微积分A(2)第三次习题课讨论题 杨利军 Mar 23-27, 2020

一. 关于复合函数以及隐函数求导

1. 设 $f(x,y)$ 为二阶连续可微函数. 作正交变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{1}$$

这里 $Q=[q_{ij}]$ 为二阶正交矩阵, 即 $Q^TQ=QQ^T=E$. 再记 $\hat{f}(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. 证明 $f_{xx}+f_{yy}=\hat{f}_{uu}+\hat{f}_{vv}$.

注：微分算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 通常称作二维 Laplace 算子. 微分方程 $\Delta z=0$, 即方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

称为 Laplace 方程. 满足Laplace 方程的 C^2 函数称为调和函数. 习题的结论表明, 二维 Laplace 微分算子具有二阶正交变换的不变性, 或者说二维调和函数关于正交变换是不变的. 类似可定义 n 维 Laplace 算子. 不难证明 n 维 Laplace 算子(或调和函数)关于 n 阶正交变换同样具有不变性。

2. 设函数 $f(x,y,z,t)$, $g(y,z,t)$, $h(z,t)$ 连续可微, 并由方程组

$$\begin{cases} g(y,z,t)=0, \\ h(z,t)=0. \end{cases} \tag{2}$$

可确定连续可微的隐函数 $z=z(y)$, $t=t(y)$. 记函数 $u(x,y)=f(x,y,z(y),t(y))$. 试用函数 f,g,h 的偏导数来表示偏导数 $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$.

二．关于曲面与切平面

1. 在曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 上的某些点处作切平面，使得该切平面经过直线 L:

$$\begin{cases} 10x+2y-2z &= 27 \\ x+y-z &= 0. \end{cases}$$

求这些点的坐标，以及这些点处的切平面方程.

2. 在曲面 $2x^2-2y^2+2z=1$ 上的某些点作切平面，使得该切平面与直线

$$\begin{cases} 3x-2y-z &= 5 \\ x+y+z &= 0. \end{cases}$$

平行. 求这些点的轨迹。

3. 假设函数 $f(u,v)$ 连续可微. 记由方程

$$f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0$$

所定义的隐式曲面为 S. 证明曲面 S 上任意一点处的切平面通过一定点. 并求此点位置.

三. 关于无约束极值问题

1. 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离. (这是课本习题 1.9 题 9(4), 第 94 页)

2. 在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大.

3. 假设函数 $u(x,y)$ 在闭圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 上连续, 在开园盘 $x^2+y^2<1$ 上二阶连续可微且满足方程 $u_{xx}+u_{yy}=u$. 若在边界 $x^2+y^2=1$ 上函数 $u(x,y)$ 非负, 即 $u(x,y)\ge 0$, $\forall (x,y)$: $x^2+y^2=1$, 证明函数 $u(x,y)$ 在整个闭圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 上非负. (注：这是课本习题 1.9 题 5(2), 第 94 页)

4．假设 $f(x,y)$ 在全平面上连续可微，并且满足

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)>0,\quad \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.$$

证明原点是函数 f 的唯一极小值点, 并且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

5. 设函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个邻域内二阶连续可微. 若 $F(x_0,y_0)=0$, $F_x(x_0,y_0)=0$, 且 $F_yF_{xx}|_{(x_0,y_0)}<0$, 则由方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 附近所确定的隐函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.