Analyse numérique

Danny Willems

1er décembre 2015

Table des matières

1 Equations différentielles ordinaires **2**

1.1 Définitions 2

1.2 Fonctions lipschitziennes 5

1.3 Tonneaux de sécurité 6

1.4 Existence et unicité locales de solutions 6

1.5 Existence et unicité globale d'une solution 8

Chapitre 1

Equations différentielles ordinaires

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Equation différentielle ordinaire)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$.*

Soit $f : \Omega \to E$ une application.

On appelle ***équation différentielle ordinaire d'ordre 1*** *une équation du type*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.1}$$

noté plus souvent

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.2}$$

Définition 1.2 (Solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$.*

Soit $f : \Omega \to E$ une application et

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.3}$$

une équation différentielle ordinaire d'ordre 1.

On appelle ***solution de l'équation 1.3*** *toute fonction*

$$x : I \to E \tag{1.4}$$

où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$,

$$(t, x(t)) \in \Omega \tag{1.5}$$

et

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1.6}$$

où

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.7}$$

L'ensemble

$$\{(t, x(t)) \,|\, t \in I\} \tag{1.8}$$

est appelé ***trajectoire de la solution*** x ***de l'équation 1.3*** *ou* ***espace de mouvement****.*

L'ensemble

$$\{x(t) \,|\, t \in I\} \tag{1.9}$$

est appelé ***orbite de la solution*** x ***de l'équation 1.3*** *ou* ***espace de phase****.*

Remarquons que l'intervalle d'une solution peut être quelconque topologiquement parlant. Il peut être ouvert, fermé, ou aucun des deux.

Définition 1.3 (Problème de Cauchy)**.** *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E$*.*

Soient $f : \Omega \to E$ *une application,*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.10}$$

une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 et (t_0, x_0) *un point de* Ω*.*

On appelle ***problème de Cauchy de l'équation 1.10 relativement aux conditions initiales*** (t_0, x_0) *la recherche des solutions*

$$x : I \to E \tag{1.11}$$

de l'équation 1.10 tel que

1. $t_0 \in I$
2. $\dot{x}(t_0) = f(t_0, x_0)$

Nous allons donner la définition d'une équation différentielle ordinaire d'orde n. La définition d'équation différentielle d'ordre 1 que nous avons donnée actuellement ne fait intervenir que la dérivée première d'une fonction x et une dépendance par rapport à cette même fonction x dans la fonction f.

La dérivée de la fonction x est alors donnée par la fonction f.

Il est naturel de généraliser cette définition pour la n-ième dérivée.

Définition 1.4 (Equation différentielle ordinaire d'ordre n)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^{>0}$ *et soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E$*.*

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$*.*

On appelle ***équation différentielle ordinaire d'ordre*** n *ou* ***équation différentielle ordinaire à dérivée*** n***-ième explicitée*** *une équation du type*

$$y^{(n)} = f(t, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y^{(1)}, y^{(0)}) \tag{1.12}$$

où
$$y^{(0)} = y \tag{1.13}$$
et
$$y^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} \tag{1.14}$$

Remarquons que la définition d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n est définie par une fonction f qui va de Ω dans $\mathbb{R}$, et non dans E comme dans le cas d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1.

De la même manière que l'on a défini une solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1, on définit la solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n de la façon suivante :

Définition 1.5 (Solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^{>0}$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application et
$$y^{(n)} = f(t, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y^{(1)}, y^{(0)}) \tag{1.15}$$
une équation différentielle ordinaire d'ordre n.

On appelle ***solution de l'équation 1.15*** *toute fonction*
$$y : I \to \mathbb{R} \tag{1.16}$$
n fois dérivable où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$,

1. $(t, y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \ldots, y^{(1)}(t), y^{(0)}(t)) \in \Omega$
2. $y^{(n)}(t) = f(t, y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \ldots, y^{(1)}(t), y^{(0)}(t))$

Remarquons que l'intervalle d'une solution peut être quelconque topologiquement parlant. Il peut être ouvert, fermé, ou aucun des deux. De plus, cette fois-ci, la définition d'une solution est une fonction allant de I dans $\mathbb{R}$, non plus dans E

L'étude des équations différentielles ordinaire d'ordre n peut sembler difficile à première vue car nous devons vérifier que les dérivées successives d'une solution y vérifient bien l'égalité 2.

Nous allons montrer une première proposition qui nous montre que l'étude des solutions d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n peut revenir à l'étude d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1.

Proposition 1.6. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et*
$$y^{(n)} = f(t, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y^{(1)}, y^{(0)}) \tag{1.17}$$
une équation différentielle ordinaire d'ordre n. Alors il existe un système d'équation différentielle d'ordre 1 dont l'ensemble de solutions est de même cardinal que l'ensemble de solution de l'équation 1.17.

Démonstration. □

1.2 Fonctions lipschitziennes

Définition 1.7 (Lipschitzienne)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$.*

Soit $f : \Omega \to E$ une application. On dit que f est ***lipschitzienne par rapport à la deuxième variable*** *s'il existe $k \geq 0$ tel que*

$$\forall (t, x_1) \in \Omega,\ \forall (t, x_2) \in \Omega,\ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\| \tag{1.18}$$

Définition 1.8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$.*

Soit $f : \Omega \to E$ une application.

On dit que f est ***localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable*** *s'il existe $k \geq 0$ tel qu'en tout point (t, x) de Ω, il existe un voisinage de (t, x) sur lequel f est k-lipschitzienne.*

Montrons quelques propriétés que les fonctions lipschitziennes et localement lipschitziennes entretiennent avec les fonctions continues.

Proposition 1.9. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et soit $f : \Omega \to E$ une application.*

Si f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors f est uniformément continue par rapport à la deuxième variable.

Démonstration. □

Remarque. *Si une fonction $f : \Omega \to E$ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, cela n'implique pas nécéssairement qu'elle soit continue par rapport à la première variable et, par conséquence, uniformément continue par rapport à la première variable.*

Proposition 1.10. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : \Omega \to E$ une application tel que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x existe et sont continues.*

Alors, f est localement lipschitzienne dans Ω.

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe une boule fermée $B[(t_0, x_0), r]$ de rayon r et de centre (t_0, x_0) contenue dans Ω.

Par hypothèse, les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont bornées sur cette boule $B[(t_0, x_0), r]$. □

Proposition 1.11. *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R} \times E$ et soit*

$$f : \Omega \to E : (t, x) \to f(t, x) \tag{1.19}$$

une application tel que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues par rapport à x. LASSE.

1. *f est lipschitzienne.*
2. *Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont bornées.*

Démonstration. □

1.3 Tonneaux de sécurité

Définition 1.12. *Un tonneau de centre* (t_0, x_0) *est un ensemble* $I \times B \subseteq \mathbb{R} \times E$ *où*

$$I = \{t \in \mathbb{R} \,|\, |t - t_0| < l\} \tag{1.20}$$

et

$$B = \{x \in E \,|\, \|x - x_0\| < M\} \tag{1.21}$$

La valeur $2l$ *est appelée* ***longueur du tonneau*** *et* r ***le rayon du tonneau****.*

Définition 1.13. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E$ *et soit* $f : \Omega \to E$ *une application.*

Soient (t_0, x_0) *un point de* Ω *et* T *un tonneau de centre* (t_0, x_0)*.*

T *est* ***un tonneau de sécurité de centre*** (t_0, x_0) ***relativement à*** f *si* T *est contenu dans* Ω *et si* $r = Ml$ *où* M *est une borne supérieure de* $\|f(t,x)\|_E$ *où* (t,x) *parcourt* T*.*

T *est* ***un tonneau lipschitzien relativement à*** f *si* f *est lipschitzienne sur* T*.*

Proposition 1.14. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E$ *et soit* $f : \Omega \to E$ *une application continue et localement lipschitizienne en la deuxième variable.*

Soient (t_0, x_0) *un point de* Ω *et* T *un tonneau de centre* (t_0, x_0) *contenue dans* Ω*.*

Alors T *est contenu dans un tonneau de sécurité de centre* (t_0, x_0)*.*

Démonstration. □

Proposition 1.15. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E$ *et soit* $f : \Omega \to E$ *une application continue et localement lipschitzienne.*

Soit (t_0, x_0) *un point de* Ω*.*

Alors il existe un tonneau de sécurité lipschitzien de centre (t_0, x_0) *relativement à* f*.*

Démonstration. □

1.4 Existence et unicité locales de solutions

Posons Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : \Omega \to E$ une application localement lipschitzienne en x et continue.

Soit

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.22}$$

l'équation différentielle ordinaire d'ordre un régie par f.

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 1.16. *Soit* $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Alors il existe un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ *et une solution* $x : I \to E$ *de 1.22 tel que* $x(t_0) = x_0$.

De plus, pour tout autre intervalle $J \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$ *avec* $t_0 \in J$ *et pour toute autre solution* $y : J \to E$ *tel que* $y(t_0) = x_0$*, on a*

$$\forall t \in J, x(t) = y(t) \tag{1.23}$$

Cependant, avant de montrer ce dernier, nous allons démontrer des propositions qui nous permettront de conclure sur ce théorème.

Proposition 1.17. *Soit* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *et soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *tel que* $t_0 \in I$.

Soit $x : I \to E$ *une fonction tel que son graphe est* Ω.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. x *est solution de l'équation 1.22 et* $x(t_0) = x_0$
2. x *est continue et pour tout* $t \in I$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{1.24}$$

Démonstration. □

Proposition 1.18. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $T = I \times B$ *un tonneau de sécurité de lipschitzien de* f.

Soit $C(I)$ *l'ensemble des fonctions* $x : I \to E$ *continue et dont le graphe est dans* T.

Alors $C(I)$ *est un espace métrique complet pour la métrique de la convergence uniforme.*

Démonstration. □

Proposition 1.19. *Soit* $C(I)$ *l'ensemble défini précédemment.*

Alors la fonction

$$\phi : C(I) \to C(I) \tag{1.25}$$

tel que pour tout $x \in C(I)$ *et pour tout* $t \in I$,

$$\phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{1.26}$$

est bien définie et est contractante.

Démonstration. □

Corollaire 1.20. *Il existe une unique fonction* $y \in C(I)$ *tel que*

$$\forall t \in I,\, y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau \tag{1.27}$$

Démonstration. □

On obtient alors le théorème d'existence locale d'une solution

Théorème d'existence locale d'une solution. On a montré qu'il existe une unique fonction $y : I \to E$ tel que y est contenue, dont le graphe est contenue dans T et

$$\forall t \in I,\, y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau \tag{1.28}$$

Ce qui est équivalent à dire que y est solution de l'équation 1.22. □

1.5 Existence et unicité globale d'une solution

Nous allons montrer qu'il existe une unique solution maximale répondant au problème de Cauchy.