Analyse mathématique

8 mars 2016

Table des matières

Introduction

Ce cours abordera les notions d'espace de Banach, ainsi que les théorèmes de Hahn-Banach. Nous introduirons également les notions d'espace séparable et d'espace de Baire.

Nous verrons un peu de théorie et des exemples sur les espaces duaux, et terminerons avec les théorèmes de Banach-Steinhaus. h

Chapitre 1

Espace de Banach

1.1 Rappels sur les espaces vectoriels normés

Définition 1.1 (Espace de Banach). *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* E *est* ***un espace de Banach*** *si* E *est complet pour la norme* $\|.\|$*, c'est-à-dire que toutes suites de cauchy convergent pour la norme* $\|.\|$*.*

Prenons $\mathbb{R}$ comme corps de base, alors tout espace vectoriel de dimension n est complet.

On peut généraliser cet exemple si on prend un corps de base complet, et n'importe quel espace vectoriel de dimension finie sur ce corps.

Théorème 1.1 (Riesz). *E est de dimension finie ssi la boule unité fermée est compacte.*

Démonstration. □

Proposition 1.2. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *E^* est de dimension finie.*
2. *E est de dimension finie.*

Démonstration. □

Théorème 1.3. *Soit E un espace de Banach, et F un sous espace vectoriel de E de dimension finie. Alors F est fermé.*

Démonstration. □

Remarque. *La demande que E soit complet est important car sinon c'est faux. En effet, tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.*

1.2 Définition, propriétés et exercices

Proposition 1.4. *Soit K un corps, et E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *K est complet.*
2. *E est un espace de Banach.*

Démonstration. □

Questions. *Existe-t-il un corps complet dont tout espace vectoriel sur ce corps est un espace de Banach ?*

De même, existe-t-il un corps qui n'est pas complet et qui n'admet aucun espace vectoriel complet.

Exercice 1.1. *Montrez que tout corps fini est complet. En déduire que tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps fini est de Banach. Qu'en est-il des espaces vectoriels de dimension infinie ?*

Exercice 1.2. *On sait que $\mathbb{R}$ est complet en tant que corps, et que $\mathbb{R}$ est peut-être vu comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.*

Proposition 1.5. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *E est un espace de Banach.*
2. *toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. □

Exemple 1.1. *c_{00} n'est pas complet.*

Chapitre 2

Espace dual

Chapitre 3

Espace séparable

Pour rappel, un ensemble D est **dense** dans E si pour tout $x_0 \in E$, D coupe tout voisinage de x_0.

3.1 Séparabilité dans un espace topologique

Définition 3.1. *Soit E un espace topologique. On dit que E est **séparable** s'il existe un sous-ensemble D de E tel que*

1. *D est dense dans E.*
2. *D est dénombrable.*

Proposition 3.1. *Soit $D \subseteq E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *D est dense dans E.*
2. *D coupe tout ouvert non vide de E.*

Démonstration. Reformulation de la définition en terme d'ouvert. En effet, un ouvert est un voisinage de tous ses points. □

La proposition suivante caractérise les topologies des espaces séparables. Elle nous dit que si un espace est séparable, alors il a au plus un nombre dénombrable d'ouverts disjoints.

Proposition 3.2. *Soit (X, τ) un espace topologique séparable et soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts 2 à 2 disjoints.*

Alors I est au plus dénombrable.

Démonstration. Soit D un sous-ensemble dénombrable de X et dense dans (X, τ). On sait que

$$\forall i \in I, D \cap O_i \neq \emptyset \tag{3.1}$$

car D est dense dans (X, τ) et O_i est un ouvert. Notons x_i l'élément qui se trouve dans $D \cap O_i$.

Construisons

$$f : I \to D : i \to x_i \tag{3.2}$$

Nous avons que f est injective. En effet, pour $i \neq j$, si $x_i = x_j$ avec $x_j \in O_j$ et $x_i \in O_i$, alors $x_j \in O_i$ et donc O_i et O_j ne sont pas disjoints.

Donc $Card(I) \leq Card(D)$. Donc I est au plus dénombrable car D est dénombrable. □

3.2 Séparabilité dans les espaces métriques

Donnons quelques équivalences plus faciles à utiliser quand nous sommes dans un espace métrique.

Proposition 3.3. *Soit (E, d_E) un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *pour tout $\epsilon > 0$, le recouvrement $(B(x, \epsilon))_{x \in E}$ admet un sous-recouvrement **dénombrable**.*
2. *(E, d_E) est séparable.*
3. *il existe une suite $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de (E, d_E), tel que tout ouvert de E s'écrit comme une union de O_n.*

Démonstration. □

Proposition 3.4. *Si (E, d_E) est séparable, alors toute partie de E est séparable pour la topologie induite.*

Démonstration. □

Remarque. *Cette proposition n'est pas vraie dans un espace simplement topologique.*

3.3 Séparabilité dans les espaces vectoriels normés

Comme nous l'avons fait pour les espaces métriques, nous allons donner des équivalences plus faciles à utiliser pour les espaces vectoriels normés.

Remarquons qu'un espace vectoriel normé est en particulier un espace métrique, donc les équivalences de la section précédente restent vraies.

Proposition 3.5. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $(E, \|.\|_E)$ *est séparable.*
2. $(B(E), \tau_{ind})$ *est séparable où* τ_{ind} *est la topologie induite sur* $B(E)$.
3. $(S(E), \tau_{ind})$ *est séparable où* τ_{ind} *est la topologie induite sur* $S(E)$.

Démonstration. □

Proposition 3.6. *L'ensemble des suites à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *qui convergent vers 0,noté* $c_0(\mathbb{R})$, *est séparable.*

Démonstration. □

Proposition 3.7. *L'ensemble des suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *tel que*

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \tag{3.3}$$

noté $l^1(\mathbb{R})$, *est séparable.*

Démonstration. □

Proposition 3.8. *L'ensemble des suites bornées à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *noté* $l^\infty(\mathbb{R})$, *n'est pas séparable.*

Démonstration. □

Questions. *On a vu à travers les exemples que* c_0, *et* l^1 *sont séparables, tandis que* l^∞ *non. On a la chaîne d'inclusion* $c_0 \subseteq l^1 \subseteq l^\infty$. *On pourrait se poser comme question si toute chaîne d'espace séparable est bornée par un ensemble non séparable, en d'autres termes est-ce que tout ensemble séparable est contenu dans un ensemble non séparable ? (En utilisant la topologie induite).*

Chapitre 4

Théorèmes de Hahn-Banach et applications

Les théorèmes de Hahn-Banach s'intéressent aux formes linéaires sur les espaces vectoriels normés sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à travers leurs formes linéaires, et aux hyperplans avec leurs formes géométriques.

Ceux-ci permettent de montrer l'existence de prolongement des formes linéaires définies au départ sur un sous-espace vectoriel.

Nous les montrerons d'abord sur $\mathbb{R}$, et après sur $\mathbb{C}$ (qui sera une généralisation simple).

4.1 Formes analytiques

Théorème 4.1 (Théorème 1 de Hahn-Banach — analytique)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et G un sous-espace vectoriel de E.*

Soit $f_G : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, et $p : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Supposons que

$$\forall x \in G, |f_G(x)| \leq p(x) \tag{4.1}$$

c'est-à-dire que f_G est majorée par p sur G.

Alors il existe une forme linéaire

$$f_E : E \to \mathbb{R} \tag{4.2}$$

tel que

1. $(f_E)_{|G} = f_G$
2. $\forall x \in E$, $|f_E(x)| \leq p(x)$.

La dernière condition insiste bien sur le fait que f_E prolonge f_G et que f_E reste majorée par p, mais cette fois-ci, sur tout E, et pas seulement sur le sous espace vectoriel G. Remarquons en plus que E n'est pas nécessairement normé. En effet, nous aurons un corollaire portant sur les espaces vectoriels normés.

De plus, f n'est pas nécessairement continue.

Démonstration. □

Corollaire 4.2. *Si de plus E est **normé**, on a $||f_E|| = ||f_G||$.*

Démonstration. □

Nous pouvons nous demander si la condition de majoration par une fonction convexe est nécessaire. En réalité, si on suppose que f est linéaire et continue, nous pouvons contruire $p(x)$, et nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 4.3 (Théorème 2 de Hahn Banach — analytique)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **normé**, et G un sous-espace vectoriel de E. Soit $f_G : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire **continue**.*

*Alors il existe une forme linéaire **continue** $f_E : E \to \mathbb{R}$ tel que $(f_E)_{|G} = f_G$.*

Démonstration. On va construire p qui majore f. On pose

$$p : E \to \mathbb{R} : x \to \|f\| \, \|x\|_E \tag{4.3}$$

Comme f est linéaire continue sur G, on a bien

$$|f(x)| \leq ||f|| \, ||x||_E = p(x) \tag{4.4}$$

Donc on peut étendre f en une forme linéaire f_E sur tout E par 4.1, et tel que

$$|f_E(x)| \leq p(x) = \|f_G\| \, \|x\|_E = \|f_E\| \, \|x\|_E \tag{4.5}$$

c'est-à-dire f_E continue. □

4.2 Applications des formes analytiques

Dans cette section, nous allons démontrer quelques corollaires des théorèmes de Hahn-Banach analytiques.

Corollaire 4.4. *Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé et x_0 un élément non-nul de E.*

Alors, il existe $x^* \in E^*$ tel que

1. $x^*(x_0) = 1$
2. $\|x^*\|_{E^*} = \frac{1}{\|x_0\|_E}$

Démonstration. Posons $G = \langle x_0 \rangle$, et

$$\tilde{x}^* : G \to \mathbb{R} : \lambda x_0 \to \lambda \tag{4.6}$$

On a $\tilde{x}^*$ qui est une forme linéaire continue. Il existe donc un prolongement $x^* \in E^*$ de $\tilde{x}^*$.

De plus, on a bien que $x^*(x_0) = 1$.

Enfin,

$$\begin{aligned} \|x^*\|_{E^*} &= \|\tilde{x}^*\|_{G^*} && (4.7)\\ &= \sup_{\|\lambda x_0\|_E \leq 1} |\lambda| && (4.8)\\ &= \sup_{|\lambda|\|x_0\|_E \leq 1} |\lambda| && (4.9)\\ &= \sup_{|\lambda| \leq \frac{1}{\|x_0\|_E}} |\lambda| && (4.10)\\ &= \frac{1}{\|x_0\|_E} && (4.11) \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.5. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et x_0 un élément non-nul de E.*

Alors, il existe $x^* \in E^*$ tel que

1. $x^*(x_0) = \|x_0\|_E$
2. $\|x^*\| = \|x_0\|_E$

Démonstration. Même que le corollaire précédent où x^* est la norme restreinte à $\langle x_0 \rangle$. □

Corollaire 4.6. *Soit $(E, \|.\|_E)$. Alors E^* sépare les points de E, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in E$, il existe $x^* \in E^*$ tel que $x^*(x) \neq x^*(y)$.*

Démonstration. □

Corollaire 4.7. *Soit $(E, \|.\|_E)$. Alors pour tout $x \in E$,*

$$\|x\|_E = \max_{x^* \in \mathcal{B}_{E^*}} |x^*(x)| \tag{4.12}$$

Démonstration. $\square$

Corollaire 4.8. *Soit* $(E, \|.\|_E)$*, et* H *un sous-espace vectoriel fermé. Soit* $x_0 \in E \backslash H$*.*

Alors il existe $x^* \in E^*$ *tel que :*

1. $\|x^*\| = 1$.
2. $x^*(x_0) = d(x_0, H)$
3. $H \subseteq ker(x^*)$

Démonstration. $\square$

4.3 Formes géométriques

Donnons d'abord quelques définitions. Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel.

Définition 4.1 (Jauge)**.** *Soit* $C \subseteq E$ *tel que* $0 \in C$*.*

On définit ***la jauge de*** C *comme la fonction*

$$p : E \to \mathbb{R}^+ : x \to \inf \left\{ \alpha > 0 \,|\, \alpha^{-1} x \in C \right\} \tag{4.13}$$

Exercice 4.1. $p(0) = 0$ *quelque soit* C*.*

Regardons quels résultats nous avons quand C est lié à la topologie de E.

Proposition 4.9. *Si* C *est ouvert, alors il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in E$

$$p(x) \leq M \|x\|_E \tag{4.14}$$

Démonstration. Comme C est ouvert et que $0 \in C$ par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subseteq C$.

Prenons $x \in E$ non nul (le cas $x = 0$ étant trivial). Alors, en posant

$$\alpha^{-1} = \frac{r}{2} \frac{1}{||x||} \tag{4.15}$$

on a $\alpha^{-1} x \in B(0, r)$. Donc $\alpha^{-1} x \in C$.

Par conséquent,

$$p(x) \leq \alpha = \frac{2}{r} ||x|| \tag{4.16}$$

$\square$

Proposition 4.10. *Si C est ouvert et convexe, alors*

$$C = \{x \in E \,|\, p(x) < 1\} \tag{4.17}$$

Démonstration. □

Définition 4.2 (Hyperplan)**.** *Soit H un sous-espace vectoriel de E.*

On dit que H est ***un hyperplan (vectoriel)*** *s'il est de codimension 1, c'est-à-dire que $E = H \oplus \mathbb{K}e$ où $e \in E$ et e non nul.*

Proposition 4.11. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *H est un hyperplan.*
2. *il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ non nulle tel que $H = \ker(f)$.*

En d'autres termes, tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Démonstration. ($1 \Rightarrow 2$) Par hypothèse, on sait qu'il existe $e \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathbb{K}e$.

Posons

$$f : \overbrace{H \oplus \mathbb{K}e}^{E} \to \mathbb{K} : h + \lambda e \to \lambda \tag{4.18}$$

f est une forme linéaire continue et $H = \ker(f)$.

($2 \Rightarrow 1$) Soit $x \in E$, et $e \notin \ker(f)$.

On peut alors écrire x tel que $x = (x - \lambda e) + \lambda e$.

Il nous faut λ tel que $x - \lambda e \in \ker(f)$.

On a $f(x - \lambda e) = f(x) - \lambda f(e)$. Si

$$\lambda = \frac{f(x)}{f(e)} \tag{4.19}$$

on a $x - \lambda e \in \ker(f)$.

On a donc bien que $\ker(f)$ est un hyperplan vectoriel car $E = \ker(f) \oplus \mathbb{K}e$. □

Définition 4.3 (Hyperplan affine)**.** *Soit $f : E \to \mathbb{K}_0$, et $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Soit $H = \{x \in E \,|\, f(x) = \alpha\}$.

H est appelé ***hyperplan (vectoriel) affine****.*

Définition 4.4. *Soient A, $B \subseteq E$ deux ensembles convexes et disjoints.*

Soit $H = \{x \in E \,|\, f(x) = \alpha\}$ un hyperplan affine.

On dit que H ***sépare*** *A* ***et*** *B* ***au sens large*** *si*

1. *pour tout $x \in A$, $f(x) \leq \alpha$*

2. pour tout $x \in B$, $f(x) \geq \alpha$

et on dit que H ***sépare** A **et** B **au sens strict*** *s'il existe $\epsilon > 0$ tel que*

1. pour tout $x \in A$, $f(x) \leq \alpha - \epsilon$

2. pour tout $x \in B$, $f(x) \geq \alpha + \epsilon$.

Nous en venons aux théorèmes de Hahn-Banach sous leurs formes géométriques.

Théorème 4.12 (Théorème de Hahn-Banach 1 — géométrique)**.** *Soient A, $B \subseteq E$ deux ensembles convexes et disjoints tel que A est ouvert.*

Alors il existe un hyperplan vectoriel fermé qui sépare A et B au sens large.

Démonstration. □

Théorème 4.13 (Théorème de Hahn-Banach 2 — géométrique)**.** *Soit A, $B \subseteq E$ convexes et disjoints tel que A est fermé et B compact.*

Alors il existe un hyperplan vectoriel fermé qui sépare A et B au sens strict.

Démonstration. □

4.4 Applications géométriques

Corollaire 4.14. *Soient deux convexes A et B tel que $A - B$ est dense dans E.*

Alors A et B ne peuvent être séparés par un hyperplan fermé.

Démonstration. Supposons qu'il existe un hyperplan fermé qui les sépare, c'est-à-dire qu'il existe $x^* \in E^*$ non nulle et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall a \in A,\, x^*(a) \leq \alpha \tag{4.20}$$

et

$$\forall b \in B,\, x^*(b) \geq \alpha \tag{4.21}$$

Soit $x \in A - B$ tel que $x^*(x) \neq 0$. Sans perte de généralité, $x^*(x) > 0$ [1].

Comme $A - B$ est dense dans E, il existe une suite $(a_n - b_n) \to x$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^*(a_n) \leq \alpha$ et $x^*(b_n) \geq \alpha$, donc $x^*(a_n - b_n) = x^*(a_n) - x^*(b_n) \leq 0$.

Or, comme x^* est continue, $x^*(a_n - b_n) \to x^*(x) \leq 0$. Contradiction avec l'hypothèse que $x^*(x) > 0$. □

1. Si $x^*(x) < 0$, faire le même raisonnement avec $-x$. On aura bien $x^*(-x) = -x^*(x) > 0$.

Corollaire 4.15. *Tout hyperplan vectoriel est soit fermé, soit dense dans E.*

Démonstration. □

Chapitre 5

Théorème de Baire

Énonçons d'abord une propriété, qu'on appelle propriété de Baire.

Propriété (Propriété de Baire ouverts)**.** *Pour toutes suites dénombrables* $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'ouverts denses dans E, on a* $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} O_n$ *qui est dense dans E.*

On a alors une proposition équivalente à la propriété de Baire en terme de fermés.

Propriété (Propriété de Baire fermés)**.** *Pour toutes suites dénombrables* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fermés d'intérieur vide, on a*

$$\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n}} = \emptyset \tag{5.1}$$

Démonstration. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'interieur vide et posons $O_n := F_n^c$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a O_n qui est ouvert et dense car

$$\mathring{F_n} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{F_n^c} = E \tag{5.2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{O_n} = E \tag{5.3}$$

Posons maintenant $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$. On a $F^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} O_n$.

$$\mathring{F} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{F^c} = E \tag{5.4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} O_n} = E \tag{5.5}$$

Donc F^c est ouvert et dense. □

Nous avons alors un corollaire (en supposant que la propriété de Baire est vraie) :

Corollaire 5.1. *Soit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés dont l'intérieur de l'union est non vide, c'est-à-dire*

$$\overset{\circ}{\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)} \neq \emptyset \tag{5.6}$$

alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide.

Démonstration. Supposons que tous les F_n soient d'intérieur vide, alors par la propriété de Baire fermé (5), on a

$$\overset{\circ}{\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)} = \emptyset \tag{5.7}$$

Or, par hypothèse, ce n'est pas vide. □

Définition 5.1 (Espace de Baire)**.** *Si un espace topologie E a la propriété de Baire, on dit que c'est* ***un espace de Baire****.*

La question à se poser est : est-ce qu'il existe des espaces de Baire ? La réponse est oui, et le théorème (de Baire) nous en donne une partie.

Théorème 5.2 (Théorème de Baire)**.** *Tout espace métrique complet est un espace de Baire.*

Démonstration. □

Remarque. *Si on considère les suites d'ouverts non dénombrables pour la propriété de Baire, nous n'avons pas la proposition précédente. En effet, si on prend, pour $\mathbb{R}$ qui est complet, tous les singletons, qui sont fermés et d'intérieur vide, recouvrent $\mathbb{R}$. Or, cela contredit la propriété de Baire fermé 5.*

On a alors comme conséquence une proposition très intéressante sur les bases algébriques des espaces vectoriels normés $(E, \|.\|_E)$. Pour rappel, une base algébrique est un ensemble d'éléments B de E linéairement indépendants tel que tout élément de E s'écrit comme une combinaire linéaire finie des éléments de B.

Proposition 5.3. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach, alors toute base algébrique est soit finie, soit non-dénombrable.*

Démonstration. Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach. On a par 5.2 que c'est un espace de Baire.

Si E est de dimension finie, on a fini. Supposons maintenant qu'il soit de dimension infinie dénombrable, et prenons une base $B = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On construit alors la suite $E_n = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$. Ce sont des sous espaces vectoriels de dimension finie, et donc fermés par 1.3. De plus, on a clairement $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

– Par 5.1, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que E_{n_0} est d'intérieur non vide. Comme E_{n_0} est d'intérieur non vide, il existe une boule $B(x_0, r)$ de centre $x_0 \in int(E_{n_0})$ et de rayon $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq int(E_{n_0})$. En particulier, $B(x_0, r) \subseteq E_{n_0}$.

On a $B(x_0, r) = x_0 + B(0, r) \subseteq E_{n_0}$

Comme E_{n_0} est un espace vectoriel, si on prend un élément $x_0 + x \in E_{n_0}$ où $x \in B(0, r)$, alors $x \in E_{n_0}$. Donc $B(0, r) \subseteq E_{n_0}$.

– Montrons maintenant que $E_{n_0} = E$.

Prenons un élément x de E non nul et posons

$$y = \frac{x}{||x||}\frac{r}{2} \tag{5.8}$$

On a $y \in B(0, r)$ et par conséquent $y \in E_{n_0}$.

Comme E_{n_0} est un espace vectoriel et que

$$x = \frac{2}{r}||x||y \tag{5.9}$$

on a $x \in E_{n_0}$. D'où $E \subseteq E_{n_0}$.

On a donc bien l'égalité vu que E_{n_0} est un sous-espace vectoriel de E par construction.

On obtient alors une contradiction car E_{n_0} est de dimension finie, alors que E est de dimension infinie dénombrable. □

On a alors comme exemple d'application de la proposition 5.3 que $\mathcal{C}[0, 1]$ et $\mathcal{L}(E; F)$, avec E ou F de dimension infinie, et F de Banach, n'ont que des bases algébriques non dénombrables (car ce ne sont pas des espaces vectoriels de dimension finie).

Donnons maintenant, grace à la contraposée, un corollaire important sur les espaces de Banach.

Corollaire 5.4. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé qui a une base algébrique dénombrable. Alors $(E, \|.\|_E)$ n'est pas un espace de Banach.*

Démonstration. Si $(E, \|.\|_E)$ était un espace de Banach, il n'aurait pas de base dénombrable. □

Chapitre 6

Théorème de Banach-Steinhaus

Le théorème suivant utilise la propriété de Baire, et la proposition que tout espace de Banach est de Baire. Nous utiliserons le corollaire.

Théorème 6.1 (Théorème de Banach-Steinhaus)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{L}(E;F)$*

Si pour tout $x \in E$,

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < \infty \tag{6.1}$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E;F)} < \infty \tag{6.2}$$

Avant de montrer ce théorème, expliquons ce qu'il signifie.

La prémisse demande que pour chaque élément x de E, la famille $(T_i(x))_{i\in I}$ est bornée. On a alors que chaque application linéaire de la famille est bornée sur la boule unité par une même constante. Nous savons, comme les applications sont continues, qu'elles sont bornées sur la boule unité, et le théorème nous dit qu'elles sont bornées par une même constante.

Démonstration. Le théorème est une conséquence du théorème de Baire. En effet, E et F (et donc $\mathcal{L}(E,F)$) sont des espaces de Baire car ce sont des espaces de Banach.

Pour utiliser la propriété de Baire, nous allons construire une suite de fermés dont l'union recouvre tout E. On utilisera alors le corollaire 5.1 qui dit qu'un des fermés de la suite est d'intérieur non vide.

Posons

$$E_n = \{x \in E \,|\, \forall i \in I,\, \|T_i(x)\|_F \leq n\} \tag{6.3}$$

On a bien que l'union des E_n recouvre E. De plus, ce sont des fermés grace à la continuité des T_i.

Par le corollaire 5.1, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que E_{n_0} d'intérieur non vide.

Soit $x_0 \in \mathring{E}_{n_0}$. Comme $\mathring{E}_{n_0}$ est ouvert, $\mathring{E}_{n_0}$ est un voisinage de chacun de ses points. Donc, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq \mathring{E}_{n_0}$ et $\mathring{E}_{n_0} \subseteq E_{n_0}$.

Par définition de E_{n_0}, on a

$$\forall w \in B(x_0, r),\ \forall i \in I,\ \|T_i(w)\|_F \leq n_0 \tag{6.4}$$

Soit $w \in B(x_0, r)$. Comme

$$B(x_0, r) = x_0 + rB(0, 1) \tag{6.5}$$

on peut écrire $w = x_0 + re$ où $\|e\|_E < 1$.

Donc, pour tout $i \in I$,

$$\|T_i(x_0 + re)\|_F = \|T_i(x_0) + rT_i(e)\|_F \leq n_0 \tag{6.6}$$

On en déduit, par les propriétés d'une norme,

$$\|T_i(e)\|_F \leq \frac{1}{r}(n_0 + \|T_i(x_0)\|_F) \tag{6.7}$$

En se rappelant que

$$\|T_i(x_0)\|_F \leq \sup_{i \in I} \|T_i(x_0)\|_F = C \tag{6.8}$$

où C est fini par hypothèse, et en remarquant que e parcourt toute la boule unité quand on parcourt tous les $w \in B(x_0, r)$, on a

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \frac{1}{r}(n_0 + C) \tag{6.9}$$

pour tout i dans I.

Comme plus rien ne dépend de I, on a

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E;F)} < \infty \tag{6.10}$$

□

Nous avons alors un corollaire se rapportant aux formes linéaires :

Corollaire 6.2. *Soit $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$, tel que pour tout $x \in E$, la suite $(x_n^*(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors la suite $(\|x_n\|_E)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Démonstration. Ce n'est qu'une application avec $\mathrm{I} = \mathbb{N}$. □

Chapitre 7

Théorème de l'application ouverte

Définissons d'abord ce qu'est une application ouverte.

Nous avons par définition qu'une application f entre deux espaces topologiques X et Y est continue si pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X.

Nous définissons alors dans l'autre sens la propriété d'application ouverte :

Définition 7.1 (Application ouverte)**.** *Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$. On dit que f est **ouverte** si pour tout ouvert O de X, $f(O)$ est un ouvert de Y.*

Proposition 7.1. *L'ensemble des applications ouvertes de E dans F, noté $O(E, F)$, est ouvert dans $\mathcal{L}(E; F)$.*

Démonstration. □

Le théorème de l'application ouverte nous dit :

Théorème 7.2 (Théorème des applications ouvertes)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach, et $T \in \mathcal{L}(E; F)$ tel que T est surjective.*

Alors T est ouverte.

Démonstration. □

Pour rappel, on appelle homéomorphisme une application linéaire continue bijective tel que sa réciproque est aussi linéaire continue.

Par le théorème 7.2, on en déduit les corollaires suivants :

Corollaire 7.3. *Toute application linéaire continue bijective entre deux espaces de Banach est un homéomorphisme.*

Démonstration. On a bien que f^{-1} est linéaire, il reste alors à montrer que f^{-1} est continue, c'est dire que $f(O)$ est un ouvert de F pour tout ouvert O de E, c'est-à-dire que f est ouverte. Par 7.2, on a f ouverte car f est bijective. □

Corollaire 7.4. *Soient deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un espace vectoriel E tel qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$*

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \tag{7.1}$$

Supposons de plus que $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$ sont des espaces de Banach.

Alors les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.

Démonstration. Prenons l'application identité

$$Id_E : (E, \|.\|_2) \to (E, \|.\|_1) \tag{7.2}$$

. L'hypothèse 7.1 nous dit que Id_E est continue. De plus, Id_E est linéaire bijective. On en déduit que la fonction

$$Id_E : (E, ||.||_1) \to (E, ||.||_2) \tag{7.3}$$

est linéaine continue. C'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_2 \leq M \|x\|_1 \tag{7.4}$$

On a donc bien que les normes sont équivalentes. □

Corollaire 7.5. *Soit E et F des espaces de Banach. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E; F)$. On construit*

$$T : E \to F : T(x) = lim_{n\to\infty} T_n(x) \tag{7.5}$$

Alors pour tout sous-ensemble K compact de E

$$T_n \to T \tag{7.6}$$

de manière uniforme.

Démonstration. □

Chapitre 8

Topologie (pré-)faible et applications

8.1 Rappel

Définition 8.1. *Soit (X, τ) un espace topologique et soit $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(X)$.*

On dit que $\mathcal{B}$ est ***une base d'ouverts*** *si tout élément de $\mathcal{B}$ est un ouvert de (X, τ) et si tout ouvert de (X, τ) s'écrit comme une union d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Nous serons menés à travailler avec d'un côté la topologie engendrée par la norme $\|.\|_E$, et d'un autre avec la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Nous serons menés à parler de convergence, d'ouverts/fermés et nous aurons besoin de distinguer quand nous parlons pour la topologie faible ou non.

Pour cela, nous allons introduire des noms pour distinguer ces différences.

Définition 8.2. *Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, E^* son dual et $\sigma(E, E^*)$ sa topologie faible.*

On dit qu'un ouvert (resp un fermé) de $(E, \sigma(E, E^*))$ est ***faiblement ouvert*** *ou* ***σ-ouvert*** *(resp* ***faiblement fermé*** *ou* ***σ-fermé****).*

L'adhérence d'un ensemble A dans $(E, \sigma(E, E^*))$ sera notée $\overline{A}^\sigma$ et l'intérieur $\mathring{A}^\sigma$.

8.1.1 Convergence pour la topologie faible

Quels sont les liens entre la topologie faible et la topologie sur E^* qui a servi à la construire ?

D'abord, regardons la définition de convergence dans $\sigma(E, E^*)$.

Définition 8.3. *Soit une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$*, et* $x \in E$*. On dit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge faiblement*** *vers* x *pour* $\sigma(E, E^*)$*, et on note*

$$x_n \xrightarrow{\sigma(E,E^*)} x \tag{8.1}$$

si pour tout voisinage $V(x)$ *de* x*,*

$$\exists n_0 \, \forall n \geq n_0, x_n \in V(x) \tag{8.2}$$

ou de manière équivalente, pour tout voisinage $V(0)$ *de* 0*.*

$$\exists n_0 \, \forall n \geq n_0, x_n - x \in V(0) \tag{8.3}$$

Il est parfois dure de travailler avec cette définition, et on a alors une équivalence plus facile à utiliser.

Proposition 8.1. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé,* E^* *son dual et* $\sigma(E, E^*)$ *sa topologie faible. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $x_n \xrightarrow{\sigma(E,E^*)} x$
2. $\forall x^* \in E^*$, $x^*(x_n) \to x^*(x)$.

Démonstration. $\square$

8.1.2 Lien entre la topologie de la norme et la topologie faible

Continuons à donner des liens liant la topologie faible et la norme sur E.

Proposition 8.2. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé. Soit* C *convexe non vide de* E *(ça ne dépend pas de la topologie). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. C *est fermé dans* $(E, \|.\|_E)$
2. C *est faiblement fermé (ie fermé dans* $(E, \sigma(E, E^*))$*).*

Démonstration. $\square$

Nous pouvons nous demander à quoi ressemblent les ouverts de la topologie $\sigma(E, E^*)$. En fait, en dimension finie, la topologie est celle de la norme.

Proposition 8.3. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie, alors* $\tau_{\|.\|_E} = \sigma(E, E^*)$*.*

Démonstration. $\square$

Etudions ce qui se passe en dimension infinie.

Nous savons que pour la norme, S_E, la sphère unitée, est fermée, et donc qu'elle vaut son adhérence. Dans le cas E fini, la sphère est également faiblement fermée par la proposition précédente. En dimension infinie, nous obtenons quelque chose de surprenant. En effet, $\overline{S_E}^{\sigma}$, c'est-à-dire l'adhérence de la sphère unitée par rapport à la topologie faible, vaut la boule unité fermée pour la norme. En d'autres termes,

Proposition 8.4. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors*

$$\overline{S_E}^{\sigma} = \{x \in E \mid \|x\|_E \leq 1\} \tag{8.4}$$

Démonstration. □

Lemme 8.5. *Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie et $(E^*, \|.\|_{E^*})$ son dual.*

Soient $x_1^*, \cdots, x_n^* \in E^*$.

Alors $x_1^*, \cdots, x_n^*$ ont une racine commune. En d'autres termes, il existe y_0 tel que pour tout i entre 1 et n, $x_i(y_0) = 0$.

Démonstration. □

Lemme 8.6. *Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie, $(E^*, \|.\|_{E^*})$ son dual et $\sigma(E, E^*)$ sa topologie faible.*

Soit x un point de E. Tout voisinage faible de x contient une droite passant par x.

En particulier, tout voisinage faible n'est pas borné.

Démonstration. □

Que se passe-t-il pour la boule unité ouvert, c'est-à-dire

$$B_{\|\cdot\|_E}(0,1) := \{x \in E \mid \|x\|_E < 1\} \tag{8.5}$$

?

Proposition 8.7. *Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, E^* son dual et $\sigma(E, E^*)$ sa topologie faible.*

La boule unité ouverte pour $\|.\|_E$ est d'intérieur vide pour la topologie faible. Par conséquence, elle n'est pas σ-ouverte.

En d'autres termes, si nous posons $U = B_{\|\cdot\|_E}(0,1)$

$$\mathring{U}^{\sigma} = \emptyset \tag{8.6}$$

Démonstration. □

8.1.3 Applications

Théorème 8.8. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé,* E^* *son dual et* $\sigma(E, E^*)$ *sa topologie faible.*

Alors la boule unité est faiblement compacte ie compacte dans $(E, \sigma(E, E^*))$

Démonstration. □

8.1.4 Applications dans les espaces de Banach

Proposition 8.9. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *un espace de Banach et soit* B *un sous-ensemble non vide de* E.

Si pour tout $x^* \in E^*$, $x^*(B)$ *borné dans* $\mathbb{R}$, *alors* B *borné dans* E.

Démonstration. □

Corollaire 8.10. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *de Banach. Prenons une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* E *faiblement convergente vers* x. *Alors*

1. $(\|x_n\|_E)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée*
2. $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$

Démonstration. □

Proposition 8.11. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *un espace de Banach,* E^* *son dual et* $\sigma(E^*, E)$ *sa topologie pré-faible.*

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de* E *et* x *dans* E.

Si

$$\left\{x^* \in E^* \mid x^*(x_n) \xrightarrow{\|.\|_{E^*}} x^*(x)\right\} \tag{8.7}$$

est dense dans E^*, *alors* $x_n \xrightarrow{\sigma(E^*,E)} x$.

Démonstration. □

8.2 Topologie pré-faible

Proposition 8.12. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé,* $(E^*, \|.\|_{E^*})$ *son dual et soit* $\sigma(E^*, E)$ *sa topologie pré-faible.*

Soient $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E^* *et* x^* *dans* E^*. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $x_n^* \xrightarrow{\sigma(E^*,E)} x^*$
2. $\forall x \in E$, $x_n^*(x) \to x^*(x)$.

Démonstration. □

Chapitre 9

Ensemble de première catégorie d'un espace topologique

Définition 9.1 (Ensemble maigre ou nul part dense)**.** *Soit* (X, τ) *un espace topologique, et* $A \subset X$*. On dit que* A *est **nul part dense** ou **maigre** si* $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$*. On note* $\mathcal{C}_{npd}$ *la classe des ensembles nul part denses.*

Exemple 9.1. *Si nous prenons l'espace topologique* $(\mathbb{R}, |.|)$*,*

1. $\emptyset$*,* $\mathbb{N}$*,* $\mathbb{Z}$
2. *tous les ensembles finis.*

sont des ensembles nul part denses.

Proposition 9.1. *Soit* (X, τ) *un espace topologique.*

*La classe des ensembles nul part denses est **héréditaire**, c'est-à-dire*

$$\forall A \in \mathcal{C}_{npd}, \forall B \subseteq A, B \in \mathcal{C}_{npd} \tag{9.1}$$

Démonstration.

$$B \subseteq A \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A} \tag{9.2}$$

$$\Rightarrow \mathring{\overline{B}} \subseteq \mathring{\overline{A}} \tag{9.3}$$

et $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$ par hypothèse sur A. Donc $\mathring{\overline{B}} = \emptyset$, et c'est la définition d'être nul part dense. □

Proposition 9.2. *Soit* (X, τ) *un espace topologique.*

$\mathcal{C}_{npd}$ *est **stable par fermeture**, c'est-à-dire que* $\forall A \in \mathcal{C}_{npd}$*,* $\overline{A} \in \mathcal{C}_{npd}$*.*

Démonstration. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, et donc, comme $A \in \mathcal{C}_{npd}$, $\mathring{\overline{\overline{A}}} = \mathring{\overline{A}} = \emptyset$ □

Proposition 9.3. *Soit (X, τ) un espace topologique.*

$\mathcal{C}_{npd}$ est stable par union finie.

Démonstration. Il suffit de montrer pour $n = 2$, le cas $n > 2$ se montre par récurrence. Soit A et B nul part dense. Il faut montrer que $A \cup B$ est nul part dense, c'est-à-dire que $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} = \emptyset$. (A finir). □

Définition 9.2 (Ensemble de première et deuxième catégorie)**.** *Soit (X, τ) un espace topologique.*

Un ensemble est de ***première catégorie*** *s'il est une union dénombrable d'ensembles nul part denses dans (X, τ). Nous notons $\mathcal{C}_1$ la classe des ensembles de première catégorie.*

Sinon, on dit qu'il est ***de deuxième catégorie****, et on note $\mathcal{C}_2$ la classe des ensembles de deuxième catégorie.*

Nous avons par exemple $\mathbb{Q}$ qui est de première catégorie dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

Proposition 9.4. *$\mathcal{C}_1$ est héréditaire et stable par union dénombrable.*

Démonstration. $\mathcal{C}_1$ stable par union dénombrable :

Soit $A_i = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_{i,n}$ une famille dénombrable tel que chaque $A_{i,n}$ est nul part dense dans (X, τ). On a bien que $\cup_{i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}} A_{i,n}$ est une union dénombrable (union sur $\mathbb{N}^2$ qui est dénombrable), et chaque $A_{i,n}$ est nul part dense dans (X, τ) par hypothèse.

$\mathcal{C}_1$ héréditaire :

Soit $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ un ensemble de première catégorie et soit $B \subseteq A$.

Posons $B_n = A_n \cap B$. On a $B_n \subseteq A_n$ où A_n est nul part dense dans (X, τ). Comme la classe des ensembles nul part dense est héréditaire, B_n est nul part dense dans (X, τ). De plus, $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B) = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap B = A \cap B = B$. □

Remarque. *$\mathcal{C}_1$ n'est pas stable par fermeture.*

Définition 9.3 (G_δ et F_σ)**.** *Soit (X, τ) un espace topologique, et $A \subseteq X$. Alors A est* ***un*** *G_δ* ***(resp.*** *F_σ***)*** *s'il est intersection dénombrable d'ouverts (resp. union dénombrable de fermés).*

Définition 9.4 (Proposition vraie presque partout)**.** *Une proposition est* ***vraie presque partout*** *si elle est vraie sauf peut-être sur un ensemble de première catégorie.*

9.1 Applications dans les espaces de Baire

Remarquons d'abord que la propriété de Baire fermé (5) peut être écrit en toute union dénombrable de fermés nul part denses est d'intérieur vide.

Proposition 9.5. *Soit (X,τ) est un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *(X,τ) est de Baire*
2. *Le complémentaire de tout ensemble de première catégorie est dense dans (X,τ), c'est-à-dire pour tout $A \in \mathcal{C}_1$, $\overline{A^c} = X$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit S un ensemble de première catégorie, ie $S = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ où S_n est nul part dense. Il faut montrer que $S^c = \cap_{n\in\mathbb{N}}(S_n)^c$ est dense dans X.

(notation lourde)

($\Leftarrow$) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable de fermé tel que $\mathring{F}_n = \emptyset$. Il faut montrer que $F = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ (5). On a F de première catégorie car chaque F_n est nul part dense, et donc par hypothèse, $\overline{F^c} = X$, c'est-à-dire $\mathring{F} = \emptyset$ (en passant au complémentaire). □

Corollaire 9.6. *Si (X,τ) est un ensemble de Baire, alors $X \notin \mathcal{C}_1$.*

Démonstration. Si X est de première catégorie, alors $\emptyset = X^c$ serait dense dans X. Or $\overline{\emptyset} = \emptyset$. □

Corollaire 9.7. *Tout espace métrique complet n'est pas de première catégorie.*

Démonstration. En effet, par 5.2, c'est un espace de Baire, et par le corollaire précédent, on a qu'il n'est pas de première catégorie. □

Définition 9.5 (Résiduel)**.** *Soit (X,τ) un espace topologique, et $A \subseteq X$. A est **résiduel** s'il est le complémentaire d'un ensemble de première catégorie, ie $A^c \in \mathcal{C}_1$.*

Proposition 9.8. *Soit (X,τ) un espace topologique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *(X,τ) est de Baire.*
2. *Tout ensemble résiduel est dense, c'est-à-dire pour tout sous-ensemble A de X, si $A^c \in \mathcal{C}_1$ alors $\overline{A} = X$.*

Démonstration. Reformulation de 9.5. En effet, on a justement définie résiduel comme le complémentaire d'un ensemble de première catégorie. □

Proposition 9.9. *Dans tout espace topologique, tout fermé privé de son intérieur est d'intérieur vide.*

Démonstration. □

Proposition 9.10. *Soit (X, τ) un espace de Baire et soit E un sous-ensemble de X.*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *E est un ensemble résiduel.*
2. *E contient un sous-ensemble G_δ dense dans (X, τ).*

Démonstration. □

Proposition 9.11. *Soit (X, τ) un espace de Baire, et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés tel que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.*

Alors

$$\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n} = X \tag{9.4}$$

Démonstration. □

9.2 Applications à l'analyse fonctionnelle

9.2.1 Fonctions séparément continues

Théorème 9.12. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que f_n continue, et $f_n : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, |.|)$. On pose $f(x) = \lim f_n(x)$ pour $x \in X$. Alors, f est continue presque partout au sens de Baire.*

Démonstration. □

Définition 9.6 (Séparément continue)**.** *f est* ***séparément continue*** *si elle est continue en chacune de ses variables.*

Proposition 9.13. *Toute fonction séparément continue est limite simple de fonction continues.*

Démonstration. □

Corollaire 9.14. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ séparément continue (ie continue en chaque variable). Alors f est presque partout continue au sens de Baire.*

Démonstration. On utilise la proposition précédente et le théorème 9.12. □

Corollaire 9.15. *La dérivée de toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable est presque partout continue au sens de Baire.*

Démonstration. □

9.2.2 Fonctions nulle part dérivables

Théorème 9.16. *Presque toute fonction de $\mathcal{C}[0,1]$ est nul part dérivable.*

Démonstration. $\square$

Chapitre 10

Le théorème d'Ascoli

10.1 Rappels et définitions

Proposition 10.1. *Soit (X,τ) un espace topologique.*

Soient F un fermé de (X,τ) et K un compact de (X,τ).

Si $F \subseteq K$, alors F est compact dans (X,τ).

En d'autres termes, tout fermé dans un compact est compact.

Démonstration. □

Définition 10.1. *Soit (X,τ) un espace topologique et soit $A \subseteq X$.*

*On dit que A est **relativement compact dans** (X,τ) si $\overline{A}$ est compact dans (X,τ).*

Proposition 10.2. *Soit (X,τ) un espace topologique et soit $A \subseteq X$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *A est relativement compact dans (X,τ).*
2. *A est contenu dans un compact K de (X,τ).*

Démonstration. □

Définition 10.2. *Soient (X,τ) un espace topologique et (Y,d_Y) un espace métrique. Posons*

$$F(X,Y) = \{f : X \to Y\} \tag{10.1}$$

l'ensemble des fonctions de X dans Y.

*Soient $A \subseteq F(X,Y)$ et $x_0 \in X$. On dit que A est **équicontinu en** x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 tel que pour toute fonction $f \in A$, $d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$.*

*On dit que A est **équicontinu** si A est équicontinu en tout point x_0 de X.*

Définition 10.3. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. Posons*

$$F(X, Y) = \{f : X \to Y\} \tag{10.2}$$

l'ensemble des fonctions de X dans Y.

Soit $A \subseteq F(X, Y)$.

On dit que A est ***uniformément continu*** *si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, pour tout $y \in B(x, \delta)$ et pour tout $f \in A$, $d_Y(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.*

On va munir $\mathcal{C}(X, Y)$, l'ensemble des fonctions continues de (X, τ) dans (Y, d_Y), d'une topologie dépendante uniquement de la métrique d_Y.

Définition 10.4 (Topologie de la convergence uniforme)**.** *Soient (X, τ) un espace topologique compact et soit (Y, d_Y) un espace métrique. Soit $\mathcal{C}(X, Y)$ où $\mathcal{C}(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions continues de (X, τ) dans (Y, d_Y)*

La topologie de la convergence uniforme*, notée τ_∞, est la topologie engendrée par la métrique*

$$d : (\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{C}(X, Y)) \to \mathbb{R} \tag{10.3}$$

tel que

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \tag{10.4}$$

Remarque. *La définition de la métrique précédente contient un* sup*. En realité, celui-ci est un maximum car (X, τ) est compact par hypothèse et f, g sont des fonctions continues.*

Exemple 10.1.

1. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. L'ensemble des fonctions k-lipchitziennes pour $k > 0$ est équicontinu.*
2. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit*

   $$f : (X, d_X) \times (X, d_X) \to (Y, d_Y) \tag{10.5}$$

   une fonction uniformément continue et posons

   $$A = \{f_y : X \to Y \mid f_y(x) = f(x, y)\} \tag{10.6}$$

   Alors A est équicontinu.

Proposition 10.3. *Soient (X, τ) un espace topologique et (Y, d_Y) un espace métrique et soit $A \subseteq F(X, Y)$. Alors*

1. *Si A est équicontinu en x_0, alors toute fonction $f \in A$ est continue en x_0.*

2. *Soit B tel que $A \subseteq B$. Si B est équicontinu en x_0 (resp. équicontinu), alors A est équicontinu en x_0 (resp. équicontinu).*
3. *Si A est équicontinu en x_0 (resp. équicontinu), alors $\overline{A}$ est équicontinu en x_0 (resp. équicontinu).*
4. *Soit (X^2, τ_{X^2}) où τ_{X^2} est la topologie produit. A est équicontinu ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert O de (X^2, τ_{X^2}) contenant la diagonale tel que pour tout $f \in A$, pour tout $(x, y) \in O$, $d_Y(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.*

Démonstration. □

Proposition 10.4. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit $A \subseteq F(X, Y)$. Supposons que (X, d_X) est un espace métrique compact, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *A est équicontinu.*
2. *A est uniformément continu.*

Démonstration. □

Proposition 10.5. *Soient (X, τ) un espace topologique et soit (Y, d_Y) un espace métrique. Soit $(\mathcal{C}(X, Y), \tau_\infty)$ où $\mathcal{C}(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions continues de (X, τ) dans (Y, d_Y) et τ_∞ est la topologie de la convergence uniforme.*

Alors, la fonction d'évalutation

$$\phi : (\mathcal{C}(X, Y), \tau_\infty) \times (X, \tau) \to (Y, d_Y) : (f, x) \to f(x) \tag{10.7}$$

est continue.

Démonstration. Il faut montrer que pour tout (f_0, x_0), pour tout $\epsilon > 0$, il existe $V_{(f_0,x_0)}$ tel que pour tout $(f, x) \in V_{(f_0,x_0)}$, $d_Y(f_0(x_0), f(x)) \leq \epsilon$.

Soit (f_0, x_0) et $\epsilon > 0$. On sait que f_0 est continue en x_0 par hypothèse. Donc

$$\forall \epsilon' > 0,\ \exists V_{x_0},\ \forall x \in V_{x_0},\ d_Y(f_0(x), f_0(x_0)) \leq \epsilon' \tag{10.8}$$

Prenons le cas particulier où $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ et prenons

$$V_{(f_0,x_0)} = B_{\mathcal{C}(X,Y)}(f_0, \frac{\epsilon}{2}) \times V_{x_0} \tag{10.9}$$

où V_{x_0} est le voisinage de x_0 donné par ϵ'.

Il nous reste à vérifier que pour tout $(f, x) \in V_{(f_0,x_0)}$, $d_Y(f(x), f_0(x_0)) \leq \epsilon$.

Soit $(f, x) \in V_{(f_0,x_0)}$. On a

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f_0(x_0)) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), f_0(x_0)) && (10.10)\\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} && (10.11)\\ &\leq \epsilon && (10.12) \end{aligned}$$

□

10.2 Enoncé du théorème et corollaires

Théorème 10.6 (Théorème d'Ascoli). *Soient (X, τ) un espace topologique compact non vide, (Y, d_Y) un espace métrique. Soit $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_\infty)$ où $\mathcal{C}(X,Y)$ est l'ensemble des fonctions continues de (X, τ) dans (Y, d_Y) et τ_∞ est la topologie de la convergence uniforme.*

Soit $A \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *A est relativement compact dans $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_\infty)$*
2. *A est équicontinu et pour tout $x \in X$, $\{f(x) \mid f \in A\}$ est relativement compact dans (Y, d_Y)*

Démonstration. □

On remarque qu'en ajoutant l'hypothèse de compacité sur (Y, d_Y), on obtient immédiatement que $\overline{\{f(x) \mid f \in A\}}$ est relativement compact dans (Y, d_Y).

Corollaire 10.7. *Soient (X, τ) un espace topologique compact non vide, (Y, d_Y) un espace métrique. Soit $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_\infty)$ où $\mathcal{C}(X,Y)$ est l'ensemble des fonctions continues de (X, τ) dans (Y, d_Y) et τ_∞ est la topologie de la convergence uniforme.*

Soit $A \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$.

Si (Y, d_Y) est compact, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *$\overline{A}$ est compact dans $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_\infty)$.*
2. *A est équicontinu.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). On a vu que $\overline{A}$ compact dans $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_\infty)$ est équivalent à A relativement compact dans $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_\infty)$.

Par le théorème d'Ascoli, A est équicontinu.

(2) $\Rightarrow$ (1). Il suffit de montrer, par le théorème d'Ascoli, que pour tout $x \in X$

$$\{f(x) \mid f \in A\} \tag{10.13}$$

est relativement compact dans (Y, d_Y), c'est-à-dire que

$$\overline{\{f(x) \mid f \in A\}} \tag{10.14}$$

est compact dans (Y, d_Y).

Comme $\overline{\{f(x) \mid f \in A\}}$ est fermé dans (Y, d_Y) et que Y est compact dans (Y, d_Y), alors $\overline{\{f(x) \mid f \in A\}}$ est compact dans (Y, d_Y). □

Le théorème d'Ascoli donne donc une équivalence entre la compactité et l'équicontinuité quand nous avons deux espaces compacts.

Maintenant, oublions l'hypothèse de compacité sur (Y, d_Y), mais supposons que Y est un espace vectoriel normé. On obtient alors une autre équivalence assez proche de la précédente.

Corollaire 10.8. *Soient (X, τ) un espace topologique compact non vide, (Y, d_Y) un espace métrique. Soit $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_\infty)$ où $\mathcal{C}(X,Y)$ est l'ensemble des fonctions continues de (X, τ) dans (Y, d_Y) et τ_∞ est la topologie de la convergence uniforme.*

Soit $A \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$.

Si Y est un espace vectoriel de dimension finie, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *$\overline{A}$ est compact dans $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_\infty)$.*
2. *A est équicontinu et borné.*

Démonstration. □

Chapitre 11

Le compactifié d'Alexandrov

Motivation

Le but de ce chapitre sera de donner des résultats sur la compactification d'espace topologique.

Lorsque nous travaillons sur des espaces topologiques qui ne sont pas compacts, nous souhaitons plonger ces espaces dans des espaces topologiques qui sont compacts. On dit qu'on **compactifie**.

Dans notre cas, nous allons travailler avec des espaces localement compacts.

11.1 Espace localement compact

Définition 11.1. *Soit (X, τ) un espace topologique.*

*On dit que (X, τ) est **(un espace topologique) localement compact** si tout point de X contient un voisinage compact.*

Remarque. *De manière générale, quand on parle de propriété locale, c'est une propriété qui est vrai au voisinage de chaque point.*

Naturellement, on peut se demander si la propriété d'être (globalement) compact comprend la notion d'être localement compact. C'est évident vu la définition.

Proposition 11.1. *Soit (X, τ) un espace topologique.*

Si (X, τ) est un espace compact, alors (X, τ) est un espace localement compact.

Démonstration. □

Remarque. *De manière générale, une propriété locale, comme définie précédemment, est globale.*

Définition 11.2. *Soit (X, τ) un espace topologique.*

On dit que (X, τ) est ***régulier*** *si tout point de X admet un système fondamental de voisinages de fermés, c'est-à-dire si pour tout point $x \in X$, tout voisinage V_x de x contient un voisinage fermé de x.*

Proposition 11.2. *Soit (X, τ) un espace topologique.*

Si (X, τ) est compact, alors (X, τ) est régulier.

Démonstration. □

Théorème 11.3. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé. Les assertions suivantes sont équivalents.*

1. *X est localement compact.*
2. *Pour tout point $x \in X$, tout voisinage V_x de x est compris dans un voisinage compact de x.*
3. *Pour tout $x \in X$, x admet un système fondamental de voisinages compacts.*
4. *Pour tout $x \in X$, x admet un système fondamental de voisinages relativement compacts.*
5. *Tout point de X admet un voisinage relativement compact.*
6. *Tout point de X admet un voisinage compact et fermé.*

Démonstration. □

Proposition 11.4. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé localement compact.*

Alors les ouverts et fermés de (X, τ) sont localement compacts.

Démonstration. □

Proposition 11.5. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé.*

Alors tout sous-ensemble localement compact est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.

Démonstration. □