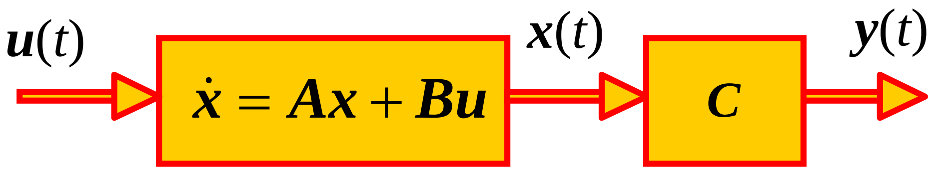
自动控制理论

（二）现代控制理论

自动化系 尚超
中央主楼418A　010-62782459
c-shang@tsinghua.edu.cn

模块3　状态变量的能控性与能观性

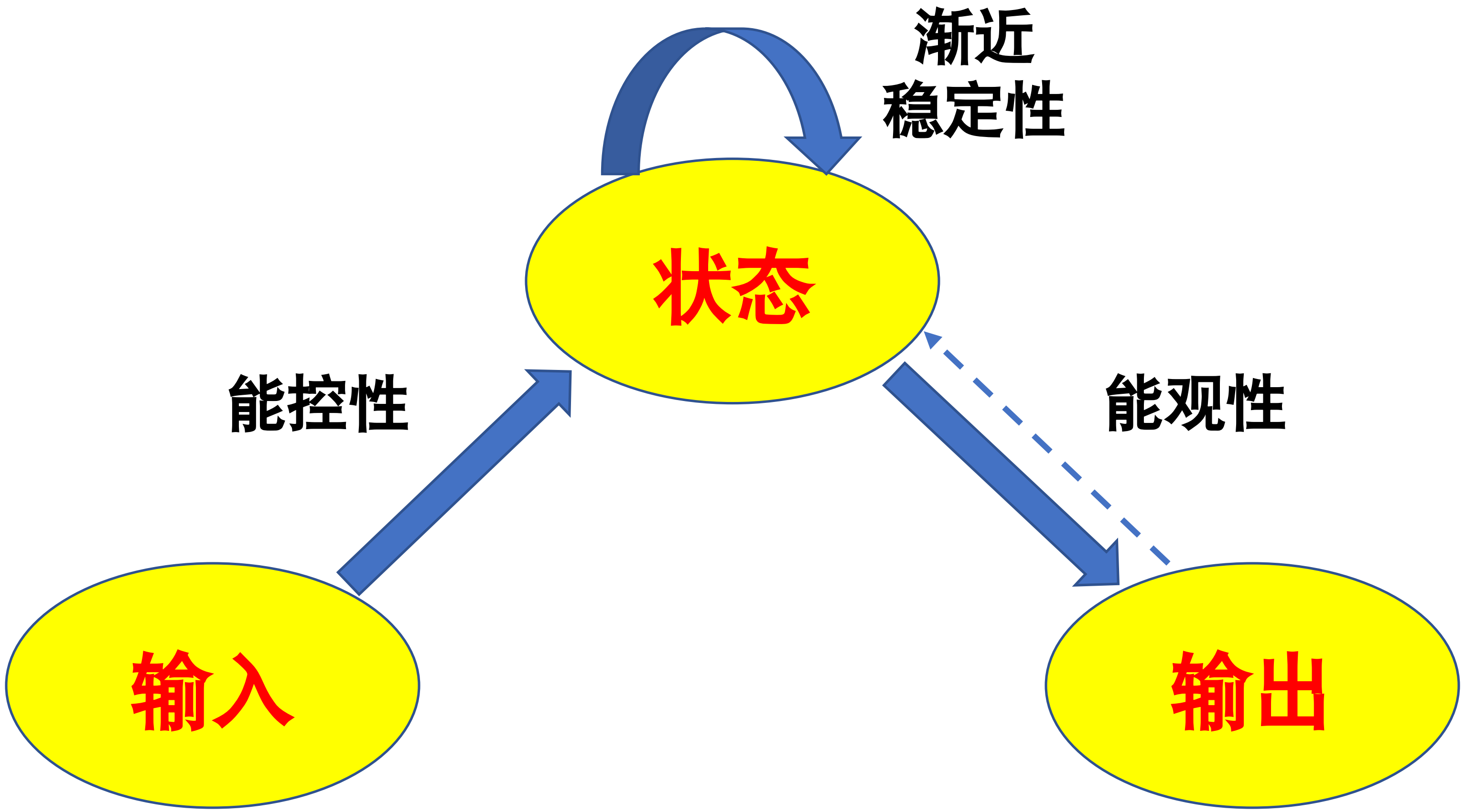
经典控制理论



现代控制理论

- 在现代控制理论中，能控性和能观测性是两个极其重要的概念。它是最优控制和最优估计的理论基础。
- 能控性及能观测性概念是 R.E. Kalman 首先提出的。
  - 能控性（Controllability）是控制作用 $\boldsymbol{u}(t)$ 支配系统状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的能力；回答了 $\boldsymbol{u}(t)$ 能否使 $\boldsymbol{x}(t)$ 作任意转移的问题。
  - 能观（测）性（Observability）是系统的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 反映系统状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的能力。回答能否通过 $\boldsymbol{y}(t)$ 的量测确定状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 的问题。

模块3　状态变量的能控性与能观性

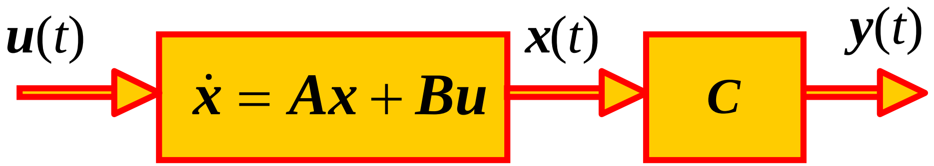


状态变量的能控性与能观测性

- 为什么在经典控制理论中，不涉及能控性和能观测性问题，而在现代控制理论中特别提出状态的能控性和能观测性？
- 这是由于在经典控制理论中，只限于讨论控制作用（输入）对输出的控制。输入与输出这两个量的关系，唯一地由系统的传递函数所确定，只要系统稳定，系统就一定能控。
- 另一方面，系统的输出量本身就是被控量，对于一个实际的物理系统来说，它当然是可以观测到的，所以在经典控制理论中没有必要涉及能控性和能观性。

状态变量的能控性与能观测性

经典控制理论



现代控制理论

- 在现代控制理论中，是把反映系统内部运动状态的状态向量作为被控量，而且它们不一定是实际上可观测到的物理量，至于输出量则是状态向量的线性组合，这就产生了从输入量 $\boldsymbol{u}(t)$ 到状态量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的能控性问题和从输出量 $\boldsymbol{y}(t)$ 到状态量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的能观测性问题。

模块3　状态变量的能控性与能观性

TD3-1　能控性与能观性的定义（课本9.3、9.4）

TD3-2　能控性与能观性的判据（课本9.3、9.4）

TD3-3　对偶性原理（课本9.5）

TD3-4　能控状态分解与能观状态分解（课本9.7）

TD3-5　能控标准型与能观标准型（课本9.8）

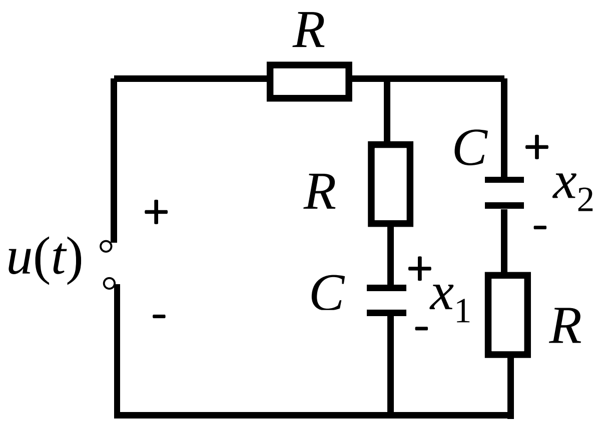
TD3-6　状态空间模型的实现问题（课本9.10）

TD3-1-1 能控性与能观性的定义

- 能控性涉及到一个线性系统输入对状态的影响程度。为了说明这个概念，这里从具体例子入手，说明系统状态确实存在能控性问题，进而引出能控性定义。
- 例：已知系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$，将其展开：$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1\\ \dot{x}_2=-2x_2+u\end{cases}$
- 既然能控性反映的是输入 $u(t)$ 对状态 $\boldsymbol{y}(t)$ 的控制程度，这就首先要求输入与状态发生联系。上述系统中状态变量 x_2 与 u 有联系，有可能用 u 去控制 x_2；而状态变量 x_1 与控制量 u 既没有直接联系又没有间接联系，故不可能用 u 去控制 x_1，就是说状态变量 x_1 是不可控的。

TD3-1-1 能控性与能观性的定义

- 输入和状态有联系，u 就一定可以任意控制 x 吗？
- 例：一电容电阻构成的电路如下图所示，设 $RC = 1/3$，选取状态为两个电容两端的电压，则系统的状态方程为：



$$i_1 = C\frac{dx_1}{dt}, \quad i_2 = C\frac{dx_2}{dt}$$

$$x_1 + RC\dot{x}_1 = x_2 + RC\dot{x}_2$$

$$x_1 + RC\dot{x}_1 + R(C\dot{x}_1 + C\dot{x}_2) = u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

TD3-1-1 能控性与能观性的定义

- 状态 x_1 和 x_2 都与 u 有联系，能否断言此系统一定完全能控?
- 状态转移矩阵为:

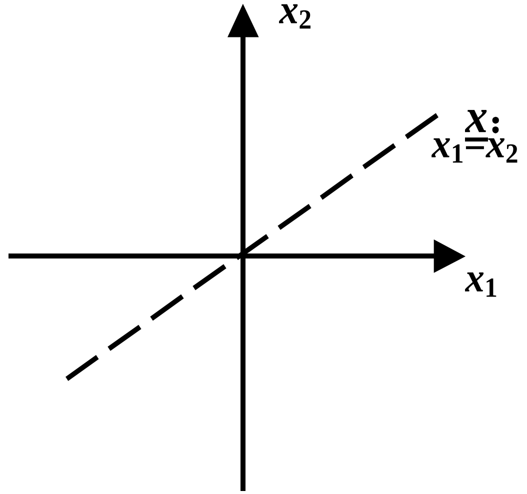
$$e^{\boldsymbol{A}t}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{bmatrix}$$

- 首先，状态方程解中，强制分量的两个状态变量相等

$$\boldsymbol{x}(t)_{0x}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}_{0x}=\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}u(\tau)d\tau=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\int_0^t e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$



- 显然，无论如何选择输入，强制分量总是落在45度直线上

TD3-1-1 能控性与能观性的定义

- 其次，由直线 $x_1 = x_2$ 出发的自由运动也始终在45度直线上。
- 考虑初始状态 $\boldsymbol{x}_0 = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，其中 α 是任意常数，则方程的自由分量（零输入响应）为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t)_{0u} &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{bmatrix}\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \alpha\cdot e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

TD3-1-1 能控性与能观性的定义

- 如果将状态方程作线性变换，则可看得更清楚。系统特征值为

  $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3$

- 取变换阵为：

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 则有：

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

- 即

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

TD3-1-1 能控性与能观性的定义

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

- 展开可得： $\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + u \\ \dot{z}_2 = -3z_2 \end{cases}$
- 显然，状态变量 z_1 和输入 u 有联系，可被控制，而分量 z_2 和 u 没有联系，不可能被 u 所控制，有的文献上称 e^{-t} , e^{-3t} 为模态，显然，模态 e^{-t} 可以被 u 控制，而模态 e^{-3t} 不可能被 u 控制。
- 从以上例子可以看出，如果将系统变换成对角标准型，那么状态的能控性可以看得很清楚。因为在对角标准型中，变量的耦合关系消除了，状态方程变为了单个状态和输入的关系。

TD3-1-2 能控性概念

- 能控性所研究的只是系统在 $\boldsymbol{u}(t)$ 的控制作用下，状态向量

$\boldsymbol{x}(t)$ 的转移情况。这与输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 无关，所以只需要研究系统

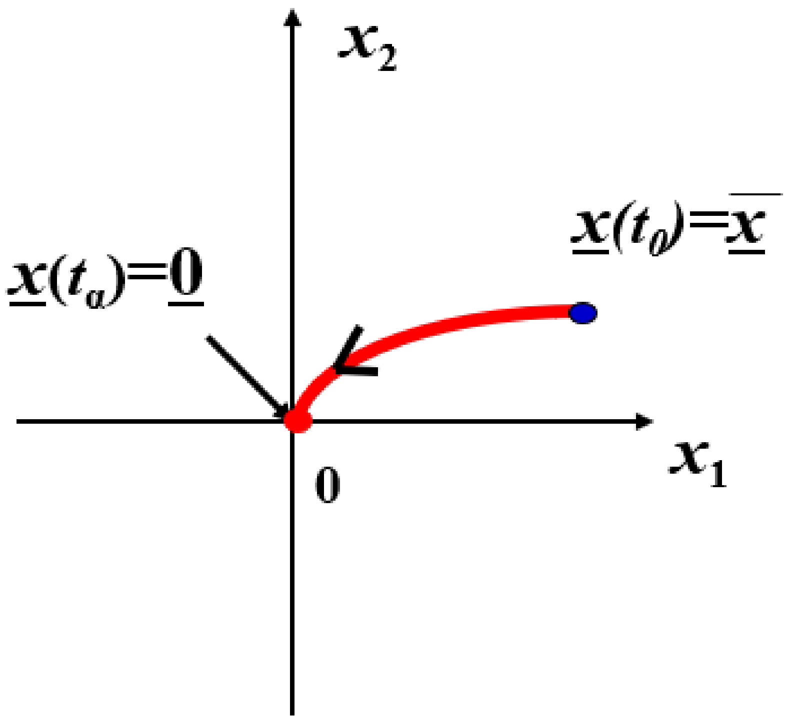
的状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ （*）

- 对初始时刻 t_0，在系统的时间定义域内存在着另一时刻 $t_\alpha > t_0$，可找到无约束的控制向量 $\boldsymbol{u}(t)$，使得系统从初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}$ 推向状态 $\boldsymbol{x}(t_\alpha) = \boldsymbol{0}$，则称系统（*）的这一特定的状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是能（可）控的。

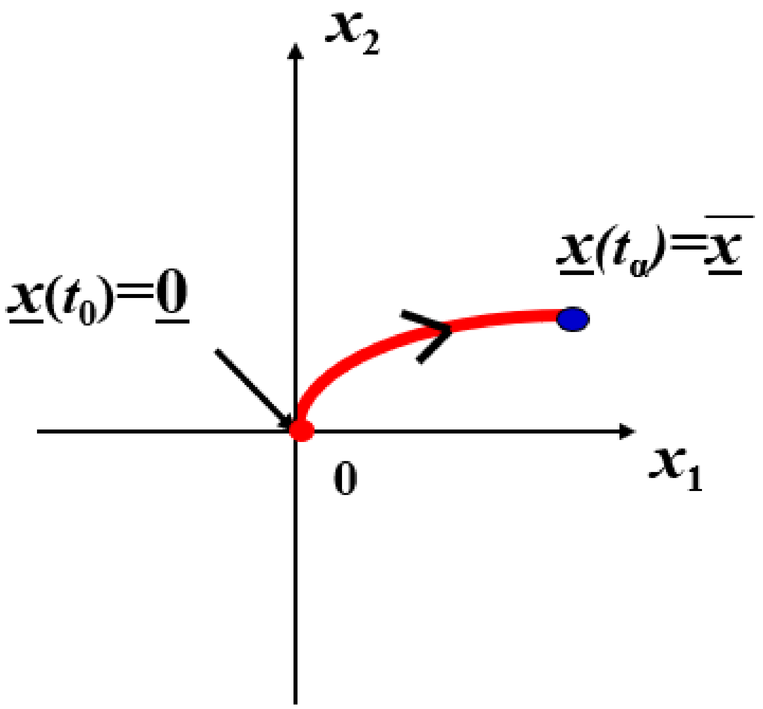
- 若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为状态空间中任意一点，那么就称此系统是状态完全能（可）控的，简称系统是能控的或能控系统。若系统存在某个状态不满足上述条件，那么是不能控系统。

- 给定区间$[t_0, t_\alpha]$，如果存在将系统（*）从零初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ 推向末态 $\boldsymbol{x}(t_\alpha) = \bar{\boldsymbol{x}}$ 的控制作用 $\boldsymbol{u}(t)$，则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是能达到的；若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 可为状态空间的任一点，则称系统（*）式是在区间 $[t_0, t_\alpha]$ 上状态完全能（可）达的。

能控性与能达性的概念



x_2
$\underline{x}(t_0)=\overline{\underline{x}}$
$\underline{x}(t_\alpha)=\underline{0}$
0
x_1



x_2
$\underline{x}(t_\alpha)=\overline{\underline{x}}$
$\underline{x}(t_0)=\underline{0}$
0
x_1

TD3-1-2 能控性概念

- 系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 的解为：$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$
- 根据能控性定义，若系统在 $[t_0, t_\alpha]$ 上是完全能控的，那么有

$$\mathbf{0} = e^{A(t_\alpha - t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t_\alpha} e^{A(t_\alpha-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 可导出：

$$\begin{aligned} x_0 &= -e^{-A(t_\alpha - t_0)}\int_{t_0}^{t_\alpha} e^{A(t_\alpha-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_{t_0}^{t_\alpha} e^{A(t_0-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

- 上式表明，所谓完全能控的系统，就是对任意非零 x_0，满足条件的 $u(\tau)$ 总是存在的。
- 换言之，对于任意无约束控制 $u(t)$，满足上式相应的状态空间中的点 x_0 一定是系统的能控状态。

TD3-1-2 能控性概念

- 系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ 的解为：$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$
- Cont'd：反之，根据定义，如果状态空间中某个非零状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是能达状态，那么它必满足：$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$
- 上式表明，若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为可达态，则必存在满足条件的无约束的控制 $\boldsymbol{u}(t)$，换言之，对完全可达的系统，对任一无约束控制 $\boldsymbol{u}(\tau)$，由上式式导出的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 必是系统的能达态。
- 由于 $e^{\boldsymbol{A}(t_\alpha-t_0)}$ 为非奇异常阵，这表明能控状态和能达态之间为线性非奇异变换的关系。对状态空间中任一能控状态必有相应的一个能达状态存在于状态空间；反之，对状态空间中任一能达状态，必有相应的一个能控状态存在于状态空间，因此，对于线性系统能控性和能达性二者等价。
- 我们将着重讨论能控性，而较少提及能达性。

$$\boldsymbol{x}_0 = -\int_{t_0}^{t_\alpha} e^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

能控性概念的几点说明

- （1）状态空间中某点 $\boldsymbol{x}(t_0)=\bar{\boldsymbol{x}}$，不包括无穷远点和原点在内。$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是非零有限点，无穷远点不讨论，原点特殊对待，即可控又不可控。
- （2）由可控性定义，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是非零有限点，末态是状态空间的原点。从控制工程角度看，视 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为误差，$\bar{\boldsymbol{x}}\rightarrow 0$ 时的可控性，等价于讨论调节问题的可实现性问题。

反之，可达性规定状态空间原点是初始状态，目标状态取为 $\bar{\boldsymbol{x}}$。这相当于跟踪问题的可实现问题。

能控性概念的几点说明

- （3）可控（或可达）时间区间 $[t_0, t_\alpha]$，是系统状态由规定的初态到规定的目标状态所需要的时间间隔，是一个有限的时间区间。对于时变系统，可控的时间区间的大小和初始时刻 t_0 选择有关的；而对于定常系统，可控的时间区间的大小和 t_0 选择无关。

- 因此，对定常系统的状态可控性或可达性都可以不必在定义中特别强调“在 $[t_0, t_\alpha]$ 上”，定常系统在某一个有限时间区间上是完全可控的，则任何一个有限时间空间上都是完全可控的，可达性亦然。

能控性概念的几点说明

- （4）不详细讨论 $\boldsymbol{u}(t)$ 的选择，及回零的轨迹如何？重点在于可控态在状态空间中的分布，控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 几乎没有限制，$\boldsymbol{u}(t)$ 是 t 的分段连续函数，这在工程上很容易满足。
- 我们把全体可控状态的集合记为 $X_c^+[t_0,t_\alpha]$。可以证明 $X_c^+[t_0,t_\alpha]$ 是状态空间 X 的线性子空间。称 $X_c^+[t_0,t_\alpha]$ 为系统的可控子空间。如果 $X_c^+[t_0,t_\alpha]$ 充满整个状态空间，则系统是完全能控的系统。

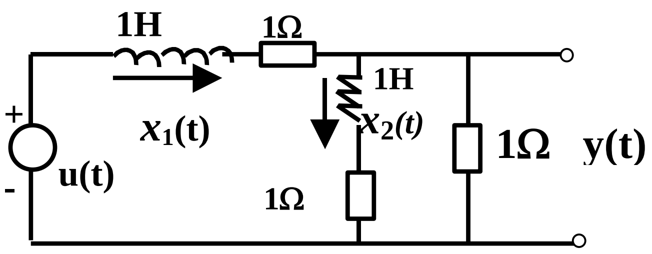
能控性概念的几点说明

- （5）能控状态和能达态之间为线性非奇异变换的关系（上面已详细讨论）。值得指出的，对线性离散时间系统，由于状态转移矩阵不一定是非奇异的，因此，离散系统的状态可控性和可达性是不一致的。
- （6）线性非奇异变换不改变系统的能控性。
- （7）外扰不影响系统的状态可控性。

TD3-1-3 能观性概念

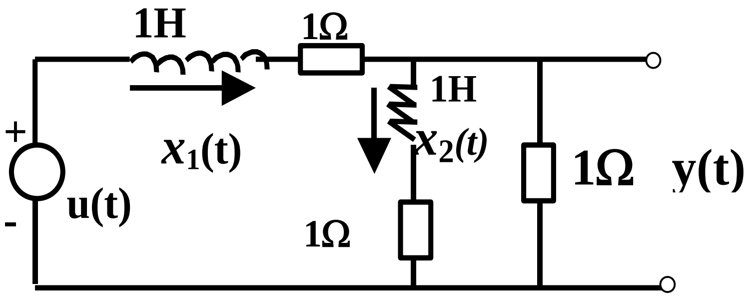
- 能观性涉及到系统的状态由输出的完全反映性。
- 即，能否通过对输出量的有限时间的量测，把系统状态完全识别出来。为说明能观性概念，本节也从具体例子入手说明系统的状态确实存在可观测性问题，从而引出能观性定义。
- 例：下图电路的状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$



- 问：能否从 $y(t)$ 在 $[0, t_\alpha]$ 上的量测值精确地估计出 $x_1(0), x_2(0)$？

TD3-1-3 能观性概念

- 

电路状态方程为：$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \end{cases}$

- 状态转移矩阵为：

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{bmatrix}$$

- 设 $u(t)=0$，则输出电压仅取决于初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$，且为

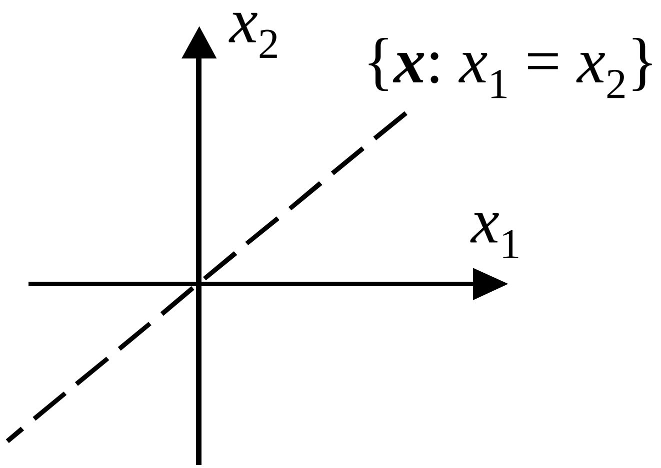
$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \boldsymbol{C}\int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-3t} & -e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \left[x_1(0)-x_2(0)\right]e^{-3t}$$

TD3-1-3 能观性概念

- 从 $y(t)=\left[x_1(0)-x_2(0)\right]e^{-3t}$ 可以看出，无论初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 如何，输出 $y(t)$ 仅取决于差值 $x_1(0)-x_2(0)$。
- 若 $x_1(0)=x_2(0)$，则 $\boldsymbol{x}(0)$ 属于下图所示的子空间，输出恒等于零。因为 $x_1(0)=x_2(0)$ 的初始状态不产生任何输出响应，则称系统是（部分地）不能观的，而且称$\{\boldsymbol{x}: x_1=x_2\}$为不能观状态子空间。



能观性和能重构性的定义

- 考虑如下线性系统: $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$

- 对初始时刻 t_0，如果线性系统在时间定义域内存在着另一时刻 $t_\alpha > t_0$，根据在有限时间区间 $[t_0, t_\alpha]$ 量测到的输出 $\boldsymbol{y}(t)$，能够唯一确定系统在时刻的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，则称状态 $\boldsymbol{x}_0$ 在 $[t_0, t_\alpha]$ 上是能（可）观的。
- 若系统在 t_0 时刻的所有初始状态都是能观的，则称状态是完全能（可）观的，简称系统是能观的或能观系统。
- 如果根据 $[t_0, t_\alpha]$ 上 $\boldsymbol{y}(t)$ 的观测值，能够唯一地确定系统在 t_α 时刻的任意末态 $\boldsymbol{x}_\alpha$，则称系统在 $[t_0, t_\alpha]$ 上是状态完全能（可）重构的。

能观性和能重构性的定义

- 考虑如下状态方程：$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$

- 求其解可得： $\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$

- 令 $t = t_\alpha$： $\boldsymbol{x}(t_\alpha) = e^{\boldsymbol{A}(t_\alpha-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t_\alpha} e^{\boldsymbol{A}(t_\alpha-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$

  其中，$\boldsymbol{u}(\tau)$ 是已知的绝对可积函数，上式中 $e^{\boldsymbol{A}(t_\alpha-t_0)}$ 非奇异，所以若 $\boldsymbol{x}_0$ 可由 $[t_0, t_\alpha]$ 上的量测唯一确定，则也必能唯一确定 $\boldsymbol{x}(t_\alpha)$。

- 反之，若 $x(t_\alpha)$ 可由 $[t_0, t_\alpha]$ 上的量测唯一确定，则同样必能唯一确定 $\boldsymbol{x}_0$，这表明：对于连续时间线性时不变系统，其能观性和能重构性完全等价。

模块3　状态变量的能控性与能观性

TD3-1　能控性与能观性的定义（课本9.3、9.4）

TD3-2　能控性与能观性的判据（课本9.3、9.4）

- 模态判据
- 代数判据

TD3-3　对偶性原理（课本9.5）

TD3-4　能控状态分解与能观状态分解（课本9.7）

TD3-5　能控标准型与能观标准型（课本9.8）

TD3-6　状态空间模型的实现问题（课本9.10）

TD3-2 能控性与能观性的判据

- 考虑如下线性定常系统，其状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

- 若一个系统具有对角标准型形式，则其能控性就很清楚地表现出来，所以常将一个系统化为对角标准型。然后再判别其能控性。
- 一、状态能控性判据形式之模态判据

1）如果系统 Σ=($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) 具有两两相异的特征值，那么其状态完全能控的充要条件是，其对角标准型 $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}$ 中，矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 中不存在全零的行。

如果存在全零的行，那么和该行相对应的状态变量就是不能控的。换言之，该行对应的特征值形式的模态 $e^{\lambda_i t}$ 是不可控模态。

TD3-2-1 能控性判据之模态判据

- 证明:

（1）首先证明系统在非奇异变换后能控性不变。因为$\Sigma=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 和 $\tilde{\Sigma}=(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}})$ 之间为非奇异变换，所以有 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}_0$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}_0=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0$。这表明，如果任意的$\boldsymbol{x}_0$为$\Sigma$的能控状态，则相应的$\tilde{\boldsymbol{x}}_0$也必为 $\tilde{\Sigma}$ 的能控状态。

反之也成立，这说明两者之间的能控等价性。

（2）证明 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 不包含元素全为零的行是 $\Sigma=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 状态完全能控的充要条件。将 $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}$ 写成展开形式

$$
\begin{cases}
\dot{\tilde{x}}_1=\lambda_1\tilde{x}_1+(\tilde{b}_{11}u_1+\tilde{b}_{12}u_2+\cdots+\tilde{b}_{1r}u_r)\\
\dot{\tilde{x}}_2=\lambda_2\tilde{x}_2+(\tilde{b}_{21}u_1+\tilde{b}_{22}u_2+\cdots+\tilde{b}_{2r}u_r)\\
\quad\vdots\\
\dot{\tilde{x}}_n=\lambda_n\tilde{x}_n+(\tilde{b}_{n1}u_1+\tilde{b}_{n2}u_2+\cdots+\tilde{b}_{nr}u_r)
\end{cases}
$$

注意到上述方程组中，状态变量之间不存在耦合。因此，$\tilde{x}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$能控的充要条件是不能同时存在 $\tilde{b}_{i1}=\tilde{b}_{i2}=\cdots=\tilde{b}_{ir}=0$ 。

TD3-2-1 能控性判据之模态判据

- 例：试判断如下系统是否能控 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-5\\ 1\end{bmatrix}u$
- 解：首先将其化为对角标准型。特征方程为：$(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+4 & -5\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-1)=0$
- 得特征值为：$\lambda_1=-5,\ \lambda_2=1$
- 则变换阵：$T=\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ T^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ ➡ $T^{-1}b=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$
- 变换后的对角标准形式为：$\dot{\tilde{x}}=T^{-1}AT\tilde{x}+T^{-1}bu=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$
- 显然有一行元素为零，故系统是不完全能控的，其不能控的模态为 e^{t} 。

TD3−2−1 能控性判据之模态判据

- 例：有如下各系统，请判断其能控性

1）$\dot{x}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}u$

2）$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}u$

3）$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}u$

- 显然，1）和2）是状态完全能控的，而3）是状态不完全能控的。

TD3-2-1 能控性判据之模态判据

- 2）当系统 Σ=($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) 具有多重特征值：$\lambda_1(m_1\text{重}),\lambda_2(m_2\text{重}),\cdots,\lambda_k(m_k\text{重})$，且每一个多重特征值仅对应一个约当块，即 $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \boldsymbol{J}_k\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}$，则系统能控的充要条件为，$\tilde{\boldsymbol{B}}$ 和每个约当块 $\boldsymbol{J}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 最后一行相对应的行元素不全为零。
- 证明：将 $\boldsymbol{J}_i$ 块写成展开形式，有

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_{i1}=\lambda_1\tilde{x}_{i1}+\tilde{x}_{i2}+(\tilde{b}_{11}^{i}u_1+\tilde{b}_{12}^{i}u_2+\cdots+\tilde{b}_{1r}^{i}u_r)\\ \qquad\vdots\\ \dot{\tilde{x}}_{i,m_i-1}=\lambda_i\tilde{x}_{i,m_i-1}+\tilde{x}_{i,m_i}+\left[\tilde{b}_{(m_i-1),1}u_1+\tilde{b}_{(m_i-1),2}u_2+\cdots+\tilde{b}_{(m_i-1),r}u_r\right]\\ \dot{\tilde{x}}_{i,m_i}=\lambda_i\tilde{x}_{i,m_i}+(\tilde{b}_{m_i,1}u_1+\tilde{b}_{m_i,2}u_2+\cdots+\tilde{b}_{m_i,r}u_r)\end{cases}$$

- 上式表明，当且仅当相应于 $\boldsymbol{J}_i$ 的最后一行的行元素 $\tilde{b}_{m_i,1}^{i},\tilde{b}_{m_i,2}^{i},\cdots,\tilde{b}_{m_i,r}^{i}$ 不全为零时，全都和 u_1, u_2, …, u_r 中的至少一个有直接或间接的关联，即 $\tilde{x}_{i1},\tilde{x}_{i2},\cdots,\tilde{x}_{i,m_i}$ 具有能控性。

TD3-2-1 能控性判据之模态判据

- 例：有如下各系统，请判断其能控性

1） $\dot{x} = \left[\begin{array}{cc:c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u \qquad (b_2 \neq 0,\ b_3 \neq 0)$

2） $\dot{\boldsymbol{x}} = \left[\begin{array}{cc:cc} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$

3） $\dot{\boldsymbol{x}} = \left[\begin{array}{cc:cc} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$

- 显然，1）和2）是状态完全能控的，而3）是状态不完全能控的。

TD3-2-1 能控性判据之模态判据

- 当系统的约当标准型存在多个约当块对应同一个特征值时，Σ=($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$)状态完全能控的充要条件是，系数矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 中对应 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 矩阵中相等特征值的全部约当块末行的那些行之间是线性无关的。

1）
$$\dot{\boldsymbol{x}}=\left[\begin{array}{cc|cc}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right]\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

2）
$$\dot{\boldsymbol{x}}=\left[\begin{array}{cc|cc}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right]\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\\ -3 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

- 显然，1）是状态完全能控的，而2）是状态不完全能控的。

TD3-2-2 能控性判据之代数判据

- 考虑如下线性定常系统，其状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

- 四、状态能观性判据形式之代数判据
- 系统 Σ=(***A***, ***B***) 状态完全能控的充要条件是其能控性矩阵

$$\boldsymbol{Q}_k = \left[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\right] \text{ 满秩，即 } \operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_k = n$$

- 证明：根据系统状态的表达式

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

以及能控性定义 & Cayley-Hamilton 定理可证明，此处从略。

TD3-2-2 能控性判据之代数判据

- 例：有如下系统，请判断其能控性

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

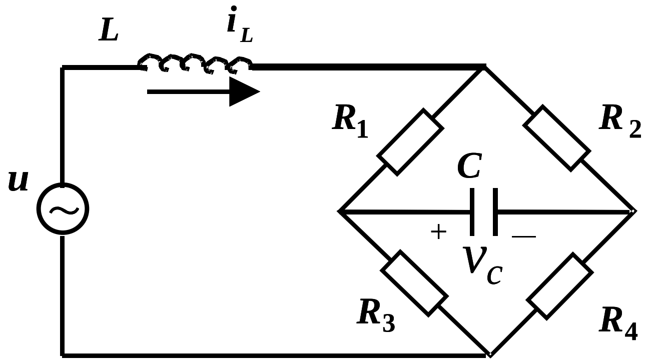
解：
$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- 从 $\boldsymbol{Q}_k$ 前三列可知，$\mathrm{rank}\, \boldsymbol{Q}_k = 3$，因此系统完全能控。

TD3-2-2 能控性判据之代数判据

- 例：右图桥式电路中，若取电感 L 的电流 i_L 及电容 C 的电压 v_C 为状态变量，取 i_L 为输出变量，则系统方程为：



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3 R_4}{R_3+R_4}\right) & \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right) \\ \frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right) & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u$$

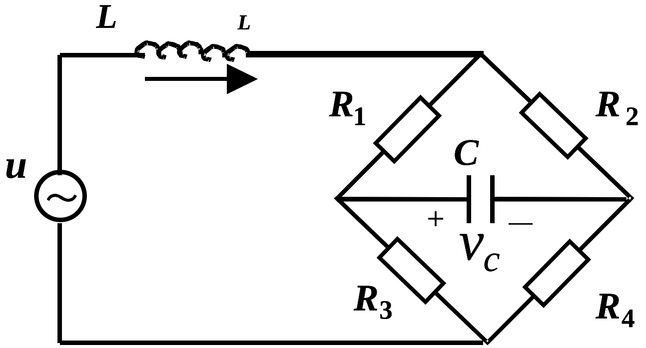
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$$

试判断其能控的条件。

TD3−2−2 能控性判据之代数判据

- 解： $Q_K = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L^2}\left(\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}+\dfrac{R_3 R_4}{R_3+R_4}\right) \\ 0 & -\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{R_4}{R_3+R_4}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\right) \end{bmatrix}$$



- 当 $\dfrac{R_4}{R_3+R_4} \neq \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$ 时，即 $R_1R_4 \neq R_2R_3$ 时 $\text{rank}\, \boldsymbol{Q}_k = 2$

- 当 $R_1R_4 = R_2R_3$ 时 $\text{rank}\, \boldsymbol{Q}_k = 1$，系统为不完全能控

- 这是阻抗电桥的平衡条件，不论怎样施加输入 u，都无法使电容电压 v_C 变化。

TD3-2-2 能控性判据之代数判据

- 例：判断下面系统的能控性：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

解：

$$\boldsymbol{Q}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 & * & * & * \\ 0 & 0 & 13 & * & * & * \\ 2 & 0 & 6 & * & * & * \end{bmatrix}$$

只要计算到第三列就足以判断出 $\boldsymbol{Q}_k$ 是行满秩的，因此其余各列不必再计算，该系统是完全能控的。

代数等价系统的能控性

- 基于非奇异变换 $x(t)=T\tilde{x}(t)$ 可以把系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

变换为如下的等价系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u\\ y=\tilde{C}\tilde{x}+\tilde{D}u\end{cases}$$

其中，$\tilde{A}=T^{-1}AT$，$\tilde{B}=T^{-1}B$，$\tilde{C}=CT$，$\tilde{D}=D$

对此等价系统，其能控性矩阵为：

$$\tilde{Q}_k=\left[\tilde{B},\tilde{A}\tilde{B},\cdots,\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right]=\left[T^{-1}B,T^{-1}AB,\cdots,T^{-1}A^{n-1}B\right]=T^{-1}Q_k$$

由于 T^{-1} 是非奇异矩阵，所以 $\operatorname{rank}\tilde{Q}_k=\operatorname{rank}Q_k$ 。因此，对于非奇异变换，系统的能控性保持不变。

TD3-2-3 能观性判据之模态判据

- 考虑如下线性定常系统，其状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

- 三、状态能观性判据形式之模态判据

1）如果系统 $\Sigma = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 具有两两相异特征值，那么其状态完全能观的充要条件是其对角标准型 $\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u} \\ \tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{u} \end{cases}$ 中，矩阵 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ 不存在全零的列。

如果存在全零的列，那么和该列相对应的状态变量就是不能观的。换言之，该列对应的特征值形式的模态 $e^{\lambda_i t}$ 是不可观模态。

TD3-2-3 能观性判据之模态判据

- 证明：不失一般性，假设 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$。则有：

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_1=\lambda_1\tilde{x}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2=\lambda_2\tilde{x}_2\\ \vdots\\ \dot{\tilde{x}}_n=\lambda_n\tilde{x}_n\end{cases}\qquad \tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{10}\\ e^{\lambda_2 t}\tilde{x}_{20}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\tilde{x}_{n0}\end{bmatrix}\qquad \begin{cases}y_1=\tilde{c}_{11}\tilde{x}_1+\tilde{c}_{12}\tilde{x}_2+\cdots+\tilde{c}_{1n}\tilde{x}_n\\ y_2=\tilde{c}_{21}\tilde{x}_1+\tilde{c}_{22}\tilde{x}_2+\cdots+\tilde{c}_{2n}\tilde{x}_n\\ \vdots\\ y_m=\tilde{c}_{m1}\tilde{x}_1+\tilde{c}_{m2}\tilde{x}_2+\cdots+\tilde{c}_{mn}\tilde{x}_n\end{cases}$$

- 整理并写成矩阵向量形式：

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}\tilde{c}_{11}&\tilde{c}_{12}&\cdots&\tilde{c}_{1n}\\ \tilde{c}_{21}&\tilde{c}_{22}&\cdots&\tilde{c}_{21}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \tilde{c}_{m1}&\tilde{c}_{m2}&\cdots&\tilde{c}_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{10}\\ e^{\lambda_2 t}\tilde{x}_{20}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\tilde{x}_{n0}\end{bmatrix}$$

由于状态变量间无耦合，因此能观的充要条件为

$$\tilde{c}_{1i}=\tilde{c}_{2i}=\cdots=\tilde{c}_{mi}=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

TD3-2-3 能观性判据之模态判据

- 例：给定系统 $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}0&4&5\end{bmatrix}x\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}3&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}x\end{cases}$

  状态不完全能观　　状态完全能观

- 例：给定系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-4&5\\1&0\end{bmatrix}x$， $y=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}x$ ，试判断其能观性。

解：首先将其化为对角标准型。可知，$\lambda_1=-5,\lambda_2=1$，变换矩阵为$T=\begin{bmatrix}-5&1\\1&1\end{bmatrix}$

$$CT=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\end{bmatrix}\Rightarrow$$ 对角标准型为：$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}-5&0\\0&1\end{bmatrix}\tilde{x}\\ y=\begin{bmatrix}3&0\end{bmatrix}\tilde{x}\end{cases}$

显然，不完全能观

TD3-2-3 能观性判据之模态判据

- 2）当系统 Σ=($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$) 具有多重特征值：$\lambda_1(m_1\text{重}), \lambda_2(m_2\text{重}), \cdots, \lambda_k(m_k\text{重})$
- 若每一个多重特征值仅对应一个约当块，则系统状态完全能观的充分必要条件是，其经非奇异变换后的约当标准型

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{J}_k \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

中，$\tilde{C}$ 和每个约当块 J_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 首列相对应的列元素不全为零。

TD3-2-3 能观性判据之模态判据

- 例：已知系统如下：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\left[\begin{array}{cc:cc}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right]\boldsymbol{x} \qquad \dot{\boldsymbol{x}}=\left[\begin{array}{cc:cc}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]\boldsymbol{x}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x} \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

状态完全能观　　　　状态不完全能观

- 3) 当一个多重特征值对应多个约当块时，系统状态完全能观的充要条件是与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有相等特征值的约当块首列相对应的 $\boldsymbol{C}$ 中的列相互线性无关。

TD3-2-4 能观性判据之代数判据

- 考虑如下线性定常系统，其状态方程为：

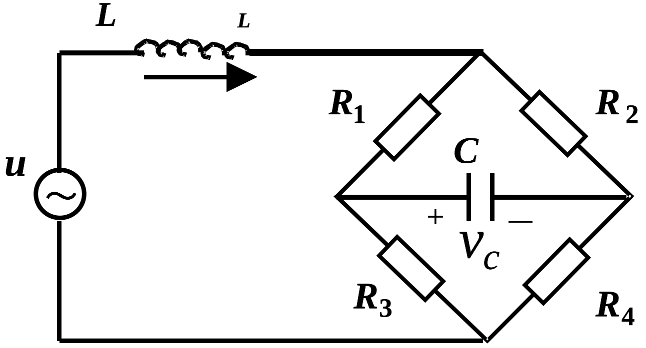
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

- 四、状态能观性判据形式之代数判据
- 系统 Σ=(*A*, *C*) 是状态完全能观的充要条件是其能观性矩阵

$$\boldsymbol{Q}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix} \text{ 满秩，即 } \operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_g = n$$

TD3-2-4 能观性判据之代数判据

- 例：右图桥式电路中，若取电感 L 的电流 i_L 及电容 C 的电压 v_C 为状态变量，取 i_L 为输出变量，则系统方程为：



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3 R_4}{R_3+R_4}\right) & \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right) \\ \frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right) & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$$

试判断其能观性条件。

TD3-2-4 能观性判据之代数判据

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3 R_4}{R_3+R_4}) & \frac{1}{L}(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}) \\ \frac{1}{C}(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}) & -\frac{1}{C}(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$$

- 解：能观性矩阵为：$\boldsymbol{Q}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L}(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}) & \frac{1}{L}(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}) \end{bmatrix}$

显然，当 $R_1 R_4 \neq R_2R_3$ 时，系统是完全能观的。在电桥平衡条件 $R_1 R_4 = R_2R_3$ 成立的情况下，则 $\text{rank}\,\boldsymbol{Q}_g = 1$，系统不完全能观。

TD3-2-4 能观性判据之代数判据

- 例：已知系统

$$a)\ \begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \\ y = [1 \quad -1]\,\boldsymbol{x} \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

- 解：对上述两个系统分别计算如下：

a) $\boldsymbol{CA} = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [-5 \quad 5]$

$$\boldsymbol{Q}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}\,\boldsymbol{Q}_g = 1 < n = 2$$

$\therefore$ 不完全能观

b) $$\boldsymbol{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}\,\boldsymbol{Q}_g = 2 = n$$

$\therefore$ 完全能观

TD3-2-4 能观性判据之代数判据

- 基于非奇异变换 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 可以把系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{cases} \text{变换为如下的等价系统} \begin{cases}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{u}\end{cases}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},\ \tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B},\ \tilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T},\ \tilde{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{D}$

对此等价系统，其能观性矩阵为：

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_g=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{C}}\\ \tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{A}}\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{A}}^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}_g\boldsymbol{T}$$

由于 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异矩阵，所以 $\operatorname{rank}\tilde{\boldsymbol{Q}}_g=\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_g$。因此，对于非奇异变换，系统的能观性保持不变。

模块3　状态变量的能控性与能观性

TD3-1　能控性与能观性的定义（课本9.3、9.4）

TD3-2　能控性与能观性的判据（课本9.3、9.4）

TD3-3　对偶性原理（课本9.5）

TD3-4　能控状态分解与能观状态分解（课本9.7）

TD3-5　能控标准型与能观标准型（课本9.8）

TD3-6　状态空间模型的实现问题（课本9.10）

TD3-3-1 对偶性原理

- 注意到，能控性和能观性在概念、判据均具有形式上的相似性。
- 对偶性原理，是由 R. E. Kalman 提出的。
- 对偶性原理不但揭示了控制系统能控性和能观性之间的对偶关系，而且指明了控制理论的两大基本问题——控制问题和估计问题之间的内在深刻联系。

- 一、能控性和能观性之间的对偶现象

比较能控性和能观性判据条件，容易发现一个有趣的现象，就是它们在数学形式上的对偶性。以连续时间系统为例，列表如下：

TD3-3-1 对偶性原理

	能控性条件	能观性条件
模态判据	对角标准型 $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u \end{cases}$ 中，矩阵 $\tilde{B}$ 中不存在全零的行	对角标准型 $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u \end{cases}$ 中，矩阵 $\tilde{C}$ 中不存在全零的列
代数判据	$Q_k = [B, AB, \cdots, A^{n-1}B]$ 行满秩	$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 列满秩

TD3-3-1 对偶性原理

- 二、对偶性原理
- 考虑如下两个系统:

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1\end{cases}\qquad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2\\ \boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2\end{cases}$$

- 若满足条件: $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1^T,\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{C}_1^T,\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{B}_1^T$ ，则称 Σ_1 和 Σ_2 是互为对偶的，式中

$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ —— n 维状态向量　　$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ —— 控制向量

$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$ —— 输出向量　　$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ —— 系统矩阵

$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ —— 控制矩阵　　$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$ —— 输出矩阵

- 因此，则 Σ_1 的能控性等价于 Σ_2 的能观性，而 Σ_1 的能观性等价于 Σ_2 的能控性。
- 换言之，若 Σ_1 是状态完全能控的（完全能观的），则 Σ_2 就是状态完全能观的（状态完全能控）。

TD3-3-1 对偶性原理

- 对偶性原理的证明：
- 对 Σ_2 而言，若 $n \times mn$ 能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_{k2} = [\boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_2^{n-1}\boldsymbol{B}_2]$ 的秩为 n，而为状态完全能控的，将 $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1^T, \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{C}_1^T, \boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{B}_1^T$ 代入上式，有

$$\boldsymbol{Q}_{k2} = [\boldsymbol{C}_1^T, \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{C}_1^T, \cdots, (\boldsymbol{A}_1^T)^{n-1}\boldsymbol{C}_1^T] = \boldsymbol{Q}_{g_1}^T$$

- 这说明 Σ_1 的能观性矩阵的秩也为 n，所以是完全能观的。
- 同理有

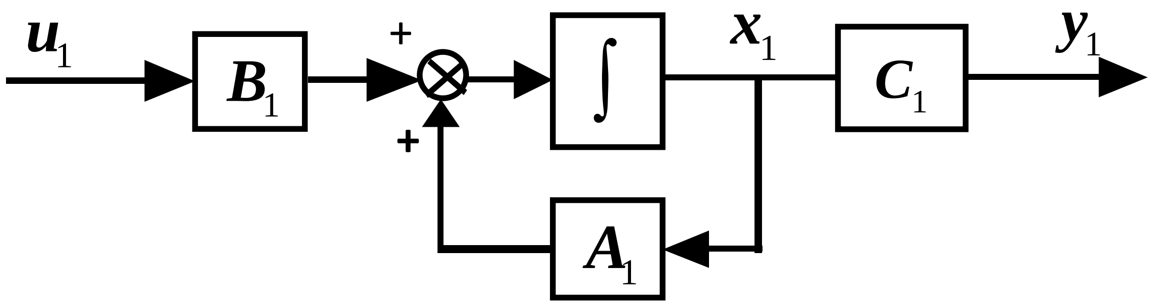
$$\boldsymbol{Q}_{g2}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{C}_2^T, \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{C}_2^T, \cdots, (\boldsymbol{A}_2^T)^{n-1}\boldsymbol{C}_2^T]$$

$$= [\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_1^{n-1}\boldsymbol{B}_1] = \boldsymbol{Q}_{k1}$$

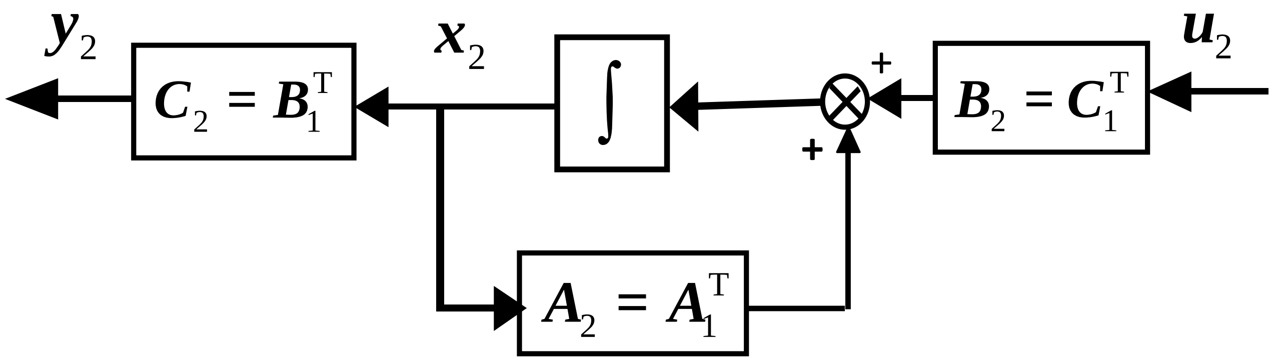
换言之，若 Σ_2 的 $\boldsymbol{Q}_{g2}$ 满秩而为完全能观时，Σ_1 的 $\boldsymbol{Q}_{g1}$ 同样也是满秩且状态完全能控的。

TD3−3−1 对偶性原理

- 系统的方框图



Σ_1 方框图



Σ_2 方框图

互为对偶的系统的关系:

- 输入端与输出端的互换
- 信号传递的反向
- 信号的引出点和信号的综合点的互换
- 对应矩阵（系统矩阵，输入阵与输出阵）互为转置。

TD3-3-1 对偶性原理

- 对偶系统的传递函数矩阵互为转置

$$W_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1} B_1 \qquad W_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1} B_2$$
$$= B_1^{\mathrm{T}}(sI - A_1^{\mathrm{T}})^{-1} C_1^{\mathrm{T}}$$
$$= [C_1(sI - A_1)^{-1} B_1]^{\mathrm{T}} = W_1^{\mathrm{T}}(s)$$

- 对偶系统具有相同的特征方程和相同的特征值

$$|sI - A_2| = |sI - A_1^T| = |sI - A_1|$$

- 一个系统的能观性问题与其对偶系统的能控性问题等价；系统的能控性问题和对偶系统的能观性问题等价。因此，系统的能观性问题由能控性问题的解决而解决，系统的能控性问题因能观性问题的解决而解决。
- 这对控制理论的研究有重要意义。它明确了控制问题和观测问题间的内在联系，使系统状态观测、估计等问题和系统控制问题可相互转化。例如最优控制和最优估计问题之间有内在联系，它们可以相互借鉴。

模块3　状态变量的能控性与能观性

结构分解：能控和能观子空间

- 例：已知系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \\ y = [0 \quad 1 \quad 1]\, \boldsymbol{x} \end{cases}$$

- 列出方程并解出：

$$\begin{cases} x_1 = x_{10}\, e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau \\ x_2 = x_{20}\, e^{-2t} \\ x_3 = x_{30}\, e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

- 输出响应： $y = x_{20}\, e^{-2t} + x_{30}\, e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau) \cdot d\tau$
- 可知 x_2 不受 $u(t)$ 的影响，y 不受 x_{10} 的影响，即任意选择 $u(t)$ 不能使 x_2 达到要求的状态，而无论测得多少个 y 值也不能完全确定 x_{10}。

状态空间模型的能控和能观子空间

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1 \quad 1]\, \boldsymbol{x} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c:c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- 由x_1、x_3构成的空间是能控子空间，由 x_2 构成的空间是不能控子空间；
- 由x_2 、x_3构成的空间是能观子空间，由 x_1 构成的空间是不能观子空间。

TD3-4-1 能控状态分解

- 设定常系数的状态空间表达式如下: $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$

  根据能控性和能观性能够导出某个标准的结构形式。

- 系统不完全能控时，即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_k = \operatorname{rank}[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] = r < n$

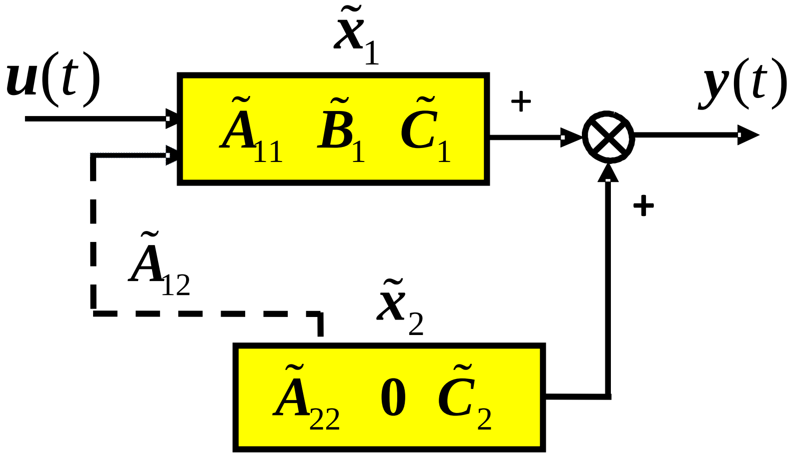
  总可以找到一个适当的变换阵 $\boldsymbol{T}$ 使得系统不完全能控时，即 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 满足状态方程和输出方程的系数矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{12} \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r & \quad n-r \end{matrix} \end{array} \quad \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \quad \tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T} = [\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \quad \tilde{\boldsymbol{C}}_2]$$

  其中，$\tilde{\boldsymbol{B}}_1$ 不全为零。

TD3-4-1 能控状态分解

- 状态变量 $\tilde{x}_1$ 代表的空间称为能控子空间，状态变量 $\tilde{x}_2$ 构成的空间称为不能控子空间。系统的能控状态分解可用下图表示



$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r \\ \\ n-r \end{array} \end{array} \quad \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2]$$

- 任何具有上述形式的实现都有下述两条重要性质：

  1）$r \times r$ 子系统 $\Sigma(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ 是能控的；

  2）$\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$，即子系统的传递函数阵与原系统的传递函数阵相等。

TD3-4-1 能控状态分解

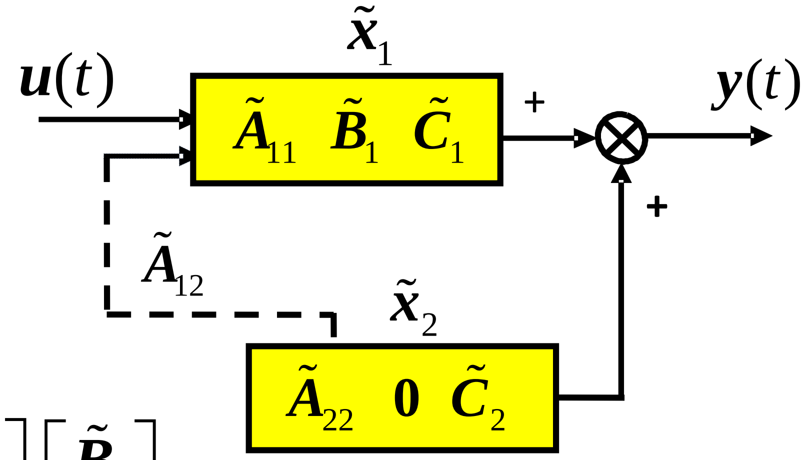
- 首先证明第二条性质:

$$\tilde{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}})^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}$$

$$=[\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \ \ \tilde{\boldsymbol{C}}_2]\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}_{11} & -\tilde{\boldsymbol{A}}_{12} \\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

$$=[\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \ \ \tilde{\boldsymbol{C}}_2]\begin{bmatrix} (s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1} & -(s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1}\boldsymbol{A}_{12}(s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}_{22})^{-1} \\ \boldsymbol{0} & (s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}_{22})^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

$$=\tilde{\boldsymbol{C}}_1(s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}_1$$



- 因此，子系统的传递函数阵与原系统的传递函数阵相等

TD3-4-1 能控状态分解

- 接下来证明第一条性质：$\tilde{Q}_k = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \cdots & \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$

因为 $\tilde{Q}_k = T^{-1}Q_k$，所以$\tilde{Q}_k$ 秩等于 r，那么 $\tilde{Q}_k$ 只可能有 r 个线性无关的行。由于 $\tilde{Q}_k$ 后 $n-r$ 行为全零，那么其前 r 行必线性无关，即 $\mathrm{rank}\left[\tilde{B}_1, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1\right] = r$

- 下面说明 $\mathrm{rank}\left[\tilde{B}_1, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{A}_{11}^{r-1}\tilde{B}_1\right] = r$ 。根据 Cayley Hamilton 定理，对于 r 阶阵 $\tilde{A}_{11}$ 及其特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - \tilde{A}_{11}| = \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \cdots + a_r$，必有：

$$f(\tilde{A}_{11}) = \tilde{A}_{11}^r + a_1\tilde{A}_{11}^{r-1} + \cdots a_r I = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}_{11}^r\tilde{B}_1 + a_1\tilde{A}_{11}^{r-1}\tilde{B}_1 + \cdots a_r\tilde{B}_1 = 0$$

这说明 $\tilde{A}_{11}^r\tilde{B}_1$ 的列可表示为 $\left[\tilde{B}_1, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{A}_{11}^{r-1}\tilde{B}_1\right]$ 列的线性组合，同理可说明 $\tilde{A}_{11}^j\tilde{B}_1, j > r$ 的列也可以如此表示。

- 因此 $\mathrm{rank}\left[\tilde{B}_1, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{A}_{11}^{r-1}\tilde{B}_1\right] = r$ 必成立，否则 $\mathrm{rank}\left[\tilde{B}_1, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1\right] < r$
- 这说明子系统 $\Sigma(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ 一定是能控的。

变换矩阵T的构造方法

- 关于 T 的构造

$$\tilde{Q}_k = T^{-1} Q_k \Rightarrow T \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \cdots & \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = Q_k$$

$$\Downarrow$$

$$T(:,1:r)\left[\tilde{B}_1, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1\right] = Q_k \Rightarrow \boxed{T \text{ 的前 } r \text{ 列张成了 } Q_k \text{ 的列空间}}$$

- 这实际上提出了求取符合要求的变换矩阵的一种方法。T 的构成方法如下:

  1) 选择（能控性矩阵）的 r 个线性无关的列构成 T 的前 r 列;

  2) 任选 T 的其它 $n-r$ 列，使得 $\operatorname{rank} T = n$ 。

变换矩阵T的构造方法

- 例：试求下面状态方程所描述系统的能控子系统。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1 \quad 1]\, \boldsymbol{x} \end{cases}$$

- 解：求出此系统的能控性矩阵：$\boldsymbol{Q}_k = [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

- 下面求矩阵 $\boldsymbol{T}$。首先从 $\boldsymbol{Q}_k$ 列向量中选择两个线性独立的列向量为：$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，

再任选向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，构成 $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 为非奇异矩阵，则：$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

变换矩阵T的构造方法

- 计算:

$$\tilde{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&-4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&3&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}0&-4&2\\1&4&-2\\\hline 0&0&1\end{array}\right]$$

$$\tilde{b}=T^{-1}b=\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c}1\\0\\\hline 0\end{array}\right]$$

$$\tilde{C}=\tilde{C}T=[1\ \ -1\ \ 1]\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&3&0\end{bmatrix}=[1\ \ 2\ \ |-1]$$

因此原系统的能控子系统为: $\Sigma\left(\begin{bmatrix}0&-4\\1&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},[1\ \ 2]\right)$

TD3-4-2 能观状态分解

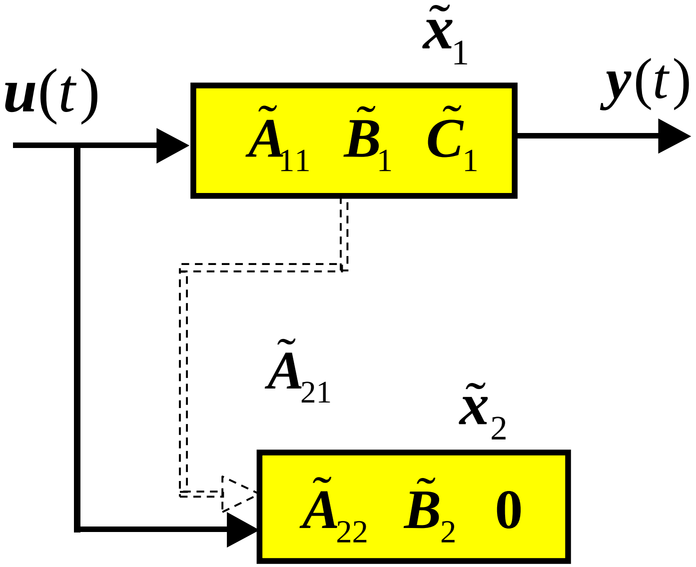
- 设定常系数的状态空间表达式为 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$
- 系统不完全能观时，即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_g^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank}[\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}, \cdots, (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}] = r < n$
- 总可以找到一个适当的变换阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} {\scriptstyle r} \\ {\scriptstyle n-r} \end{matrix}$ ，
  $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 满足状态方程和输出方程的系数矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{11} & 0 \\ \tilde{\boldsymbol{A}}_{21} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix}\begin{matrix} {\scriptstyle r} \\ {\scriptstyle n-r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} {\scriptstyle r} & \quad {\scriptstyle n-r} \end{matrix} \end{array} \qquad \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{B}}_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} {\scriptstyle r} \\ {\scriptstyle n-r} \end{matrix} \qquad \tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T} = [\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \quad 0]$$

- 具有上述形式的实现具有下述两条性质:
- 1) $r \times r$ 子系统 $\Sigma(\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}, \tilde{\boldsymbol{B}}_1, \tilde{\boldsymbol{C}}_1)$ 是能观的。
- 2) $\tilde{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}})^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{C}}_1(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}_1$，即能观子系统的传递函数阵与原系统的传递函数阵相等。

TD3-4-2 能观状态分解

- 状态变量 $\tilde{x}_1$ 构成的空间为能观子空间，状态变量 $\tilde{x}_2$ 构成的空间为不能观子空间，系统的能观状态分解如下图所示。



$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{11} & 0 \\ \tilde{\boldsymbol{A}}_{21} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{B}}_2 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \quad 0]$$

- 构造变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的方法：
  a) 选 $\boldsymbol{Q}_g$（能观性矩阵）中 r 个线性无关的行作为 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的前 r 行；
  b) 任选 $\boldsymbol{T}^{-1}$的其它 n - r 行，使得 rank $\boldsymbol{T}^{-1} = n$。

TD3-4-2 能观状态分解

- 例：求如下系统的能观子系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$

- 解：该系统的能观性矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

- 显然 $\operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_g = 2$，此系统不完全能观，能观状态变量数为2，所以可取非奇异阵：

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TD3-4-2 能观状态分解

- 则:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ \hdashline -5 & 3 & 2 \end{array}\right] \quad \tilde{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- 因此原系统的能观子系统为: $\Sigma\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$

系统的典型构造定理（Kalman分解）

- 同时考虑状态的能控性和能观性，可以导出如下的系统典型构造定理。对系统总可以找到某个相似变换 $\tilde{x} = T^{-1}x$，使它变换为具有如下标准结构的系统。

$$
\begin{cases}
\dot{\tilde{x}} = \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{A}_{11} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \hline 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{array}\right] \tilde{x} + \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] u \\
y = \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{C}_1 & 0 & \tilde{C}_3 & 0 \end{array}\right] \tilde{x}
\end{cases}
, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix}
$$

- 对应的状态变量

$\tilde{x}_1$： 能控且能观状态；

$\tilde{x}_2$： 能控但不能观状态；

$\tilde{x}_3$： 不能控但能观状态；

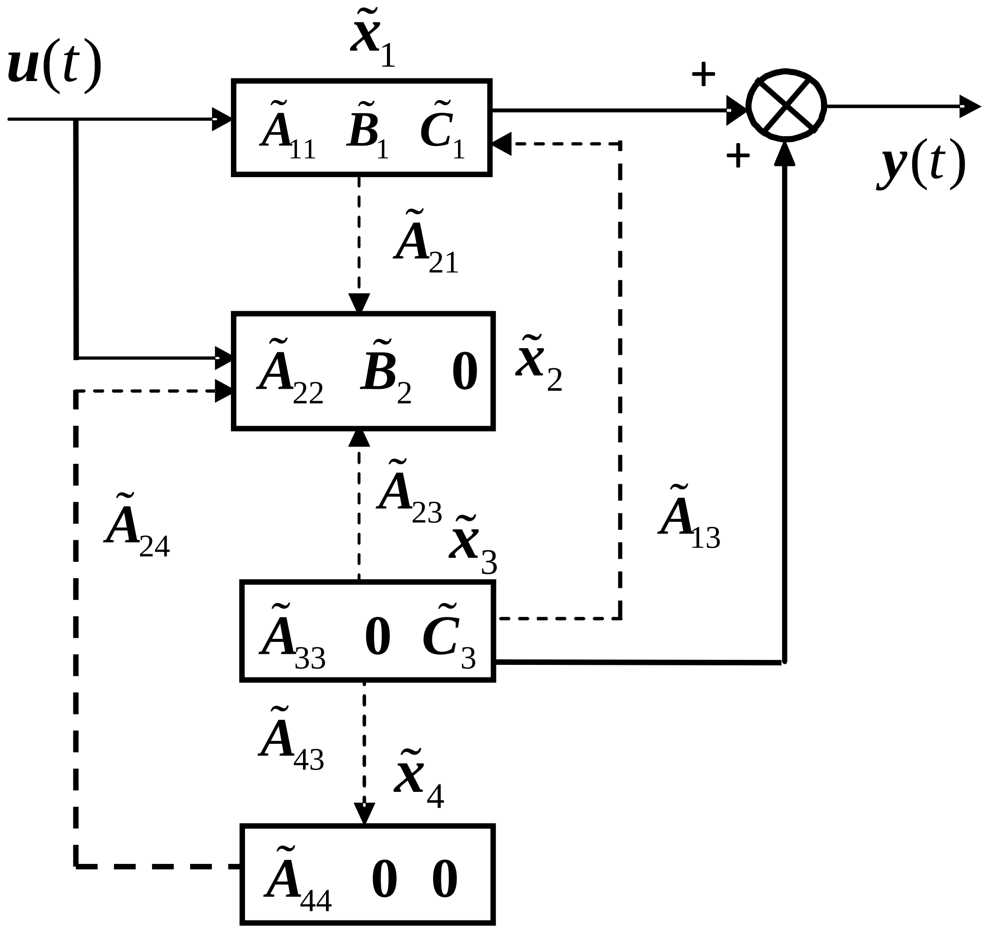
$\tilde{x}_4$： 不能控且不能观状态。

系统的典型构造定理（Kalman分解）

- 系统标准结构见右图
- 且有:

$$\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}=\tilde{C}_1(sI-\tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$$

- 即系统的传递函数阵由能控且能观的部分来确定。



- 以上称系统的典型构造定理，也称 Kalman 分解。

模块3　状态变量的能控性与能观性

TD3-1　能控性与能观性的定义（课本9.3、9.4）

TD3-2　能控性与能观性的判据（课本9.3、9.4）

TD3-3　对偶性原理（课本9.5）

TD3-4　能控状态分解与能观状态分解（课本9.7）

TD3-5　能控标准型与能观标准型（课本9.8）

TD3-6　状态空间模型的实现问题（课本9.10）

TD3-5-1 能控标准型和能观标准型

- 在状态空间模型的内容中，已经提到单输入—单输出系统
的能控标准型和能观标准型，它们分别都有两种形式。

- 研究能控标准型和能观标准型，对系统分析和综合有十分重要的意义。下面我们将进一步研究如何从系统的一般状态空间表达式求出标准型。

- 单输入单输出系统的标准型

（1）化状态方程为能控标准型

设有单输入—单输出系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{b}}u \\ y = \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

为能控标准型（指能控标准Ⅰ型，以后不加指明），则

TD3-5-1 能控标准型和能观标准型

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{c:cccc}\boldsymbol{0} & & \boldsymbol{I}_{n-1} & & \\ \hdashline -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{array}\right],\ \tilde{\boldsymbol{b}}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}}=\begin{bmatrix}\alpha_n\\ \alpha_{n-1}\\ \vdots\\ \alpha_1\end{bmatrix}$$

- 其中，$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意实数。显然系统的能控性矩阵为：

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_k=\left[\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{b}},\cdots,\tilde{\boldsymbol{A}}^{n-1}\tilde{\boldsymbol{b}}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \iddots & -a_1\\ \vdots & \iddots & \iddots & *\\ 1 & -a_1 & * & *\end{bmatrix}$$

满秩，即 rank $\boldsymbol{Q}_k=n$，所以能控标准型一定完全能控。

- **进一步地，有如下命题**：若系统是能控的，那么一定能经过某种非奇异变换，将原系统变成能控标准型。

TD3-5-1 能控标准型和能观标准型

- 证明：对于单输入单输出的能控系统 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u\\ y=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\end{cases}$

  将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}$ 代入上式，得：$\begin{cases}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}u\\ y=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}\end{cases}$

- 令 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-1}\\ \hdashline -a_n & -a_{n-1}\ -a_{n-2}\ \cdots -a_1\end{array}\right]$，$\tilde{\boldsymbol{b}}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ 。若 $\boldsymbol{T}$ 存在，意味着能控系统一定能写

  成能控标准型，设 $\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}$ 为 n 维行向量（$i=1,2,\ldots,n$）

TD3-5-1 能控标准型和能观标准型

- Cont'd:

$$\underbrace{T^{-1}AT}_{=\tilde{A}}T^{-1}=T^{-1}A=\left[\begin{array}{c:ccc} \mathbf{0} & & I_{n-1} & \\ \hdashline -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots -a_1 \end{array}\right]T^{-1}$$

- 将 T^{-1} 代入上式，则得：

$$\begin{bmatrix} p_1^{\mathrm{T}} \\ p_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ p_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} p_1^{\mathrm{T}}A \\ p_2^{\mathrm{T}}A \\ \vdots \\ p_n^{\mathrm{T}}A \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:ccc} \mathbf{0} & & I_{n-1} & \\ \hdashline -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots -a_1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} p_1^{\mathrm{T}} \\ p_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ p_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ p_n^{\mathrm{T}} \\ -a_n p_1^{\mathrm{T}}-a_{n-1}p_2^{\mathrm{T}}\cdots -a_1 p_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

- 由上式得：

$$\begin{cases} p_2^{\mathrm{T}}=p_1^{\mathrm{T}}A \\ p_3^{\mathrm{T}}=p_2^{\mathrm{T}}A=p_1^{\mathrm{T}}A^2 \\ \vdots \\ p_n^{\mathrm{T}}=p_{n-1}^{\mathrm{T}}A=p_1^{\mathrm{T}}A^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \quad T^{-1}=\begin{bmatrix} p_1^{\mathrm{T}} \\ p_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ p_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1^{\mathrm{T}} \\ p_1^{\mathrm{T}}A \\ \vdots \\ p_1^{\mathrm{T}}A^{n-1} \end{bmatrix}$$

TD3-5-1 能控标准型和能观标准型

- 再由下面关系求出 p_1：$\tilde{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} p_1^{\mathrm{T}} \\ p_1^{\mathrm{T}}A \\ \vdots \\ p_1^{\mathrm{T}}A^{n-1} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} p_1^{\mathrm{T}}b \\ p_1^{\mathrm{T}}Ab \\ \vdots \\ p_1^{\mathrm{T}}A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 将上式改写成：$[p_1^{\mathrm{T}}b,\ p_1^{\mathrm{T}}Ab, \cdots,\ p_1^{\mathrm{T}}A^{n-1}b] = p_1^{\mathrm{T}}[b,\ Ab, \cdots,\ A^{n-1}b]$

$$= p_1^{\mathrm{T}}Q_k = [0, \cdots, 0, 1]$$

- 因为原系统能控，所以 $[b,\ Ab, \cdots,\ A^{n-1}b]$ 满秩，可见：

$$p_1^{\mathrm{T}} = [0, 0, \cdots, 1][b,\ Ab, \cdots,\ A^{n-1}b]^{-1}$$

$$p_1^{\mathrm{T}} = [0, 0, \cdots, 1]Q_k^{-1}$$

- 这样 p_1^{T} 可求出，所以 T^{-1} 一定存在。由此可见，只要原系统能控，则一定能将原系统化为能控标准型。
- 上述证明是构造性的。

TD3-5-1 能控标准型和能观标准型

- 例：已知系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$，试将其化为能控标准型。

- 解：求得能控性矩阵：$\boldsymbol{Q}_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{Q}_k^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 所以有：$\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} = [0 \;\; 1]\boldsymbol{Q}_k^{-1} = \dfrac{1}{2}[0 \;\; 1]$ $\quad \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

- 即得：$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix}$$

TD3-5-1 能控标准型和能观标准型

- （2）化状态方程为能观标准型
- 设有单输入—单输出系统 $\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{b}}u \\ y = \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \end{cases}$

为能观标准型（指能观标准 II 型，以后不加指明），则

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & -a_n \\ \hdashline & -a_{n-1} \\ \boldsymbol{I}_{n-1} & \vdots \\ & -a_1 \end{array}\right], \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} = [0, 0, \cdots, 1]$$ 其中 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 可为任意实数

显然其能观性矩阵为：$\tilde{\boldsymbol{Q}}_g = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} \\ \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{A}} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{A}}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \iddots & -a_1 \\ 0 & \iddots & \iddots & * \\ 1 & -a_1 & * & * \end{bmatrix}$

满秩，即 $\mathrm{rank}\, \boldsymbol{Q}_g = n$，所以能观标准型一定完全能观。

同样：若系统是能观的，那么一定能经过线性变换，将原系统变成能观标准型。

单输入单输出系统的标准型

- 可以用对偶性原理加以解释:
- 1、设原系统 $\Sigma(A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 是能观的，那么其对偶系统 $\Sigma'(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})$ 一定能控。
- 2、$\Sigma'(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})$ 能控，则一定能通过线性非奇异变换 $\boldsymbol{T}$ 变换成能控标准型 $\Sigma''(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T})$ 。
- 3、将此能控标准型用对偶性原理写出它的对偶系统

$$\Sigma'''(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{-1}, \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{-1})$$

显然此时系统即为能观标准型。

单输入单输出系统的标准型

$$\begin{array}{ccc}
\text{能观} & & \text{能控} \\
\Sigma(A, b, C) & \xrightarrow{\text{对偶}} & \Sigma'(A^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}, b^{\mathrm{T}}) \\
\Big\downarrow (T^{T})^{-1} & & \Big\downarrow T \\
\Sigma'''(T^{\mathrm{T}}A(T^{\mathrm{T}})^{-1}, T^{\mathrm{T}}b, C(T^{\mathrm{T}})^{-1}) & \xleftarrow{\text{对偶}} & \Sigma''(T^{-1}A^{\mathrm{T}}T, T^{-1}C^{\mathrm{T}}, b^{\mathrm{T}}T) \\
\text{能观标准型} & & \text{能控标准型}
\end{array}$$

单输入单输出系统的标准型

- 下面给出基于能观系统构造能观标准型的一般方法。

- a）求出原系统能观性矩阵 $\boldsymbol{Q}_g$;
- b）取出 $\boldsymbol{Q}_g^{-1}$ 的最后一列，即 $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{Q}_g^{-1}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$
- c）按照列构成 $\boldsymbol{T}$：$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{p}_1]$

- 例：已知系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \end{cases}$ 求其能观标准型。

单输入单输出系统的标准型

- 解：a）求能观性矩阵 $\boldsymbol{Q}_g=\begin{bmatrix}-1 & -1/2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_g^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

b）求 $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{Q}_g^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$

c）求 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3/2\\ -1 & -1/2\end{bmatrix}$

d）求相应的系数矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$\tilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$，$\tilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2 & -1/2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

最终得到系统的能观标准型：
$$\begin{cases}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\left[\begin{array}{c:c}0 & -2\\ \hdashline 1 & 3\end{array}\right]\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}2\\ -1/2\end{bmatrix}u\\ y=\left[\begin{array}{c:c}0 & 1\end{array}\right]\tilde{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

模块3　状态变量的能控性与能观性

TD3-1　能控性与能观性的定义（课本9.3、9.4）

TD3-2　能控性与能观性的判据（课本9.3、9.4）

TD3-3　对偶性原理（课本9.5）

TD3-4　能控状态分解与能观状态分解（课本9.7）

TD3-5　能控标准型与能观标准型（课本9.8）

TD3-6　状态空间模型的实现问题（课本9.10）

TD3-6 传递函数矩阵的实现问题

- 现代控制理论是建立在状态空间分析方法的基础上。因此如何获得状态方程和输出方程是研究实际系统时首先要解决的问题。
- 在状态空间描述部分，我们已了解到，通常可以对系统的物理过程进行深入研究，从而直接建立系统的状态空间表达式。但是在很多实际问题中，系统的物理过程比较复杂，暂不清楚它的数量关系，也就是说，系统的结构参数基本上是未知的。
- 这时，通过分析的方法建立它们的运动方程很困难，甚至是不可能的。

TD3-6 传递函数矩阵的实现问题

- 通常对这类系统首先用实验的方法确定其输入输出间的传递函数阵，然后根据传递函数阵来确定系统的状态空间描述，这就是实现问题。
- 所找到的与传递函数相对应的状态空间描述，称为传递函数阵的一个实现。关于实现问题，此前我们已经作了初步介绍。

TD3-6-1 单变量系统的能控与能观实现

- 假设对象的传递函数为 $g(s)=\dfrac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$

- 目标是找到一个对应的状态空间模型 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u\\ y=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}x\end{cases}$，使其传递函数等于 $g(s)$
- 根据状态空间描述部分的介绍

能控标准实现为:

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c|ccc}\boldsymbol{0} & & \boldsymbol{I}_{n-1} & \\ \hline -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1\end{array}\right],\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1\end{bmatrix}$$

能观标准实现为:

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c|c}0 & -a_n\\ \hline & -a_{n-1}\\ \boldsymbol{I}_{n-1} & \vdots\\ & -a_1\end{array}\right],\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_n\\ b_{n-1}\\ \vdots\\ b_1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

TD3-6-2 多变量系统的能控与能观实现

- 对于多变量系统，$\boldsymbol{G}(s)$ 为一个传递函数矩阵，设 $m\times r$ 传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 给定为：

$$\boldsymbol{G}(s)_{m\times r}=\frac{\boldsymbol{R}(s)}{\phi(s)}=\frac{\boldsymbol{R}_1 s^{l-1}+\boldsymbol{R}_2 s^{l-2}+\cdots+\boldsymbol{R}_l}{s^l+\alpha_1 s^{l-1}+\cdots+\alpha_{l-1}s+\alpha_l}$$

真分式

- 其中 $\phi(s)$ 是 $\boldsymbol{G}(s)$ 诸元分母多项式的最小公分母，$\boldsymbol{R}_i$ $(i=1,2,\cdots,l)$ 为 $m\times r$ 的常值矩阵。则其能控性实现 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 为：

$$\boldsymbol{A}=\left.\left[\begin{array}{c:ccc} & \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}_{(l-1)r\times r} & \boldsymbol{0} & \ddots & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_r \\ \hdashline -\alpha_l\boldsymbol{I}_r & -a_{l-1}\boldsymbol{I}_r & \cdots & -a_1\boldsymbol{I}_r \end{array}\right]\right\} l\cdot r\text{行},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I}_r\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_l & \boldsymbol{R}_{l-1} & \cdots & \boldsymbol{R}_1\end{bmatrix}$$

TD3-6-2 多变量系统的能控与能观实现

- 对于多变量系统，$\boldsymbol{G}(s)$ 为一个传递函数矩阵，设 $m\times r$ 传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 给定为:

$$\boldsymbol{G}(s)_{m\times r}=\frac{\boldsymbol{R}(s)}{\phi(s)}=\frac{\boldsymbol{R}_1 s^{l-1}+\boldsymbol{R}_2 s^{l-2}+\cdots+\boldsymbol{R}_l}{s^l+\alpha_1 s^{l-1}+\cdots+\alpha_{l-1}s+\alpha_l}$$

真分式

- 其中 $\phi(s)$ 是 $\boldsymbol{G}(s)$ 诸元分母多项式的最小公分母，$\boldsymbol{R}_i$ $(i=1,2,\cdots,l)$ 为 $m\times r$ 的常值矩阵。则其能观性实现 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ 为:

$$\boldsymbol{A}=\left.\left[\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{0}_{m\times(l-1)m} & & -\alpha_l\boldsymbol{I}_m \\ \hdashline \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -a_{l-1}\boldsymbol{I}_m \\ \boldsymbol{0} & \ddots & \boldsymbol{0} & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m & -a_1\boldsymbol{I}_m \end{array}\right]\right\} l\cdot m\text{行},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_l\\ \vdots\\ \boldsymbol{R}_2\\ \boldsymbol{R}_1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}$$

TD3-6-2 多变量系统的能控与能观实现

- 例：已知传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2} & 0\\ \frac{1}{s^2-s} & \frac{1}{1-s}\end{bmatrix}$，求其能控与能观实现

- 解：

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{\boldsymbol{R}(s)}{\phi(s)}=\frac{1}{s^2(s-1)}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ s & -s^2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3-s^2}\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

所以：$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\phi(s)=s^3-s^2,\ \alpha_1=-1,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=0$$

TD3-6-2 多变量系统的能控与能观实现

- 能控性实现：

$$A=\left[\begin{array}{c:cc} 0 & I_2 & 0 \\ & 0 & I_2 \\ \hdashline 0 & 0 & -\alpha_1 I_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline 0 \\ \hdashline I_r \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$C=[R_3\ R_2\ R_1]=\left[\begin{array}{cc:cc:cc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

- 能观性实现：

$$A=\left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right],\quad C=\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

TD3-6-3 最小实现

- 当给定一个传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 后，可以构造其状态空间实现 $\Sigma=\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\right)$ 使得 $\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$
- 这样的实现并不是唯一的
  - 能控性实现，但不一定能观
  - 能观性实现，但不一定能控
- 最重要的是，状态空间实现在阶数上有很大差别。
- 一般我们希望阶数越小越好，即模型结构越简单越好。在 $\boldsymbol{G}(s)$ 的所有实现中，其中阶数最小的实现称为 $\boldsymbol{G}(s)$的最小实现（**Minimal Realization**）。

TD3-6-3 最小实现

- **命题**：系统 $\Sigma=\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\right)$ 为最小实现的充分必要条件是系统完全能控并且完全能观。
- 证明：首先证明必要性。采用反证法，假设系统 $\boldsymbol{G}(s)$ 的一个最小实现为 $\Sigma=\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\right)$ ，其阶数为 n ，但不完全能控或不完全能观。
- 再设其完全能控完全能观部分的阶数为 n'，$n'<n$。根据前述分解定理已经证明，其完全能控能观的 n' 阶子系统，其传递函数阵也是$\boldsymbol{G}(s)$，但 $n'<n$ 。所以 $\Sigma=\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\right)$ 必然不是最小实现，与条件矛盾。故系统 $\Sigma=\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\right)$ 必定是完全能控且完全能观的。

TD3-6-3 最小实现

- **命题**：系统 $\Sigma=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 为最小实现的充分必要条件是系统完全能控并且完全能观。
- 其次证明充分性：同样也采用反证法，设系统 $\Sigma=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 是 $\boldsymbol{G}(s)$ 的一个实现，完全能控且完全能观，但它不是最小实现。又设系统 $\Sigma'=(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$ 也是 $\boldsymbol{G}(s)$ 的一个实现，它的阶次为 $n'<n$。
- 由于 Σ 和 Σ' 都是 $\boldsymbol{G}(s)$ 的一个实现，则

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_0^t \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \boldsymbol{C}'e^{\boldsymbol{A}'(t-\tau)}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对任意的 $\boldsymbol{u}(t)$ 都成立。由此可得 $\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'e^{\boldsymbol{A}'(t-\tau)}\boldsymbol{B}'$

对上式两边求微分得：$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}'e^{\boldsymbol{A}'(t-\tau)}\boldsymbol{B}'$

TD3-6-3 最小实现

- 以此类推得 $\begin{cases} CA^2e^{A(t-\tau)}B = C'(A')^2e^{A'(t-\tau)}B' \\ \vdots \\ CA^{n-1}e^{A(t-\tau)}B = C'(A')^{n-1}e^{A'(t-\tau)}B' \end{cases}$ 令 $t-\tau=0$，则有: $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ \vdots \\ C'(A')^{n-1} \end{bmatrix} B'$

同样可写成: $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ \vdots \\ C'(A')^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B' & A'B' & \cdots & (A')^{n-1}B' \end{bmatrix}$

由于系统Σ完全能控能观，左边矩阵秩为n，右边因矩阵 A' 为$n' \times n'$阶，所以它的秩为n'，$n' < n$。一个矩阵不存在两个秩，所以系统 $\Sigma' = (A', B', C')$ 为 $G(s)$ 的实现，且 $n' < n$ 这一假设不成立。系统 $\Sigma(A, B, C)$ 就为最小实现。这也说明最小实现的维数是唯一的。

TD3-6-3 最小实现

- （2）其次，我们给出这样的结论，对所给定的传递函数阵，其两个最小实现之间必是代数等价的。就是说系统的最小实现不是唯一的，但它们之间是代数等价的。上述结论这里不作证明。
- （3） $G(s)$ 实现的非唯一性说明，仅从未知结构的输入与输出之间的特性，如从 $G(s)$ 出发，可以构造出无穷多个在外特性上与 $G(s)$ 一致的假象结构，通常它们之间不存在代数等价关系。从而不能确定地描述出未知的结构，这就是所谓的结构不确定原理。这个原理突出地说明了用外特性描述系统结构的局限性，表明了状态空间描述的优越性。

最小实现的构造方法

- 由传递函数阵求最小实现的方法通常有两种：

  ① 直接求其最小实现，如 Ho-Kalman 方法；

  ② 先求出满足给定的传递函数阵的某个实现，然后从它的完全能控或完全能观的系统出发，求其最小实现，例如 Mayne 方法。

- Mayne 方法分两步：

  第一步：求出所给定传递函数阵的完全能控（完全能观）的实现

  第二步：从这个实现求出完全能观（完全能控）的子系统，即求得最小实现。