经济数分A 第六周 新雅93 章越闻 2019013397

3.23

第一章复习题

17. 已知点$P(a,b)$在曲线$f(x,y)=0$上，点$Q(c,d)$在曲线$g(x,y)=0$上，其中f,g可微，证明：若$|PQ|$为两条曲线的距离，则 $\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{f_1'(a,b)}{f_2'(a,b)}=\dfrac{g_1'(c,d)}{g_2'(c,d)}$. 利用此结论求椭圆$x^2+2xy+5y^2-16y=0$与直线$x-y-8=0$的距离。

证明：设(x_1,y_1)为曲线$f(x,y)=0$上任一点，(x_2,y_2)为曲线$g(x,y)=0$上任一点。

则两曲线的距离即求 $d_0=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 的最小值，此即条件极值问题：

$$\begin{cases} d_0(x_1,y_1,x_2,y_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\ \text{s.t.}\quad F(x_1,y_1,x_2,y_2)=0 \\ \qquad G(x_1,y_1,x_2,y_2)=0 \end{cases}$$

其中 $F(x_1,y_1,x_2,y_2)=f(x_1,y_1)$，$G(x_1,y_1,x_2,y_2)=g(x_2,y_2)$.

故$\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，使得：$\nabla d_0=\lambda\nabla F+\mu\nabla G$.

$$\text{即}\left(\frac{x_1-x_2}{d_0},\frac{y_1-y_2}{d_0},\frac{x_2-x_1}{d_0},\frac{y_2-y_1}{d_0}\right)=\lambda\left(f_1'(x_1,y_1),f_2'(x_1,y_1),0,0\right)+\mu\left(0,0,g_1'(x_2,y_2),g_2'(x_2,y_2)\right)$$
$$=\left(\lambda f_1'(x_1,y_1),\lambda f_2'(x_1,y_1),\mu g_1'(x_2,y_2),\mu g_2'(x_2,y_2)\right).$$

由于$|PQ|$即为两曲线的距离，故(a,b,c,d)为此极值问题的极值点。

代入得：$\left(\dfrac{a-c}{d_0},\dfrac{b-d}{d_0},\dfrac{c-a}{d_0},\dfrac{d-b}{d_0}\right)=\left(\lambda f_1'(a,b),\lambda f_2'(a,b),\mu g_1'(c,d),\mu g_2'(c,d)\right)$.

从而 $\begin{cases}\lambda f_1'(a,b)=\dfrac{a-c}{d_0}\\ \lambda f_2'(a,b)=\dfrac{b-d}{d_0}\\ \mu g_1'(c,d)=\dfrac{c-a}{d_0}\\ \mu g_2'(c,d)=\dfrac{d-b}{d_0}\end{cases}$ 故而 $\dfrac{f_1'(a,b)}{f_2'(a,b)}=\dfrac{a-c}{b-d}$，$\dfrac{g_1'(c,d)}{g_2'(c,d)}=\dfrac{c-a}{d-b}=\dfrac{a-c}{b-d}$

因此 $\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{f_1'(a,b)}{f_2'(a,b)}=\dfrac{g_1'(c,d)}{g_2'(c,d)}$. 证毕.

利用以上结论，记$f(x,y)=x^2+2xy+5y^2-16y$，$g(x,y)=x-y-8$.

设$|PQ|$为椭圆到直线的距离，$P(a,b)$，$Q(c,d)$，则$\nabla f(a,b)=(2a+2b,10b+2a-16)$，

$\nabla g(c,d)=(1,-1)$.

故 $\begin{cases}\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{2a+2b}{10b+2a-16}=\dfrac{1}{-1}\\ a^2+2ab+5b^2-16b=0\\ c-d-8=0\end{cases}$ 由此解得 $(a,b,c,d)=(-2-3\sqrt{2},2+\sqrt{2},4-\sqrt{2},-4-\sqrt{2})$

或 $(-2+3\sqrt{2},2-\sqrt{2},4+\sqrt{2},-4+\sqrt{2})$

代入可得 $d_0=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=6\sqrt{2}\pm4$，从而椭圆到直线的距离为$6\sqrt{2}-4$.

第二章复习题

5.(1) $\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$. $(-\infty<y<+\infty)$

解：注意到 $\forall y\in\mathbb{R}, x\in[1,+\infty)$，$\left|\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right| = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left|\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{x^2}$

（因为 $\left|\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\right|\le 1$）

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$，即 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛.

故由Weierstrass判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$ 关于 $y\in\mathbb{R}$ 一致收敛.

习题3.1

6. 设一元函数 $f,g\in R[0,1]$，证明：$f(x)g(y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积，且

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(y)\,dy$$，并计算 $\iint_{[0,1]\times[0,1]} e^{-(x+y)}dxdy$.

证明：由 $f,g\in R[0,1]$，$D(f)$、$D(g)$ 皆为零测集，此即 $\forall\varepsilon>0$，

存在有限或可数个闭区间 $r_{i_1}, r_{i_2},\cdots,r_{i_k},\cdots$ 使得 $D(f)\subset\bigcup_{k\ge1} r_{i_k}$ 且 $\sum_{k\ge1}|r_{i_k}|<\varepsilon$.

存在有限或可数个闭区间 $r_{j_1}, r_{j_2},\cdots,r_{j_l},\cdots$ 使得 $D(g)\subset\bigcup_{l\ge1} r_{j_l}$ 且 $\sum_{l\ge1}|r_{j_l}|<\varepsilon$.

由于记 $F(x,y)=f(x)g(y)$，有 $D(F)\subset\big(D(f)\times[0,1]\cup[0,1]\times D(g)\big)$

记 $R_{i_k}=r_{i_k}\times[0,1]$，$R_{j_l}=[0,1]\times r_{j_l}$，则 $D(F)\subset\Big(\big(\bigcup_{k\ge1}R_{i_k}\big)\cup\big(\bigcup_{l\ge1}R_{j_l}\big)\Big)$.

且 $\Big|\big(\bigcup_{k\ge1}R_{i_k}\big)\cup\big(\bigcup_{l\ge1}R_{j_l}\big)\Big| \le \Big|\bigcup_{k\ge1}R_{i_k}\Big| + \Big|\bigcup_{l\ge1}R_{j_l}\Big| = \sum_{k\ge1}|r_{i_k}|\cdot(1-0)+\sum_{l\ge1}|r_{j_l}|\cdot(1-0) < 2\varepsilon$.

此即 $D(F)$ 为零测集. 由Lebesgue准则知 $F(x,y)=f(x)g(y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积.

且黎曼和 $\sum_{i,j}F(x_i^*,y_j^*)\Delta x_i\Delta x_j = \sum_{i,j}f(x_i^*)g(y_j^*)\Delta x_i\Delta y_j$ （由 i,j 变量的独立性）

$$=\Big(\sum_i f(x_i^*)\Delta x_i\Big)\Big(\sum_j g(y_j^*)\Delta y_j\Big)$$

令分割宽度趋向于零，即得 $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(y)dy$. 证毕.

在上式中令 $f(x)=e^{-x}$，$g(y)=e^{-y}$，即有

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^1 e^{-x}dx\int_0^1 e^{-y}dy = \Big(-e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=1}\Big)\cdot\Big(-e^{-y}\Big|_{y=0}^{y=1}\Big) = \Big(1-\frac{1}{e}\Big)^2$$

习题3.3

1. (1) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$.

解：此即求 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $z=0$ 围成的半球体积，

$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3$. 故 $\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{2}{3}\pi R^3$.

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$

解：此即求 $x^2+y^2=R^2$, $z=R$, $z=0$ 围成的圆柱中，挖去 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=R$ 围成的圆锥的立体体积.

$V=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3$. 故 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\frac{2}{3}\pi R^3$

(3) $\iint\limits_D dxdy$, $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$

解：此即 $z=1$ 与 $|x|+|y|=1$ 与 $z=0$ 围成的柱体体积.

$V=\frac{1}{2}\times2\times2\times1=2$, 即 $\iint\limits_D dxdy=2$.

2. (1) $\iint\limits_I \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy$, $I=[0,1]^2$

解：$\iint\limits_I\frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int_0^1dx\int_0^1\frac{x^2}{1+y^2}dy$

$=\int_0^1\left(x^2\arctan y\Big|_{y=0}^{y=1}\right)dx$

$=\frac{\pi}{4}\int_0^1x^2dx=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}$.

(2) $\iint\limits_I x\cos(xy)\,dxdy$, $I=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$

解：$\iint\limits_I x\cos(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1x\cos(xy)dy$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin(xy)\Big|_{y=0}^{y=1}\right]dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(3) $\iint\limits_I\sin(x+y)\,dxdy$, $I=[0,\pi]^2$

解：$\iint\limits_I\sin(x+y)\,dxdy=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\pi}\sin(x+y)\,dy$

$=\int_0^{\pi}\left[-\cos(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\pi}\right]dx=\int_0^{\pi}2\cos x\,dx=2\sin x\Big|_0^{\pi}=0$.

3、设函数 $f(x,y)$ 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续的二阶偏导数，计算 $\iint\limits_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy$.

解：$\iint\limits_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f_{xy}dy$

$= \int_a^b \left[f_x(x,y)\Big|_{y=c}^{y=d}\right]dx$

$= \int_a^b \left[f_x(x,d)-f_x(x,c)\right]dx$

$= f(x,d)\Big|_a^b - f(x,c)\Big|_a^b = f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c)$.

3.25 习题3.2

2、证明：$1.96 < \iint\limits_{|x|+|y|\le 10} \frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y} < 2$.

证明：一方面，由于 $\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y} \le \frac{1}{100}$，$\forall x,y\in\mathbb{R}$，且等号并不总是成立.

故 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 10} \frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y} < \iint\limits_{|x|+|y|\le 10}\frac{dxdy}{100} = \frac{1}{2}\times 20\times 20\times\frac{1}{100} = 2$.

另一方面，由于 $\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y} \ge \frac{1}{102}$，$\forall x,y\in\mathbb{R}$.

故 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 10} \frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y} \ge \iint\limits_{|x|+|y|\le 10}\frac{dxdy}{102} = \frac{1}{2}\times 20\times 20\times\frac{1}{102} = \frac{100}{51} > 1.96$.

综上，$1.96 < \iint\limits_{|x|+|y|\le 10} \frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y} < 2$.

3、(1) $\iint\limits_D (x+y)^2dxdy$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y-2)^2\le 2\}$.

解：由D易知 $2-\sqrt{2}\le x,y\le 2+\sqrt{2}$，此即 $x,y\ge 0$.

设 $x+y=t$，则 $t\ge 0$，代入D中得：$(x-2)^2+(t-x-2)^2\le 2$.

此即 $2x^2-2tx+t^2-4t+6\le 0$，故 $4t^2-8(t^2-4t+6)\ge 0$.

故 $2\le t\le 6$，此即 $2\le x+y\le 6$，因此 $\forall (x,y)\in D$，$(x+y)^2<(x+y)^3$.

由积分的保序性知，$\iint\limits_D (x+y)^2dxdy < \iint\limits_D (x+y)^3dxdy$.

(2) $\iint\limits_D \ln(x+y)dxdy$ 与 $\iint\limits_D xy\,dxdy$，其中D由直线 $x=0$，$y=0$，$x+y=\frac{1}{2}$，$x+y=1$ 围成.

解：$(x,y)\in D$ 时 $\frac{1}{2}\le x+y\le 1$，$\ln(x+y)\le 0$，

而 $x\ge 0$，$y\ge 0$，故 $xy\ge 0$，从而 $\ln(x+y)\le xy$.

当且仅当 $(x,y)=(1,0)$ 或 $(0,1)$ 时取等.

因此 $\iint\limits_D \ln(x+y)dxdy < \iint\limits_D xy\,dxdy$.

4. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界闭集，非负函数 $f(x,y)\in C(D)$，证明：若 $\iint_D f(x,y)dxdy=0$，则 $f(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in D$.

证明：由于 $f(x,y)\geq 0,\ \forall(x,y)\in D$. 反设 $\exists(x_0,y_0)\in D,\ f(x_0,y_0)=a>0$.

由于 $f(x,y)\in C(D)$，故 $\exists B(A,\delta)$ 为点 $A(x_0,y_0)$ 的邻域，$\delta>0$，

使得 $\forall(x,y)\in(B(A,\delta)\cap D)$，$f(x,y)>0$. 其中 $B(A,\delta)\cap D\neq\phi$

故 $\iint_{D\cap B(A,\delta)} f(x,y)dxdy > \iint_{D\cap B(A,\delta)} 0\,dxdy=0$, … ①

而记 $D_1=D\setminus(D\cap B(A,\delta))$，故 $\forall(x,y)\in D_1$，$f(x,y)\geq 0$.

故 $\iint_{D_1} f(x,y)dxdy\geq\iint_{D_1} 0\,dxdy=0$ … ②

由①②两式可知：$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D\cap B(A,\delta)} f(x,y)dxdy+\iint_{D_1} f(x,y)dxdy>0$

这与 $\iint_D f(x,y)dxdy=0$ 矛盾；故原假设不成立.

因此，$\forall(x,y)\in D$，$f(x,y)=0$. 证毕.

5、函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，计算极限 $\lim_{r\to0^+}\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)dxdy$.

解：设 $f(0,0)=a$，则由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某个邻域 B_0 内连续，故 $\forall\varepsilon>0$，

$\exists\delta>0$，$B(O,\delta)\subset B_0$ (O 为原点)，$\forall(x,y)\in B(O,\delta)$，$|f(x,y)-a|<\varepsilon$.

$$\text{故}\ \lim_{r\to0^+}\left|\frac{1}{r^2}\left(\iint_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)dxdy-\iint_{x^2+y^2\leq r^2} a\,dxdy\right)\right|$$

$$=\lim_{r\to0^+}\left|\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}(f(x,y)-a)\,dxdy\right|$$

$$\leq\lim_{r\to0^+}\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}|f(x,y)-a|\,dxdy<\lim_{r\to0^+}\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}\varepsilon\,dxdy=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{r^2}\cdot\varepsilon\pi r^2=\pi\varepsilon.$$

此即 $\forall\varepsilon>0$，$\lim_{r\to0^+}\left|\frac{1}{r^2}\left(\iint_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)dxdy-\iint_{x^2+y^2\leq r^2} a\,dxdy\right)\right|<\pi\varepsilon$

此即 $\lim_{r\to0^+}\frac{1}{r^2}\left(\iint_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)dxdy-\iint_{x^2+y^2\leq r^2} a\,dxdy\right)=0$，

$$\text{故}\ \lim_{r\to0^+}\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)dxdy=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2} a\,dxdy=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{r^2}\cdot a\pi r^2=\pi a$$

$$=\pi f(0,0).$$

习题 3.3

4. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ 化为累次积分

(1) $D=\{(x,y)\mid x+y\le 1,\ y-x\le 1,\ y\ge 0\}$.

解：此即 $0\le y\le 1-|x|$，$-1\le x\le 1$.

故 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-|x|}f(x,y)\,dy$.

(2) $D=\{(x,y)\mid y\ge x-2,\ x\ge y^2\}$.

解：由于 $x\le y+2$，$x\ge y^2$，故 $y^2\le y+2$，从而 $y\in[-1,2]$，而 $x\in[y^2,y+2]$

故 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\,dx$.

(3) $D=\{(x,y)\mid \frac{2}{x}\le y\le 2x,\ 1\le x\le 2\}$.

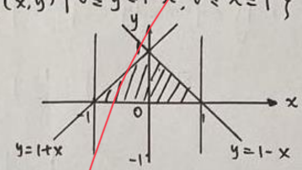
解：$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{2}{x}}^{2x}f(x,y)\,dy$.

5. (1) $\int_{-1}^{0}dx\int_0^{1+x}f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)\,dy$

解：积分 $\int_{-1}^{0}dx\int_0^{1+x}f(x,y)\,dy$ 的积分区域为：$D_1=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1+x,\ -1\le x\le 0\}$.

积分 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy$ 的积分区域为：$D_2=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\}$

故原积分的积分区域 $D=D_1\cup D_2$，如图：



图中阴影部分即为积分区域.

此即 $y-1\le x\le 1-y$，$0\le y\le 1$，故

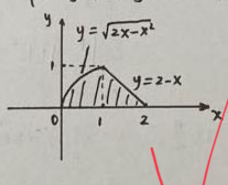
$\int_{-1}^{0}dx\int_0^{1+x}f(x,y)dy+\int_0^1dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy=\int_0^1dy\int_{y-1}^{1-y}f(x,y)\,dx$.

(3) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{2-x}f(x,y)\,dy$.

解：积分 $\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,dy$ 的积分区域为：$D_1=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{2x-x^2},\ 0\le x\le 1\}$

积分 $\int_1^2dx\int_0^{2-x}f(x,y)\,dy$ 的积分区域为：$D_2=\{(x,y)\mid 0\le y\le 2-x,\ 1\le x\le 2\}$.

故原积分的积分区域 $D=D_1\cup D_2$，如图：



图中阴影部分即为积分区域.

此即 $1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 2-y$，$0\le y\le 1$

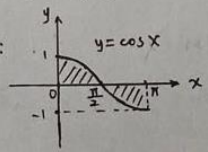
故 $\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{2-x}f(x,y)dy=\int_0^1dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)\,dx$

(5) $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy$.

解：事实上，$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{0} f(x,y)dy$

故原积分的积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le \cos x,\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}\}\cup\{(x,y)\mid \cos x\le y\le 0,\ \frac{\pi}{2}\le x\le \pi\}$

如图：



图中阴影部分即为积分区域.

此即 $\begin{cases} \arccos y \le x \le \pi, & -1\le y\le 0 \\ 0\le x\le \arccos y, & 0\le y\le 1 \end{cases}$

故 $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)\, dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{\arccos y}^{\pi} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x,y)dx$.

6.(1) $\iint_D xy^2 dxdy$，$D=\{(x,y)\mid 4x\ge y^2,\ x\le 1\}$.

解：由 D 可知：$\frac{y^2}{4}\le x\le 1$，故 $\frac{y^2}{4}\le 1$，$y\in[-2,2]$.

故 $\iint_D xy^2dxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{1} xy^2 dx$

$= \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}y^2x^2\Big|_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=1}\right)dy$

$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} y^2dy - \frac{1}{32}\int_{-2}^{2} y^6 dy = \frac{1}{6}y^3\Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{224}y^7\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{21}$

(3) $\iint_D |xy|\, dxdy$，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$.

解：由 D 可知：$-\sqrt{R^2-y^2}\le x\le \sqrt{R^2-y^2}$，$-R\le y\le R$.

故 $\iint_D |xy|\, dxdy = \int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} |xy|\, dx$

$= \int_{-R}^{R}\left(2|y|\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} x\, dx\right)dy$

$= \int_{-R}^{R}\left(|y|\, x^2\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{R^2-y^2}}\right)dy$

$= 2\int_0^R y(R^2-y^2)\, dy = \left(R^2y^2-\frac{1}{2}y^4\right)\Big|_0^R = \frac{1}{2}R^4$.

(5) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$，D 是以 $y=x$，$y=x+1$，$y=1$，$y=4$ 为边的平行四边形区域.

解：此即 $y-1\le x\le y$，$1\le y\le 4$.

故 $\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_1^4 dy \int_{y-1}^{y}(x^2+y^2)dx$

$= \int_1^4\left[\left(\frac{1}{3}x^3+y^2x\right)\Big|_{x=y-1}^{x=y}\right]dy$

$= \int_1^4 \left(2y^2-y+\frac{1}{3}\right)dy = \left(\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y\right)\Big|_1^4 = \frac{71}{2}$

(7) $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$，$D=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le\pi\}$

解：$\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi} dy\int_0^{\pi}\cos(x+y)\,dx = \int_0^{\pi}\left[\sin(x+y)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right]dy$

$= -2\int_0^{\pi}\sin y\,dy = 2\cos y\Big|_0^{\pi} = -4$

(9) $\iint\limits_D y^2\,dx\,dy$，D 由 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ 以及 x 轴围成.

解：由于 $x'(t)=a(1-\cos t)\ge 0$，故 $x(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调增，从而存在函数 f 使得 $y=f(x)$，

即 $y(t)=f(x(t))$，$\forall t\in[0,2\pi]$.

于是 $\iint\limits_D y^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi a}dx\int_0^{f(x)}y^2\,dy = \int_0^{2\pi a}\left(\frac{1}{3}y^3\Big|_{y=0}^{y=f(x)}\right)dx$

$= \int_0^{2\pi a}\frac{1}{3}[f(x)]^3\,dx = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\left[f(x(t))\right]^3\cdot x'(t)\,dt$

$= \frac{1}{3}a^4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\,dt$

$= \frac{1}{3}a^4\int_0^{2\pi}\left[1-4\cos t+3(\cos 2t+1)-(\cos 3t+3\cos t)+\frac{1+2\cos 2t+\frac{1}{2}(\cos 4t+1)}{4}\right]dt$

$= \frac{1}{3}a^4\left(\frac{35}{8}t-7\sin t+\frac{7}{4}\sin 2t-\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{32}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{35}{12}\pi a^4.$