Mathématiques effectives

Danny Willems

Version compilée du 16 octobre 2015

Table des matières

Introduction

Le cours de mathématiques effectives se charge d'étudier la théorie des jeux.

Chapitre 1

Jeux combinatoires/qualitatifs à information parfaite et à somme nulle

1.1 Exemples de jeux

Commençons par donner deux exemples de jeux.

Jeu de Nim 1

Le jeu de Nim est un jeu qui se joue à deux, chacun à son tour. Il est composé de deux tas d'objets. Il y a n_1 objets dans le tas 1 et n_2 objets dans le tas 2. On se retrouve donc avec un couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$.

Les règles sont simples : le jeu se joue tour à tour. A chaque tour, le joueur courant doit retirer k objets dans un des deux tas. Les k pièces doivent être retirées dans un même tas.

Un joueur gagne lorsque celui-ci a retiré le ou les derniers objets, l'autre joueur a alors perdu.

Remarque. *Le jeu de Nim 1 a pour caractéristiques :*

1. *Il se joue à deux joueurs. Notons les J_1 et J_2.*
2. *L'état du jeu est connu en entier par les deux joueurs à chaque coup. Le jeu est donc à information parfaite.*
3. *Le jeu se joue tour à tour.*
4. *J_1 gangne ssi J_2 perd.*
5. *Aucun match nul possible.*

Jeu de Nim 2

1.2 Définitions

Nous allons tenter de donner une définition de jeu englobant les jeux de Nim cités précédemment. On créera ainsi une classe de jeu, et on tentera de retirer des théorèmes intéressants. Ces théorèmes pourraient nous donner des conditions nécessaires et suffisantes pour gagner à un jeu de cette classe, d'exitence de telles conditions, nous la donner, etc. Est-ce possible déjà ?

Pour classer ce jeu, on va utiliser la notion de graphe.

Définition 1.1 (Graphe)**.** ***Un graphe*** *ou* ***un espace de graphe*** *est un couple* (V, E) *où* V *est un ensemble et* $E \subseteq V \times V$.

Si V *est fini, on parle alors* ***de graphe fini*** *ou encore* ***d'espace de graphe fini****. Si* V *n'est pas fini, on parle* ***de graphe infini*** *ou encore* ***d'espace de graphe infini****.*

Les éléments de V *sont appelés* ***les sommets*** *et les éléments de* E *sont appelés* ***les arcs****.*

Définition 1.2 (Graphe non orienté)**.** *Soit* (V, E) *un graphe.*

On dit que (V, E) *est* ***un graphe orienté*** *si pour tous sommets* v_1, v_2, *on a*

$$(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (v_2, v_1) \in E \tag{1.1}$$

Si ce n'est pas le cas, on parle de ***graphe non orienté****.*

Définition 1.3 (Jeu combinatoire)**.** ***Un jeu combinatoire*** G *est un 5-uplet* $((V, E), V_1, V_2, \Omega_1, \Omega_2)$ *tel que*

1. (V, E) *est un graphe fini.*
2. $\{V_1, V_2\}$ *forment une partition de* V.
3. $\Omega_1 \subseteq V^\omega$ *et* $\Omega_2 \subseteq V^\omega$.
4. *Pour tout* $v \in V$, *il existe* $v' \in V$ *tel que* $(v, v') \in E$.

Remarquons qu'actuellement, un jeu combinatoire est défini de manière purement syntaxique. Il nous reste à donner l'interprétation de ce 5-uplet.

Dans le jeu de Nim décrit dans l'introduction, on a remarqué que le jeu était défini par des états. Ces états seront définis par les sommets du graphe.

Les actions possibles des joueurs seront les arcs de ce graphe. Remarquons que l'action 'revenir' en arrière n'est pas toujours possible à cause de l'utilisation d'un graphe orienté.

V_1 (resp. V_2) représente les états accessibles par le joueur 1 (resp. par le joueur 2). Les états accessibles à partir d'un état v sont donnés par les arcs ayant comme point de départ v. Comme V_1 et V_2 forment une partition de V, on remarque qu'aucun état ne peut être injouable : il est toujours possible de jouer.

La dernière condition reflète le fait qu'on peut toujours sortir d'un état. Cette notion n'est pas essentiel, mais simplifiera l'écriture des prochaines définitions, des propositions s'y rapportant et leurs preuves. Le lecteur est invité à omettre cette condition et à retravailler ce chapitre sans cette dernière.

Les chemins du graphe (V, E) sont appelés **les parties de** G.

Définition 1.4 (Jeu combinatoire à somme nulle)**.** *Soit* $G = ((V, E), V_1, V_2, \Omega_1, \Omega_2)$ *un jeu combinatoire.*

On dit que G *est* ***à somme nulle*** *si* $\Omega_1 = \Omega_2^c$.

Définition 1.5 (Partie maximale)**.** *Soit* $G = ((V, E), V_1, V_2, \Omega_1, \Omega_2)$ *un jeu combinatoire.*

Une partie P *de* G *est dite* ***maximale*** *si celle-ci est infinie, ie si* $P \in V^\omega$.

Définition 1.6 (Partie gagnante)**.** *Soit* $G = ((V, E), V_1, V_2, \Omega_1, \Omega_2)$ *un jeu combinatoire.*

On dit qu'une partie P *maximale est* ***gagnante pour*** J_1 ***(resp. pour*** J_2***)*** *si* $P \in \Omega_1$ *(resp.* $P \in \Omega_2$*).*

Définition 1.7 (Partie perdante)**.** *Soit* $G = ((V, E), V_1, V_2, \Omega_1, \Omega_2)$ *un jeu combinatoire à somme nulle.*

Une partie P *maximale est* ***perdante pour*** J_2 ***(resp. perdante pour*** J_1***)*** *si* P *est gagnante pour* J_1 *(resp. gagnante pour* J_2*).*

Maintenant qu'on a défini les parties d'un jeu, il nous faut définir le terme de stratégie.

Définition 1.8 (Stratégie)**.** *Soit* $G = ((V, E), V_1, V_2, \Omega_1, \Omega_2)$ *un jeu combinatoire.*

Une stratégie pour J_1 *est une fonction*

$$\lambda : V^*V_1 \to V \tag{1.2}$$

tel que pour tout $(v_0, \dots, v_n, v_{n+1}) \in V^*V_1$*, on a*

$$(v_n, v_{n+1}) \in E \tag{1.3}$$

On définit de la même manière 'une stratégie pour J_2*' en remplaçant* V_1 *par* V_2*.*

Définition 1.9. *Soient* $G = ((V, E), V_1, V_2, \Omega_1, \Omega_2)$ *un jeu combinatoire,* $P = (v_i)_{i \in I}$ *une partie maximale de* G *et* λ_1 *une stratégie pour* J_1*.*

On dit que P ***est jouée en accord avec*** λ_1 ***par*** J_1 *si pour tout* $i \in I$

$$v_i \in V_1 \Rightarrow \lambda_1((v_0, \dots, v_i)) = v_{i+1} \tag{1.4}$$

En d'autres termes, le joueur 1 doit jouer exactement les états de la partie P*.*

On définit de la même manière 'une partie est jouée en accord avec λ_2 *par* J_2*' en remplaçant* V_1 *par* V_2 *et* λ_1 *par* λ_2*.*

Définition 1.10. *Soient* $G = ((V, E), V_1, V_2, \Omega_1, \Omega_2)$ *un jeu combinatoire,* λ *une stratégie pour* J_1 *et* $v \in V$ *un état.*

On définit

$$Outcome(\lambda, v) \tag{1.5}$$

comme l'ensemble des parties maximales commençant en v *jouées en accord avec* λ *par* J_1.