自动控制理论

（二）现代控制理论

自动化系 尚超
中央主楼418A 010-62782459
c-shang@tsinghua.edu.cn

课程教学安排

第九周	11.11	状态与状态空间模型	作业（见题库文件）1.1, 1.3, 1.6, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.19； 1.8, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18
第十周	11.16 11.18	状态变量的线性变换 由状态方程导出传递函数	
第十一周	11.23	矩阵指数函数与状态转移矩阵 线性系统状态方程的解	2.1(1)，2.2，2.3，2.4(2)，2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.11(1), 2.12
	11.25	状态变量的能控性及其判据	3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6和3.7的能控部分
第十二周	11.30 12.02	状态变量的能控性及其判据（Part II） 状态变量的能观性及其判据 状态空间的结构分解（Part I）	3.6和3.7的能观部分 3.8, 3.9(2), 3.17；
第十三周	12.07 12.09	状态空间的结构分解（Part II） 能控与能观标准型 传递函数阵的实现	3.15, 3.16, 3.19 3.10, 3.11, 3.18, 3.21

课程教学安排

第十四周	12.14	极点配置与镇定	**4.3, 4.5, 4.6(b), 4.7, 4.8**
	12.16	状态观测器	**5.1, 5.2**
实验2：极点配置方法控制实验			
第十五周	12.21	李雅普诺夫方法（第一、第二方法）	**6.1-6.2**
	12.23	线性定常系统的稳定性	**6.3-6.8**

答疑：每周二上午8：30-9：30

中央主楼418A / 瞩目会议（ID：186-930-7249）

作业提交方式：网络学堂上传电子版 / 课前提交作业纸质版 均可。

作业提交时间：纸质版作业每周二课前提交。

回放：雨课堂

"学堂在线" 版本：

https://next.xuetangx.com/course/THU08081000909/4230525

Theory v.s. Practice （理论 v.s. 工程实践）

"Theory is what at best you can do without considering all practical constraints."

为什么要学习控制理论?

- 定性分析辅助判断
- 加深对研究对象特性的理解

随着经济形势发生变化，中央银行通常需要进行适时、适度的货币政策调整，其核心任务是更加强调调控的前瞻性，更加注重微调，尽量避免“一刀切”和“硬着陆”。这就要求确实要逐步建立起一种机制，一种有利于中央银行适时、适度进行宏观调控的机制，避免宏观调控出现必然性的滞后。经济形势发展到不得不进行宏观政策调整的时候才开始被动应对，在历史和国际上是有不少实例的。

从研究数学模型的角度，可能有三个数学模型[①]与宏观调控机制比较有关。第一个是二阶常微分方程，可以描述为：

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=m(t-\tau)$$

其中，y为系统的状态变量；

m为系统的控制变量；

t为时间；

T为与系统的振荡特性相关的系数；

ζ为与系统的响应速度相关的系数；

τ为系统的迟延系数。

为什么该方程比较有意义？在举例解释二阶常微分方程的应用中，有一个工程学例子，用以描述锅炉的加热与温度之间的关系。因为锅炉热容量比较大，加热时有一个时间滞后系数，比如添煤后，不是马上就见到温度变化。这就好比货币供应量提高了5个百分点，也不是马上就看到关键指标的变化。锅炉温度的变化规律是一个二阶常微分方程，在该方程中有一个滞后系数，表明了温度对于添煤的滞后反应。类似地，如果说在调节宏观经济时，想根据已经检测到的温度再来进行调节，这种调节必然是滞后的甚至是导致振荡的。当看到温度已经太高，才开始撤火的话，由于滞后因素的存在，即使是在撤火后还会看到温度会进一步甩上去，然后才冷下来，可能冷却的程度会比设想程度更深，即所谓“过度的振荡”。二阶常微分方程反映的正是系统具有的这样一个数学规律。

周小川.《金融研究》2005年第1期

自控理论模型及分析方法概览

扫频实验 → G(jω) → 图解法（Nyquist图，Bode图）

频率响应特性

- **工具：间接的复数域分析**

“试探性”的设计

G(s) → 多项式分析法/图解法（根轨迹图）

传递函数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

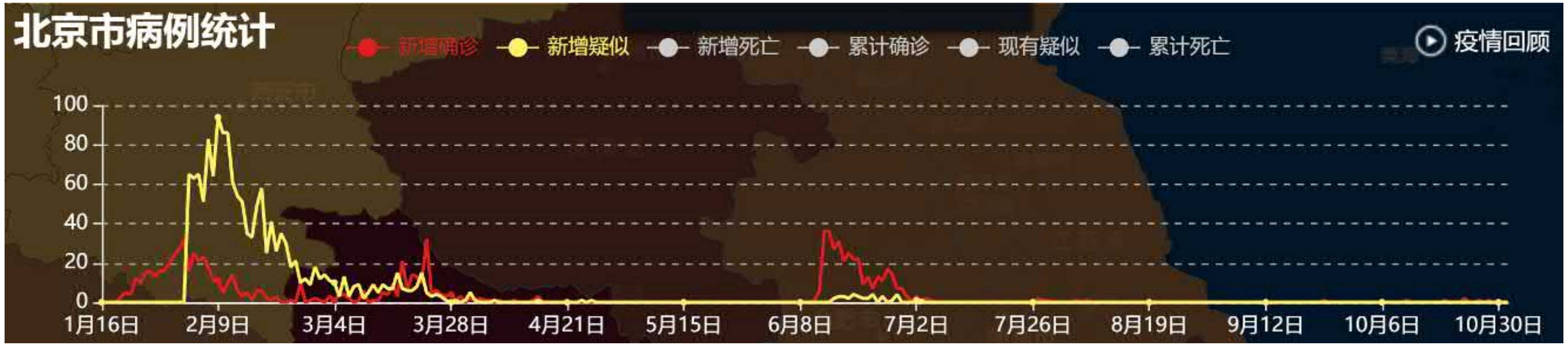
经典控制理论

飞升曲线/机理建模 → G(d/dt) → 矩阵分析法/相平面法/李雅普诺夫函数法

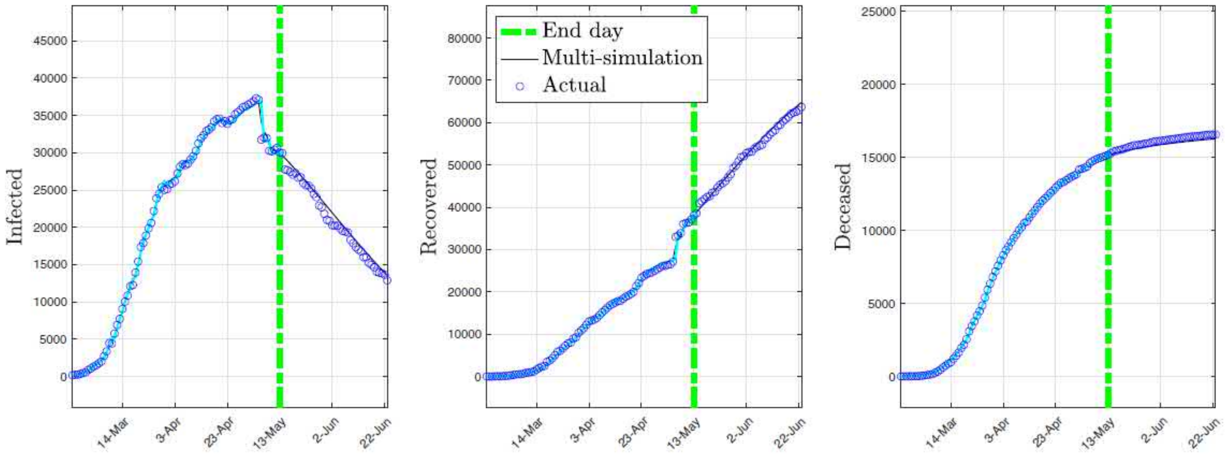
微分方程

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)$$
$$=b_1\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{du(t)}{dt}+b_n u(t)$$

经典控制理论的不足——Susceptible-Infectious-Recovered-Deceased (SIRD) Model for COVID-19 Epidemics



$$
\begin{cases}
\dot{S}(t) = -\beta \dfrac{S(t)I(t)}{S(t)+I(t)} & \text{易感人群数量变化} \\
\dot{I}(t) = \beta \dfrac{S(t)I(t)}{S(t)+I(t)} - R(t) - D(t) & \text{已感染人群数量变化} \\
\dot{R}(t) = \gamma I(t) & \text{已治愈人数变化} \\
\dot{D}(t) = \alpha I(t) & \text{死亡人数变化}
\end{cases}
$$



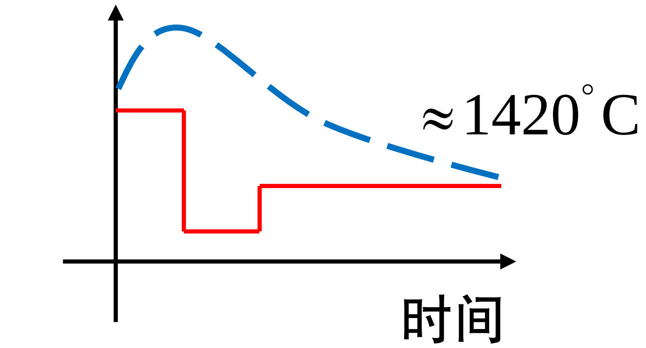
G. C. Calafiore *et al.* (2020) A Time-Varying SIRD Model for the COVID-19 Contagion in Italy. *Annual Reviews in Control*.

现代控制理论面对的控制需求

- 控制存在成本/代价
- 轨迹需精细规划且有约束
- 多输入多输出
- 非线性、时变、分布式参数

单晶硅产品

例：直拉法单晶炉温度控制



- 大延迟
- 不得击穿温度低限
- 辐射传热非线性
- 多个测量输出

模块1　控制系统的状态空间表达式

TD1-1-1　状态、状态空间、状态空间描述

TD1-2-1　多输入多输出系统的状态空间表达式

TD1-2-2　组合系统的空间表达式及传递函数阵

TD1-2-3　系统的时域描述及状态空间表达式（一）

TD1-2-4　系统的时域描述及状态空间表达式（二）

TD1-3　基于模拟结构图写出状态空间表达式

TD1-4　系统的等价变化及其应用

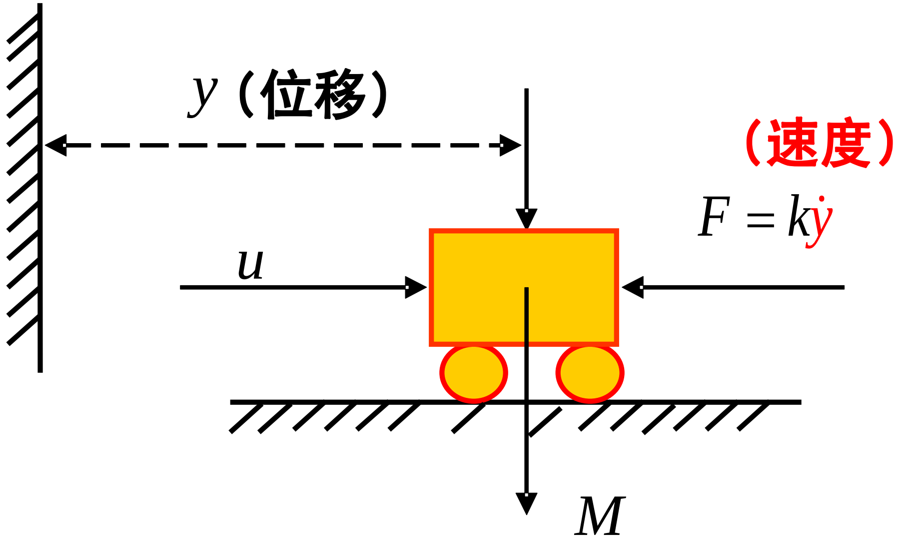
TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

一、状态（State）：指能从物理上揭示动态系统内部运行规律的“特征量”

- 粗略地讲，状态指系统过去、现在和将来的运动行为
- 精确地讲，状态需要一组必要而充分的数据来说明

- **例：小车运动系统的状态**
  - 位移（决定了势能）
  - 速度（决定了动能）
- 机械能 = 动能 + 势能

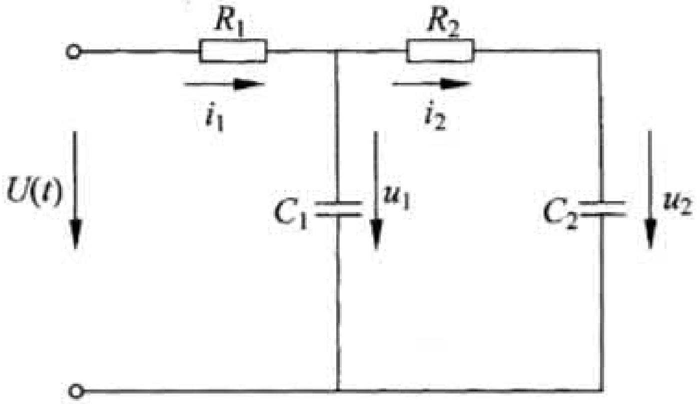
二维状态完备地描述了车子的能量水平



TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

二、状态变量：指足以完全确定系统运动状态的数目最少的一组变量

- 设 $\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$ 为一组状态变量，则它应满足如下条件：
  - 在任意时刻 $t = t_0$，该组变量的值 $\{x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)\}$ 都表示系统在该时刻（称为"初始时刻"）的状态（称为"初始状态"）；
  - 只要确定了上述初始状态，以及系统在 $t \geq t_0$ 的输入，就能将系统从 t_0 时刻起的行为完全确定下来。



TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

三、状态向量

- 如果完全描述一个系统的动态行为需要 n 个状态变量，那么该 n 个状态变量 $\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$ 作分量所构成的向量称为该系统的状态向量，记作：

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

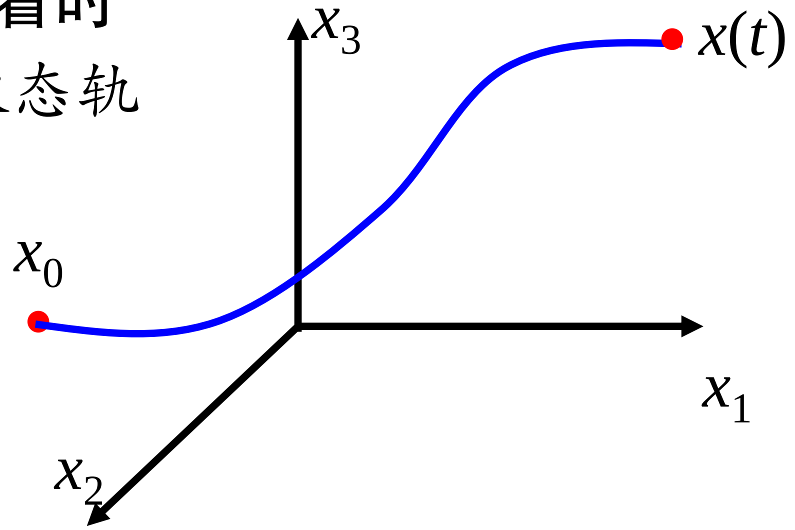
TD1−1−1 状态、状态空间和状态空间描述

四、状态空间

- 以状态变量 $\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$ 为坐标构成的 n 维空间称为状态空间。

- 系统的任何状态，都可以用状态空间中的一个点来表示。即在特定时刻 t 状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 在状态空间中是一个点。已知初始时刻 t_0 的 $\boldsymbol{x}(t_0)$，就得到状态空间中的一个初始点。随着时间的推移，$\boldsymbol{x}(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨线。

- 状态向量的状态空间表示则将向量的代数结构和几何概念联系起来。



TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

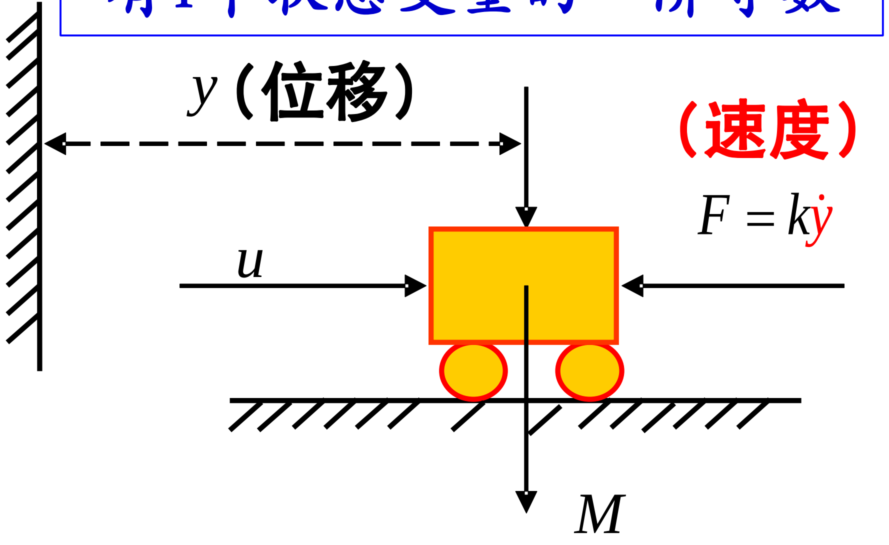
五、状态方程

- 描述系统状态变量与系统输入之间关系的一阶微分方程组称为状态方程。

- 右图中，令 $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y} \triangleq \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 为此系统的一组状态变量，则根据牛顿第二定律得一阶微分方程组：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{k}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

每个方程必须含有且只能含有1个状态变量的一阶导数



- 也可简写成：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{k}{M} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

- 建立状态方程的基本依据是守恒定律：
  - 能量守恒
  - 动量守恒
  - 质量守恒
- 根据守恒定律，不论对物质、能量还是动量，均有

(累积的变化率) = **(进入的速率)** − **(离开的速率)** + **(产生的速率)**

- 状态在物理上反映了能量的累积，状态变化的背后是能量的转换和流动。

TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

- 连续搅拌反应釜（Continuous Stirred Tank Reactor）

反应物物质的量浓度　　化学反应速率常数

$$\frac{dC_A}{dt}=\frac{q}{V}(C_{Af}-C_A)-k_0\exp\left\{-\frac{E}{RT}\right\}C_A$$

物料守恒

$$\frac{dT}{dt}=\frac{q}{V}(T_f-T)-\frac{\Delta H}{\rho C_p}k_0\exp\left\{-\frac{E}{RT}\right\}C_A+\frac{UA}{V\rho C_p}(T_c-T)$$

能量守恒

TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

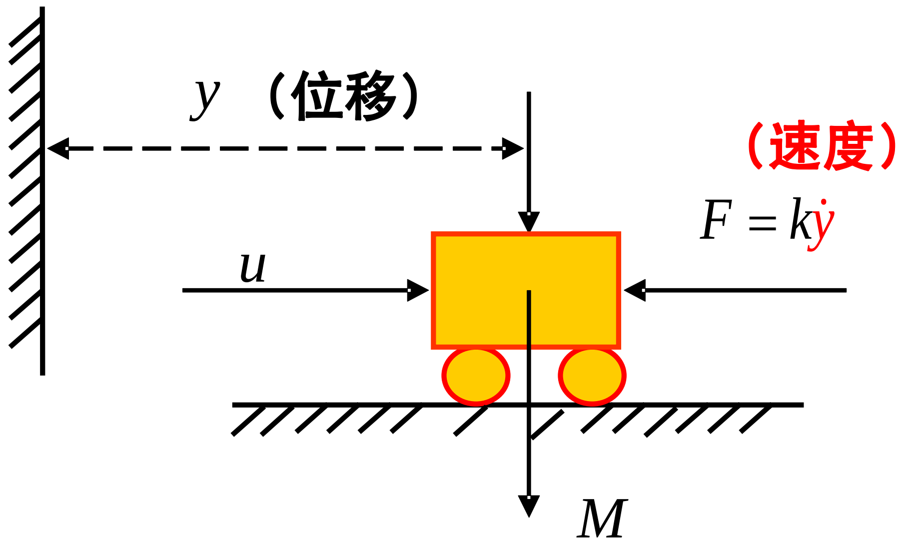
六、输出方程

- 描述系统状态变量与系统输出变量之间关系的一阶代数方程称为输出方程。在小车的运动当中，若指定位移为系统输出，则对应的输出方程为 $y = x_1$ ，或者：

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- 简写为：

$$y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

七、状态空间描述

- 状态方程和输出方程一同构成一个系统动态的完整描述，称为系统的状态空间表达式，也称为状态空间描述。
- 对于一般单输入单输出线性定常系统，状态空间表达式可写为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

- 其中：

  $\boldsymbol{x}$： 状态向量（n 维）

  u： 输入（标量）

  $\boldsymbol{A}$： 状态系数矩阵（$n \times n$ 维）或 系统矩阵

  $\boldsymbol{b}$： 输入系数向量（n 维）

  $\boldsymbol{c}$： 输出系数向量（n 维）

TD1－1－1 状态、状态空间和状态空间描述

七、状态空间描述

- 状态方程和输出方程一同构成一个系统动态的完整描述，称为系统的状态空间表达式，也称为状态空间描述。
- 对于一般多输入多输出系统，状态空间表达式为：$\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})=\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{cases}$
- 其中：

  $\boldsymbol{x}$：状态向量（n 维）

  $\boldsymbol{u}$：输入向量（r 维） $\boldsymbol{y}$：输出向量（m 维）

  $\boldsymbol{A}$：状态系数矩阵（$n\times n$ 维）或 系统矩阵

  $\boldsymbol{B}$：输入系数矩阵（$n\times r$ 维）

  $\boldsymbol{C}$：输出系数矩阵（$m\times n$ 维）

  $\boldsymbol{D}$：输入的直接传递矩阵（$m\times r$ 维）

TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

七、状态空间描述

- 连续时间系统的状态空间表达式

$$\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})=\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{cases}$$

- 离散时间系统的状态空间表达式

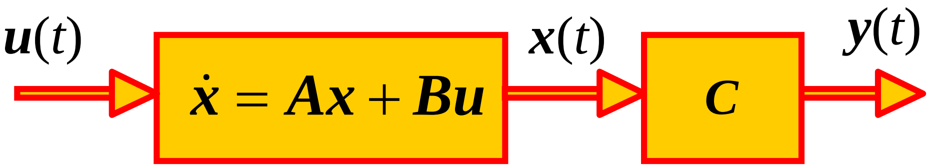
$$\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})=\begin{cases}\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}$$

TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

七、状态空间描述

- 状态空间的描述和经典控制理论中的描述不同之处:
- 1. 状态空间描述了系统内部状态和输入、输出关系，而在经典控制理论中描述的是输入输出之间的关系。因此状态空间描述揭示了系统的内部联系，输入引起状态的变化，而状态的变化决定输出的变化。
- 2. 输入引起状态的变化是一个运动过程，用微分方程组来表示，即状态方程。状态决定输出的变化则是一个变换过程，数学上表现为一个变换方程，即代数方程。

经典控制理论

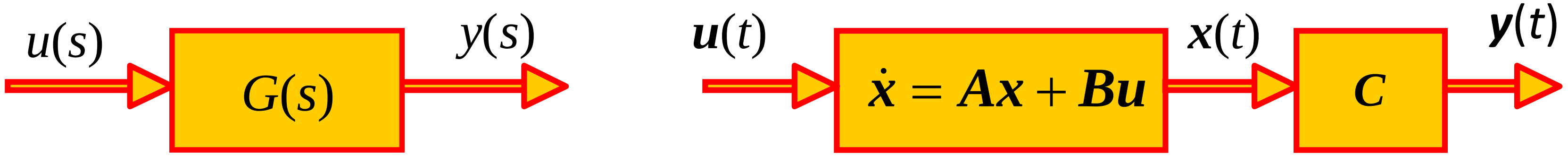


现代控制理论

TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

七、状态空间描述

- 状态空间的描述和经典控制理论中的描述不同之处:
- 3. 选取状态变量时要求这些状态变量相互独立，个数应等于微分方程的阶数。因此，一个 n 阶系统有且仅有 n 个状态变量。系统状态变量的个数等于系统所包含的独立储能元件的个数。对于简单的电路和力学对象，选择独立的储能元件的储能变量作为状态变量，如电容端电压 v_c，电感中（或电枢中）电流 i_l，惯性元件的速度 v，弹性元件的位移 x，电动机转子的角速度 w，水槽的水位 h。



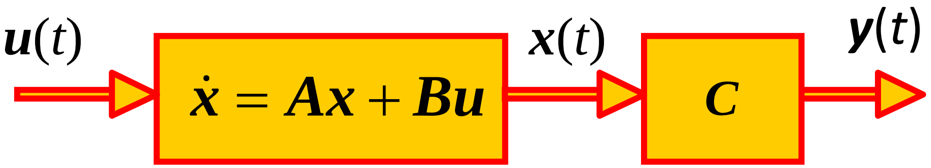
经典控制理论　　　　现代控制理论

TD1-1-1 状态、状态空间和状态空间描述

七、状态空间描述

- 状态空间的描述和经典控制理论中的描述不同之处:
- 4. 状态空间表达式的突出优点是当状态变量个数，输入和输出个数增加时并不增加方程在表达和分析上的复杂性。状态空间分析法是在时域内进行的一种矩阵运算的方法，因此特别适用于计算机来运算。

经典控制理论



现代控制理论

模块1　控制系统的状态空间表达式

TD1-1-1　状态、状态空间、状态空间描述

TD1-2-1　多输入多输出系统的状态空间表达式

TD1-2-2　组合系统的空间表达式及传递函数阵

TD1-2-3　系统的时域描述及状态空间表达式（一）

TD1-2-4　系统的时域描述及状态空间表达式（二）

TD1-3　基于模拟结构图写出状态空间表达式

TD1-4　系统的等价变化及其应用

TD1-2-1 多输入多输出系统空间表达式及传递函数阵

- 已知系统的状态空间表达式为:

$n\times n$ 系统矩阵　$n\times 1$ 状态向量　$n\times r$ 控制矩阵　$r\times 1$ 输入列向量

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{cases}$$

$m\times n$ 输出矩阵　$m\times r$ 直接传递矩阵

- 假设初始状态为零，对上式做 Laplace 变换可得:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\\ \boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(s)\end{cases}$$

得到系统传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$　$\boxed{\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{u}(s)}$

TD1-2-1 多输入多输出系统空间表达式及传递函数阵

- 系统的传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 是一个 $m\times r$ 维的矩阵函数，设 $g_{ij}(s)$ 为 $\boldsymbol{G}(s)$ 中的元素，则传递函数阵可表示为：

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

并且容易看出，其元 $g_{ij}(s)$ 都是标量函数，在物理上表示为第 j 个输入对第 i 个输出的传递关系。当 $i\neq j$ 时，意味着不同标号的输入与输出有相互关联，称为耦合关系，这正是多变量系统的特点。

TD1-2-1 多输入多输出系统空间表达式及传递函数阵

- 例：考虑如下系统，其状态方程和输出方程分别为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

  求系统的传递函数矩阵。

- 解：由已知：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

  且

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

TD1-2-1 多输入多输出系统空间表达式及传递函数阵

所以，系统的传递函数矩阵为:

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{s+4}{s+2} & \dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{2(s-2)}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s^2+5s+2}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

模块1　控制系统的状态空间表达式

TD1-1-1　状态、状态空间、状态空间描述

TD1-2-1　多输入多输出系统的状态空间表达式

TD1-2-2　组合系统的空间表达式及传递函数阵

TD1-2-3　系统的时域描述及状态空间表达式（一）

TD1-2-4　系统的时域描述及状态空间表达式（二）

TD1-3　基于模拟结构图写出状态空间表达式

TD1-4　系统的等价变化及其应用

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- 实际的控制系统，往往由多个子系统组合而成，或并联、或串联、或形成反馈连接，这种系统称为组合系统。

- 设子系统 Σ_1 为：
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1 \end{cases}$$

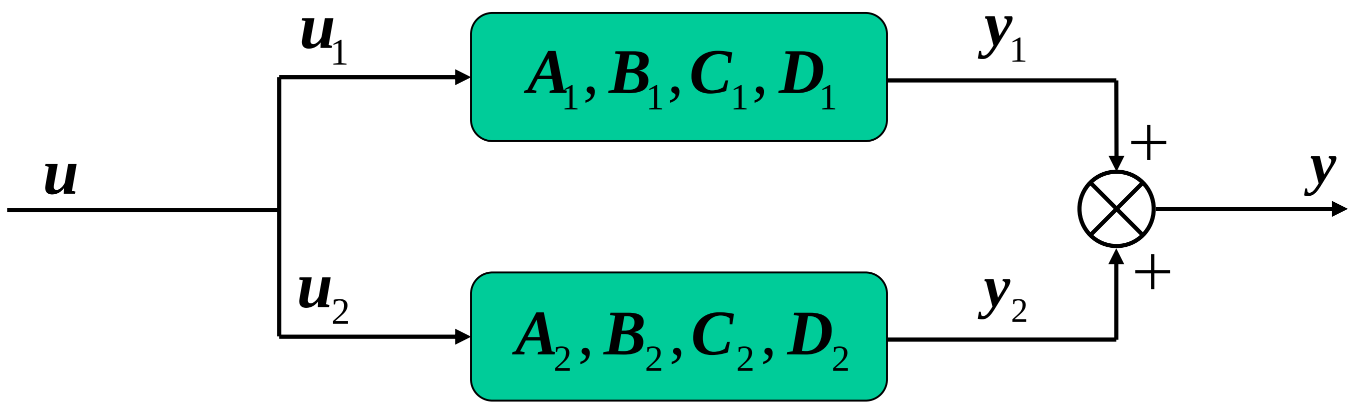
  简记为：$\Sigma_1(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{D}_1)$

- 设子系统 Σ_2 为：
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}_2 \end{cases}$$

  简记为：$\Sigma_2(\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{D}_2)$

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- 并联组合系统：各子系统有相同的输入，组合系统的输出是各子系统的代数和



显然，$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$

且两个系统的输入（输出）具有相同的维数。

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- 并联子系统的状态空间表达式：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + (\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2)\boldsymbol{u} \end{cases}$$

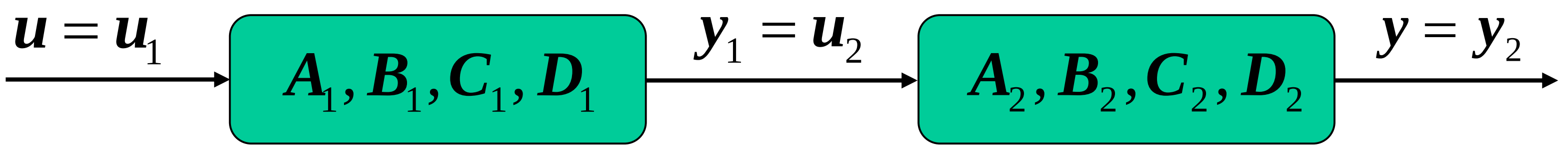
- 从而组合系统的传递函数阵为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(s) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} + (\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2) \\ &= \left[\boldsymbol{C}_1 (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)^{-1} \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{D}_1 \right] + \left[\boldsymbol{C}_2 (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2)^{-1} \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{D}_2 \right] \\ &= \boldsymbol{G}_1(s) + \boldsymbol{G}_2(s) \end{aligned}$$

- 因此，系统并联时，系统传递函数阵等于子系统的传递函数阵之和。

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- 串联组合系统



显然， $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_2$

- 由各个子系统的状态方程可得:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}_2\underbrace{\left(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}\right)}_{=\boldsymbol{y}_1}=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{D}_2\underbrace{\left(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}\right)}_{=\boldsymbol{y}_1}=\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}$$

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- Cont'd:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}$$

- 传递函数阵为:

下三角分块矩阵

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1$$

- 对下三角矩阵求逆可得:

$$\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)^{-1} & \boldsymbol{0} \\ (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)^{-1} & (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2)^{-1} \end{bmatrix}$$

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- 得：

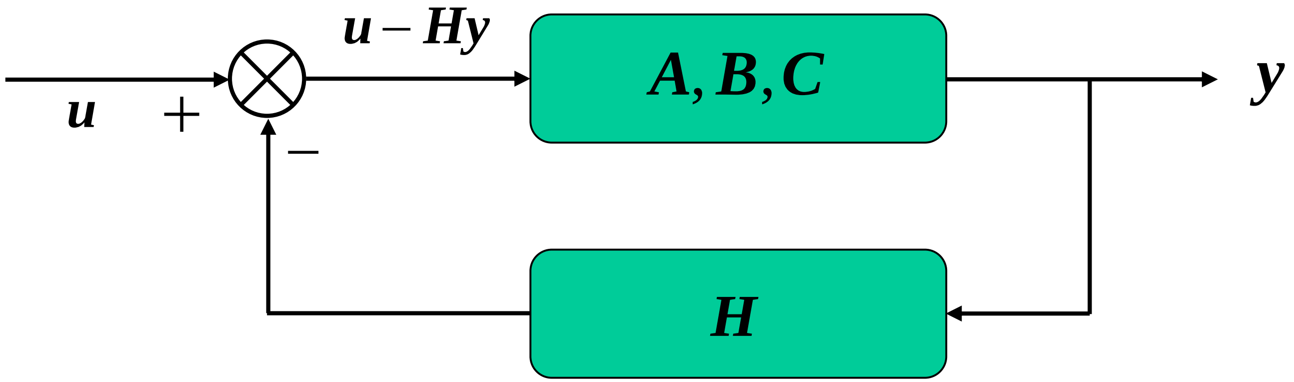
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}(s) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1} & \boldsymbol{0} \\ (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1} & (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1 \\
&= \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 \\
&\quad + \boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1 \\
&= \left[\boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{D}_2\right]\left[\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{D}_1\right] \\
&= \boldsymbol{G}_2(s)\cdot\boldsymbol{G}_1(s)
\end{aligned}
$$

- **即**：串联组合系统的传递函数阵等于子系统传递函数阵之积。

注意！子系统的先后次序不能颠倒

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- 具有输出反馈的系统

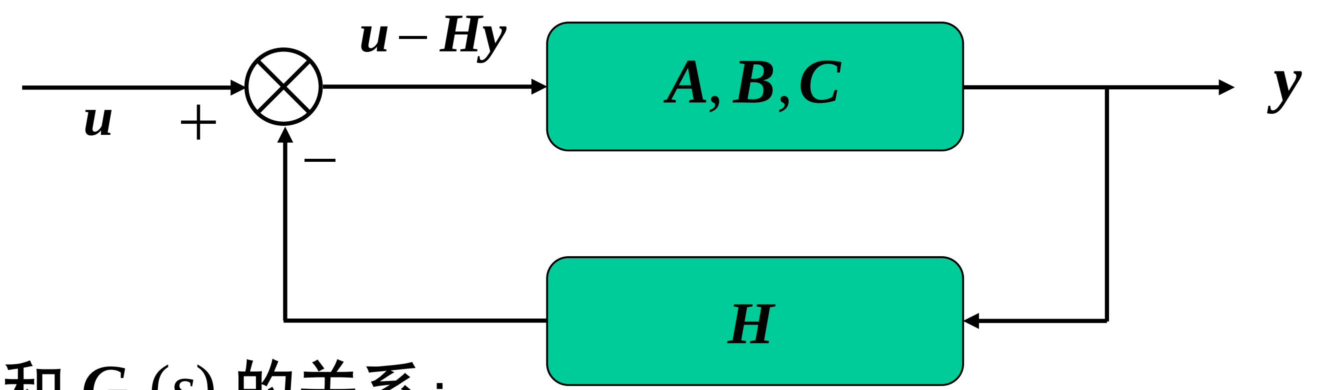


可知在没有反馈时，系统前向通道的传递函数矩阵为 $G_o(s)=C(sI-A)^{-1}B$

闭环系统状态空间表达式：
$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+B(u-Hy)=(A-BHC)x+Bu\\ y=Cx\end{cases}$$

故常数反馈系统传递函数阵为：$G(s)=C(sI-A+BHC)^{-1}B$

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵



- 下面分析 $G(s)$ 和 $G_o(s)$ 的关系：

  从上图得：$y(s)=G_o(s)\left[u(s)-Hy(s)\right]=G_o(s)u(s)-G_o(s)Hy(s)$

  所以有：$\left[I+G_o(s)H\right]y(s)=G_o(s)u(s)$

  假设 $\det\left[I+G_o(s)H\right]\neq 0$ ，则 $I+G_o(s)H$ 为非奇异矩阵，则有：

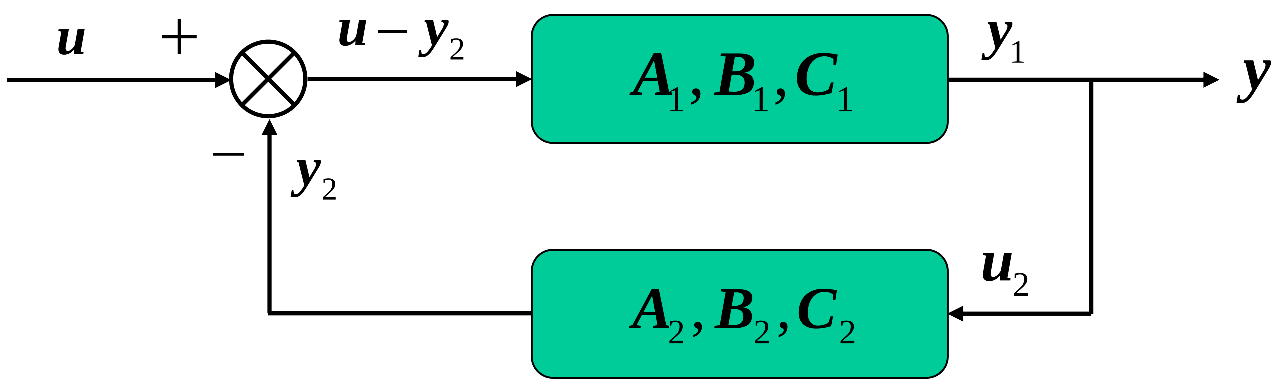
$$y(s)=\left[I+G_o(s)H\right]^{-1}G_o(s)u(s)$$

  可得：$G(s)=\left[I+G_o(s)H\right]^{-1}G_o(s)$

  同理，$G(s)=G_o(s)\left[I+HG_o(s)\right]^{-1}$

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- 更为复杂的情形——动态反馈系统



由上图可知：$u_1 = u - y_2,\ y = y_1 = u_2$

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- 动态反馈系统的子系统状态方程:

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1\end{cases}\qquad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2\\ \boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2\end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{u}_2$$

- 由此可得动态反馈系统的状态空间表达式为: $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1\end{cases}$

- 写成矩阵形式: $\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}$$

TD1-2-2 组合系统状态空间表达式及传递函数阵

- 记 Σ_1 和 Σ_2 的传递函数矩阵分别为 $\boldsymbol{G}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_2(s)$，有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(s) &= \boldsymbol{G}_1(s)\left[\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{y}(s)\right] \\ &= \boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{y}(s)\end{aligned}$$

- 将上式化简，得：$\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)\right]\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}(s)$

  假设 $\det\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)\right]\neq 0$，则 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)$ 为非奇异矩阵，则有：

$$\boldsymbol{y}(s)=\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)\right]^{-1}\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}(s)$$

可得：$\boldsymbol{G}(s)=\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)\right]^{-1}\boldsymbol{G}_1(s)$

同理，$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{G}_1(s)\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)\right]^{-1}$

模块1　控制系统的状态空间表达式

TD1-1-1　状态、状态空间、状态空间描述

TD1-2-1　多输入多输出系统的状态空间表达式

TD1-2-2　组合系统的空间表达式及传递函数阵

TD1-2-3　系统的时域描述及状态空间表达式（一）

TD1-2-4　系统的时域描述及状态空间表达式（二）

TD1-3　　基于模拟结构图写出状态空间表达式

TD1-4　　系统的等价变化及其应用

TD1-2-3 系统的时域描述及状态空间表达式（一）

- 对于一个单输入单输出线性定常系统，在经典控制理论中通常由一个 n 阶线性常系数微分方程来描述：

$$\begin{aligned} & y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_n y \\ & =b_0 u^{(m)}+b_1 u^{(m-1)}+\cdots+b_{m-1}\dot{u}+b_m u \end{aligned}$$

- 单输入单输出线性定常系统的状态空间表达式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u \\ y=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+du \end{cases}$$

- 将系统的一般时域描述转化为状态空间描述的关键在于选择合适的状态变量，根据常系数微分方程的系数确定$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d\}$

TD1-2-3 系统的时域描述及状态空间表达式（一）

- 高阶微分方程中不含作用函数导数项：此时微分方程可表示为

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=u$$

- 若已知初始条件 $y(0),\dot{y}(0),\cdots,y^{(n-1)}(0)$ 及 $u(t),\ t\geq 0$ 已知，则可完全确定系统在 $t\geq 0$ 的运动轨迹。
- 思路：选取 $y(t),\ \dot{y}(t),\ \cdots,\ y^{(n-1)}(t)$ 为系统的一组状态变量

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=u$$

$$\begin{cases} x_1=y \\ x_2=\dot{y} \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}=y^{(n-2)} \\ x_n=y^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1=\dot{y}=x_2 \\ \dot{x}_2=\ddot{y}=x_3 \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}=x_n \\ \dot{x}_n=y^{(n)}=-a_1y^{(n-1)}-\cdots-a_ny+u \\ \qquad=-a_1x_n-a_2x_{n-1}-\cdots-a_nx_1+u \end{cases}$$

TD1-2-3 系统的时域描述及状态空间表达式（一）

- 写成矩阵形式:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}u\\
&y=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\}$$

化简之后可得

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u\\ y=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

TD1-2-3 系统的时域描述及状态空间表达式（一）

- 例：设系统的微分方程为 $y^{(3)}+7y^{(2)}+14\dot{y}+10y=u$ ，求取系统的状态方程和输出方程。

- 解：状态变量选取为：$\begin{cases} x_1=y \\ x_2=\dot{y} \\ x_3=y^{(2)} \end{cases}$ 得到状态方程：$\begin{cases} \dot{x}_1=\dot{y}=x_2 \\ \dot{x}_2=y^{(2)}=x_3 \\ \dot{x}_3=y^{(3)}=-10x_1-14x_2-7x_3+u \end{cases}$

写成向量矩阵：$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -14 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -14 & -7 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \quad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

TD1-2-4 系统的时域描述及状态空间表达式（二）

- 高阶微分方程中含有作用函数导数项
- 例：三阶系统 $y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y=b_1u^{(2)}+b_2\dot{u}+b_3u$
- 若采用如下形式的状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

则有：$x_1^{(3)}+a_1x_1^{(2)}+a_2\dot{x}_1+a_3x_1=u$

思路：选取输出方程

$$y=b_1x_1^{(2)}+b_2\dot{x}_1+b_3x_1=b_1x_3+b_2x_2+b_3x_1$$

TD1-2-4 系统的时域描述及状态空间表达式（二）

- 写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

TD1-2-4 系统的时域描述及状态空间表达式（二）

- 推广至一般的 n 阶系统：

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny\\
&=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu
\end{aligned}
$$

得到：

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u
$$

$$
y=\begin{bmatrix}b_n-a_nb_0 & b_{n-1}-a_{n-1}b_0 & \cdots & b_1-a_1b_0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+b_0u
$$

- 该形式的状态空间表达式称为能控标准I型，也称控制器规范型（或第二可控规范型）。

TD1-2-4 系统的时域描述及状态空间表达式（二）

- 例：设系统的微分方程为 $y^{(3)}+6y^{(2)}+11\dot{y}+6y=8u^{(2)}+17\dot{u}+8u$ ，求取系统的状态方程和输出方程。
- 解：该方程的系数 a_i 和 b_j 分别为： $a_1=6,\ a_2=11,\ a_3=6$ $b_1=8,\ b_2=17,\ b_3=8$

得到状态方程和输出方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}8 & 17 & 8\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

注意：在由高阶微分方程化为状态空间表达式时，通常可选取不同的变量来组成状态变量组，从而导出不同形式的状态方程和输出方程，上面介绍的只是其中的一种方法。

TD1-2 系统的时域描述及状态空间表达式：小结

- 不含有 u 的导数项

$$y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y=u$$

$$G(s)=\frac{1}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

- 含有 u 的一阶导数项

$$y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y=\dot{u}$$

$$G(s)=\frac{s}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

TD1-2 系统的时域描述及状态空间表达式：小结

- 含有 u 的一阶导数项

$$y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y=\dot{u}$$

$$G(s)=\frac{s}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

- 含有 u 的高阶导数项

$$y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y=b_1u^{(2)}+b_2\dot{u}+b_3u$$

$$G(s)=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_3&b_2&b_1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

TD1-2 系统的时域描述及状态空间表达式：小结

- 含有 u 的高阶导数项

$$y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y=b_1u^{(2)}+b_2\dot{u}+b_3u$$

$$G(s)=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_3&b_2&b_1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

- 含有 u 的高阶导数项

$$y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y=b_0u^{(3)}+b_1u^{(2)}+b_2\dot{u}+b_3u$$

$$G(s)=\frac{b_0s^3+b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

真有理分式

$$=b_0+\frac{(b_1-a_1b_0)s^2+(b_2-a_2b_0)s+b_3-a_3b_0}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_3-a_3b_0&b_2-a_2b_0&b_1-a_1b_0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+b_0u$$

模块1　控制系统的状态空间表达式

TD1-1-1　状态、状态空间、状态空间描述

TD1-2-1　多输入多输出系统的状态空间表达式

TD1-2-2　组合系统的空间表达式及传递函数阵

TD1-2-3　系统的时域描述及状态空间表达式（一）

TD1-2-4　系统的时域描述及状态空间表达式（二）

TD1-3　　基于模拟结构图写出状态空间表达式

TD1-4　　系统的等价变化及其应用

由模拟结构图写出状态空间表达式

- 在状态空间分析中，利用模拟计算机的模拟结构图能充分反映状态变量间的相互关系，对建立状态空间表达式很有帮助。
- 基于模拟结构图写出状态方程的方法往往能够帮助我们得到几种有用的状态方程的特殊实现形式，称为标准型。这些标准型的特殊含义会在后续章节进行详细介绍，这里只需了解几种标准型的名称和对应的状态方程即可。
- 根据传递函数导出状态空间描述的基本思路：

  （1）基于串并联分解

  （2）基于部分分式分解

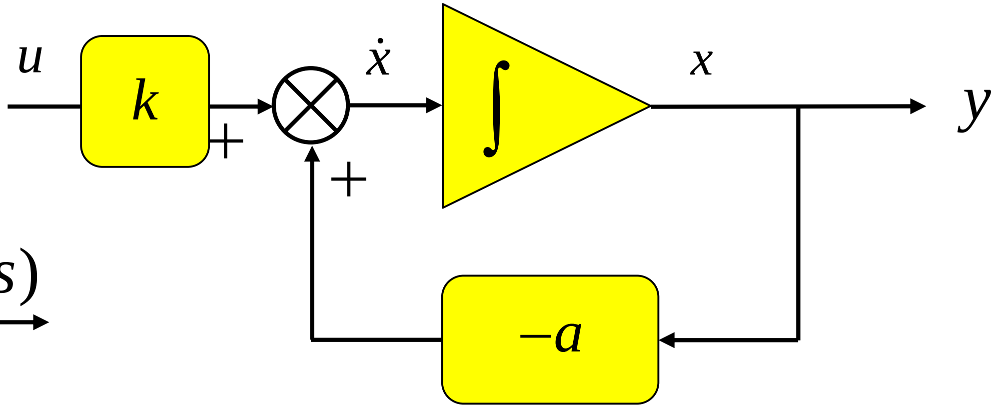
  （3）基于积分器串+常值反馈

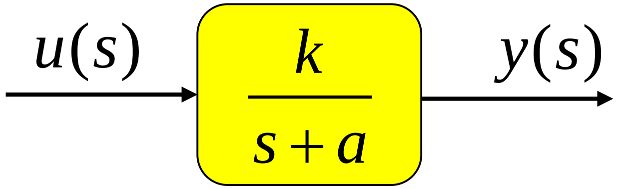
TD1-3-1 基于串并联分解

- 模拟结构图的基本单元的实现：（**一阶惯性环节**）

例：

$$G(s)=\frac{k}{s+a}$$

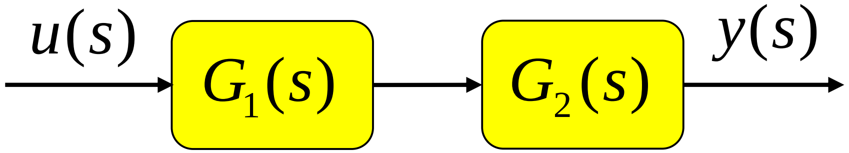




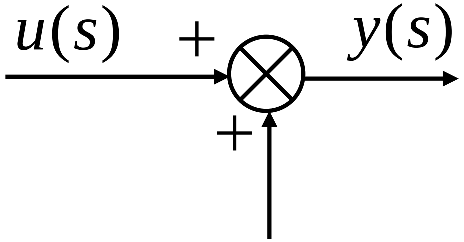
$$y(s)=\left[ku(s)-ay(s)\right]s^{-1}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-ax+ku\\ y=x\end{cases}$$

- 模拟结构图的基本操作：

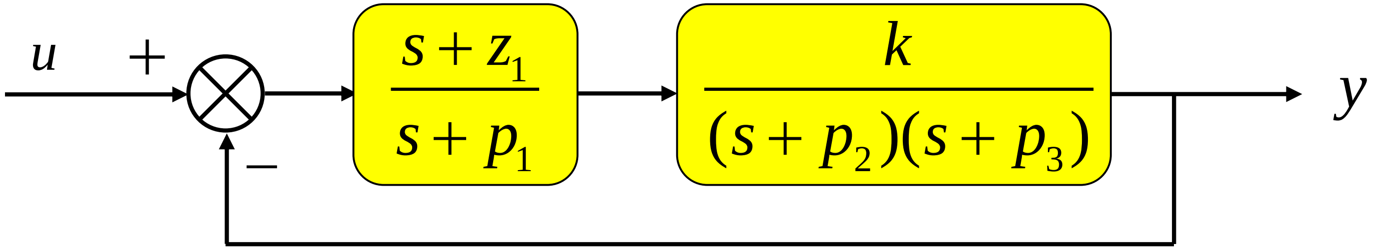


$$y(s)=G_2(s)G_1(s)u(s)$$

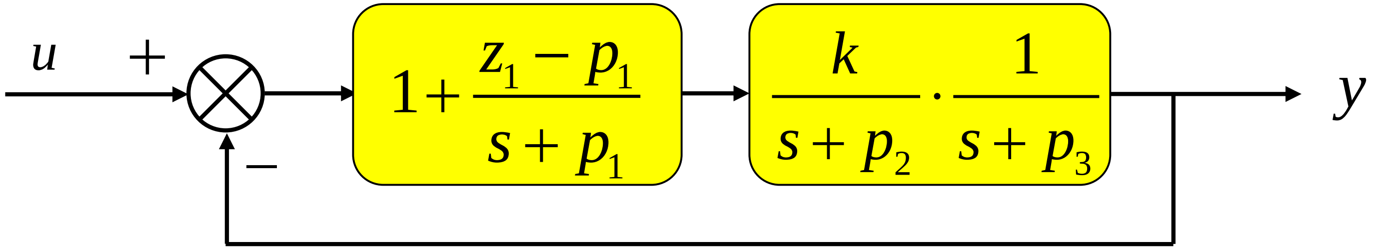


TD1-3-1 基于串并联分解

- 当系统的描述是以方块图给出时，基于各模块的串并联分解可直接导出相应的状态空间表达式
- 例：

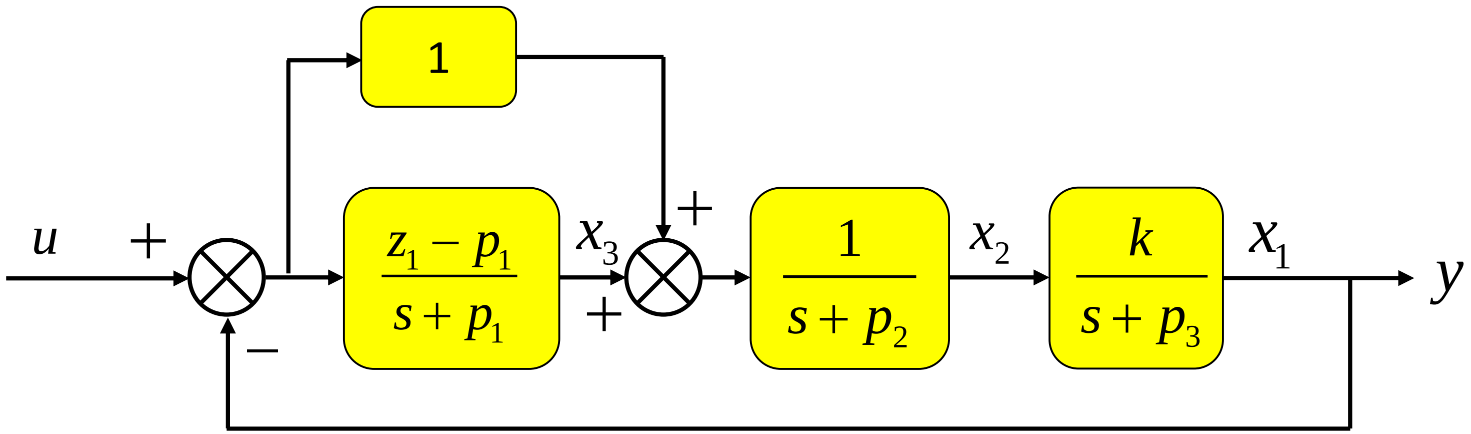


- Step 1: 将各环节传递函数化简为 $\frac{k_i}{s+p_i}$ 的组合，框图转化为：



TD1-3-1 基于串并联分解

- Step 2：把具有简单函数相加的环节化为单元方块的并联，把具有简单函数相乘的环节化为单元方块的串联。



- Step 3：设置状态变量并列出状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -p_3 x_1 + k x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - p_2 x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 = (p_1 - z_2) x_1 - p_1 x_3 + (z_1 - p_1) u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

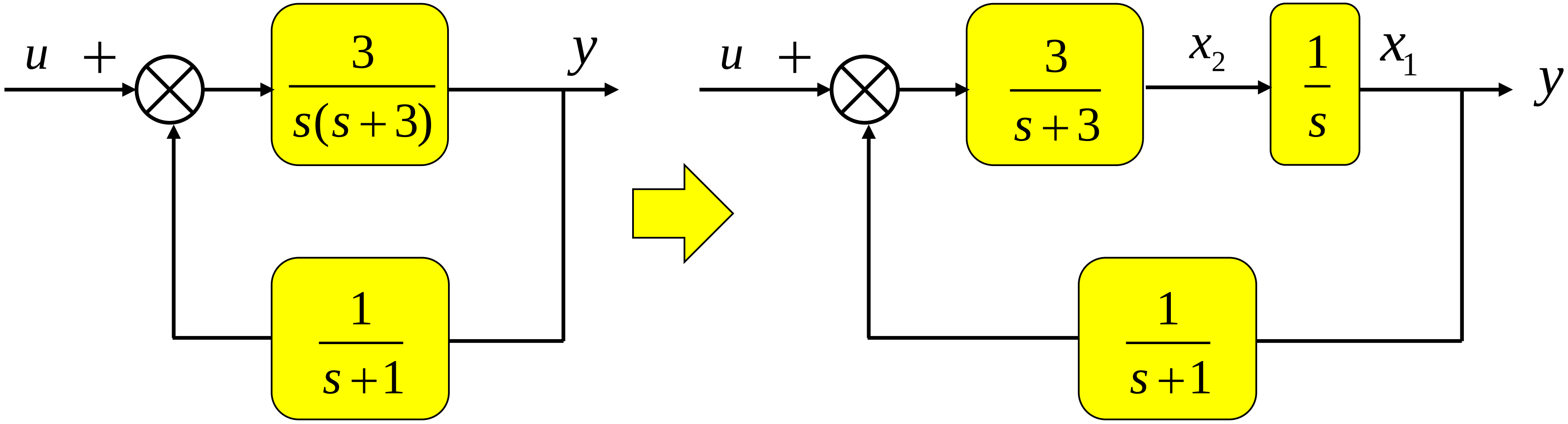
TD1-3-1 基于串并联分解

- 写成矩阵向量形式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -p_3 & k & 0 \\ -1 & -p_2 & 1 \\ p_1 - z_1 & 0 & -p_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_1 - p_1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

TD1−3−1 基于串并联分解

- 例:



$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + 3(-x_3 + u) \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_1\end{cases}$$

$$y = x_1$$

整理并写成向量矩阵形式为:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

TD1-3-2 基于部分分式分解

- 将传递函数展开成部分分式，根据此部分分式画出其模拟结构图，然后由此模拟结构图写出的状态空间表达式是具有一定特点的约当标准型。
- 设单输入一单输出系统的传递函数如下：

$$g(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

- 分两种情况进行讨论
  - 情形①：所有的特征值都是两两相异的
  - 情形②：存在部分特征值是相同的

TD1-3-2 基于部分分式分解

- （1）设传递函数具有两两相异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $g(s)$可展开为如下部分分式

$$g(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{\alpha_1}{s-\lambda_1}+\frac{\alpha_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-\lambda_n}+\delta$$

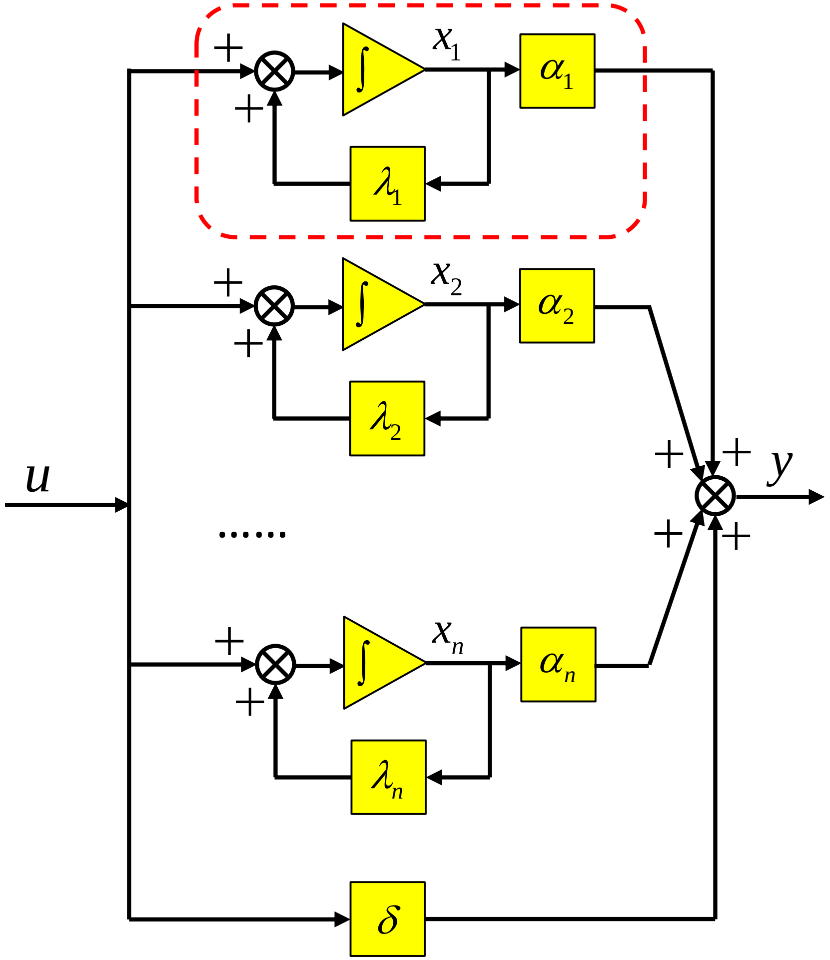
- 其中:

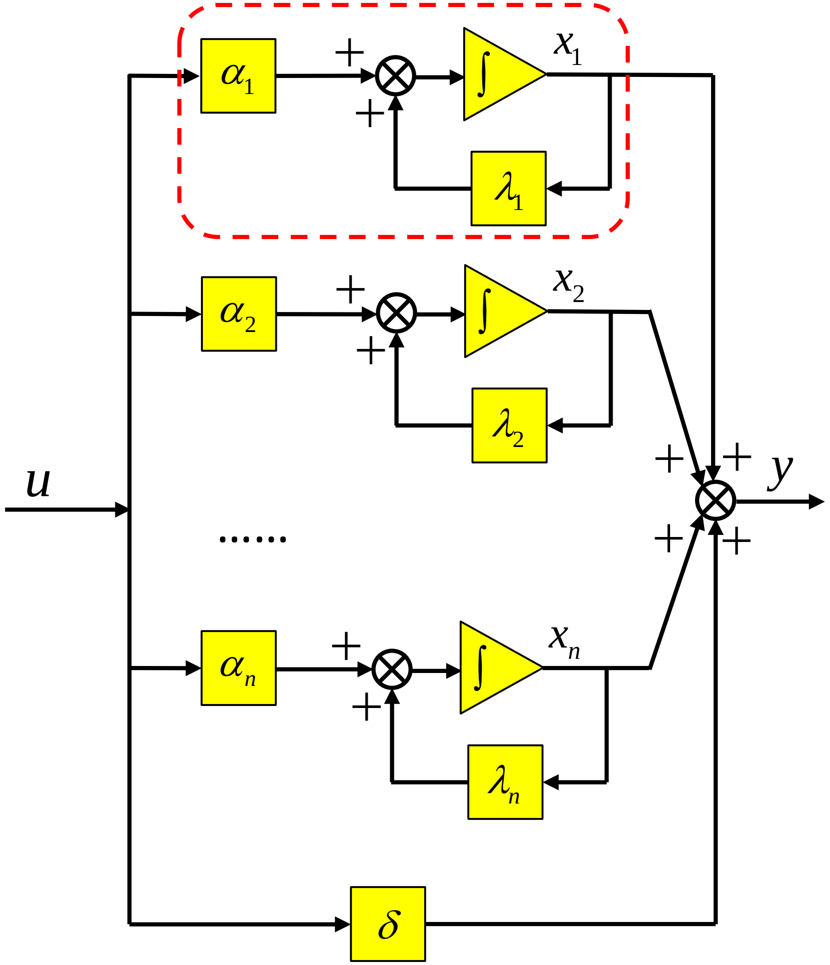
$$\alpha_i=\lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\cdot g(s)\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{s-\lambda_i}u(s)+\delta u(s)\quad i=1,2,\cdots,n$$

TD1-3-2 基于部分分式分解

- 模拟结构图为：





对角标准型

TD1-3-2 基于部分分式分解

- 这种结构的显著特点是积分器不再是前后串联形式而是并联形式。
- 取上图中的状态变量，则状态方程和输出方程可表示为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \delta u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \delta u \end{cases}$$

- 两式互为对偶，两式的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均为对角矩阵，对角线上各元素是互异的 n 个特征值，故称为对角线标准型或解耦标准型，即变量之间不存在耦合关系。一般地，它属于如下的约当标准型：

$$g(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

TD1-3-2 基于部分分式分解

- （2）考虑特征方程式具有重根的情况。考虑一个简单的例子，设 λ_1为三重根， $\lambda_4 \sim \lambda_n$ 为互异的根，于是可得：

$$g(s)=\frac{\alpha_{11}}{s-\lambda_1}+\frac{\alpha_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{\alpha_{13}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{\alpha_4}{s-\lambda_4}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-\lambda_n}+\delta$$

- 其中：

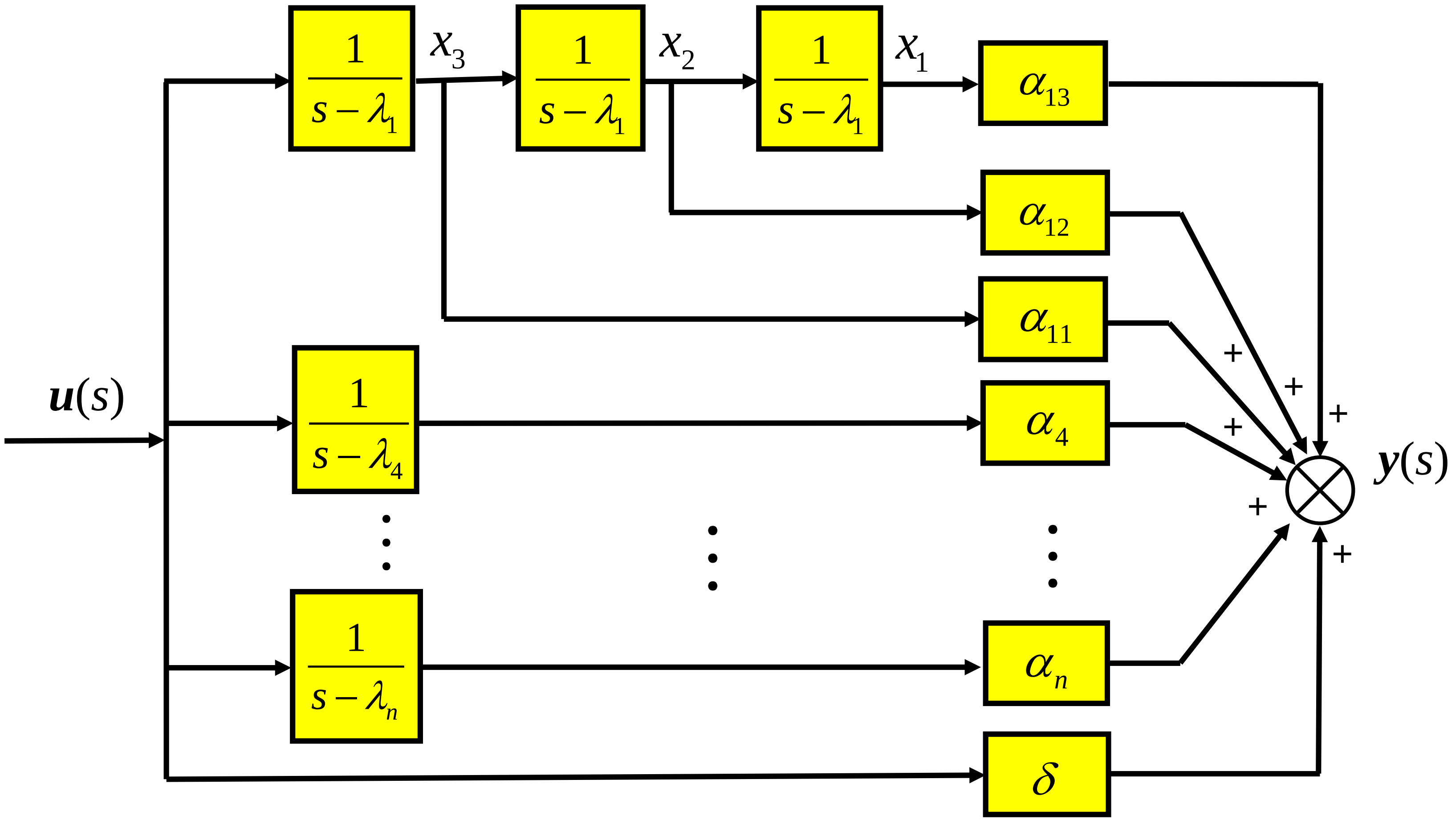
$$\alpha_{13}=\lim_{s\to\lambda_1}\left[(s-\lambda_1)^3\cdot g(s)\right] \qquad \alpha_{11}=\frac{1}{2!}\lim_{s\to\lambda_1}\left[\frac{\mathrm{d}^2\left\{(s-\lambda_1)^3\cdot g(s)\right\}}{\mathrm{d}s^2}\right]$$

$$\alpha_{12}=\lim_{s\to\lambda_1}\left[\frac{\mathrm{d}\left\{(s-\lambda_1)^3\cdot g(s)\right\}}{\mathrm{d}s}\right] \qquad \alpha_i=\lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\cdot g(s) \quad i=4,5,\cdots,n$$

- 可画出系统的模拟结构图，如下图所示。在这种结构中，重根分式采取积分器的串联形式，其余的采用积分器并联形式。

TD1-3-2 基于部分分式分解

- 约当标准型的模拟结构图



TD1-3-2 基于部分分式分解

- 相应的状态空间表达式为:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + x_3 \\
\dot{x}_3 = \lambda_1 x_3 + u \\
\dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + u \\
\quad\vdots \\
\dot{x}_n = \lambda_n x_n + u \\
y = \alpha_{13} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{11} x_3 + \alpha_4 x_4 + \cdots + \alpha_n x_n + \delta u
\end{cases}
$$

TD1-3-2 基于部分分式分解

- 写成矩阵形式:

约当块：主对角元素是特征值，主对角线左下方的元素都为零，主对角线右上面，紧靠重根的元素全为1，其余元素均为零

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \lambda_4 & & & \\ & & & & & \lambda_5 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

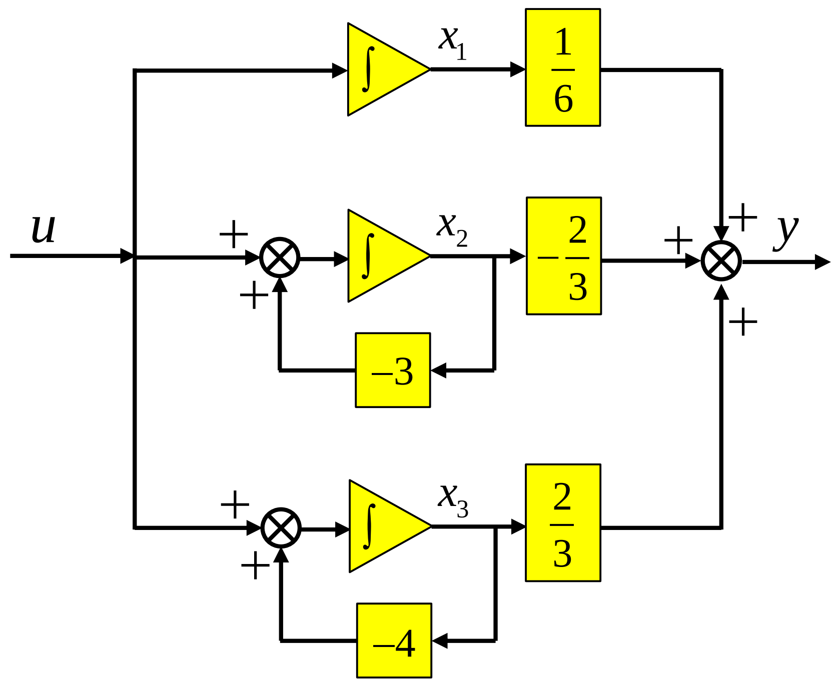
$$
y = \begin{bmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \delta u
$$

- 上式称为约当标准型。<u>系统约当块的数量 = 多重根的数量</u>

TD1-3-2 基于部分分式分解

- 例：设传递函数为 $g(s)=\dfrac{s^2+3s+2}{s(s^2+7s+12)}=\dfrac{1}{6s}-\dfrac{2}{3(s+3)}+\dfrac{3}{2(s+4)}$
- 模拟结构图如下，并设置状态变量
- 状态方程及输出方程为：$\begin{cases}\dot{x}_1=u\\ \dot{x}_2=-3x_2+u\\ \dot{x}_3=-4x_3+u\end{cases}$

$$y=\frac{1}{6}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{3}{2}x_3$$



写成矩阵形式为：$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{2}{3}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$

TD1-3-3 基于积分器串+常值反馈

- 基于串并联分解或部分分式分解的实现方法，都要求先得到系统的零极点，当系统阶次较高时，有时难以计算。
- 思路：基于积分器串+常值反馈
- 1. 能控标准Ⅰ型. 考虑如下三阶微分方程：

$$y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y=b_0u^{(3)}+b_1u^{(2)}+b_2\dot{u}+b_3u$$

传递函数为： $g(s)=\dfrac{b_0s^3+b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$

可变换为：

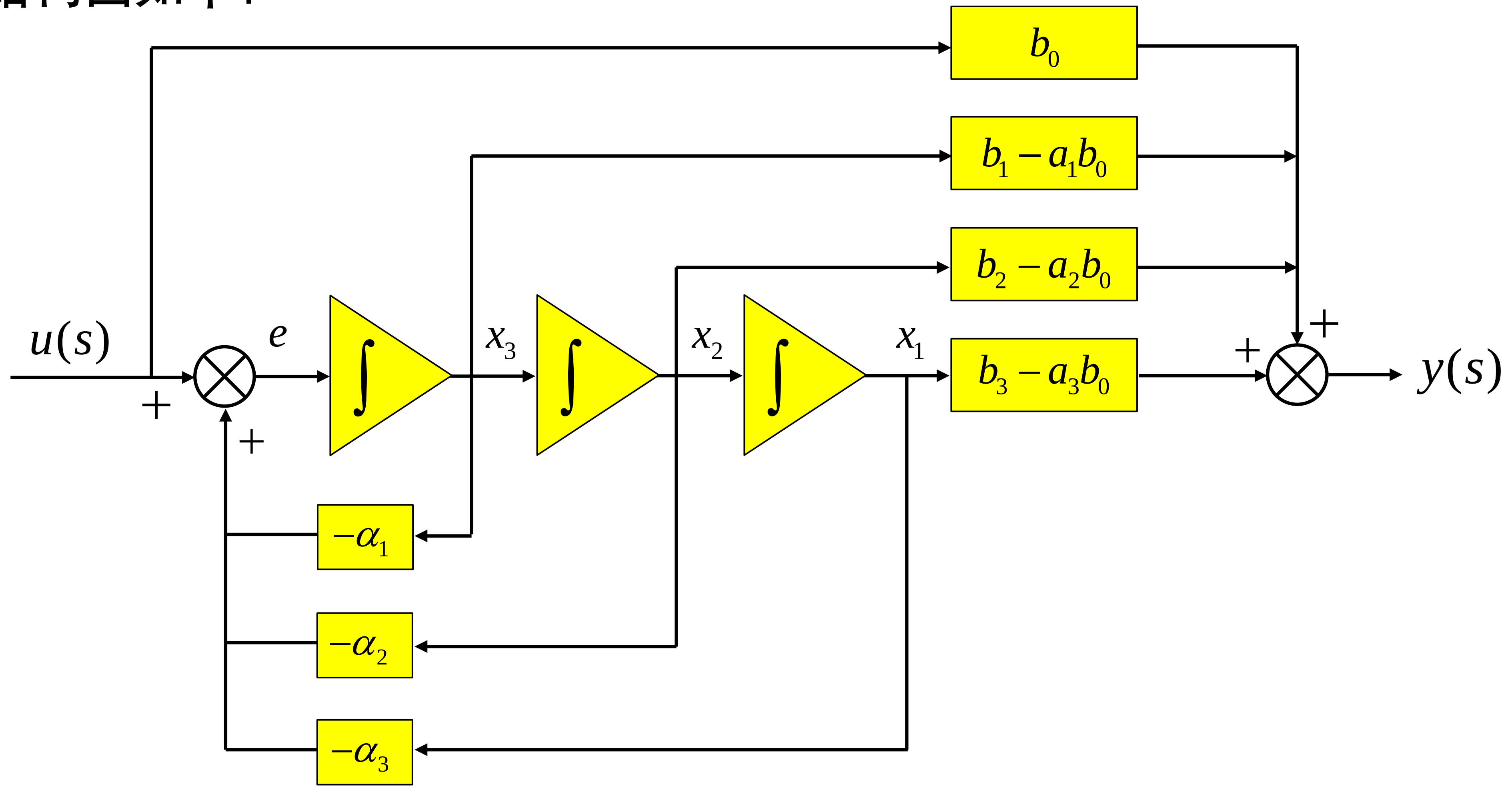
$$g(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=b_0+\frac{(b_1-a_1b_0)s^{-1}+(b_2-a_2b_0)s^{-2}+(b_3-a_3b_0)s^{-3}}{1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2}+a_3s^{-3}}$$

令 $e(s)=\dfrac{1}{1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2}+a_3s^{-3}}u(s)$

则有： $e(s)=u(s)-a_1e(s)s^{-1}-a_2e(s)s^{-2}-a_3e(s)s^{-3}$

TD1-3-3 基于积分器串+常值反馈

- 模拟结构图如下:



$$e(s)=u(s)-a_1e(s)s^{-1}-a_2e(s)s^{-2}-a_3e(s)s^{-3}$$

TD1-3-3 基于积分器串+常值反馈

- 设置状态变量，则得状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_3x_1 - a_2x_2 - a_1x_3 + u \end{cases}$$

$$y = (b_3 - a_3b_0)x_1 + (b_2 - a_2b_0)x_2 + (b_1 - a_1b_0)x_3 + b_0u$$

- 写成矩阵向量形式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} b_3 - a_3b_0 & b_2 - a_2b_0 & b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + b_0u \end{cases}$$

- 这种方法也称为直接程序法。

TD1-3-3 基于积分器串+常值反馈

- 推广到 n 阶系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + b_0 u$$

- 能控标准 I 型，**也称**控制器规范型

TD1-3-3 基于积分器串+常值反馈

- 2. 能观标准 II 型. 同样考虑如下三阶微分方程:

$$y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y=b_0u^{(3)}+b_1u^{(2)}+b_2\dot{u}+b_3u$$

传递函数可变换为:

$$g(s)=\frac{b_0s^3+b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}=\frac{b_0+b_1s^{-1}+b_2s^{-2}+b_3s^{-3}}{1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2}+a_3s^{-3}}$$

则有:

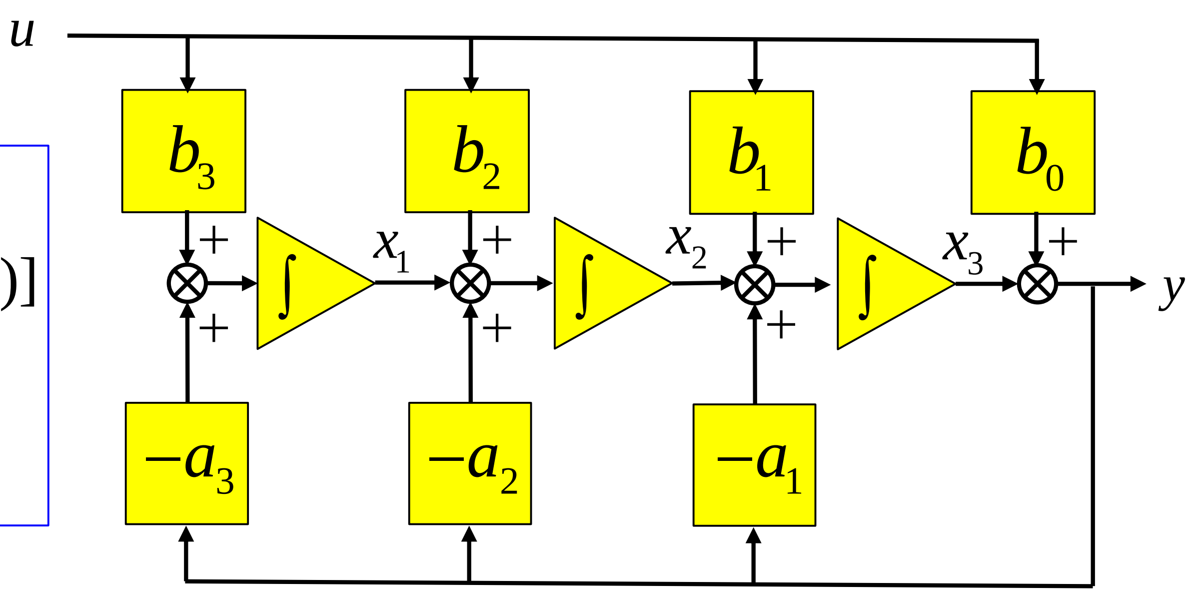
$$\begin{aligned}&y(s)+a_1s^{-1}y(s)+a_2s^{-2}y(s)+a_3s^{-3}y(s)\\&=b_0u(s)+b_1s^{-1}u(s)+b_2s^{-2}u(s)+b_3s^{-3}u(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&y(s)\\&=b_0u(s)+s^{-1}[b_1u(s)-a_1y(s)]+s^{-2}[b_2u(s)-a_2y(s)]+s^{-3}[b_3u(s)-a_3y(s)]\end{aligned}$$

TD1-3-3 基于积分器串+常值反馈

- 模拟结构图：

$$
\begin{aligned}
&y(s)\\
&=b_0u(s)+s^{-1}[b_1u(s)-a_1y(s)]\\
&+s^{-2}[b_2u(s)-a_2y(s)]\\
&+s^{-3}[b_3u(s)-a_3y(s)]
\end{aligned}
$$



- 状态方程和输出方程：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1=-a_3(x_3+b_0u)+b_3u\\
\dot{x}_2=x_1-a_2(x_3+b_0u)+b_2u\\
\dot{x}_3=x_2-a_1(x_3+b_0u)+b_1u
\end{cases}
$$

$$
y=b_0u+x_3
$$

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&-a_3\\1&0&-a_2\\0&1&-a_1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}b_3-a_3b_0\\b_2-a_2b_0\\b_1-a_1b_0\end{bmatrix}u\\
y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+b_0u
\end{cases}
$$

- 这种方法也称为多层积分法。

TD1-3-3 基于积分器串+常值反馈

- 推广到 n 阶系统

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + b_0 u
$$

- 能观标准 II 型
- 能控标准 I 型、能观标准 II 型使用较为普遍。
- 一般用 I 型指代能控标准 I 型，用 II 型指代能观标准 II 型。

TD1-3-3 基于积分器串+常值反馈

- 例：设系统的传递函数为 $g(s)=\dfrac{3(s+1)}{s^3+4s^2+3s+3}$，求取其状态空间表达式。

- 解：直接利用上述任意一种方法，可得系数：

$$a_1=4,\ a_2=3,\ a_3=3,\ b_0=0,\ b_1=0,\ b_2=3,\ b_3=3$$

- 能控标准 I 型

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

能观标准 II 型：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

两种规范型互为对偶

模块1　控制系统的状态空间表达式

TD1-1-1　状态、状态空间、状态空间描述

TD1-2-1　多输入多输出系统的状态空间表达式

TD1-2-2　组合系统的空间表达式及传递函数阵

TD1-2-3　系统的时域描述及状态空间表达式（一）

TD1-2-4　系统的时域描述及状态空间表达式（二）

TD1-3　　基于模拟结构图写出状态空间表达式

TD1-4　　系统的等价变化及其应用

TD1-4-1 系统的等价变换及其应用（一）

- **一、线性变换**

对于一个给定的动态系统，可以选择不同的状态变量组，从而得到不同结构的状态空间表达式，例如能控标准型，能观标准型或约当标准型。不同的状态变量组之间的关系实质上是一种线性变换的关系，或称坐标变换。设给定系统为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

总可以找到任意一个非奇异阵 $\boldsymbol{T}$，将原状态向量 $\boldsymbol{x}$ 进行线性变换，得到另一个状态向量 $\boldsymbol{z}$，即：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$$

代入即得新的状态空间表达式：

TD1－4－1 系统的等价变换及其应用（一）

$$\begin{cases} T\dot{z} = ATz + Bu \\ y = CTz + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

令：$\begin{cases} \bar{A} = T^{-1}AT, \ \bar{B} = T^{-1}B \\ \bar{C} = CT, \ \bar{D} = D \end{cases}$ （***）

则有：$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \\ y = \bar{C}z + \bar{D}u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ 其中 $x = Tz$

- 可以看出，用变换而联系起来的两个系统，对于相同的输入，必定给出相同的输出，此时称这两个系统为代数上等价的系统。
- 由于非奇异变换矩阵是任意选择的，所以和某系统代数上等价的系统有无穷多。

TD1-4-1 系统的等价变换及其应用（一）

反之，尽管系统状态空间表达式不唯一，但不同的表达式之间也只是（***）关系式线性非奇异变换的关系。

- 例：设原系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ y=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}\quad \text{取 } \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}，\text{即 } \boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$ ，则：

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}$$

所以新状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{z}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{z}\end{cases}$$

能控标准I型

TD1-4-1 系统的等价变换及其应用（一）

- **二、系统特征值不变性及系统不变量**

状态方程中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，也称为状态矩阵，是一个很重要的矩阵。它包含了许多有关系统特征的重要信息，这里讨论 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。系统特征值就是状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，也即特征方程：

$$\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=0$$

的根。方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值。实际的物理系统，$\boldsymbol{A}$ 为实数矩阵，故特征值或为实数，或为共轭复数对。

- **例：** 若系统矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$，求特征值。

解：矩阵 A 的特征方程为 $\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2$，解得 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$ ，即为特征方程的根。

TD1-4-1 系统的等价变换及其应用（一）

状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个重要性质是其特征值的不变性，即在状态变量的线性变换中，新老状态方程的 $\boldsymbol{A}$ 阵和 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 阵的特征值是相同的。证明：

$$\begin{aligned}\left|\lambda \boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}\right| &= \left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right| = \left|\lambda \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}\right| = \left|\boldsymbol{T}^{-1}\right|\cdot\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|\cdot\left|\boldsymbol{T}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\right|\cdot\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right| = \left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|\end{aligned}$$

因此， $\boldsymbol{A}$ 阵和 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 阵的特征方程是相同的，因此特征值也是相同的。令系统特征方程为：

$$\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right| = \lambda^{n}+\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n=0$$

则特征多项式的系数为系统的不变量。

TD1-4-1 系统的等价变换及其应用（一）

同样也可以证明，对于给定的系统，尽管状态空间表达式不同，但反映输入输出关系的传递函数阵相同：

$$
\begin{aligned}
\bar{G}(s) &= \bar{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}+\bar{\boldsymbol{D}} \\
&= \boldsymbol{CT}(s\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \\
&= \boldsymbol{CTT}^{-1}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{TT}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \\
&= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \\
&= G(s)
\end{aligned}
$$

一切代数上等价的线性系统都有相同的传递函数矩阵。

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

- **三、特征向量**

设 $\boldsymbol{p}_i$ 为 n 维非零向量，λ_i 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，若下式成立：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$$

则称向量 $\boldsymbol{p}_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量。从上式中可以看出，特征向量 $\boldsymbol{p}_i$ 经 $\boldsymbol{A}$ 线性变换后，方向不变，仅长度增加了 λ_i 倍。

- **四、化状态空间表达式为约当标准型**

这里介绍将状态空间表达式转化为约当标准型的方法。

显然，约当标准型可由线性变换而得到。分为两种情况：

① 若矩阵有两两相异的特征值，则可化为对角标准型；

② 若系统矩阵有重根，则可化为一般的约当标准型。

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

- **1、状态矩阵 A 无重根**

对线性定常系统：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$

如果 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个两两相异特征值，则存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$，
通过线性变换 $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$，使之化为对角线规范形式：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{u}},\ \text{其中：}\hat{\boldsymbol{A}} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}\text{，包含了}\boldsymbol{A}\text{的}n\text{个特征值}$$

证明：首先令 $\boldsymbol{p}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量，且：

$$\boldsymbol{p}_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

- 由于 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n$ 两两相异，因此 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 必然线性无关，由这些特征向量组成的矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

必然是非奇异的。

进而，根据特征向量的关系式：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$，则有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AT} &= \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} = \boldsymbol{T}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \end{aligned}$$

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

- 因为 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异矩阵，必存在逆矩阵。将上式左乘 $\boldsymbol{T}^{-1}$，即得：

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right\}$$

重写式子：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{x}}$ ，则有：

$$\boldsymbol{T}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

在左右两边左乘$\boldsymbol{T}^{-1}$，即得：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

即：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}$$

其中：$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},\ \hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$

由此，上述命题得证。

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

- 例：已知系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}u$$，将此状态空间表达式化为对角标准型

- 解：$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $:\lambda_1=2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$

可见此系统的特征值两两相异。进而可确定线性变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，根据特征向量关系式：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i$

确定 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于 $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}$ 的特征向量。

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

- 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i$，可得 $\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}$

得到 $\begin{cases}p_{21}+p_{31}=0\\ 3p_{21}=0\\ -2p_{21}+p_{31}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p_{11}=K\\ p_{21}=0\\ p_{31}=0\end{cases}$，可取：$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

同理可定出：$\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

可以得到：$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}, \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

- 从而可以求得

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 2\end{bmatrix}$$

由此，给定系统的状态方程的对角标准型为： $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 2\end{bmatrix}u$

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

- 2. 状态矩阵 A 有重根时:

对线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，其中特征值 λ_j 为 m_j 重特征值，所以有:

$$\sum_{j=1}^{k} m_j = n \quad (j=1,2,\cdots,k)$$

对于上述有重根的情况，这时导出的形式叫**约当标准型**。换言之，总可以找到变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得:

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{J}_k \end{bmatrix}$$，这里有: $$\boldsymbol{J}_j=\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

称 $\boldsymbol{J}_j$ 为第 j 个约当块。

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

问题在于，如何得到变换矩阵 $\boldsymbol{T}$。

因为特征值重复，所以得不到 n 个线性无关的特征向量，即不能用化对角标准型的方法。假设对 m_1 重特征值 λ_1，只能得到一个特征向量 $\boldsymbol{p}_1$，其余向量 $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\cdots,\boldsymbol{p}_{m_1}$ 尚未求出，但由：

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \boldsymbol{J}_k\end{bmatrix}$$

得：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{A}}$，将此式展开：

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

$$
\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_{m_1} & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_{m_1} & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\lambda_1 & 1 & & & & & & \\
 & \lambda_1 & \ddots & & & & & \\
 & & \ddots & 1 & & & & \\
 & & & \lambda_1 & & & & \\
\hline
 & & & & J_2 & & & \\
 & & & & & J_3 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & J_k
\end{array}\right]
$$

现在研究上式两边矩阵的第 2 列到第 m_1 列，得关系式：

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{p}_2 \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + \lambda_1 \boldsymbol{p}_3 \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_{m_1} = \boldsymbol{p}_{m_1-1} + \lambda_1 \boldsymbol{p}_{m_1}
\end{cases}
$$

TD1-4-2 系统的等价变换及其应用（二）

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + \lambda_1 \boldsymbol{p}_3 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_{m_1} = \boldsymbol{p}_{m_1-1} + \lambda_1 \boldsymbol{p}_{m_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 \\ (\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 \\ (\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{p}_{m_1} = \boldsymbol{p}_{m_1-1} \end{cases}$$

上式有 (m_1-1) 个方程和 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_{m_1}$ 共 (m_1-1) 个未知量，由上式可求得 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_{m_1}$。

同理可求得 $\boldsymbol{p}_{m_1}$ 以后的特征向量，进而组成 $\boldsymbol{T}$ 矩阵。