《微积分A2》第二十六讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2020年05月18日

Definition

定义: (i) 设 $u_n(x)$ 为区间 J 上的函数, $\forall n \geq 1$, 称 $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ 或 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 或 $\sum u_n(x)$ 为函数项级数;

(ii) 假设 $x_0 \in J$, 使得数项级数 $\sum u_n(x_0)$ 收敛, 则称函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在点 x_0 处收敛;

(iii) 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 对每个点 $x \in J$ 均收敛, 其和为 $S(x)$, 则称 $\sum u_n(x)$ 在 J 上处处收敛, 且 $\sum u_n(x) = S(x)$, $x \in J$.

例子

Example (1)

例：函数项级数 $\sum_{n\geq 0} x^n$ 对每个点 $x \in (-1, 1)$ 均收敛，其和为 $\frac{1}{1-x}$. 因此 $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

Example (2)

例：已证函数项级数 $\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k}$ 对每个点 $x \in (0, 2\pi)$ 均收敛.

利用 **Fourier** 级数理论，我们将证明

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

函数项级数理论的任务：对给定的函数项级数 $\sum_{k\geq 0} u_k(x)$，$x \in J$，要研究级数对哪些点 $x \in J$ 收敛，即确定收敛域．进一步，假设级数在区间 J 上处处收敛，其和函数为 $S(x)$，我们要研究 $S(x)$ 的分析性质，即连续性，可微性等．具体说来

1) 连续性问题：

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

这实际上是如下交换极限次序问题

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{n} u_k(x);$$

2). 逐项积分问题

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right] dx \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx;$$

3). 逐项微分问题

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right]' \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x).$$

大致说来，当级数为一致收敛时，上述三个问题均有肯定答案.

这些可与广义含变量积分情形相比较：当广义含变量积分一致收敛时，这三个问题均有肯定答案.

Definition

定义: 设 $f_n(x)$ 为区间 J 上的函数列. 假设对每个点 $x \in J$, 序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛, 其极限为 $f(x)$. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$ (N 仅与 ε 有关, 与 x 无关), 使得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in J,$$

则称函数列 $f_n(x)$ 在区间 J 一致收敛于函数 $f(x)$, 并记之为 $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in J$.

Definition

定义: 设 $\sum_{k\geq 1} u_k(x)$ 为区间 J 上的函数项级数. 如果级数的部分和序列 $S_n(x)$ 在 J 上一致收敛于函数 $S(x)$, 即 $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, 则称级数 $\sum_{k\geq 1} u_k(x)$ 在区间 J 一致收敛于 $S(x)$.

例: 证明 $x^n \rightrightarrows 0,\ x \in [-r, r]$, 其中 $r \in (0, 1)$.

证: $x^n \rightrightarrows 0$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N$, 使得 $|x^n| < \varepsilon,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in [-r, r]$,

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N$, 使得 $r^n < \varepsilon,\ \forall n \geq N$,

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N$, 使得 $r^N < \varepsilon$,

$\Longleftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln r}$.

于是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = [\frac{\ln \varepsilon}{\ln r}] + 1$, 使得 $|x^n| < \varepsilon,\ \forall n \geq N$,

$\forall x \in [-r, r]$. 命题得证.

例: 证明函数列 x^n 在区间 $[0,1]$ 非一致收敛.

证: 显然 x^n 在区间 $[0,1]$ 收敛于函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1. & x=1.\end{cases}$$

假设在区间 $[0,1]$ 上, $x^n \rightrightarrows f(x)$, 则依定义知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 使得对 $\forall x\in[0,1)$, $|x^n-f(x)|=|x^n|<\varepsilon$, $\forall n\geq N$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 取 $n=N$, 则 $|x^N|<\frac{1}{2}$, $\forall x\in[0,1)$. 令 $x\to 1^-$, 则 $1\leq\frac{1}{2}$. 矛盾. 命题得证. $\square$

例三: 证明 $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ 在区间 $[-r, r]$ 一致收敛, 其中 $r \in (0, 1)$.

证: 易证所考虑的级数在 $[-r, r]$ 上处处收敛, 且

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in [-r, r].$$

此即部分和 $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ 收敛于 $S(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in [-r, r]$. 已证在区间 $[-r, r]$ 上, $x^n \rightrightarrows 0$. 由此看出

$$\frac{1-x^n}{1-x} \rightrightarrows \frac{1}{1-x}, \quad x \in [-r, r].$$

此即 $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $x \in [-r, r]$. 命题得证.

Cauchy 一致收敛准则

Theorem

定理: (i) 函数列 $f_n(x)$ 在区间 J 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq N$, $\forall x \in J$.

(ii) 函数级数 $\sum u_k(x)$ 在区间 J 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$, $p \geq 1$, $\forall x \in J$.

证明简单. 略去.

Theorem

定理: 设 $u_k(x)$ 为区间 J 上的函数列. 若 $|u_k(x)| \leq M_k$, $\forall x \in J$, 且数项级数 $\sum M_k$ 收敛, 则函数项级数 $\sum u_k(x)$ 在区间 J 上一致收敛, 且绝对收敛.

证: 由函数项级数 Cauchy 一致收敛准则立刻得到结论. □

注一: 定理中所给的方法称作 Weierstrass 判别法, 也称优函数法 (the method of majorant), 或 M 判别法. 这是判别函数级数一致收敛的最常用的方法.

注二: 显然 M 判别法不适用于仅一致收敛, 但不是绝对收敛的函数项级数.

注记: 一致收敛与绝对收敛是两个互不包含的两个性质. 例如函数项级数

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\sin x},$$

对于 $\forall x \in \mathbb{R}$ 是 Leibniz 型级数. 利用 Cauchy 准则不难证明这个级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 但显然这个级数非绝对收敛. 而级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(1-x)x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

在区间 $[0,1]$ 上绝对收敛, 但非一致收敛. 因为这个级数的前 n 项部分和为 $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)x^k = 1-x^n$. 已证 x^n 在 $[0,1]$ 上非一致收敛. 故 $1-x^n$ 在 $[0,1]$ 上也非一致收敛. 因此级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}(1-x)x^k$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛.

例: 考虑级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^2 e^{-kx}$$

在区间 $J = [0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解: 考虑一般项 $u_k(x) = x^2 e^{-kx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值. 对其求导得 $u_k'(x) = 2xe^{-kx} - kx^2 e^{-kx} = xe^{-kx}(2 - kx)$. 由此可见函数 $u_k(x)$ 在 $[0, 2/k)$ 上单调上升, $u_k(x)$ 在 $(2/k, +\infty)$ 上单调下降. 于是 $u_k(x)$ 在点 $x = 2/k$ 处取得最大值

$$u_k(2/k) = \left[\frac{2}{k}\right]^2 e^{\frac{-2k}{k}} = \frac{4}{k^2 e^2}, \quad \forall k \geq 1.$$

这表明

$$|u_k(x)| \leq \frac{4}{k^2e^2}, \quad \forall k \geq 1, \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

又正项级数 $\sum \frac{4}{k^2e^2}$ 收敛. 根据 M 判别法可知, 所考虑的级数在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. 解答完毕.

函数级数一致收敛性的 Abel 判别法

Theorem

定理: 设 $u_k(x)$ 和 $v_k(x)$ 为区间 J 上的函数, $k \geq 1$, 则函数级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)v_k(x)$$

在 J 上一致收敛, 如果以下条件成立.

(i) 级数 $\sum u_k(x)$ 在 J 上一致收敛;

(ii) 序列 $\{v_k(x)\}$ 对每个 $x \in J$ 关于 k 单调, 且一致有界, 即存在 M, 使得 $|v_k(x)| \leq M$, $\forall x \in J$, $k \geq 1$.

证明基本同数项级数情形. 略

函数级数一致收敛性的 Dirichlet 判别法

<u>定理</u>: 设 $u_k(x)$ 和 $v_k(x)$ 为区间 J 上的函数, $k \geq 1$, 则函数级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)v_k(x)$$

在 J 上一致收敛, 如果以下条件成立.

(i) 级数 $\sum u_k(x)$ 部分和一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)| \leq M$, $\forall n \geq 1$, $\forall x \in J$;

(ii) 序列 $v_k(x)$ 对每个 $x \in J$ 关于 k 单调, 且一致趋向于零, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 $K = K(\varepsilon)$, 使得 $|v_k(x)| < \varepsilon$, $\forall k \geq K$, $\forall x \in J$.

证明基本同数项级数情形. 略.

例: 证明级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{k},$$

在闭区间 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛, 其中 $\delta>0$ 为任意小的正数.

证: 已证上述级数在开区间 $(0,2\pi)$ 上处处收敛, 并且还得到如下估计

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|},\quad \forall x\in(0,2\pi).$$

如果限制 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, 则可得如下部分和的一致有界性

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin \frac{\delta}{2}|}, \quad \forall x \in [\delta, 2\pi - \delta].$$

另一方面, 序列 $\{\frac{1}{k}\}$ 单调且一致趋向于零(序列与 x 无关). 因此由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k}$ 在区间 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致收敛. 证毕. □

Theorem

定理: (1) 设函数 $f_n(x)$ 在区间 J 上连续, $\forall n \geq 1$. 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 J 上一致收敛, 则极限函数 $f(x)$ 也在 J 上连续;

(2) 设函数 $u_k(x)$ 在区间 J 上连续, $\forall k \geq 1$. 若函数项级数 $\sum u_k(x)$ 在 J 上一致收敛, 则和函数 $S(x)$ 也在 J 上连续.

注: 连续性守恒定理可用来证明某些函数列或函数级数的非一致收敛性.

Example

<u>例一</u>：已证 $\{x^n\}$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛但非一致收敛，其极限函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1. & x=1.\end{cases}$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续．这一方面说明连续函数列的极限函数不必是连续函数．另一方面，由连续性守恒定理知，函数列 $\{x^n\}$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛，但非一致收敛．

Example

例二：函数级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(1-x)x^k$$

在区间 $[0,1]$ 上处处收敛，且和函数为

$$S(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ 0. & x=1.\end{cases}$$

由于函数 $S(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续. 故可断言，上述函数级数在区间 $[0,1]$ 上非一致收敛.

证: 显然结论(2) 是结论(1)的直接推论. 故只需证(1), 即要证对任取 $x_0 \in J$, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 亦即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 只要 $|x - x_0| < \delta$. 由假设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on J 知, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in J.$$

取 $n = N$, 则有 $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in J$.

证明续

由于 $f_N(x)$ 在 J 上连续，特别在 x_0 处连续，故存在 $\delta > 0$，使得 $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$，只要 $|x - x_0| < \delta$. 于是对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(x_0)| \\
\le\ & |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
\le\ & \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

这表明 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 证毕. □

Theorem

定理: 设函数 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\forall n \geq 1$, 且 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on $[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

此即

$$\int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

定理证明稍后给出.

函数级数的逐项积分定理

Theorem

定理: 设函数 $u_k(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $\forall k \geq 1$, 且函数级数 $\sum u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于和函数 $S(x)$, 则

$$\int_a^b S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)dx,$$

此即

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)dx.$$

显然上述逐项积分定理是前一个定理的直接推论.

例: 证明 Euler 常数 $\gamma(=0.577\cdots)$ 可表示为

$$\gamma=\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{k(k+x)}\right]dx.$$

这里常数 γ 的定义如下

$$\gamma\triangleq\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\ln n\right].$$

证: 显然函数级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{k(k+x)}$$

在区间 $[0,1]$ 上一致收敛.

这是因为

$$0 \le \frac{x}{k(k+x)} \le \frac{1}{k^2}, \quad \forall x \in [0,1].$$

再根据 Weierstrass 判别法即得到这个一致收敛性. 于是由上述逐项积分定理可知

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}\right] dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{xdx}{k(k+x)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right] dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right]$$

例子续二

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln (n+1) \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n - \ln \frac{n+1}{n} \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n \right] = \gamma. \qquad \square$$

证: 由假设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on $[a,b]$ 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in [a,b].$$

于是对于 $\forall n \geq N$,

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \varepsilon(b-a).$$

定理得证. $\square$

Theorem

定理: 假设(1) $f_n(x)$ 在有界开区间 J 上连续可微;

(2) 导函数序列 $\{f_n'(x)\}$ 在 J 上一致收敛, 其极限记作 $g(x)$;

(3) 存在一点 $x_0 \in J$, 使得序列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛,

则 (i) 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 J 上一致收敛, 其极限函数记作 $f(x)$;

(ii) $f(x)$ 在 J 上连续可微;

(iii) $f'(x) = g(x)$, 此即

$$\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right]' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

定理证明稍后给出.

Theorem

定理: 假设(1) $u_k(x)$ 在有界开区间 J 上连续可微; (2) 导函数级数 $\sum u_k'(x)$ 在 J 上一致收敛, 其和函数记作 T(x); (3) 存在一点 $x_0 \in J$, 使级数 $\sum u_k(x_0)$ 收敛, 则 (i) 函数级数 $\sum u_k(x)$ 在 J 上一致收敛, 其和函数记作 S(x); (ii) S(x) 在 J 上连续可微; (iii) $S'(x) = T(x)$, 此即

$$\left[\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)\right]' = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(x).$$

也就是说, 函数级数 $\sum u_k(x)$ 可逐项求导.

上述逐项求导定理是极限函数的导数定理的直接推论.

例：显然函数级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

在实轴上一致收敛，从而其和函数 $S(x)$ 处处连续．证明 $S(x)$ 在开区间 $(0, 2\pi)$ 上连续可微，并且

$$\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2}\right]' = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad \forall x \in (0, 2\pi).$$

证：记 $u_k(x) = \frac{\cos kx}{k^2}$，则 $u_k(x)$ 在开区间 $(0, 2\pi)$ 上连续可微，且

$$u_k'(x) = \left[\frac{\cos kx}{k^2}\right]' = -\frac{\sin kx}{k}.$$

已证对于任意小的 $\delta > 0$，级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ 在区间 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致收敛. 于是逐项求导定理中的三个条件均成立，其中 $J = (\delta, 2\pi - \delta)$，从而定理中三个结论成立，即 $S(x)$ 在 $(\delta, 2\pi - \delta)$ 上连续可微，且

$$\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2}\right]' = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad \forall x \in (\delta, 2\pi - \delta).$$

由于 $\delta > 0$ 可以任意小，故上式当 $\delta = 0$ 是也成立. 定理得证.

证：根据 Newton-Leibniz 定理知

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(s)ds,$$

$$f_m(x) = f_m(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_m'(s)ds.$$

于是

$$|f_n(x) - f_m(x)|$$

$$\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} |f_n'(s) - f_m'(s)| ds \right| .$$

由定理的第二个和第三个假设可知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N = N(\varepsilon)$，使得对任意 $n, m \geq N$，

证明续一

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon, \quad |f'_m(s) - f'_n(s)| < \varepsilon, \quad \forall s \in J.$$

由此得

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon|J| = \varepsilon(1 + |J|), \quad \forall x \in J,$$

其中 $|J|$ 表示区间 J 的长度. 这就证明了函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 J 上一致收敛, 亦即结论(i) 成立.

在恒等式

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(s)ds,$$

两边令 $n \to +\infty$ 可得

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)ds.$$

注意到函数 $g(x)$ 连续，因此 $f(x)$ 连续可微，且 $f'(x) = g(x)$. 即定理的结论(ii) 和(iii) 均成立. 证毕. $\square$

Definition

定义: 形如 $\sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k$ 的函数级数称为幂级数.

Theorem

定理: 对于幂级数 $\sum a_k x^k$, 若记 $\rho = \overline{\lim}_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, $R = \rho^{-1}$, 则幂级数的收敛情况如下:

(i) 当 $0<\rho<+\infty$, 则幂级数 $\sum a_k x^k$ 在开区间 $(-R, R)$ 上处处绝对收敛;

(ii) 当 $\rho = 0$, 则幂级数 $\sum a_k x^k$ 在实轴上处处绝对收敛;

(iii) 当 $\rho = +\infty$, 则幂级数 $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ 对任意 $x \neq 0$ 均发散.

注: 在区间端点 $x = \pm R$ 处, 幂级数 $\sum a_k x^k$ 的收敛情况尚需进一步确定.

Definition

定义: 定理中的 $R = \rho^{-1}$, $\rho = \overline{\lim}_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, 称为幂级数 $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ 的收敛半径. 具体说来,

(i) 当 $0 < \rho < +\infty$ 时, 称幂级数的收敛半径为 R;

(ii) 当 $\rho = 0$ 时, 则幂级数的收敛半径为 $+\infty$;

(iii) 当 $\rho = +\infty$, 则幂级数的收敛半径为 0;

(iv) 开区间 $(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间.

例一: 考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

此时 $a_k = 1, \forall k \geq 0$. 于是 $\sqrt[k]{|a_k|} = 1 \to 1, k \to +\infty$. 即 $\rho = 1$. 故幂级数的收敛半径为 $R = 1$. 因此幂级数在开区间 $(-1,1)$ 上处处收敛. 进一步对任意 $|x| \geq 1$, 级数发散.

例二：考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k}.$$

此时 $\sqrt[k]{|a_k|}=k^{\frac{1}{k}}\to 1$, $k\to+\infty$. 故幂级数的收敛半径为 $R=1$. 因此幂级数在开区间 $(-1,1)$ 上处处收敛. 显然幂级数对于任何 $|x|>1$ 发散, 因为此时级数的一般项不趋向于零. 此外在收敛区间的两个端点处, $x=1$, 级数为调和级数 $\sum\frac{1}{k}$, 发散; $x=-1$, 级数为 Leibniz 型级数 $\sum\frac{(-1)^k}{k}$, 收敛.

例三: 考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

此时 $a_k=\frac{1}{k!}$. 为求极限 $\overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$, 我们回忆一个结论:

对任意正数序列 $u_k>0,\ \forall k\geq 0$, 则

$$\underline{\lim}\frac{u_{k+1}}{u_k}\leq\underline{\lim}\sqrt[k]{u_k}\leq\overline{\lim}\sqrt[k]{u_k}\leq\overline{\lim}\frac{u_{k+1}}{u_k}.$$

$$\text{由于}\quad\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k!}{(k+1)!}=\frac{1}{k+1}\to 0,\quad k\to+\infty,$$

故 $\rho=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0.$

因此幂级数的收敛半径为 $R=+\infty$. 即幂级数对任意实数 x 均收敛.

注: 也可以利用 Stirling 公式 (未证, 最好记住)

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0,1)$$

来求收敛半径. 因为

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\frac{n}{e}\left(\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}\right)^{\frac{1}{n}}} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

所以收敛半径为 $+\infty$.

例四：考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k!x^k.$$

此时 $a_k = k!$. 于是

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{k!} = k \to +\infty, \quad k \to +\infty.$$

因此 $\rho = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty$. 故收敛半径为 $R = 0$. 从而幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} k!x^k$ 对任意 $x \neq 0$ 均发散.

例五: 考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 5^k x^{3k}. \quad (*)$$

令 $t = 5x^3$, 并考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t^k. \quad (**)$$

显然幂级数(**) 收敛 $\Longleftrightarrow$ $|t| < 1$. 因此幂级数(*) 收敛 $\Longleftrightarrow$ $|5x^3| < 1 \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

作业

第5章总复习题(page 260-262):

2(1), 3(1)(2)(3)(4)(5), 4, 5, 6.

习题6.1(page 270-271):

2(1)(3)(5)(7)(9), 3(1)(3)(5), 4, 5, 6, 7, 9, 10.