第1章 实数与数列的极限

学习材料（2）

1 实数集的界与确界

2 数列极限概念

3 数列极限的性质

4 数列的收敛准则

在按数列极限定义和数列极限的性质证明一个数列收敛时，都必须先知道它的极限值是什么，然后“妆模作样”地走一遍证明过程。

现在我们从数列本身出发去研究其敛散性，而不要求关于其极限值的任何明显信息；进而，在判断出数列收敛时，利用极限运算的性质去求出相应的极限值。

4.1 单调收敛准则

称数列$\{a_n\}$为单调非增，若$a_n \geq a_{n+1}$， $n = 1, 2, \cdots$.

称数列$\{a_n\}$为单调非减，若$a_n \leq a_{n+1}$， $n = 1, 2, \cdots$.

我们知道了收敛数列必定有界，但有界数列不一定收敛，例如数列$\{(-1)^n\}$. 然而，对于单调数列，有如下结论。

定理1（单调收敛准则）

(1). 若$\{a_n\}$是单调非减数列，且有上界，则$\{a_n\}$收敛于$\sup\{a_n | n \in \mathbf{N}_+\}$.

(2). 若$\{a_n\}$是单调非增数列，且有下界，则$\{a_n\}$收敛于$\inf\{a_n | n \in \mathbf{N}_+\}$.

证(1)：记$A = \sup\{a_n | n \in \mathbf{N}_+\}$，我们证明

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = A.$$

$\forall \varepsilon > 0$，则$A - \varepsilon$不是$\{a_n | n \in \mathbf{N}_+\}$的上界，故$\exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}_+$，使得

$$A - \varepsilon < a_{N_\varepsilon}.$$

于是当$n > N_\varepsilon$时，

$$A - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a_n \leq A < A + \varepsilon,$$

故

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

由极限的定义知

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A,$$

所以$\{a_n\}$收敛于$\sup\{a_n|n\in\mathbf{N}_+\}$.

例1 证明数列$\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$收敛。

证：对$\forall n\in\mathbf{N}_+$，

$$\begin{aligned}
& \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
= \ & 1+\sum_{k=1}^n \frac{(n+1)(n+1-1)(n+1-2)\cdots(n+1-k+1)}{k!}\frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\
= \ & \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
> \ & 0,
\end{aligned}$$

故$\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$是单调增数列。

而当$n>2$时，

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\le 1+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\
&< 2+\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} \\
&= 2+\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \\
&= 2+\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&< 3,
\end{aligned}$$

故$\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$有上界。

所以由单调收敛定理知数列$\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$收敛。

注1 记$e=:\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，它是一个无理数（以后用“Taylor 公式”证明），其前六位数字是

$$e\approx 2.71828.$$

例2 设$a>0,\ b>0.$ 令$x_1=a,\ \ x_{n+1}=\sqrt{b+x_n}\ \ (n=1,2,\cdots)$，证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

证：由归纳法知

$$x_n>0\ \ (n=1,2,\cdots).$$

而对$\forall n\in\mathbf{N}_+$，

$$\begin{aligned}
x_{n+2}-x_{n+1} &= \sqrt{b+x_{n+1}}-\sqrt{b+x_n} \\
&= \frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{b+x_{n+1}}+\sqrt{b+x_n}}.
\end{aligned}$$

(1)若$x_1 \geq x_2$，即$a \geq \sqrt{b+a}$时，则由上知$\{x_n\}$是单调非增数列且以0为下界，故由单调收敛准则知$\{x_n\}$收敛于$\inf\{x_n|n \in \mathbf{N}_+\}$. 记$A =: \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，则由

$$x_{n+1} = \sqrt{b+x_n},$$

得

$$x_{n+1}^2 = a + x_n.$$

令上式$n \to +\infty$，得

$$A^2 = b + A.$$

解上式A得$A = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$，故

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}.$$

(2)若$x_1 \leq x_2$，即$a \leq \sqrt{b+a}$时，则由上知$\{x_n\}$是单调非减数列。下证$\{x_n\}$以$A =: \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$为上界。由$a \leq \sqrt{b+a}$得$a^2 - a \leq b$, 即$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1+4b}{4}$，故

$$a \leq \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$$

所以$x_1 \leq A$. 假若$x_n \leq A$，则

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{b+x_n} \\ &\leq \sqrt{b+A} \quad (\text{归纳假设}) \\ &= A. \end{aligned}$$

所以由归纳法知$\{x_n\}$以$A =: \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$为上界。于是由单调收敛准则知$\{x_n\}$收敛于$\sup\{x_n|n \in \mathbf{N}_+\}$. 记$B =: \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，则由

$$x_{n+1} = \sqrt{b+x_n},$$

得

$$x_{n+1}^2 = a + x_n.$$

令上式$n \to +\infty$，得

$$B^2 = b + B.$$

解上式B得$B = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$，故

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}.$$

例3

设$a > 0,\ b > 0$. 令$x_1 = a,\ \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$，，证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

证：由归纳法知

$$x_n > 0 \ \ (n \in \mathbf{N}_+).$$

对$\forall n \in \mathbf{N}_+$，

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{x_n}\right) \\ &\geq \sqrt{b}, \end{aligned}$$

因此当$n \geq 2$时，

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1,$$

故$\{x_n\}_{n\geq 2}$是单调非增数列，于是

$$\sqrt{b} \leq x_n \leq x_2 \quad (n \geq 2),$$

由单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛。记$A =: \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，则$\sqrt{b} \leq A$. 令$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{b}{x_n}\right)$ 中$n \to +\infty$，得

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{b}{A}\right),$$

解上式A得$A = \sqrt{b}$，故$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{b}$.

定理2（区间套定理）

假定$\{[a_n, b_n]\}(n \in \mathbf{N}_+)$是一列闭区间，满足下列条件：

(1). $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n \in \mathbf{N}_+$；

(2). $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

则存在唯一$\xi \in R$，满足

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad \forall n \in \mathbf{N}_+.$$

证：先证存在性。由条件(1)知，

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \ n \in \mathbf{N}_+$$

因此$\{a_n\}$是单调非减数列，且以b_1为上界；$\{b_n\}$是单调非增数列，且以a_1为下界。由单调收敛定理知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛。记$A =: \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$，$B =: \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$，则

$$a_n \leq A, \quad B \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}_+.$$

由条件(2)知，

$$\begin{aligned} B - A &=: \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n \\ &= \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) \quad \text{（极限的四则运算）} \\ &= 0, \end{aligned}$$

故$A = B$，于是

$$a_n \leq A = B \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}_+.$$

记$\xi = A$，则$\xi \in \mathbf{R}$，满足

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad \forall n \in \mathbf{N}_+.$$

再证唯一性。若$\eta \in \mathbf{R}$，满足

$$\eta \in [a_n, b_n], \quad \forall n \in \mathbf{N}_+,$$

则

$$|\xi - \eta| \leq b_n - a_n, \quad \forall n \in N_+.$$

令$n \to +\infty$，则由极限的保号性得，

$$|\xi - \eta| \leq 0,$$

故$\eta = \xi$.

4.2 子列及Bolzano定理

定义1 设$\{a_n\}$是一个数列。若正整数数列

$$n_1, n_2, n_3, \cdots$$

满足

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots,$$

则称数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots$$

为数列$\{a_n\}$的一个子列，简记该子列为$\{a_{n_k}\}$.

注1 $n_k \geq k$.

例1 设$\{a_{n_k}\}$为数列$\{a_n\}$的一个子列。若$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, 则$\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$.

证：$\underline{\forall \varepsilon > 0}$，由

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A,$$

$\underline{\exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}_+}$，当$n > N_\varepsilon$时，有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

故当$\underline{k > N_\varepsilon}$时，由于$n_k \geq k > N_\varepsilon$，所以

$$\underline{|a_{n_k} - A| < \varepsilon},$$

故

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = A.$$

例2 设$\{a_n\}$是一个数列。若其子列$\{a_{2k-1}\}$和子列$\{a_{2k-1}\}$都收敛于A，则数列$\{a_n\}$收敛于A.

证：$\underline{\forall \varepsilon > 0}$，由

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k-1} = A,$$

$\exists N_1 \in \mathbf{N}_+$，当$k > N_1$时，有

$$|a_{2k-1} - A| < \varepsilon;$$

再由

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = A,$$

$\exists N_2 \in \mathbf{N}_+$，当$k > N_2$时，有

$$|a_{2k} - A| < \varepsilon.$$

取$\underline{N_\varepsilon =: 2N_1 + 2N_2}$，则$N_\varepsilon \in \mathbf{N}_+$，当$\underline{n > N_\varepsilon}$时，

(1)若n为奇数，$n = 2k-1$，则由$2k-1 > N_\varepsilon > 2N_1$得$k > N_1$，于是

$$|a_n - A| = |a_{2k-1} - A| < \varepsilon;$$

(2)若n为偶数，$n = 2k$，则由$2k > N_\varepsilon > 2N_2$得$k > N_2$，于是

$$|a_n - A| = |a_{2k} - A| < \varepsilon.$$

综上，总有
$$\underline{|a_n - A| < \varepsilon},$$
所以$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$.

例3

设$a_1 < a_2$，$\lambda \in (0,1)$，
$$a_{n+2} = \lambda a_n + (1-\lambda)a_{n+1},\quad n \in \mathbf{N}_+.$$
证明数列$\{a_n\}$收敛，并求
$$\lim_{n\to+\infty} a_n.$$
证：（画图）由归纳法知
$$a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n},\quad n \in \mathbf{N}_+.$$
因此$\{a_{2n-1}\}$是单调增数列，且以a_2为上界；$\{a_{2n}\}$是单调减数列，且以a_1为下界。

由单调收敛定理知数列$\{a_{2n-1}\}$和$\{a_{2n}\}$都收敛。记$A =: \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1}$，$B =: \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}$，则由
$$a_{2n+1} = \lambda a_{2n-1} + (1-\lambda)a_{2n}$$
得
$$A = \lambda A + (1-\lambda)B,$$
因此
$$A = B,$$
即
$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = A.$$
<u>故$\{a_n\}$收敛(于A).</u>

而
$$\begin{aligned} a_{n+2} + \lambda a_{n+1} &=: \lambda a_n + (1-\lambda)a_{n+1} + \lambda a_{n+1} \\ &= a_{n+1} + \lambda a_n \\ &= \cdots \\ &= a_2 + \lambda a_1, \end{aligned}$$
故
$$A + \lambda A = a_2 + \lambda a_1,$$
所以
$$A = \frac{a_2 + \lambda a_1}{1+\lambda},$$
即$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{a_2 + \lambda a_1}{1+\lambda}$.

定理1（Bolzano）

设$\{x_n\}$是一个<u>有界</u>数列，则必存在$\{x_n\}$的一个<u>收敛的子列</u>$\{x_{n_k}\}$.

证：记a_1，b_1分别为数列$\{x_n\}$的下界和上界，则$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1,\right]$ 至少有一个区间含有数列$\{x_n\}$的无穷多项。记这个区间为$[a_2,\ b_2]$. 于是有

$$[a_1,\ b_1] \supseteq [a_2,\ b_2],\quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2},\quad [a_2,\ b_2]\text{含有数列}\{x_n\}\text{的无穷多项}.$$

若a_k，b_k已取好，满足

$$[a_{k-1},\ b_{k-1}] \supseteq [a_k,\ b_k],\quad b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2},\quad [a_k,\ b_k]\text{含有数列}\{x_n\}\text{的无穷多项}.$$

则$\left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k,\right]$ 至少有一个区间含有数列$\{x_n\}$的无穷多项。记这个区间为$[a_{k+1},\ b_{k+1}]$. 由此得到数列$\{a_k\}$和$\{b_k\}$满足

(1). $[a_k, b_k] \supseteq [a_{k+1}, b_{k+1}]$, $k \in \mathbf{N}_+$;

(2). $b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$, $k \in \mathbf{N}_+$;

(3). 区间$[a_k,\ b_k]$含有数列$\{x_n\}$的无穷多项，$k \in \mathbf{N}_+$.

由(3)，可在区间$[a_1,\ b_1]$中任选数列$\{x_n\}$中的一项x_{n_1}，
在区间$[a_2,\ b_2]$中任选数列$\{x_n\}$中的一项x_{n_2}，使得$n_2 > n_1$，
在区间$[a_3,\ b_3]$中任选数列$\{x_n\}$中的一项x_{n_3}，使得$n_3 > n_2$，
$\cdots$.

由此得到数列$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$ $(n_1 < n_2 < n_3 < \cdots)$满足

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k,\ k \in Z_+.$$

由(1)和单调收敛定理知，数列$\{a_k\}$和$\{b_k\}$都收敛；由(2)知，数列$\{a_k\}$和$\{b_k\}$收敛于同一极限值A. 因此由夹挤原理得

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = A.$$

于是得到数列$\{x_n\}$的一个收敛的子列$\{x_{n_k}\}$.

4.3 Cauchy收敛准则

定义1 设$\{a_n\}$是一个数列。如果$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}_+$，当$n, m > N_\varepsilon$时，有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$为Cauchy.

例1 设数列$\{a_n\}$收敛，证明数列$\{a_n\}$为Cauchy列。

证：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$.

$$\left[\begin{array}{l} |a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| <?\varepsilon \\ \Leftarrow \\ |a_n - A| + |a_m - A| <?\varepsilon \\ \Leftarrow \\ |a_n - A| <?\frac{\varepsilon}{2},\quad |a_m - A| <?\frac{\varepsilon}{2}. \end{array}\right]$$

$\underline{\forall\varepsilon>0}$，由$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$知，$\underline{\exists N_\varepsilon\in\mathbf{N}_+}$，当$n>N_\varepsilon$时，有

$$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是$\underline{\text{当}n,m>N_\varepsilon}$时，有

$$\begin{aligned}\underline{|a_n-a_m|} &= |a_n-A+A-a_m|\\ &\le |a_n-A|+|a_m-A|\\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\underline{\varepsilon},\end{aligned}$$

所以$\{a_n\}$为Cauchy列。

例2 设数列$\{a_n\}$为Cauchy列，证明数列$\{a_n\}$有界。

证：因数列$\{a_n\}$为Cauchy列，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon\in\mathbf{N}_+$，当$n,m>N_\varepsilon$时，

$$|a_n-a_m|<\varepsilon,$$

特别地，取$\varepsilon=1$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，

$$|a_n-a_{N+1}|<1,$$

故

$$|a_n|=|a_n-a_{N+1}+a_{N+1}|\le|a_n-a_{N+1}|+|a_{N+1}|<1+|a_{N+1}|,\quad n=N+1,N+2,\cdots.$$

取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1+|a_{N+1}|\}$，有

$$|a_n|<M,\quad n=1,2,\cdots,$$

所以M是$\{a_n\}$的界。

定理1（Cauchy收敛准则） 数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是数列$\{a_n\}$为Cauchy列。

证：必要性证明见例1.

充分性证明. 设数列$\{a_n\}$为Cauchy列。由例2知，数列$\{a_n\}$有界；再由Bolzano定理知，$\{a_n\}$有一个收敛的子列$\{a_{n_k}\}$. 设子列$\{a_{n_k}\}$收敛于A，下证数列$\{a_n\}$也收敛于A. $\underline{\forall\varepsilon>0}$，由$\{a_n\}$为Cauchy列知，$\underline{\exists N_1\in\mathbf{N}_+}$，当$n,m>N_1$时，有

$$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2};$$

再由$\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=A$知，$\exists N_2\in\mathbf{N}_+$，当$k>N_2$时，有

$$|a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\underline{\text{当}n>N_1}$时，有

$$\begin{aligned}\underline{|a_n-A|} &= |a_n-a_{n_{N_1+N_2}}+a_{n_{N_1+N_2}}-A|\\ &\le |a_n-a_{n_{N_1+N_2}}|+|a_{n_{N_1+N_2}}-A|\\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}\quad\text{（因为}n>N_1,\ n_{N_1+N_1}\ge N_1+N_2>N_1;\ \ n_{N_1+N_1}\ge N_1+N_2>N_2\text{）}\\ &= \underline{\varepsilon},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A.$$

例3 设$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin k}{k^2}$，$n=1,2,\cdots$，证明数列$\{a_n\}$收敛。

证：$\forall n,m\in\mathbf{N}_+$, 不妨$m>n$，

$$\begin{aligned}|a_m-a_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\sin k}{k^2}\right| \\ &\le \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2} \\ &< \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{(k-1)k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{m}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right] \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

故$\underline{\forall\varepsilon>0}$，取$N_\varepsilon=:\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当$n,m>N_\varepsilon$时，有

$$\begin{aligned}|a_m-a_n| &< \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

所以数列$\{a_n\}$为Cauchy列。故由Cauchy收敛原理知数列$\{a_n\}$收敛。