1. 用单纯形法求解以下线性规划问题，并从单纯形表中判断是否存在多个最优解。若存在，请将所有最优解用参数化形式表示。

$$\max\ 2x_1+3x_2+x_3$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2+x_3\le 4$$
$$x_1+2x_2\le 7$$
$$x_i\ge 0, i=1,2,3$$

引入松弛变量后：

$\max\ \ 2x_1+3x_2+x_3+0(x_4+x_5)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	1	1	1	0	4
x_5	1	2	0	0	1	7
	2	3	1	0	0	z

x_1进基，x_4出

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	1	1	1	0	4
x_5	0	1	-1	-1	1	3
	0	1	-1	-2	0	$z-8$

x_2进，x_5出：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	2	2	-1	1
x_2	0	1	-1	-1	1	3
	0	0	0	-1	-1	$z-11$

非基变量x_3检验数为0，故有无穷最优解.

观察到两约束相加为 $\max z\le 11$

记 $x_1=\alpha,\quad \alpha\ge 0$

则：$x_2=\frac{7-\alpha}{2}$，$x_3=\frac{1-\alpha}{2}$，此时 $z=11$.

故：最优解：$(\alpha, \frac{7-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2})^T\quad \alpha\in[0,1]$

2. 将以下线性规划问题转化为标准形式

$$\max\ 3x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 4 \\ & 2x_1 + 5x_2 - x_3 \le 7 \\ & 0 \le x_1 \le 3 \\ & -2 \le x_2 \le 6 \end{aligned}$$

记 $\hat{x}_2 = x_2 + 2$，$x_3 = \hat{x}_3 - x_4$，$\hat{x}_3, x_4 \geqslant 0$

$$\max\ z = 3x_1 + 2\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + x_4 - 4$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & -x_1 + 2\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 + 3x_4 \le 0 \\ & 2x_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + x_4 \le 17 \\ & x_1 \le 3 \\ & \hat{x}_2 \le 8 \\ & x_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

再引入松弛变量得到：

$$\max\ z = 3x_1 + 2\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + x_4 - 4$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & -x_1 + 2\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ & 2x_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + x_4 + x_6 = 17 \\ & x_1 + x_7 = 3 \\ & \hat{x}_2 + x_8 = 8 \\ & x_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geqslant 0 \end{aligned}$$

3. 把线性规划问题

$$\begin{aligned} &\min\ x_1 + x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \qquad \le 5 \\ &\qquad \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 3 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

记为 P，

(1) 用单纯形算法解 P；

(2) 写出 P 的对偶 D；

(3) 写出 P 的互补松紧条件，并利用它们解对偶 D。

通过计算 P 和 D 的最优值，检查你的答案。

(1) 引入松弛变量得到：

$\min\ x_1 + x_3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_4	1	2	0	1	5
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3
	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$z-3$

x_2 进，x_4 出

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	$5/2$
x_3	$-1/4$	0	1	$-1/4$	$7/4$
	$5/4$	0	0	$1/4$	$z-7/4$

$x=(0,\frac{5}{2},\frac{7}{4},0)$ 时取最小值 $\frac{7}{4}$

(2)

在 P 中引入松弛变量后：

D： $\max\ 5y_1 + 3y_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) 原问题解： $\hat{x} = (0, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, 0)^T$

互补松弛条件： $(\hat{Y}^T A - C^T)\hat{X} = 0$ ， $\forall j$

即：

$$\left[(y_1\ \ y_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} - (1\ 0\ 1\ 0)\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 7/4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow y_1 = -\frac{1}{4} \quad y_2 = 1$

代入得： $z = -\frac{5}{4} + 3 = \frac{7}{4}$ 与 P 一致。

4. 用单纯形法直接求解如下线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & 6x_1 + x_3 \le 8 \\ & x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{aligned}$$

其最优单纯形表如下：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	1/6	0	1	-1/6	-5/6	3
x_1	1	-1/6	0	0	1/6	-1/6	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	0	-1/6	0	0	-5/6	-7/6	z-9

1） 从表中直接读出该问题对偶问题的最优解和最优值。

2） 若目标函数中 x_1 的系数变为 c_1，求能够使当前基保持最优的 c_1 的取值范围。

(1)

记对偶问题最优解：$\hat{Y}^T = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)$

首先观察得到，最优值 $\min z^* = \max z = 9$

由互补松弛定理：转置后 1,3,4 行为紧约束.

即：$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = (0 \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{6})^T$

经检验：$z = \frac{5}{6} \times 8 + \frac{7}{6} \times 2 = 9$ 为最优值.

(2)

$\max z = cx_1 + x_2 + 2x_3 \Rightarrow \max z + (5-c)x_1 = 5x_1 + x_2 + 2x_3$

故可将 $(5-c)x_1$ 计入最终单纯型表：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	1/6	0	1	-1/6	-5/6	3
x_1	1	-1/6	0	0	1/6	-1/6	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	c-5	-1/6	0	0	-5/6	-7/6	z-9

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	1/6	0	1	-1/6	-5/6	3
x_1	1	-1/6	0	0	1/6	-1/6	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	0	$\frac{c-6}{6}$	0	0	$-\frac{c}{6}$	$\frac{c-6}{6}$	z-4-c

为使基不变，检验数应满足 $\sigma \le 0$

$\therefore \begin{cases} \frac{c-6}{6} \le 0 \\ -\frac{c}{6} \le 0 \end{cases} \Rightarrow c \in [0, 6]$

5. 请用切平面方法求解如下整数线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max\ & 11y_1 + 4y_2 \\
\text{s.t.}\ & -y_1 + 2y_2 \le 4 \\
& 5y_1 + 2y_2 \le 16 \\
& 2y_1 - y_2 \le 4 \\
& y_1, y_2 \ge 0, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	-1	2	1	0	0	4
y_4	5	2	0	1	0	16
y_5	2	-1	0	0	1	4
	11	4	0	0	0	z

y_1进，y_5出：

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	6
y_4	0	$\frac{9}{2}$	0	1	$-\frac{5}{2}$	6
y_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
	0	$\frac{19}{2}$	0	0	$-\frac{11}{2}$	$z-22$

y_2进，y_4出

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	0	1	-1	4/3	4
y_2	0	1	0	2	-5/9	4/3
y_1	1	0	0	1	2/9	8/3
	0	0	0	-19	-2/9	$z-\frac{104}{3}$

$y = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 4, 0, 0)^T$

选 $y_2 + 2y_4 - \frac{5}{9}y_5 = \frac{4}{3}$ 构造割平面.

$$-\frac{4}{9}y_5 \le -\frac{1}{3}$$

利用约束：$2y_1 - y_2 + y_5 = 4$

$$\Rightarrow \quad 2y_1 - y_2 \le \frac{13}{4}$$

$$2y_1 - y_2 + y_6 = \frac{13}{4}$$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
y_3	0	0	1	-1	4/3	0	4
y_2	0	1	0	2	-5/9	0	4/3
y_1	1	0	0	1	2/9	0	8/3
y_6	0	0	0	0	-1	1	-3/4
	0	0	0	-19	-2/9	0	$z-\frac{104}{3}$.

y_5 进 y_6 出

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
y_3	0	0	1	-1	0	4/3	3
y_2	0	1	0	2	0	-5/9	7/4
y_1	1	0	0	1	0	2/9	5/2
y_5	0	0	0	0	1	-1	3/4
	0	0	0	-19	0	-2/9	$z-\frac{69}{2}$.

利用 $y_1 + y_4 + \frac{2}{9}y_6 = \frac{5}{2}$ 构造

$$-\frac{2}{9}y_6 \le -\frac{1}{2}$$

$$2y_1 - y_2 \le 1$$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	
y_3	0	0	1	-1	0	4/3	0	3
y_2	0	1	0	2	0	-5/9	0	7/4
y_1	1	0	0	1	0	2/9	0	5/2
y_5	0	0	0	0	1	-1	0	3/4
y_7	0	0	0	0	0	-1	1	-9/4
	0	0	0	-19	0	-2/9	0	$z-\frac{69}{2}$

y_6 进，y_7 出：

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	
y_3	0	0	1	-1	0	0	4/3	0
y_2	0	1	0	2	0	0	-5/9	3
y_1	1	0	0	1	0	0	2/9	2
y_5	0	0	0	0	1	0	-1	3
y_6	0	0	0	0	0	1	-1	9/4
	0	0	0	-19	0	0	-2/9	$z-34$.