《微积分A2》第二十讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年04月27日

Theorem

定理: 设 D 为平面有界闭区域, 其边界 ∂D 为分段光滑曲线, 则对 D 上任意连续可微向量场 $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 成立

$$\iint_D (\mathrm{rot}\, F)\,dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy.$$

即 $$\iint_D (Q_x - P_y)\,dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy.$$

Theorem

定理: 设 D 为平面有界闭域, $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上连续可微, 且 $Q_x - P_y \equiv 1$, 则区域 D 面积可如下表为线积分

$$|D| = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

证: 由 Green 公式可知

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dxdy = \iint_D 1 dxdy = |D|.$$

证毕. □

对于任意平面有界区域 D, 分别取

$$(P, Q) = (0, x), \quad (-y, 0), \quad \left(\frac{-y}{2}, \frac{x}{2}\right),$$

则 D 面积可表为

$$|D| = \int_{\partial D} xdy = \int_{\partial D} -ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy.$$

例: 求椭圆盘 D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 的面积, 这里 $a, b > 0$.

解: 椭圆周 ∂D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 有参数方程 $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$. 显然参数 θ 与边界椭圆周 ∂D 的正定向(逆时针)协调. 因此

$$|D| = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[-b\sin\theta(a\cos\theta)' + a\cos\theta(b\sin\theta)'\Big]d\theta$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta = \pi ab.$$

解答完毕.

面积测量仪

根据上述面积的线积分表示，人们设计出了各种面积测量仪器，广泛用于科学的各个领域．例如，测量植物叶子或飞禽翅膀的面积，肿瘤断面的面积，以及森林覆盖面面积等．如图是一个面积测量仪器．

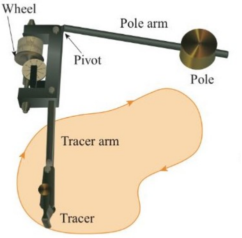


FIGURE 5

A Keuffel and Esser polar planimeter

Theorem

定理: 设平面向量场 $\mathbf{F}=(P,Q)$ 是平面单连通区域 D 上的连续可微. 若 $\mathbf{F}$ 无旋, 则场 $\mathbf{F}$ 是保守场(即梯度场).

证: 对域 D 中任意简单闭路径 C^+, 由于 D 为单连通, 故由 C^+ 所包围的闭区域, 记作 D_1, 包含在 D 中. 于是由 Green 公式, 以及无旋假设 $\operatorname{rot}\mathbf{F}=0$ 得

$$\int_{C^+}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_{D_1}(\operatorname{rot}\mathbf{F})dxdy=0.$$

这说明场 $\mathbf{F}$ 在 D 上沿着任意简单闭路径的积分为零. 而后者等价于场 $\mathbf{F}$ 为保守场(即梯度场). 证毕. □

Definition

定义: 设 $\mathbf{F} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ 为平面域 $\mathbf{D}$ 上的连续向量场, $\mathbf{C}^+$ 是 $\mathbf{D}$ 内的一条简单闭曲线, 逆时针为其正向. 记 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{n}$ 为定向曲线 $\mathbf{C}^+$ 的单位切向量和单位外法向量, 则分别称如下两个闭路径积分

$$\oint_{\mathbf{C}^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds, \qquad \oint_{\mathbf{C}^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

为场 $\mathbf{F}$ 关于闭路径 $\mathbf{C}^+$ 的环量(circulation) 和通量(flux)

注: 环量积分 $\oint_{\mathbf{C}^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ 就是场 $\mathbf{F}$ 关于定向闭路径 $\mathbf{C}^+$ 的第二型线积分.

假设向量场 $\mathbf{F}$ 平面流体流动的速度场，则

(i) 环量积分 $\oint_{C+} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$ 表示单位时间里流体沿着环路 C^+ 的流量；

(ii) 通量积分 $\oint_{C+} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ 表示单位时间里流体穿过环路 C^+ 由内向外的流出的流量.

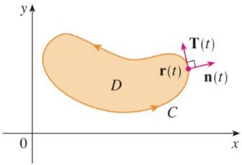
<u>回忆</u>：当 $\mathbf{F}$ 为力场时，积分 $\oint_{C+} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$ 的物理意义是，力场 $\mathbf{F}$ 关于质点沿着闭路径 C^+ 运动一周所作的功.

闭路径的单位切向量与单位法向量之表示

假设平面闭路径 C^+ 的正向(如通常规定的)为逆时针，且 C^+ 有正则参数方程 $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, 参数与定向协调，则闭路径 C^+ 的单位切向量 T 和单位外法向 n 可表为

$$T(t) = \frac{1}{|r'(t)|}(x'(t), y'(t)), \quad n(t) = \frac{1}{|r'(t)|}(y'(t), -x'(t)).$$

正法向具有上述形式的理由：由图可知向量组 n, T 构成右手系，或等价地，以 n, T 分别为第一行二行的二阶行列式为 1. 故向量 n 必有上述表示.



Definition

定义: 设 $\mathsf{F} = (\mathsf{P}, \mathsf{Q})$ 是平面域 D 的向量场, 连续可微.

(i) 称 $\mathrm{rot}(\mathsf{F}) = \mathsf{Q}_x - \mathsf{P}_y$ 为场 F 的旋度 (rotation 或 curl);

(ii) 称 $\mathrm{div}(\mathsf{F}) = \mathsf{P}_x + \mathsf{Q}_y$ 为场 F 的散度 (divergence).

注: 旋度也常记作 $\mathrm{curl}(\mathsf{F})$, 即 $\mathrm{curl}(\mathsf{F}) = \mathsf{Q}_x - \mathsf{P}_y$.

于是通量积分可表为

$$\oint_{C^+}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})ds=\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{(y'(t),-x'(t))}{|\mathbf{r}'(t)|}|\mathbf{r}'(t)|dt$$

$$=\int_a^b[P(x(t),y(t))y'(t)-Q(x(t),y(t))x'(t)]dt$$

$$=\int_{C^+}Pdy-Qdx=\iint_D(P_x+Q_y)dxdy.$$

由此得到 Green 公式的通量形式

$$\oint_{C^+}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})ds=\iint_D \mathrm{div}(\mathbf{F})dxdy.$$

由于之前的 Green 公式

$$\int_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy$$

可以写作如下

$$\oint_{\partial D^+} F \cdot Tds = \iint_D \mathrm{rot}(F)dxdy.$$

因此上述公式可称为 Green 公式的旋度形式.

定理: 设 D 为平面单连通开区域，$F = (P, Q)$ 为 D 上 C^1 向量场，则以下四件事情等价.

(i) 闭路径积分为零；即对 D 中任意闭路径 C^+，$\oint_{C^+} F \cdot dr = 0$;

(ii) 积分与路径无关；即对任两点 $A, B \in D$，以及任意以 A为起点，以 B 为终点的路径 C_{AB}，积分 $\oint_{C_{AB}} F \cdot dr$ 的值，仅与点 A, B 的位置有关，而与路径 C_{AB} 的选择无关；

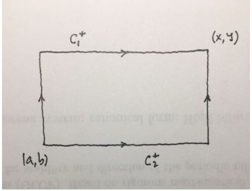
(iii) 场 F 是梯度场，即存在 D 上 C^1 函数 $f(x, y)$，使得 $\nabla f = F$;

(iv) 场 F 无旋，即 $\mathrm{rot}(F) = 0$，亦即 $Q_x = P_y$.

假设平面场 F 在区域 D 上积分与路径无关，则场 F 是梯度场，即存在 C^1 函数 $f(x,y)$，使得 $\nabla f = F$. 若 D 是矩形区域，则势函数可以表如下积分形式

$$f(x,y) = \int_a^x P(u,y)du + \int_b^y Q(a,v)dv, \ (\text{沿着路径 } C_1^+ \text{ 积分})$$

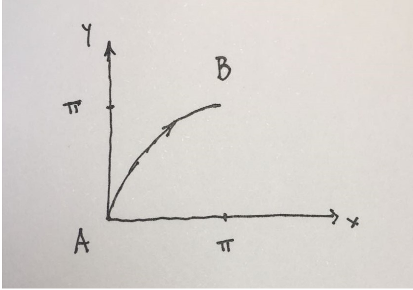
$$\text{或 } f(x,y) = \int_a^x P(u,b)du + \int_b^y Q(x,v)dv. \ (\text{沿着路径 } C_2^+ \text{ 积分})$$



例: 计算线积分

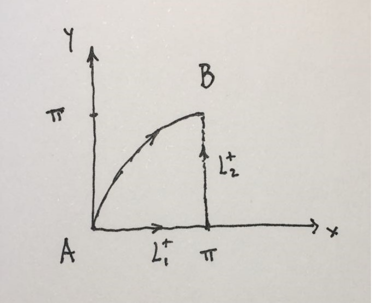
$$J = \int_{C_{AB}^{+}} (e^y + \sin x)dx + (xe^y - \cos y)dy,$$

其中 C_{AB} 为圆周 $(x-\pi)^2 + y^2 = \pi^2$ 的一部分, $0 \le x \le \pi$, $y \ge 0$, 起点 $A = (0,0)$, 终点 $B = (\pi, \pi)$. 如图所示.



例子续一

解: 直接计算这个线积分有点麻烦. 故另寻途径. 记 $P(x,y)=e^y+\sin x$, $Q(x,y)=xe^y-\cos y$, 则 $Q_x=e^y=P_y$. 这表明场 $F=(P,Q)$ 在全平面是无旋的. 故场 F 在全平面上积分与路径无关. 因此为了积分方便, 取新的积分路径 $L_1^+\cup L_2^+$, 如图所示.



于是

$$J = \int_{L_1^+ \cup L_2^+} Pdx + Qdy$$

$$= \int_0^{\pi} (1 + \sin x)dx + \int_0^{\pi} (\pi e^y - \cos y)dy$$

$$= \pi + 2 + \pi(e^{\pi} - 1) = 2 + \pi e^{\pi}.$$

另解: 先求势函数, 再计算积分. 为求势函数, 我们考虑微分式 $Pdx + Qdy$, 对其作适当组合得

$$(e^y + \sin x)dx + (xe^y - \cos y)dy$$

$$= (e^y dx + xe^y dy) + \sin x dx - \cos y dy$$

$$= d(xe^y) - d\cos x - d\sin y = d(xe^y - \cos x - \sin y).$$

这表明 $f(x,y) = xe^y - \cos x - \sin y$ 是场 $F = (P, Q)$ 的势函数.

因此根据线积分基本定理得

$$J = \int_{C^+_{AB}} (e^y + \sin x)dx + (xe^y - \cos y)dy = f(B) - f(A)$$

$$= f(\pi, \pi) - f(0, 0) = \pi e^{\pi} + 1 - (-1) = \pi e^{\pi} + 2.$$

解答完毕.

Definition

<u>定义</u>: (i) 形如 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的方程称为一阶对称的常微分方程; (ii) 如存在连续可微函数 $f(x,y)$, 使得 $df(x,y) = P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, 则称方程 $Pdx+Qdy=0$ 为全微分方程或恰当方程(exact equations), 并且称 $f(x,y)=K$ 是方程 $Pdx+Qdy=0$ 的一般解(通解).

<u>注</u>: 对称方程 $Pdx+Qdy=0$ 对应了一个向量场 $F=(P,Q)$.

显然方程 $Pdx+Qdy=0$ 是恰当方程 $\Longleftrightarrow$ 场 F 是梯度场, 即存在连续可微函数 $f(x,y)$, 使得 $\nabla f=F$, 亦即 $f_x=P$ 且 $f_y=Q$.

例：求解微分方程

$$\left(\ln y - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\frac{x}{y} - \ln x\right)dy = 0, \quad x, y > 0.$$

解：记

$$P(x,y) = \ln y - \frac{y}{x}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{y} - \ln x,$$

则 $Q_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = P_y$. 故向量场 $F = (P, Q)$ 是无旋场. 由于场 F 的定义域(第一象限)为单连通, 故场 F 是梯度场, 因此方程 $Pdx + Qdy = 0$ 是恰当方程. 以下求势函数. 将方程重新组合如下

$$\frac{x}{y}dy - \frac{y}{x}dx + (\ln y)dx - (\ln x)dy = 0.$$

上式可写作

$$xd(\ln y) - yd(\ln x) + (\ln y)dx - (\ln x)dy = 0$$

或

$$d[x(\ln y) - y(\ln x)] = 0.$$

由此即得势函数为 $x(\ln y) - y(\ln x)$. 于是方程 $Pdx + Qdy = 0$ 的通解为 $x(\ln y) - y(\ln x) = K$, 其中 K 为任意常数. 解答完毕.

Definition

定义: 若存在连续可微函数(非常数) $\mu(x,y)$, 使得方程 $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ 为恰当方程, 则称函数 $\mu(x,y)$ 为方程 $P dx + Q dy = 0$ 的一个积分因子 (an integrating factor). 进一步设 $f(x,y)$ 是恰当方程 $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ 的势函数, 则 $f(x,y) = K$ 也称为原方程 $P dx + Q dy = 0$ 的通解.

例: 考虑方程 $y\,dx + (x^2y - x)dy = 0$. 记 $P = y$, $Q = x^2y - x$, 则 $P_y = 1$, $Q_x = 2xy - 1$. 因此方程为非恰当方程. 由观察知, 用 x^{-2} 乘以方程的两端所得到的新方程

$$\frac{y}{x^2}dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

是恰当的, 因为它的左边可改写如下

$$\text{左边} = \frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy + y\,dy = d\left(-\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}\right).$$

因此新方程恰当.

这表明函数 $\mu = x^{-2}$ 是原方程 $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ 的一个积分因子，且其通解为

$$-\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = K. \qquad (*)$$

不难看出在左半平面 $(x < 0)$ 或右半平面 $(x > 0)$ 上，原非恰当方程 $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ 与新方程同解，即它们均有通解 (*). 解答完毕.

依定义知一个连续可微函数(非常数) $\mu(x,y)$ 是非恰当方程 $Pdx + Qdy = 0$ 的积分因子，当且仅当 $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$，即

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y).$$

上述方程通常称作积分因子方程. 这里假设函数 P, Q 的定义域是单连通的.

注: 积分因子方程

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$$

是关于未知函数 $\mu(x, y)$ 的偏微分方程 (partial differential equations, PDE). 通常求解 PDE比求解常微分方程 (ordinary differential equationss, ODE) 更困难. 但在某些情况下, 非恰当方程 $Pdx + Qdy = 0$ 可能有特别形式的积分因子. 比如有单变量积分因子 $\mu(x)$, $\mu(y)$ 等.

考虑非恰当方程 $Pdx + Qdy = 0$. 假设方程有变量分离型积分因子，即有积分因子形如$\mu(x, y) = \mu_1(x)\mu_2(y)$. 将它代入积分因子方程 $\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$ 得

$$\mu_1(x)\mu_2'(y)P - \mu_1'(x)\mu_2(y)Q = \mu_1(x)\mu_2(y)(Q_x - P_y).$$

上式两边同除 $\mu_1(x)\mu_2(y)$ 得

$$\frac{\mu_2'(y)}{\mu_2(y)}P - \frac{\mu_1'(x)}{\mu_1(x)}Q = Q_x - P_y.$$

由上述分析可知，若存在两个一元函数 $g(x)$ 和 $h(y)$，使得

$$h(y)P - g(x)Q = Q_x - P_y,$$

则方程有变量分离型积分因子 $\mu(x, y) = \mu_1(x)\mu_2(y)$，其中

$$\frac{\mu_1'(x)}{\mu_1(x)} = g(x) \quad \Rightarrow \quad \mu_1(x) = e^{\int g(x)dx},$$

$$\frac{\mu_2'(y)}{\mu_2(x)} = h(y) \quad \Rightarrow \quad \mu_2(y) = e^{\int h(y)dy}.$$

例：考虑 $(y-y^2)dx+xdy=0$. 记 $P=y-y^2$, $Q=x$, 则 $Q_x=1$, $P_y=1-2y$. 可见方程非恰当. 以下寻求 $g(x)$ 和 $h(y)$, 使得 $h(y)P-g(x)Q=Q_x-P_y$, 即

$$h(y)(y-y^2)-g(x)x=2y.$$

选取 $g(x)$ 和 $h(y)$ 有多种可能性:

方式一：取 $g(x)=0$, $h(y)=\frac{2}{1-y}$, 则 $h(y)(y-y^2)-g(x)x$ $\frac{2}{1-y}(y-y^2)=2y$. 此时积分因子为

$$\mu=\mu_1\mu_2=e^0e^{\int\frac{2dy}{1-y}}=\frac{1}{(1-y)^2}.$$

以 $\frac{1}{(1-y)^2}$ 乘以方程得

$$\frac{y}{1-y}dx + \frac{x}{(1-y)^2}dy = 0.$$

显然这是一个恰当方程. 因为上式左端可以写作

$$d\left(\frac{xy}{1-y}\right) = 0.$$

由此得通解

$$\frac{xy}{1-y} = c \quad \text{或} \quad xy = c(1-y).$$

例子，续二

方式二：取 $g(x)=\frac{-2}{x}$, $h(y)=\frac{-2}{y}$，则 $h(y)(y-y^2)-g(x)x$

$\frac{-2}{y}(y-y^2)-\frac{-2}{x}x=2y$. 此时积分因子为

$$\mu=\mu_1\mu_2=e^{\int\frac{-2dx}{x}}e^{\int\frac{-2dy}{y}}=(xy)^{-2}.$$

以 $(xy)^{-2}$ 乘以原方程 $(y-y^2)dx+xdy=0$ 得

$$\frac{1-y}{x^2y}dx+\frac{dy}{xy^2}=0 \quad 或 \quad \frac{dx}{x^2y}+\frac{dy}{xy^2}-\frac{dx}{x^2}=0.$$

不难看出上式右边可写作全微分形式

$$d\left(\frac{-1}{xy}+\frac{1}{x}\right)=0.$$

由此得通解

$$\frac{-1}{xy}+\frac{1}{x}=c \quad \text{或} \quad -1+y=cxy.$$

解答完毕.

Theorem

设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 为次数相同的齐次函数，则齐次方程

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 有积分因子 $(xP + yQ)^{-1}$.

Proof.

证明留作补充习题 $\square$

例: 求解方程 $(x+y)dx-(x-y)dy=0.$

解法一: 根据定理可知方程有积分因子

$$(xP+yQ)^{-1}=(x(x+y)-y(x-y))^{-1}=(x^2+y^2)^{-1}.$$

用 $(x^2+y^2)^{-1}$ 乘以方程两边得

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dy=0$$

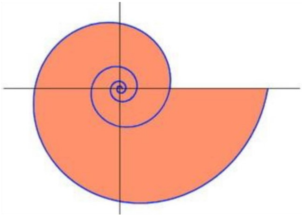
$$\Rightarrow \quad \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}-\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}+c_1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2}=ce^{\arctan\frac{y}{x}}, \qquad c=e^{c_1}>0.$$

在极坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 下，上式(通解)为 $r = ce^{\theta}$.



解法二: 将齐次方程 $(x+y)dx-(x-y)dy=0$ 写作等价方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

作变量替换 $y=zx$, 则

$$xz'+z=\frac{1+z}{1-z}\quad \text{or}\quad xz'=\frac{1+z^2}{1-z}.$$

分离变量并积分得

$$\int\frac{(1-z)dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + c_1 = \ln|x|,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln x^2(1+z^2) = \arctan z + c_1,$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = ce^{\arctan\frac{y}{x}},$$

这里 $c = e^{c_1} > 0$. 在极坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 下, 上式(通解)为对数螺线 $r = ce^{\theta}$. 即得到与解法一相同的解. 解答完毕.

定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为空间有界闭域, 其边界 $\partial\Omega$ 为分片正则曲面, 设 $F = (P, Q, R)$ 为 Ω 上的连续可微向量场, 则

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} F)dxdydz = \iint_{\partial\Omega^+} (F \cdot n)dS, \quad (\text{Gauss 公式})$$

其分量形式为

$$\iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z)dxdydz = \iint_{\partial\Omega^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

其中 $\partial\Omega^+$ 的正法向朝外(相对于区域 Ω 而言), $\operatorname{div} F = P_x + Q_y + R_z$, 称为场 F 的散度(divergence).

同一维情形的 Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$,

以及二维情形的 Green 公式

$$\iint_D \mathrm{rot}(F)dxdy = \oint_{\partial D^+} F \cdot Tds$$

$$\text{or} \iint_D \mathrm{div}(F)dxdy = \oint_{\partial D^+} F \cdot nds,$$

类似, Gauss 公式

$$\iiint_\Omega (\mathrm{div}F)dxdydz = \iint_{\partial\Omega^+} (F \cdot n)dS,$$

表明如下事实：空间向量场的某种导数在域上的积分 = 场在其边界上的积分.

利用 Gauss 公式可以用面积分表示立体体积：设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为空间有界闭域．可取空间向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$，使得 $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 1$，则 Ω 的体积可表示为

$$|\Omega| = \iint_{\partial\Omega^+} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS.$$

例如取 $\mathbf{F} = \frac{1}{3}(x, y, z)$，则

$$|\Omega| = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

例: 设 Ω 为半径为 $R>0$ 的球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$, 其边界即球面 $S: x^2+y^2+z^2=R^2$ 的单位外法向为 $n=(x,y,z)/R$, $(x,y,z)\in S$. 取 $F=\frac{1}{3}(x,y,z)$, 则球体体积为

$$|\Omega| = \iint_S (F\cdot n)dS = \frac{1}{3}\iint_S (x,y,z)\cdot(x,y,z)/RdS$$

$$= \frac{1}{3R}\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS = \frac{1}{3R}\iint_S R^2dS$$

$$= \frac{R}{3}|S| = \frac{R}{3}\cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

这是熟知的球体体积公式.

例：设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，S 所包围的立体即椭球记作 Ω，这里 $a,b,c>0$. 设向量场 $F=(x,y,z)$，利用 Gauss 公式，比较容易计算面积分 $J=\iint_{S^+}(F\cdot n)dS$. 因为由 Gauss 公式得

$$J=\iiint_\Omega \mathrm{div}(F)dV=\iiint_\Omega 3dV=3|\Omega|$$

$$=3\cdot\frac{4\pi abc}{3}=4\pi abc.$$

注一：我们曾经利用椭球面的参数方程计算过这个面积分(参见 Apr20讲义第29页例二)，有相当的计算量. 注二：椭球 Ω: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $|\Omega|=\frac{4\pi abc}{3}$. 因为 $|\Omega|=\iiint_\Omega dV=abc\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}dV=\frac{4\pi abc}{3}$.

例: 记 B 为闭球 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2$, $R>0$, 记 S^+ 为 B 的边界, 即球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, 正法向朝外. 设向量场 $F=(x^2,y^2,z^2)$, 计算面积分

$$J=\iint_{S^+}(F\cdot n)dS.$$

解: 由 Gauss 公式得

$$J=\iiint_B \mathrm{div}(F)dV=\iiint_B 2(x+y+z)dV.$$

对上述三重积分作平移变换 $u=x-a$, $v=y-b$, $w=z-c$, 或者 $x=u+a$, $y=v+b$, $z=w+c$, 则

例子续

$$J = \iiint_{B'} 2(u + v + w + a + b + c)dV,$$

这里 B' 表示球体 $u^2 + v^2 + w^2 \leq R^2$. 根据对称性可知

$$\iiint_{B'} udV = \iiint_{B'} vdV = \iiint_{B'} wdV = 0.$$

因此

$$J = \iiint_{B'} 2(a + b + c)dV$$

$$= 2(a + b + c)|B'| = \frac{8}{3}(a + b + c)\pi R^3.$$

解答完毕.

证明大意: 显然 Gauss 公式

$$\iiint_E (P_x + Q_y + R_z)dxdydz = \iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

成立, 当且仅当以下三个等式均成立.

$$\iiint_E P_x dxdydz = \iint_{S^+} Pdydz, \qquad (1)$$

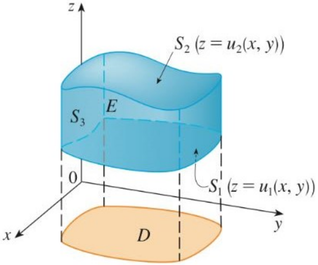
$$\iiint_E Q_y dxdydz = \iint_{S^+} Qdzdx, \qquad (2)$$

$$\iiint_E R_z dxdydz = \iint_{S^+} Rdxdy. \qquad (3)$$

以下证明等式(3). 等式(1)和(2)的证明完全类似. 我们先证明等式(3) 对于如下特殊区域

$$E = \{(x, y, z), (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

成立, 其中 D 为平面闭域, 如图所示.



一般有界闭域可以分解若干个形如 E 的区域之并. 故等式 (3)对一般有界闭域成立. 要证等式 (3), 即要证

$$\iiint_E R_z dxdydz = \iint_{S^+} Rdxdy.$$

对左边的三重积分作先一后二的方法化简如下

$$\iiint_E R_z dxdydz = \iint_D dxdy \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} R_z(x,y,z)dz$$

$$= \iint_D \Big[R(x,y,u_2(x,y)) - R(x,y,u_1(x,y))\Big] dxdy.$$

再考虑等式右端的面积分. 由图可知曲面 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$,

其中 S_2 为顶部曲面, S_1 为底部曲面, S_3 为侧面(有可能不出现). 设侧面 S_3 的单位外法向为 $n_3=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 显然法向 n_3 与 z 轴垂直. 故 $\cos\gamma=0$. 因此

$$\iint_{S_3^+} R\,dxdy=\iint_{S_3}(R\cos\gamma)dS=0.$$

由于顶部曲面 S_2 是函数 $z=u_2(x,y)$ 的图像, 且正法向朝上, 故

$$\iint_{S_2^+} R\,dxdy=\iint_D R(x,y,u_2(x,y))dxdy.$$

参见Apr20讲义第26页定理. 同理

$$\iint_{S_1^+} R dxdy = -\iint_D R(x,y,u_1(x,y))dxdy.$$

于是

$$\iint_{S^+} R dxdy = \iint_{S_1^+} + \iint_{S_2^+} + \iint_{S_3^+}$$

$$= \iint_D \Big[R(x,y,u_2(x,y)) - R(x,y,u_1(x,y))\Big]dxdy.$$

$$= \iiint_E R_z dxdydz$$

即等式(3)成立. 证毕. $\square$

散度的物理意义

设 $\mathbf{F}$ 为空间区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上流体运动的速度场. 设 $P \in \Omega$ 为一个固定点. 以 P 为心, 以 $r > 0$ 为半径的球体, 记作 B_r, 其边界曲面即球面记作 S_r, 则由 Gauss 公式可知

$$\iiint_{B_r} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV = \iint_{S_r^+} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

回忆第二型曲面积分的物理意义, 上式右端项就是单位时间里, 流体由内向外通过球面 S_r 流出的流量. 于上式中两边同除一球体 B_r 的体积即得

$$\frac{1}{|B_r|}\iiint_{B_r}(\mathrm{div}F)dV=\frac{1}{|B_r|}\iint_{S_r^+}(F\cdot n)dS.$$

上式右端由可解释为单位时间里，流体通过球面的平均流量.

对上式左端的三重积分，应用积分中值定理得

$$(\mathrm{div}\,F)(P_r)=\frac{1}{|B_r|}\iint_{S_r^+}(F\cdot n)dS,$$

其中 $P_r\in B_r$. 于上式令 $r\to 0^+$ 得

$$(\mathrm{div}\, F)(P) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|} \iint_{S_r^+} (F\cdot n)dS.$$

上式即给出了散度的物理学意义：$(\mathrm{div}\, F)(P)$ 表示流体速度场在点 P 处流量的密度.

(i) 若 $(\mathrm{div}\, F)(P) > 0$，表明点 P 处有流体喷出，此时点 P 称为源(source)；

(ii) 若 $(\mathrm{div}\, F)(P) < 0$，表明点 P 处流体流失. 此时点 P 称为漏或汇(sink).

注：平面向量场的散度有类似的物理意义.

作业

习题4.6 (page 216): 10, 11(1)(3)(4)(5).

题11(1)提示: 方程有积分因子 e^y.

习题4.7 (page 226-227): 2, 3, 4.

补充习题: 设 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 为定义在全平面上的齐次函数, 次数相同且连续可微. 证明齐次方程 $Pdx + Qdy = 0$ 有积分因子 $(xP + yQ)^{-1}$.