考试课程　　　　　　**多元微积分期末考题**

系名________________　班级______________　姓名______________　学号_____________

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. 设$b>a>0$，积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=$____________________。

2. 设函数$f(x,y)$在$\Re^2$上连续，交换累次积分的顺序
$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx=$____。

3. 设$D=\left\{(x,y)\in\Re^2\middle|x^2+y^2\le 2x\right\}$，则$\iint\limits_D\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=$_________________。

4. 设 Ω 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的区域，积分
$\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz=$______________________。

5. 圆柱面$x^2+y^2=2x$被曲面$z=x^2+y^2$及平面$z=0$所截部分的面积为______________。

6. 设 $A(1,0,0), B(1,0,2\pi)$ 为曲线 $L: x=\cos t, y=\sin t, z=t$ 上两点，则第二类曲线积分
$\int_{L(A)}^{(B)} ydx+xdz=$__________________。

7. 设第二类曲线积分 $\int_{L^+}(1+x^k e^{2y})dx+(x^2e^{2y}-y^2)dy$ 与积分路径无关，则
$k=$_________________。

8. 微分方程 $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$ 的通解为_________________________________。

9. 设S为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，则$\iint\limits_S\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}dS=$________________________。

10. 设S为R^3中的闭圆域：$x^2+y^2\le 1$，$z=0$，规定S的正法向量向下，则第二类曲面
积分$\iint\limits_{S^+}(x^2+y^2)dx\wedge dy=$___________________________。

11. 曲面S是中心在原点，半径为a的球面，正方向为外法向量方向，则第二类曲面积分
$\iint\limits_{S^+}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=$___________________。

12. 设$\mathbf{A}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+e^y\mathbf{j}+(xyz)\mathbf{k}$，则$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(x,y,z)=$__________________________。

13. 三阶常系数齐次线性常微分方程有两个解为 xe^x, e^{-x}，则该常微分方程的通解为 ______________________________。

14. 一阶常微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ 的通解为______________________________。

15. 微分方程 $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$ 的通解为 ______________________________。

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2 - x^2 - y^2$ 包围的空间区域，求 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdydz$。

2. 计算积分 $\oint\limits_{L^+} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$，其中 L^+ 是柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与平面 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1$ 的交线 $(a > 0, b > 0)$，其正向从 Oz 轴向下看为逆时针方向。

3. 设 S^+ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$，内侧为正，求 $\iint\limits_{S^+} \dfrac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot d\mathbf{S}$。

4. 假设函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 连续可导，且满足 $\varphi(0) = -2, \psi(0) = 1$，对平面上任意一条分段光滑的曲线 L，第二类曲线积分
$$I = \int_L 2(x\varphi(y) + \psi(y))dx + (x^2\psi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y))dy$$
与路径无关，求 $\varphi(x), \psi(x)$。

三．证明题

1. （7 分）设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，证明 $2\int_0^1 f(x)dx \int_x^1 f(y)dy = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$。

2. （8 分）设 Ω 为 $\mathfrak{R}^3$ 中的有界闭区域，其边界面 $\partial\Omega$ 为光滑闭曲面，函数 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 在 Ω 上二阶连续可微，

(I)证明：
$$\iint\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iiint\limits_{\Omega} v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dxdydz + \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dxdydz$$
其中 $\vec{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向；

(II) 若 $u(x, y, z)$ 为调和函数，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$，$\forall (x, y, z) \in \Omega$，且 $u(x, y, z)\big|_{\partial\Omega} = 0$，即函数 u 在边界面 $\partial\Omega$ 上取值为 0，证明：$u(x, y, z) \equiv 0, \forall (x, y, z) \in \Omega$。