微积分 A2 第六次习题课讨论题参考解答　　　　　　　　　　杨利军　April 13-18, 2020

1. 对下列二重积分先化简然后再作计算.

(i) $\iint_{x^2+y^2\le 1}|xy|dxdy$.

(ii) $\iint_D [x+y]dxdy$, 其中积分区域 $D=[0,2]\times[0,2]$, 符号 $[\cdot]$ 表示取整函数, 即 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数. 例如 $[1.5]=1$, $[-0.5]=-1$.

(iii) $I=\iint_D |x^2+y^2-4|dxdy$, 其中 D 代表闭圆盘 $x^2+y^2\le 16$.

解(i): 由积分区域和被积函数的对称性有

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}|xy|dxdy = 4\iint_{x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0} xydxdy.$$

对上式右边积分作极坐标变换得

$$\iint_{x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0} xydxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (r\cos\theta)(r\sin\theta)rdr$$
$$= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1 r^3dr = \frac{1}{8}.$$

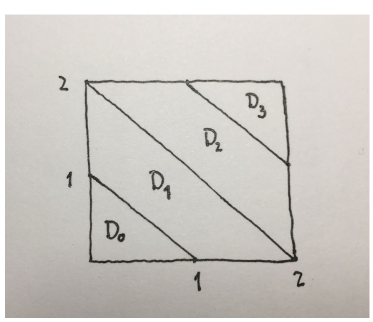
因此原积分 $\iint_{x^2+y^2\le 1}|xy|dxdy = \frac{1}{2}$.

解(ii): 对积分区域 D 作分解 $D=D_0\cup D_1\cup D_2\cup D_3$, 其中

$$D_0 = D\cap\{0\le x+y\le 1\},\quad D_1 = D\cap\{1\le x+y\le 2\},$$

$$D_2 = D\cap\{2\le x+y\le 3\},\quad D_3 = D\cap\{3\le x+y\le 4\}.$$

如图所示.



不难看出 $|D_0|=|D_3|=1/2$, 而 $|D_1|=|D_2|=3/2$. 于是

$$\iint_D [x+y]dxdy = \sum_{i=0}^{3}\iint_{D_i}[x+y]dxdy = \sum_{i=0}^{3} i\iint_{D_i}dxdy = \sum_{i=0}^{3} i|D_i|$$

$$= 1|D_1| + 2|D_2| + 3|D_3| = \frac{3}{2} + 2\cdot\frac{3}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} = 6.$$

这里 $|D_i|$ 表示区域 D_i 的面积.

解(iii): 为了计算积分, 我们必须先去掉绝对值符号. 为此我们将区域 D 分成两个部分 $D = D_1 \cup D_2$, 其中 $D_1 : x^2+y^2 \le 4$, $D_2 : 4 \le x^2+y^2 \le 16$. 于是

$$I = \iint_{D_1}(4-x^2-y^2)dxdy + \iint_{D_2}(x^2+y^2-4)dxdy.$$

对上述积分作极坐标变换得

$$I = \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 (4-r^2)rdr + \int_0^{2\pi} dt \int_2^4 (4-r^2)rdr.$$

$$= 2\pi\left[\int_0^2 (4-r^2)rdr + \int_2^4 (r^2-4)rdr\right]$$

$$= 2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2} + 2\pi\left[\frac{r^4}{4} - 2r^2\right]_{r=2}^{r=4} = 80\pi.$$

解答完毕.

2. 选择适当的累次积分计算二重积分.

(i) $I = \iint_D x\cos(xy)dxdy$, 其中 $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$.

(ii) $I = \iint_D xye^{x^2y}dxdy$, 其中 $D = [0,1]\times[0,2]$.

解(i): 选择先 y 后 x 计算比较容易.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^1 \cos(xy)d(xy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy)\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

相比较而言, 另一个累次积分的计算则麻烦许多.

解(ii): 计算先 y 后 x 的累次积分

$$I=\int_0^1 dx\int_0^2 xye^{x^2y}dy=\int_0^1\frac{dx}{x}\left[\int_0^2 ye^{x^2y}d(x^2y)\right]=\int_0^1\left[ye^{x^2y}\Big|_{y=0}^{y=2}-\int_0^2 e^{x^2y}dy\right]\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^1\left[2e^{2x^2}-\int_0^2 e^{x^2y}dy\right]\frac{dx}{x}=\int_0^1\left[2e^{2x^2}-\frac{1}{x^2}(e^{2x^2}-1)\right]\frac{dx}{x}=?$$

计算先 x 后 y 的累次积分

$$I=\int_0^2 dy\int_0^1 xye^{x^2y}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 dy\int_0^1 e^{x^2y}d(x^2y)=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2y}\Big|_{x=0}^{x=1}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(e^y-1)dy=\frac{1}{2}(e^2-3).$$

这个例子表明选择合适的累次积分的重要性.

3. 证明 $\iint_D(xy)^{(xy)}dxdy=\int_0^1 t^tdt$, 积分区域 D 为正方形 $0\le x,y\le 1$. (课本第171页第3章总复习题题9).

证明: 先将积分化为累次积分，然后做一个变量替换 $xy=t$ 得

$$I:=\iint_D(xy)^{(xy)}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1(xy)^{(xy)}dy=\int_0^1\frac{dx}{x}\int_0^x t^tdt$$

记 $f(x):=\int_0^x t^tdt$, 则

$$I=\int_0^1\frac{f(x)}{x}dx. \tag{1}$$

注意上述积分式一个正常积分, 因为被积函数在 $x=0$ 处有极限

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^x}{1}=1.$$

对积分 (1) 作分部积分得

$$I=f(x)\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 x^x\ln xdx. \tag{2}$$

不难验证

$$f(x)\ln x\Big|_0^1=0-\lim_{x\to0^+}f(x)\ln x=0,$$

因为

$$\frac{[f(x)]'}{[1/\ln x]'} = -[\ln x]^2 x x^x \to 0, \quad as\ x \to 0^+.$$

我们就得到

$$I = -\int_0^1 x^x \ln x dx = -\int_0^1 e^{x\ln x} \ln x dx.$$

再利用关系式 $[x\ln x]' = \ln x + 1$ 得 $\ln x = [x\ln x]' - 1$. 于是

$$I = -\int_0^1 x^x\Big([x\ln x]' - 1\Big)dx = \int_0^1 x^x dx - \int_0^1 e^{x\ln x}[x\ln x]'dx$$

$$= \int_0^1 x^x dx - e^{x\ln x}\Big|_0^1 = \int_0^1 x^x dx,$$

最后一个等式成立是因为

$$x\ln x\Big|_{x=0} = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 = x\ln x\Big|_{x=1}.$$

证毕.

4．设二元函数 $f(x,y)$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2 \le 1$ 上连续, 在开单位圆盘 $x^2+y^2<1$ 上二次连续可微. 若函数 $f(x,y)$ 在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上取值为零. 证明

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)[f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)]dxdy \le 0.$$

(这是课本第171页第三章总复习题题10)

证明：证明思想是将重积分化为累次积分，然后再做分部积分，并利用假设条件。

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)f_{xx}(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)f_{xx}(x,y)dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left[f(x,y)f_x(x,y)\Big|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} - \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f_x(x,y)^2 dx \right] dy$$

$$= -\int_{-1}^1 \big[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f_x(x,y)^2 dx\big] dy = -\iint_{x^2+y^2\le 1} f_x(x,y)^2 dxdy.$$

同理可证

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)f_{yy}(x,y)dxdy = -\iint_{x^2+y^2\le 1} f_y(x,y)^2 dxdy.$$

因此

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)[f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)]dxdy$$
$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}[f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)]\le 0.$$

证毕.

5. 假设 $f(x,y)$ 在全平面上连续, 若极限

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)dxdy$$

存在, 则称该极限为函数 $f(x,y)$ 在全平面上广义积分, 记作 $\iint_{x^2+y^2<\infty} f(x,y)dxdy$, 即

$$\iint_{x^2+y^2<\infty} f(x,y)dxdy := \lim_{R\to+\infty}\iint_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)dxdy.$$

(此时也称函数 $f(x,y)$ 在全平面上广义可积.) 计算广义积分.

$$\iint_{x^2+y^2<\infty} e^{(2xy-2x^2-y^2)}dxdy.$$

解：注意被积函数的指数部分可以写作 $2xy-2x^2-y^2=-x^2-(y-x)^2$. 这启发我们做变换 $u=x$, $v=y-x$. 它的 Jacobi 行列式是常数 1. 故其逆变换 $x=u$, $y=u+v$ 的 Jacobi 行列式也是常数 1, 并且逆变换将 x,y 平面上的圆盘 $x^2+y^2\le R^2$ 变换成 u,v 平面上的椭圆盘 $u^2+(u+v)^2\le R^2$. 于是

$$\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{2xy-2x^2-y^2}dxdy=\iint_{u^2+(u+v)^2\le R^2} e^{-u^2-v^2}dudv.$$

不难证明如下的包含关系

$$\left\{u^2+v^2\le\frac{R^2}{5}\right\}\subset\left\{u^2+(u+v)^2\le R^2\right\}\subset\left\{u^2+v^2\le 5R^2\right\}. \tag{3}$$

第一个包含关系的证明：设 $u^2+v^2\le\frac{R^2}{5}$, 则 $|u|,|v|\le\frac{R}{\sqrt{5}}$. 于是 $u^2+(u+v)^2\le\frac{R^2}{5}+\frac{4R^2}{5}=R^2$. 故第一个包含关系成立.

第二个包含关系的证明：设 $u^2+(u+v)^2\le R^2$, 则 $|u|\le R$, $|u+v|\le R$. 于是 $|v|=|u+v-u|\le |u+v|+|u|\le 2R$. 由此的 $u^2+v^2\le R^2+4R^2=5R^2$. 故第二个包含关系成立.

因此

$$\iint_{u^2+v^2\leq\frac{R^2}{5}} e^{-u^2-v^2}dxdy \leq \iint_{u^2+(u+v)^2\leq R^2} e^{-u^2-v^2}dudv \leq \iint_{u^2+v^2\leq 5R^2} e^{-u^2-v^2}dudv. \quad (4)$$

另一方面, 利用极坐标不难算出积分

$$\iint_{u^2+v^2<\infty} e^{-u^2-v^2}dudv = \lim_{R\to+\infty}\iint_{u^2+v^2<R^2} e^{-u^2-v^2}dudv$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr = \lim_{R\to+\infty}\pi(1-e^{-R^2}) = \pi.$$

(参见课本例3.3.12, 第 141 页.) 于是在不等式 (4) 中, 令 $R\to+\infty$ 并利用极限的两边夹法则得

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{u^2+(u+v)^2\leq R^2} e^{-u^2-v^2}dudv = \pi.$$

故所求积分为

$$\iint_{x^2+y^2<\infty} e^{(2xy-2x^2-y^2)}dxdy = \lim_{R\to+\infty}\iint_{u^2+(u+v)^2\leq R^2} e^{-u^2-v^2}dudv = \pi.$$

解答完毕.

6. 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面的一个闭矩形 Ω 上 Riemann 可积, 且 $f(x,y)>0$, $\forall(x,y)\in\Omega$. 证明 $\iint_\Omega f(x,y)dxdy>0$. (注: 这是课本第170页第三章总复习题题 1. 提示：利用 Lebesgue 可积准则).

证明：根据 Lebesgue 可积准则知, 函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 Ω 上几乎处处连续. 故 $f(x,y)$ 在 Ω 的内部 Ω^0 存在连续点. 由于 (x_0,y_0) 是内点, 并且函数 $f(x,y)$ 连续性可知，存在一个以点 (x_0,y_0) 为心, 以 $\delta>0$ 为边长的闭正方形 $B_\delta(x_0,y_0)$, 使得 $f(x,y)>\frac{1}{2}f(x_0,y_0)$. 再根据积分的可加性, 以及单调性可知

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \geq \iint_{B_\delta} f(x,y)dxdy \geq \frac{1}{2}f(x_0,y_0)|B_\delta| = \frac{1}{2}f(x_0,y_0)\delta^2>0.$$

证毕.

7. 利用二重积分理论, 证明以下积分不等式. 设 $f(x)$, $g(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续, 则

$$(i) \qquad \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

$$(ii) \qquad \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx;$$

$$(iii) \qquad \iint_{[a,b]^2} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy \ge (b-a)^2, \text{ 其中假设 } f(x)>0, \forall x\in[a,b].$$

注： 证明上述不等式的方法有许多, 其中二重积分理论可以用来证明这些重要的不等式.

证(i):

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = \int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy$$

$$= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)dxdy \le \frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2}[f^2(x)+f^2(y)]dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2} f^2(x)dxdy + \frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2} f^2(y)dxdy = (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

证(ii). 根据不等式 $[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2 \ge 0$ 得

$$0 \le \iint_{[a,b]^2}[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2dxdy =$$

$$= \iint_{[a,b]^2}[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)-2f(x)f(y)g(x)g(y)]dxdy$$

$$= 2\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx - 2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2.$$

由此立刻得到不等式(ii).

证(iii).

$$\iint_{[a,b]^2}\frac{f(x)}{f(y)}dxdy = \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 = (b-a)^2.$$

注意上式的第二个不等式是由不等式(ii)所得. 证毕.