α, l'ordre de dérivation étant $n = |\alpha|$.

Remarque. — *On utilise parfois $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$, ou $D^\alpha f(a)$.*

— *Pour tout α, $\beta \in \mathbb{N}^d$, on a*

$$\partial^{\alpha+\beta} f(a) = \partial^\alpha \partial^\beta f(a) = \partial^\beta \partial^\alpha f(a)$$

Intégrations par parties

Proposition 6.45. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

Soient u et v deux fonctions lisses à support compact (ie $u, v \in \mathcal{C}_C^\infty$).

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (-1)^{|\alpha|} u(x) \partial^\alpha v(x) dx$$

Démonstration. □

Dérivées partielles d'un monôme

Proposition 6.46. *Prenons un monome $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d : x \to x^\beta$ où β est un multi-indice d'ordre d.*

Alors

$$\partial^\alpha x^\beta = \begin{cases} \dfrac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} x^{\beta-\alpha}, & \text{si } \alpha \leq \beta \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. □

Chapitre 7

Formules de Taylor

Motivation

Dans ce chapitre, nous allons donner des méthodes permettant d'approximer des fonctions différentiables sur leur domaine de définition. Ces méthodes, ou formules sont appelées *formules de Taylor*.

Il y aura principalement deux types de formules de Taylor : globales et locales. Ces formules permettent de donner une approximation de la fonction, et permet également de calculer l'erreur que nous faisons sur cette approximation. Les deux types se distinguent sur la précision de l'erreur qu'elles donnent.

Les formules de Taylor globales permettent de donner explicitement l'erreur engendrée, tandis que les formules de Taylor locales nous donnent l'erreur en $o(.)$, c'est-à-dire par majoration de l'erreur.

7.1 Formules de Taylor de type global

7.1.1 Formules de Taylor avec reste intégral

Commençons d'abord par un lemme sur les fonctions réelles dérivables à valeur dans un espace de Banach :

Lemme 7.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach et $g : I \to F$ une fonction $n+1$ fois dérivable.*

Alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[g(t) + \sum_{p=1}^{n} \frac{(1-t)^p}{p!} g^{(p)}(t)] = \frac{(1-t)^n}{t!} g^{(n+1)}(t)$$

Démonstration. □

Remarque. *L'hypothèse ne demande pas que la dérivée $n+1$ ème soit continue !*

Rappelons que l'intégrale de Riemann telle que construite pour une fonction d'un intervalle I réel à valeurs dans $\mathbb{R}$ peut-être construite de la même manière pour une fonction d'un intervalle I réel à valeur dans *un espace de Banach*. La construction est la même, et les résultats obtenus dans le cas réel, peuvent aussi être démontrés dans le cas d'un espace de Banach quelconque.

Maintenant nous allons être un peu plus exigeant sur les hypothèses de 7.1, et en donne une version intégrale. Nous allons supposer en plus que l'intervalle comprend $[0,1]$, et que la $n+1$ dérivée de f est *continue*.

Nous obtenons alors une version intégrale du lemme 7.1 :

Corollaire 7.2. *Supposons que* $[0,1] \subseteq I$, *et* g *de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$. *Alors on obtient :*

$$g(1) - g(0) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} g^{(p)}(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt$$

Démonstration. □

Posons une notation qui simplifiera l'écriture pour les prochains théorèmes.

Notation. *Soit* E *un espace vectoriel normé. Soient* $h \in E$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

On note $h^n = \underbrace{(h, \cdots, h)}_{n\text{-fois}} \in E^n$. *On note aussi parfois* $h^{[n]}$ *ou* $(h)^n$.

Revenons maintenant au cas où l'espace de départ est un espace de Banach.

Nous en venons alors à la formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème 7.3 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* E. *Soit* $f : \mathcal{U} \to F$ *tel que* $f \in \mathcal{C}^{n+1}$.

Soit $(x,h) \in (\mathcal{U} \times E)$ *tel que* $S(x, x+h) \subseteq \mathcal{U}$.

Alors :

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + & \overbrace{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \overbrace{d^p f(x)}^{\in \mathcal{L}(E^p;F)} \overbrace{(h^p)}^{\in E^p}}^{\textit{Approximation}} \\ & + \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \underbrace{[d^{n+1} f(x+th)]}_{\in \mathcal{L}(E^{n+1};F)} \underbrace{(h^{n+1})}_{\in E^{n+1}} dt}_{\textit{Erreur}} \end{aligned}$$

Remarquons que $x + th \in \mathcal{U}$ *par hypothèse sur* $\mathcal{U}$, *donc c'est bien défini. De plus, nous demandons que la fonction soit de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$, *c'est-à-dire que* $d^{n+1}(f(a+th))$ *soit continue.*

Démonstration. $\square$

Le théorème 7.3 nous donne une valeur précise de l'erreur que nous faisons sur l'approximation (bien qu'elle soit donnée à travers une intégrale, qui n'est pas toujours explicitement calculable).

7.1.2 Formules de Taylor-Lagrange

Donnons un autre corollaire du lemme 7.1.

Corollaire 7.4. *Supposons que g soit $n+1$ fois dérivable. On suppose également qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall t \in [0,1]$, $\left\|g^{(n+1)}(t)\right\|_F \leq M$*

Alors :

$$\left\|g(1) - g(0) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} g^{(p)}(0)\right\|_F \leq \frac{M}{(n+1)!}$$

Démonstration. $\square$

On en vient alors à la formule de Taylor-Lagrange :

Théorème 7.5 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E.*

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ $(n+1)$-fois différentiable. Soit $(x,h) \in (\mathcal{U} \times E)$ tel que $S(x, x+h) \subseteq \mathcal{U}$.

On suppose que :

$$\forall y \in S(x, x+h), \left\|d^{n+1} f(y)\right\|_{\mathcal{L}(E^{n+1};F)} \leq M$$

avec $M \geq 0$.

Alors :

$$\left\|f(x+h) - f(x) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} [d^p f(x)](h^p)\right\|_F \leq \frac{M}{(n+1)!} \|h\|_E^{n+1}$$

Démonstration. $\square$

Exercice 7.1. *– Retrouver l'inégalité des accroissements finis en utilisant les formules de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 1 pour $f \in \mathcal{C}^1$.*

– Montrer la formule de Taylor-Lagrange pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale.

7.2 Formules de Taylor-Young

Nous aurons d'abord besoin d'un lemme.

Lemme 7.6. *Soit $p \geq 2$. Soit $L \in \mathcal{L}(E^p; F)$ tel que L est symétrique. Soit $g : E \to F : h \to L(h^p)$.*

Alors g est différentiable et $dg(h)(k) = p.L(\overbrace{h, \cdots, h}^{p-1}, k)$.

Démonstration. □

Théorème 7.7 (Formule de Taylor Young)**.** *Soient E et F des espaces vectoriels normés. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E. Soit $a \in E$.*

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ n-fois différentiable.

Alors :

$$f(a+h) = \overbrace{f(a) + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}[d^p f(a)](h^p)}^{Approximation} + \underbrace{o(\|h\|_E^n)}_{Erreur}$$

Démonstration. □

7.3 Formules de Taylor dans le cas fondamental $E = \mathbb{R}^d$ où $d \geq 2$

Nous allons tenter de donner une formule plus facile à utiliser dans le cas réel.

Théorème 7.8 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit F un espace de Banach.*

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Soient $a \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to F$ n-fois différentiable en a.

Alors on a :

$$f(a) + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} d^p f(a)(h^p) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq n}} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)$$

Démonstration. □

Dans le cas de la formule de Taylor-Young, on obtient une formule semblable.

Théorème 7.9 (Formule de Taylor-Young réelle)**.** *Sous les mêmes hypothèses que 7.8, on obtient*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\leq n}} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(a) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^d})$$

quand $h \to 0_{\mathbb{R}^d}$*.*

Démonstration. □

Donnons quelques exemples très utilisés.

Exemple 7.1. *Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^3$*. Soit* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to f(x, y, z)$*. Nous allons calculer la formule de Taylor-Young à l'ordre* 2 *de* f *en un point* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$*.*

Pour les multi-indices de longueur 2 *on a :*

— $\alpha = (2, 0, 0)$
— $\alpha = (0, 2, 0)$
— $\alpha = (0, 0, 2)$
— $\alpha = (1, 1, 0)$
— $\alpha = (1, 0, 1)$
— $\alpha = (0, 1, 1)$

Pour les multi-indices de longueur 1 *on a :*

— $\alpha = (1, 0, 0)$
— $\alpha = (0, 1, 0)$
— $\alpha = (0, 0, 1)$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k, c+l) = f(a, b, c) &+ h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + l\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \\ &+ \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, c) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c) + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a, b, c) \\ &+ hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a, b, c) + kl\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(a, b, c) \\ &+ hl\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(a, b, c) \\ &+ o(h^2 + k^2 + l^2) \end{aligned}$$

quand $(h, k, l) \to 0_{\mathbb{R}^3}$*.*

Exemple 7.2. *Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *Soit* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} : (x, y) \to f(x, y)$*. Nous allons calculer la formule de Taylor-Young à l'ordre* 3 *en un point* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*.*

La somme se base sur l'ensemble des multi-indice d'ordre 2 *(car nous sommes dans* $\mathbb{R}^2$*) de longueur inférieure à* 3*.*

Pour les multi-indices de longueur 3 *on a :*

— $\alpha = (3, 0)$
— $\alpha = (2, 1)$
— $\alpha = (1, 2)$
— $\alpha = (0, 3)$
Pour les multi-indices de longueur 2 *on a :*
— $\alpha = (2, 0)$
— $\alpha = (1, 1)$
— $\alpha = (0, 2)$
Pour les multi-indices de longueur 1 *on a :*
— $\alpha = (1, 0)$
— $\alpha = (0, 1)$
On a donc

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ &+ \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(a,b) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \\ &+ \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b) + \frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b) \\ &+ \frac{h^2 k}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b) + \frac{hk^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b) \\ &+ o(h^2 + k^2) \end{aligned}$$