自动控制理论

（二）现代控制理论

自动化系 尚超
中央主楼418A 010-62782459
c-shang@tsinghua.edu.cn

线性定常系统的综合

对于一个给定的受控系统 $\Sigma(A,B,C)$，确定其控制法则，即设计控制器的结构参数，使其控制性能满足事先给定的指标要求，此类问题称为系统的综合问题。

- 分析问题：给定系统方程，输入 u 已知

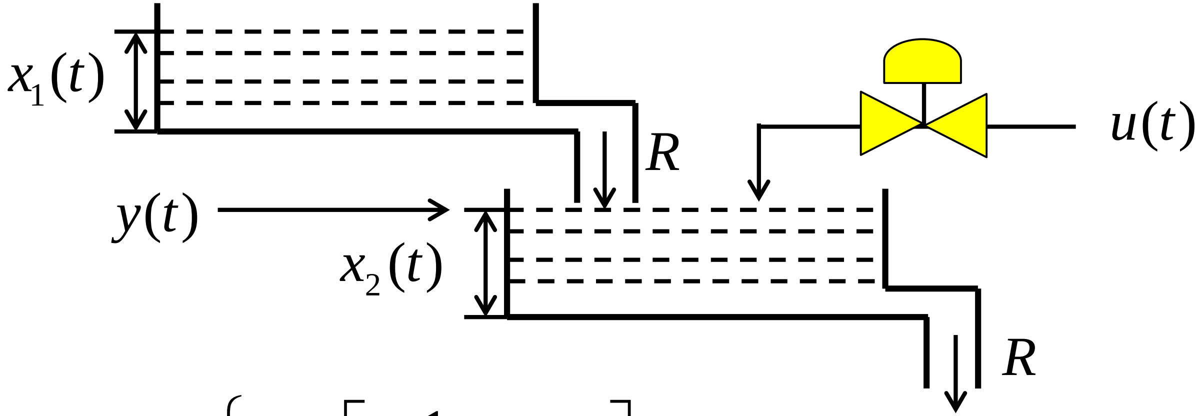
$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{系统运动行为（状态运动规律、稳定性）} \\ \text{结构特性（特征结构、能控、能观）}\end{cases}$$

- 综合问题：给定系统方程，指定期望的运动行为（性能指标）

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases} \Rightarrow \text{确定系统输入 } u \text{ 的规律}$$

线性定常系统的综合

- 例1：水位的控制

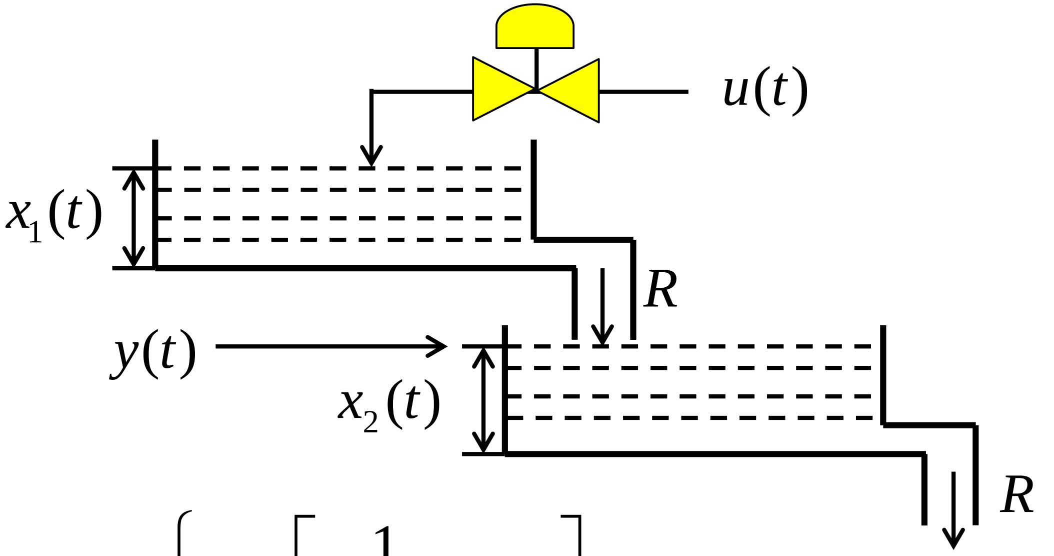


$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R} & 0 \\ \dfrac{1}{R} & -\dfrac{1}{R} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}
\end{cases}
$$

- 分析问题：系统（状态）的运动规律，是否具有能控性和能观性

线性定常系统的综合

- 例1：水位的控制

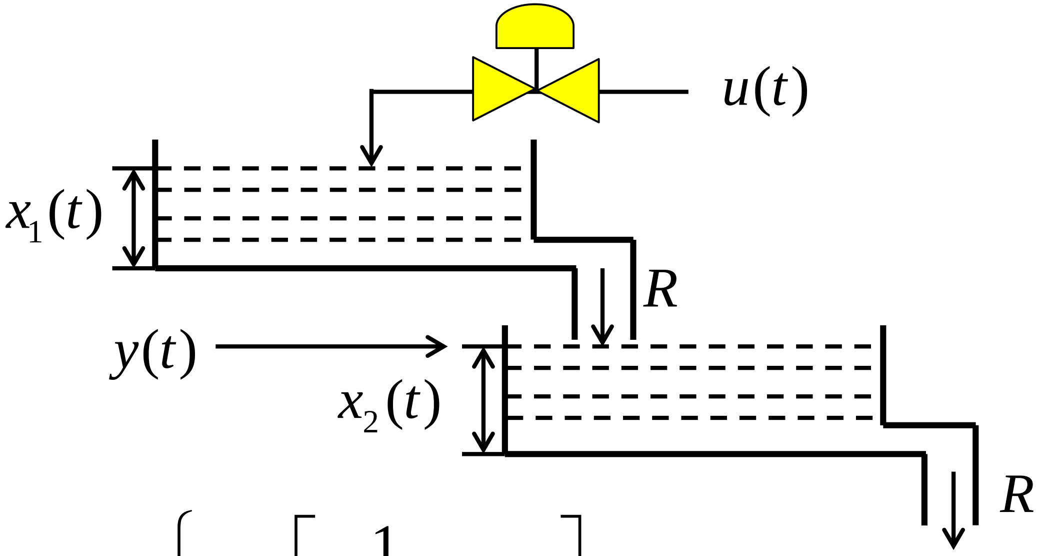


$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R} & 0 \\ \dfrac{1}{R} & -\dfrac{1}{R} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

- 分析问题：系统（状态）的运动规律，是否具有能控性和能观性

线性定常系统的综合

- 例1：水位的控制



$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R} & 0 \\ \dfrac{1}{R} & -\dfrac{1}{R} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}
\end{cases}
$$

- 综合问题：系统能以怎样的方式达到性能指标的要求，确定控制 u

线性定常系统的综合

- 系统综合的思路

1. 建立相应综合问题的“可综合条件”

    例如可进行极点配置的条件

2. 建立用来确定输入 $\boldsymbol{u}$ 的方法（控制律），进行设计

    例如反馈控制律 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$

模块4　线性定常系统的综合

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

无论在经典控制理论还是在现代控制理论中，反馈都是系统设计的重要方式。但是，由于经典控制理论是用传递函数来描述系统的，因此它只能对输出量进行一定改造后用来作为反馈量。这种方式称为输出反馈，即量测输出量，再由输出测量值与给定的输入量进行比较后，确定闭环系统的控制规律。

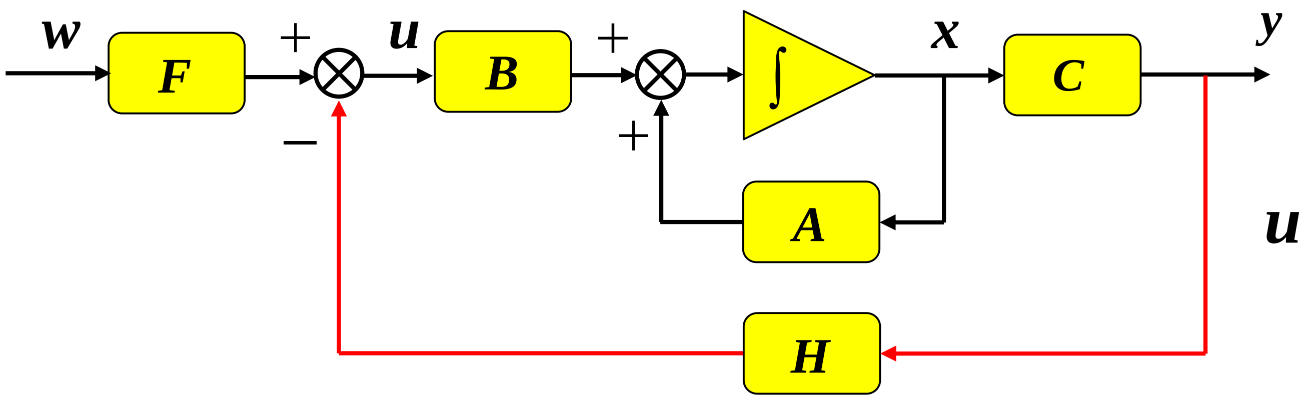
而在现代控制理论中是用系统的内部状态变量来描述系统特性的，所以除了上述的反馈外，通常采用状态反馈，即利用系统的全部状态变量作为反馈量。

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 基本形式：考虑如下线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1}$$

- 输入 $\boldsymbol{u}$、状态变量 $\boldsymbol{x}$、输出 $\boldsymbol{y}$ 的维数是 r, n, m，输出反馈的基本形式如下图所示。



$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}$$

TD4−1−1 状态反馈和输出反馈

设 $\boldsymbol{H}$ 是 $r \times m$ 阶矩阵，用 $\boldsymbol{Hy}$ 作为反馈量构成闭环系统，并对输入量 $\boldsymbol{w}$ 作线性变换，变换矩阵为 $\boldsymbol{F}$，控制律为 $\boldsymbol{u}$：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Fw} - \boldsymbol{Hy} = \boldsymbol{Fw} - \boldsymbol{HCx} \tag{2}$$

- 将 (2) 式代入原方程，即可导出闭环系统的方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{Fw} - \boldsymbol{HCx}\right) = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BHC}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{BFw}$$

- 这样，闭环系统就可表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BHC}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{BFw} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} \end{cases} \tag{3}$$

TD4−1−1 状态反馈和输出反馈

- 输出反馈的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BHC} \right) \boldsymbol{x} + \boldsymbol{BFw} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} \end{cases} \tag{3}$$

- 显然，其传递函数阵为（从 $\boldsymbol{w}$ 至 $\boldsymbol{y}$）

$$\boldsymbol{G}_{H,F}(s) = \boldsymbol{C}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BHC} \right)^{-1} \boldsymbol{BF}$$

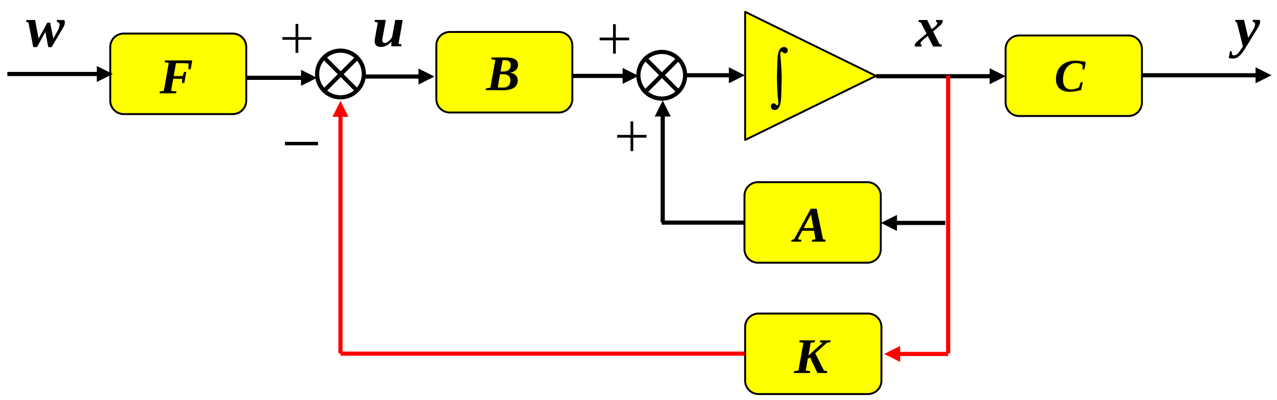
- 若 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$，即对输入不作变换，就变为单纯的输出反馈。此时，闭环系统模型具有如下形式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BHC} \right) \boldsymbol{x} + \boldsymbol{Bw} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G}_{H}(s) = \boldsymbol{C}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BHC} \right)^{-1} \boldsymbol{B}$$

TD4－1－1 状态反馈和输出反馈

- 状态反馈的基本形式如下图所示



设 K 是 $r \times n$ 阶矩阵，用 Kx 作为反馈量构成闭环，对输入量 w 也作线性变换，则得控制律：$u = Fw - Kx$ 。

这种反馈方式称为状态反馈。

TD4−1−1 状态反馈和输出反馈

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases} \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

- 状态反馈的闭环系统状态空间表达式为:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

- 其传递函数为: $\boldsymbol{G}_{K,F}(s) = \boldsymbol{C}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}$
- 若 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$，则状态反馈的闭环方程和传递函数为:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{G}_{K}(s) = \boldsymbol{C}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)^{-1}\boldsymbol{B}$$

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 状态反馈的闭环方程和传递函数为:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Bw} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G}_K(s) = \boldsymbol{C}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}\right)^{-1}\boldsymbol{B}$$

- 重写输出反馈的闭环传递函数为:

$$\boldsymbol{G}_H(s) = \boldsymbol{C}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BHC}\right)^{-1}\boldsymbol{B}$$

- 从闭环传递函数可看出，输出反馈和状态反馈均可改变系统的极点。
- 但是，反馈的引入并不增加新的状态变量，即闭环系统和开环系统具有相同的阶数。

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 输出反馈 $\begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + Bw \\ y = Cx \end{cases}$ $\underset{r\times n}{K} = \underset{r\times m}{H}\,\underset{m\times n}{C}$

- 状态反馈 $\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bw \\ y = Cx \end{cases}$

$r=m=1,\quad n=2$

$[k_1, k_2] = h[c_1, c_2]$

比较闭环状态空间表达式可以看出，当 $K = HC$ 时，状态反馈和输出反馈的控制效果是完全相同的。凡是输出反馈阵 H 所能达到的效果，通过状态反馈阵 $K = HC$ 来代替，可实现相同的控制效果。

反之，由于已知 K、C 时，不一定存在 H 阵使得 $K = HC$，这说明通过状态反馈可能获得比输出反馈更好的效果，而输出反馈仅是状态反馈的某种特例。由闭环状态方程可知，适当选择反馈阵 K，可以改善系统性能或满足一定的设计指标。

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 例2：考虑如下二阶系统

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_1 & -a_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}$$

试分析状态反馈对系统性能产生的影响。

- 解：系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$ 的传递函数为：$G(s)=\dfrac{\beta_2 s+\beta_1}{s^2+a_2 s+a_1}$

取状态反馈 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}=[k_1,k_2]$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}$

$$\text{则 } \boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_1 & -a_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[k_1,k_2]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -(a_1+k_1) & -(a_2+k_2)\end{bmatrix}$$

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 闭环传递函数为：$G_K(s)=\dfrac{\beta_2 s+\beta_1}{s^2+(a_2+k_2)s+(a_1+k_1)}$

  则极点为 $\lambda^*=\dfrac{-(a_2+k_2)\pm\sqrt{(a_2+k_2)^2-4(a_1+k_1)}}{2}$

  显然，只要适当选择 k_1,k_2，即可任意配置闭环极点。

  - 如果 $k_1=\dfrac{(a_2+k_2)^2}{4}-a_1$ 则闭环有两个相同的实极点，并且在 $k_2>-a_2$ 时，系统是稳定的；
  - 如果 $k_1<\dfrac{(a_2+k_2)^2}{4}-a_1$ 闭环系统有两个相异的实极点；
  - 如果 $k_1>\dfrac{(a_2+k_2)^2}{4}-a_1$ 闭环系统成为振荡系统，在 $k_2>-a_2$ 时系统稳定。

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 如果 $k_1 > \dfrac{(a_2+k_2)^2}{4} - a_1$ 闭环系统成为振荡系统，在 $k_2 > -a_2$ 时系统稳定。

进一步，我们可以分析系统的稳态偏差，分别为：

$$e_p = 1 - \frac{\beta_1}{a_1+k_1},\ e_v = t\left(1 - \frac{\beta_1}{a_1+k_1}\right) + \frac{\beta_1(a_2+k_2) - \beta_2(a_1+k_1)}{(a_1+k_1)^2}$$

- 若要求 $e_p = 0$，就需 $k_1 = -a_1 + \beta_1$，这时 $e_v = \dfrac{a_2+k_2-\beta_2}{\beta_1}$
- 若还要求 $e_v = 0$，就必须有 $k_2 = -a_2 + \beta_2$，那么自然要求 $\beta_2 > 0$，否则系统就不稳定了。

模块4　线性定常系统的综合

TD4-1-1　状态反馈和输出反馈（课本9.11.1节）

TD4-2-1　反馈对能控性/能观性的影响（课本9.11.2节）

TD4-3　　闭环系统的极点配置（课本10.1.1-10.1.3节）

　　TD4-3-1　极点配置算法

　　TD4-3-2　极点配置算法举例

TD4-4-1　镇定问题（课本10.1.4节）

TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

为简单起见，不失一般性假设 $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$ 及 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}$，并考察在该条件下反馈对能控性与能观性的影响。此时，原系统可表示为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{Kx}$，闭环系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}\right)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Bw}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}\end{cases} \qquad (1)$$

- **结论**：状态反馈不影响系统的能控性，但不一定保持系统的能观性；
  输出反馈不影响系统的能控性和能观性。

TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- **1、状态反馈不影响系统的能控性**

计算式(1)的能控性矩阵，因为

$$(A-BK)B = AB - BKB = AB - BP \quad (\text{这里 } P = KB)$$

$$(A-BK)^2 B = (A-BK)(AB-BP) = A^2B + (B\text{、}AB \text{ 的线性组合})$$

$$(A-BK)^3 B = (A-BK)(A^2B + (B\text{、}AB \text{ 的线性组合}))$$

$$= A^3B + (B\text{、}AB\text{、}A^2B \text{ 的线性组合})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(A-BK)^{n-1} B = A^{n-1}B + (B\text{、}AB\text{、}A^2B\text{、}\cdots\text{、}A^{n-2}B \text{ 的线性组合})$$

$$\begin{bmatrix} B & (A-BK)B & \cdots & (A-BK)^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & * & \cdots & * \\ 0 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & I \end{bmatrix}$$

TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{B} & \cdots & (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & * & \cdots & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

- 上式中最后一个矩阵为非奇异矩阵，因而有：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{B} & \cdots & (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

式(2)表明状态反馈不影响系统能控性，即若原系统是完全能控的，加上任意状态反馈后，所得到的闭环系统也完全能控。若原系统是不完全能控的，不论加上什么样的状态反馈，所得到的闭环系统仍然不完全能控。

TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- **2、状态反馈不一定能保持系统的能观性**

状态反馈有可能改变系统的能观性，即若原系统完全能观，在某些状态反馈作用下，所得的闭环系统可能是不完全能观的。

若原系统不完全能观，在某些状态反馈作用下，所得的闭环系统可能成为完全能观。

对此，可以举例说明。

TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- 例1：系统运动方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{Q}_g=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$ 该系统不完全能观

若取状态反馈 $\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ 时，闭环系统为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}w=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}w\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{Q}_g=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$ 该系统完全能观

若取状态反馈 $\boldsymbol{k}_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ 时，闭环系统为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}w=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}w\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{Q}_g=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$ 此时该系统仍然不完全能观

TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- 例1：系统运动方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$

当 $y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 时，系统是完全能观的，若取 $\boldsymbol{k}_3^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$时，闭环系统不完全能观，若取 $\boldsymbol{k}_4^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ 时，闭环系统仍是完全能观的。

当 $y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 时，系统完全能观，加任意的状态反馈后所得的闭环系统仍是完全能观的。（为什么？）

以上说明，状态反馈可能改变系统的能观性。

TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- **3、输出反馈能保持系统的能控性和能观性**

因为对任意输出反馈系统都可以对应于一个等价的状态反馈系统。而状态反馈保持能控性，这证明了输出反馈可保持能控性。

接下来证明，输出反馈可保持能观性。

带有输出反馈的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(A - BHC\right)x + Bw \\ y = Cx \end{cases} \tag{3}$$

TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

显然，只要证明以下等式即可。

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BHC}\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BHC}\right)^{n-1} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

思路与证明状态反馈能保持能控性的方法类似，同学们可自行完成证明。

因此，可得到如下结论：

状态反馈不影响系统的能控性，但不一定保持系统的能观性；

输出反馈不影响系统的能控性和能观性。

模块4　线性定常系统的综合

TD4-1-1　状态反馈和输出反馈（课本9.11.1节）

TD4-2-1　反馈对能控性/能观性的影响（课本9.11.2节）

TD4-3　　闭环系统的极点配置（课本10.1.1-10.1.3节）

- TD4-3-1　极点配置算法
- TD4-3-2　极点配置算法举例

TD4-4-1　镇定问题（课本10.1.4节）

TD4-3-1 极点配置算法

控制系统的各种特性或各种品质指标，很大程度上由系统的极点决定。

因此，系统的综合形式之一，可以在 s 平面上给定一组所希望的极点，通过状态反馈阵 $\boldsymbol{k}$ 的选择，使闭环系统 $\Sigma_k(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$ 的极点恰好处于期望的一组极点的位置上。由于期望极点位置有任意性，因此极点的配置同样应当具有任意性。

这就是所谓的极点配置问题。

TD4-3-1 极点配置算法

- **1、期望极点的选取**

对于期望极点的选取，实际上是确定综合目标的问题。这里仅提出一般应了解的方面。

(1) 对于 n 维受控系统，应当且只应当指定 n 个期望极点。

(2) 对期望极点位置的选取，要研究它们对系统品质的影响，它们与零极点分布状况的关系，从工程实际需要出发加以解决。

(3) 期望极点可以是实数或共轭复数对。

工程实际需要涵盖了抗干扰能力、灵敏度等性能指标，所以选取极点位置实际上是一项复杂的工作。

TD4-3-1 极点配置算法

- **2、极点配置定理**

对于单输入单输出系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$，在 s 平面上预先任意指定 n 个极点，则存在状态反馈律：

$$u(t)=-\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)+w(t)$$

使闭环系统 $\Sigma_k\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\right)$ 极点位于预先指定位置上的充分必要条件是原系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$ 完全能控。

- 证明：之前我们已证明，状态反馈不影响系统的能控性。因此，若一个系统不完全能控，则状态反馈无法改变系统的不能控模态。这证明了系统可任意配置极点的必要条件是受控系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$ 是完全能控的。

TD4-3-1 极点配置算法

下面证明充分性：

由于 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$ 能控，那么一定可以通过某种非奇异变换，转化成能控规范型 $\Sigma(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}})$，其中

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_{n-1} \\ -p_1 & -p_2\cdots-p_n \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{b}}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

对于状态反馈阵 $\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \cdots & \tilde{k}_n \end{bmatrix}$，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}-\tilde{\boldsymbol{b}}\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_{n-1} \\ -\left(p_1+\tilde{k}_1\right) & -\left(p_2+\tilde{k}_2\right)\cdots-\left(p_n+\tilde{k}_n\right) \end{bmatrix}$$

可见状态反馈系统 $\tilde{\Sigma}_k=\left(\tilde{\boldsymbol{A}}-\tilde{\boldsymbol{b}}\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}},\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\right)$ 仍为能控标准型。

TD4-3-1 极点配置算法

状态反馈系统的特征多项式为：

$$f(s)=\left|s\boldsymbol{I}-\left(\tilde{\boldsymbol{A}}-\tilde{\boldsymbol{b}}\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}\right)\right|=s^{n}+\left(p_{n}+\tilde{k}_{n}\right)s^{n-1}+\cdots+\left(p_{1}+\tilde{k}_{1}\right)\quad(1)$$

假定任意给定的 n 个极点分布为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则希望的特征多项式为：

$$f^{*}(s)=\prod_{i=1}^{n}\left(s-\lambda_{i}\right)=s^{n}+a_{n}^{*}s^{n-1}+a_{n-1}^{*}s^{n-2}+\cdots+a_{1}^{*}\quad(2)$$

比较上面两式，可知：$p_i+\tilde{k}_i=a_i^{*}\ (i=1,2,\cdots,n)$

则 $\tilde{k}_i=a_i^{*}-p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$

所以 $\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1^{*}-p_1, & a_2^{*}-p_2, & \cdots, & a_n^{*}-p_n\end{bmatrix}$

TD4-3-1 极点配置算法

而原系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$ 的线性反馈律应为:

$$u = w - \boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

由 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}$，代入上式得:

$$u = w - \underbrace{\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}}_{\doteq\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}}\,\tilde{\boldsymbol{x}}$$

所以 $\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$，即 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}} = \tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{-1}$。

由于线性非奇异变换不改变系统的特征多项式，因此，$\boldsymbol{k}$ 即为所求的反馈增益向量。

上面只是对单输入系统作了证明。不难看出，定理也能推广至一般的多输入系统。

TD4-3-1 极点配置算法

上述证明过程也给出了单变量系统极点配置的方法，现归纳如下：

(1) 对于给定的系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 化为能控标准型 $\tilde{\Sigma}(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}})$；

(2) 导出系统 $\tilde{\Sigma}(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}})$ 的特征多项式，它也是原系统的特征多项式：

$$f(s)=s^n+p_n s^{n-1}+p_{n-1}s^{n-2}+\cdots+p_1$$

(3) 根据给定的极点分布 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，导出希望的闭环特征多项式：

$$f^*(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+a_n^* s^{n-1}+a_{n-1}^* s^{n-2}+\cdots+a_1^*$$

(4) 确定能控标准型 $\tilde{\Sigma}(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}})$ 的状态 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的反馈向量：

$$\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1^*-p_1, & a_2^*-p_2, & \cdots, & a_n^*-p_n\end{bmatrix}$$

TD4-3-1 极点配置算法

(5) 原系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的状态的反馈阵 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}=\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{-1}$;

(6) 输入变换阵 $\boldsymbol{F}$ 对单变量系统是标量，可由综合指标中对系统静态误差要求来确定。

当然，具体综合某个特定系统的状态反馈不一定完全遵照上述步骤，可根据具体问题进行适当变化。详见例2。

模块4　线性定常系统的综合

TD4-1-1　状态反馈和输出反馈（课本9.11.1节）

TD4-2-1　反馈对能控性/能观性的影响（课本9.11.2节）

TD4-3　　闭环系统的极点配置（课本10.1.1-10.1.3节）

　TD4-3-1　极点配置算法

　TD4-3-2　极点配置算法举例

TD4-4-1　镇定问题（课本10.1.4节）

TD4−3−2 极点配置算法举例

- 例1：已知图(a)所示的受控系统，其传递函数为

$$w(s)=\frac{0.0139}{s(0.167s+1)(0.083s+1)}=\frac{1}{s(s+6)(s+12)}$$

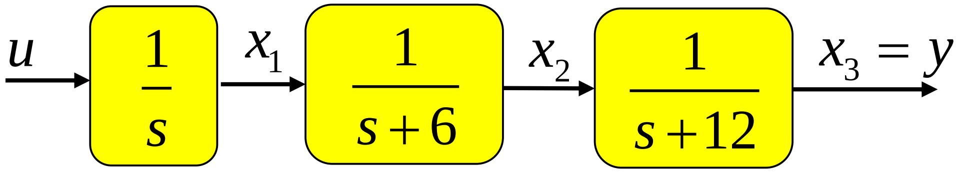


图 (a)

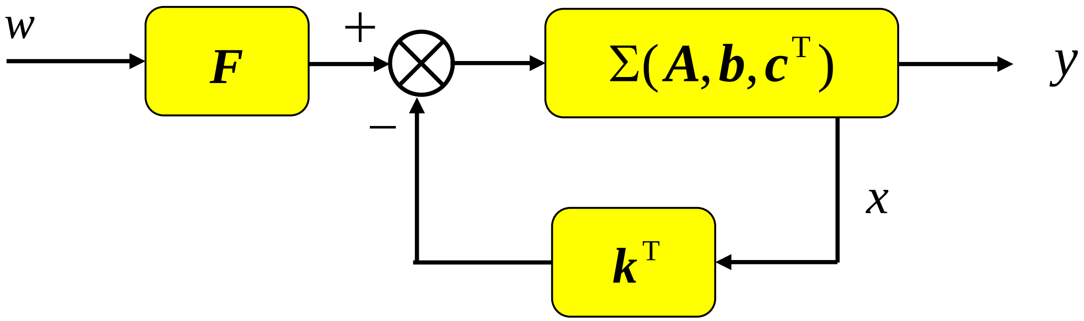


图 (b)

综合指标为：

输出超调量：$M_p \le 5\%$

峰值时间：$t_p \le 0.5$ 秒

静态误差：$e_p=0,\ e_v=0.2$

TD4−3−2 极点配置算法举例

- 解：考虑到综合指标既有动态要求，又有静态要求，所以采用状态反馈和输入变换相结合的形式，即如图1 (b) 所示。

(1) 将给定指标化为期望极点，确定期望模型。

希望极点数 n=3。现在选取：一对为主导极点对 λ_1 和 λ_2 ，另一个为远方极点 λ_3 ，如图2所示。

可以认为动态特性主要由主导极点决定，而远方极点只有微小影响。主导极点对构成二阶系统模型，有关系式 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\omega_n,\theta=\cos^{-1}\zeta$，其中 ζ：阻尼系数，ω_n：自然振动频率。

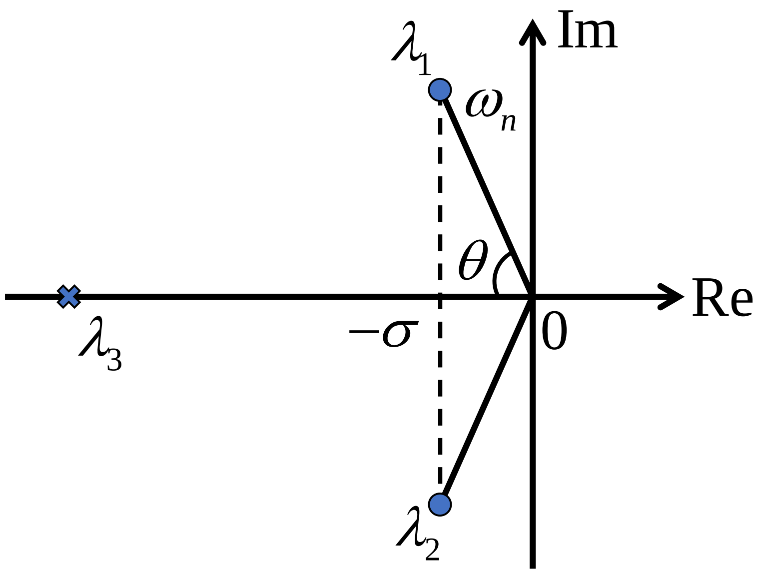


图2

TD4-3-2 极点配置算法举例

由于系统性能主要由主导极点对决定，所以按综合指标首先决定主导极点对 λ_1 、λ_2 。为此，利用二阶模型关系式来求 ζ 和 ω_n ：

$$\begin{cases} M_p = e^{-\zeta\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \le 5\% \\ t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \le 0.5s \end{cases}$$

- 利用 $M_p = e^{-\zeta\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \le 5\%$ 求 ζ ：

  $\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2} \ge 3.14$，从而有 $\zeta \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$，于是选取 $\zeta = 0.707$。

- 由 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \le 0.5s$ 求 ω_n ：

  $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{\omega_n} \le 0.5$，从而有 $\omega_n \ge \dfrac{\pi}{0.5\times 0.707} \doteq 9$ ，选 $\omega_n = 10$ 。

TD4-3-2 极点配置算法举例

这样可确定主导极点对:

$$\lambda_{1,2} = -\omega_n \cos\theta \pm j\omega_n \sin\theta = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -7.07 \pm j7.07$$

而远方极点 λ_3 的选择应该使其和原点距离远大于$|\lambda_1|$。选取

$$\lambda_3 = -10|\lambda_1| = -100$$

于是希望的闭环系统特征多项式为:

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s+100)(s+7.07-j7.07)(s+7.07+j7.07) \\ &= (s+100)(s^2+14.1s+100) \\ &= s^3+114.1s^2+1510s+10000 \end{aligned}$$

(2) 校核模型的静态指标，确定变换放大器系数 F

因为原系统无零点，所以闭环系统的传递函数为: $G_k(s) = \dfrac{F}{f^*(s)}$

TD4-3-2 极点配置算法举例

$$f^*(s) = s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000 = s^3 + \alpha_3^* s^2 + \alpha_2^* s + \alpha_1^*$$

由位置误差定义

$$e_p \triangleq \lim_{t\to\infty}\left|1 - y_p(t)\right| = \lim_{s\to 0}\left|s\left(\frac{1}{s} - \frac{G_k(s)}{s}\right)\right| = \left|1 - \frac{F}{\alpha_1^*}\right| = 0$$ （因为要求 $e_p = 0$）

所以，$F = \alpha_1^* = 10000$。再校核速度误差 e_v 是否满足要求。

$$e_v \triangleq \lim_{t\to\infty}\left|t - y_t(t)\right| = \lim_{s\to 0}\left|s\left(\frac{1}{s^2} - \frac{G_k(s)}{s^2}\right)\right| = \lim_{s\to 0}\left|\frac{1 - G_k(s)}{s}\right|$$

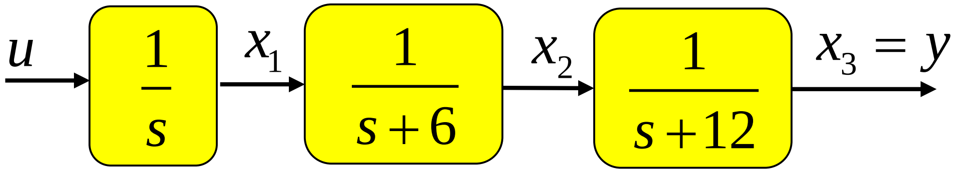
因为

$$1 - G_k(s) = 1 - \frac{F}{f^*(s)} = 1 - \frac{10000}{s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000} = \frac{s^3 + 114.1s^2 + 1510s}{s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000}$$

所以 $e_v = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s^2 + 114.1s + 1510}{s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000} = 0.1510 < 0.2$，满足要求。

TD4-3-2 极点配置算法举例

(3) 确定系统的状态空间表达式并化为能控标准型



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 6x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 - 12x_3 \\ y = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

原系统的一个实现为 $\Sigma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$，其中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TD4-3-2 极点配置算法举例

原系统的一个实现为$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$，其中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & -12\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

可求得变换阵 $\boldsymbol{T}$： $\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -12\\ 1 & -18 & 144\end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}72 & 18 & 1\\ 12 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

于是可得能控标准型 $\Sigma(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}})$，其中：

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -72 & -18\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{b}}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

TD4-3-2 极点配置算法举例

(4) 确定能控标准型 $\Sigma(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}})$ 的状态反馈阵 $\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}$。

令 $\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}=\left[\tilde{k}_1,\quad \tilde{k}_2,\quad \tilde{k}_3\right]$，**由以下两式求出反馈阵** $\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}$:

$$f^*(s)=s^3+114.1s^2+1510s+10000$$

$$f(s)=s^3+18s^2+72s$$

则

$$\tilde{k}_1=\alpha_1^*-p_1=10000-0=10000$$
$$\tilde{k}_2=\alpha_2^*-p_2=1510-72=1438$$
$$\tilde{k}_3=\alpha_3^*-p_3=114.1-18=96.1$$

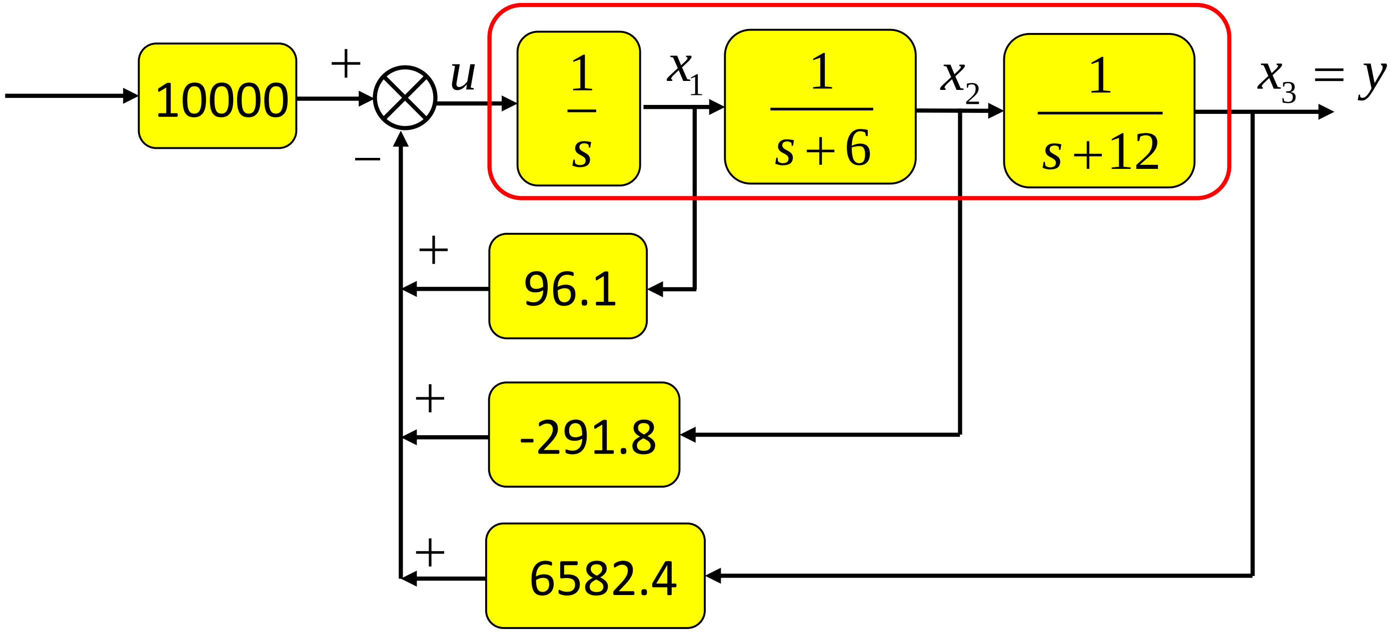
TD4-3-2 极点配置算法举例

(5) 确定原系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$ 的状态反馈 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}=\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}10000 & 1438 & 96.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -12\\ 1 & -18 & 144\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}96.1 & -291.8 & 6582.4\end{bmatrix}$$

(6) 画出方框图：



TD4-3-2 极点配置算法举例

- 例2：某倒立摆的状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&11&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}u$$

其特征多项式是： $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^4-11\lambda^2=\lambda^2\left(\lambda^2-11\right)$

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\sqrt{11},\lambda_4=-\sqrt{11}$$

系统很不稳定，这和我们从物理意义上预计的一致。现在要设计状态反馈，使系统稳定，并且使 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_{3,4}=-1\pm j$ 。

TD4-3-2 极点配置算法举例

- 解：(1) 检查系统的能控性，求取能控性矩阵

$$\boldsymbol{Q}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -11\\ -1 & 0 & -11 & 0\end{bmatrix}$$

因为 $|\boldsymbol{Q}_k|=100$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_k=4$，所以系统完全能控。

(2) 化为能控标准型或直接计算，本题采用后者，所以本步骤省略。

(3) 求闭环系统的特征多项式。令 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3 & k_4\end{bmatrix}$

TD4-3-2 极点配置算法举例

$$f_k(s)=\left|s\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\right)\right|=\left|s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&-11&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3&k_4\end{bmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}s&-1&0&0\\k_1&s+k_2&1+k_3&k_4\\0&0&s&-1\\-k_1&-k_2&-k_3-11&s-k_4\end{vmatrix}=s^4+\left(k_2-k_4\right)s^3+\left(k_1-k_3-11\right)s^2-10k_2s-10k_1$$

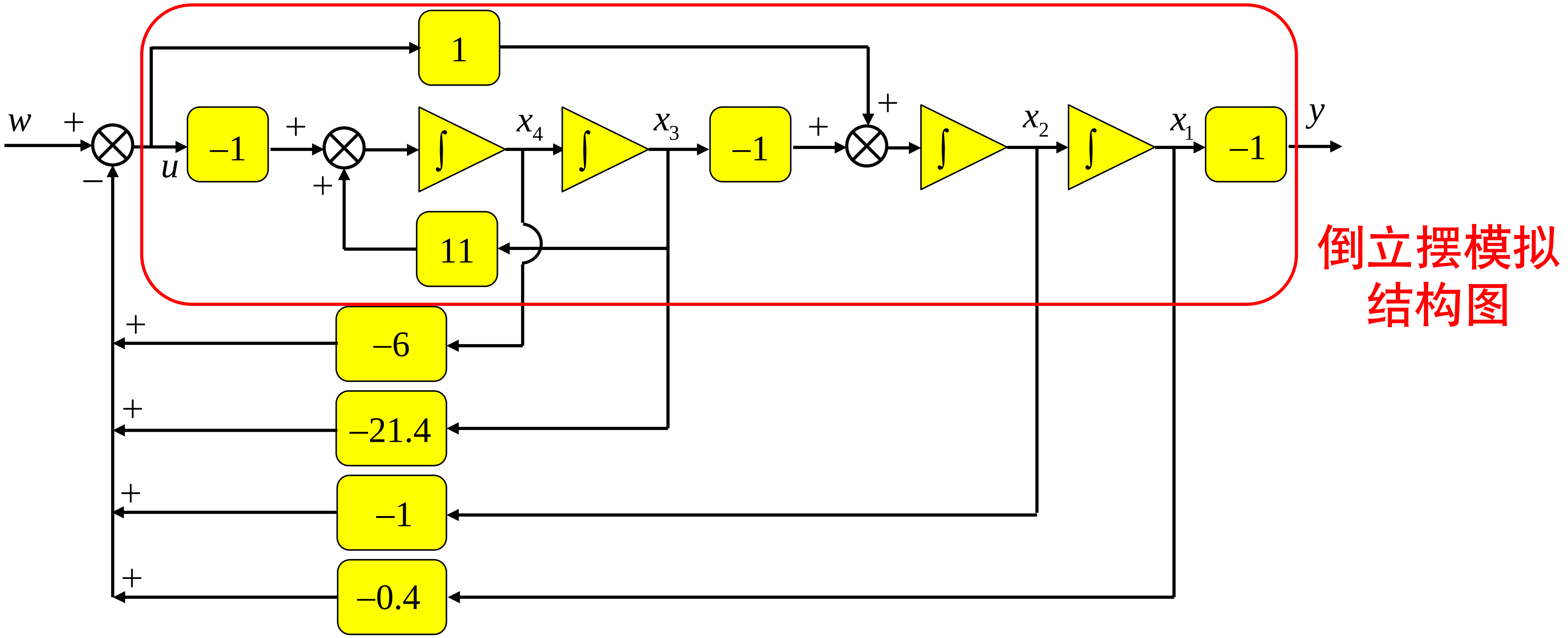
(4) 期望的特征多项式为 $f^*(s)=(s+1)(s+2)(s+1+j)(s+1-j)=s^4+5s^3+10s^2+10s+4$

上述两式对应项系数应相等，即得：$k_1=-0.4, k_2=-1, k_3=-21.4, k_4=-6$

所以有：$\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-0.4&-1&-21.4&-6\end{bmatrix}$

TD4-3-2 极点配置算法举例

(5) 画出反馈系统模拟结构图



TD4-3-2 极点配置算法举例

由极点配置定理可知，系统完全能控是闭环极点任意配置的条件。换言之，系统完全能控，则可以任意配置全部 n 个闭环极点。并且，对于单变量系统，实现极点配置的状态反馈阵 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$ 是唯一的。

当不满足条件时，显然不能任意配置闭环极点，但是，有可能配置一些特定的极点组。

TD4-3-2 极点配置算法举例

问：若系统不完全能控，能否实现极点任意配置？

系统不完全能控，则不能任意配置全部 n 个闭环极点；

若系统能控子系统的维数为 r $(r < n)$，则只能任意配置可控的 r 个极点；当其余 $(n\text{-}r)$ 个不能控的极点恰好出现在所期望的极点组中，则可以配置该特定的极点组。

由于状态反馈无法改变系统的不能控模态，当系统不完全能控时，若希望的极点组中包含了系统所有不能控模态时，这组期望极点也是可以配置的。

TD4-3-2 极点配置算法举例

- 例1：右图所示为一电容电阻构成的电路，设 $RC=1/3$，

  则得系统的状态方程为：$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$

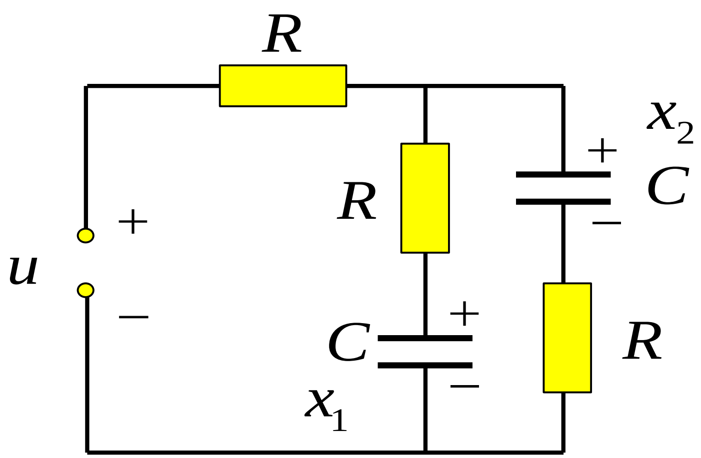


图1

系统的特征值为 $\lambda=-1, \lambda=-3$

将系统化为如下的对角标准型 $\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$

易知，模态 e^{-t} 可被 u 控制，而模态 e^{-3t} 无法被 u 控制。

因此系统不完全能控，则不能通过状态反馈任意配置 2 个闭环极点。然而，当要求配置的希望极点是 $\{-4,-3\}$，即包含了系统的不能控模态时，这组期望极点也是可以配置的。

TD4−3−2 极点配置算法举例

若系统不完全能控，能否配置极点？

如何配置极点？可直接进行计算。

(1) 确定可以配置的极点组；

(2) $f_k(s)=\left|s\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\right)\right|$

(3) $f^*(s)=\prod_{i=1}^{n}\left(s-\lambda_i\right)$

(4) 系数相等，联立方程求解得到。

有无其他方法？

模块4　线性定常系统的综合

TD4-1-1　状态反馈和输出反馈（课本9.11.1节）

TD4-2-1　反馈对能控性/能观性的影响（课本9.11.2节）

TD4-3　　闭环系统的极点配置（课本10.1.1-10.1.3节）

　TD4-3-1　极点配置算法

　TD4-3-2　极点配置算法举例

TD4-4-1　镇定问题（课本10.1.4节）

TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

假定线性系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 完全能控，则一定存在线性状态反馈 $\boldsymbol{K}$，使闭环系统 $\Sigma_K(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 极点可任意配置。换言之，对完全能控的不稳定系统，总可以求得线性状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$，使系统变为渐近稳定，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 的特征值均在 s 平面的左边。这就是镇定问题。

可见，镇定问题是极点配置问题的一个特例。

在镇定问题中，只要求极点配置在 s 平面的左边，而不必在具体某个位置上。所以对系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，若存在状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$，使闭环系统 $\Sigma_K(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 的极点都具有负实部，则称原系统是状态反馈可镇定的。

TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

- **1、状态反馈可镇定的条件**

线性系统状态反馈可镇定的充分必要条件为：系统不能控的部分是渐近稳定的。

对此说明如下：假定系统已按能控性分解为如下形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{1}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$ 设状态反馈阵为 $\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{K}_2\end{bmatrix}$，则

闭环系统的状态矩阵为：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$

其特征多项式为：$f_K(s)=\left|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\right|=\left|s\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1\right|\cdot\left|s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}_{22}\right|$

TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

特征多项式为:

$$f_K(s)=\left|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\right|=\left|s\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1\right|\cdot\left|s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}_{22}\right|$$

显然, $\Sigma_1(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{B}_1)$ 是能控部分, 所以上式中的 $\left|s\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1\right|$ 部分可以通过极点配置的方法使 $\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1$ 的极点具有负实部, 而 $\Sigma_2(\boldsymbol{A}_{22},0)$ 是不能控部分, 上式中的行列式 $\left|s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}_{22}\right|$ 说明无法通过极点配置方法改变 $\boldsymbol{A}_{22}$ 的极点, 而必须要求 $\boldsymbol{A}_{22}$ 的极点具有负实部。结论得证。

TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

- 例1：右图所示为一电容电阻构成的电路，设 $RC=\dfrac{1}{3}$ ，则得系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

该系统是否状态反馈可镇定?

解：系统的特征值为 $\lambda=-1,\lambda=-3$

将系统化为对角标准型 $$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

可知模态 e^{-t} 可以被 u 控制，而模态 e^{-3t} 不可被 u 控制，则不能控的极点为 -3，是渐近稳定的，因此该系统是状态反馈可镇定的。

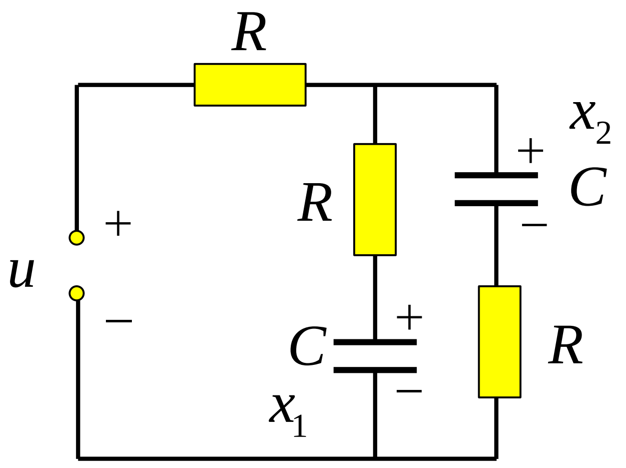


图1

TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

- 例2：分析如下不稳定系统能否通过状态反馈成为稳定系统。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- 解：$\boldsymbol{Q}_k = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_k = 2$，所以原系统不完全能控。

$$取\ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ 则\ \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可见，其不能控部分极点为 -2，是渐近稳定的。因此，原系统能通过状态反馈变为稳定系统。

TD4−4−1 状态空间中系统的镇定问题

- **2、输出反馈能镇定的条件**

对于输出反馈，我们知道它保持了系统的能控性和能观性，即输出反馈不能改变系统的不能控模态和不能观模态。

假定已经将系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 进行 Kalman 结构分解：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{24}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{33} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{44}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

其中 $(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{C}_1)$ 是能控且能观的；$(\boldsymbol{A}_{22},\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{0})$ 是能控不能观的；$(\boldsymbol{A}_{33},\boldsymbol{0},\boldsymbol{C}_3)$ 是不能控而能观的；$(\boldsymbol{A}_{44},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ 是不能控又不能观的。

则对于这样的系统输出反馈镇定的充分必要条件为：1）能控又能观部分是能镇定的；2）其它的三部分均是渐近稳定的。

TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

对此说明如下：设输出反馈阵为 $\boldsymbol{H}$，则闭环系统矩阵为：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BHC}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{HC}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{13}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{HC}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{21}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{HC}_1 & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{HC}_3 & \boldsymbol{A}_{24} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{33} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{44} \end{bmatrix}$$

其特征多项式为：

$$\begin{aligned} f_H(s) &= \left|s\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BHC}\right)\right| \\ &= \left|s\boldsymbol{I}_1-\left(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{HC}_1\right)\right|\cdot\left|s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}_{22}\right|\cdot\left|s\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}_{33}\right|\cdot\left|s\boldsymbol{I}_4-\boldsymbol{A}_{44}\right| \end{aligned}$$

可以看出，当且仅当 $\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{HC}_1$ 具有负实部的极点，即能控又能观部分为输出反馈能镇定，$\boldsymbol{A}_{22}$，$\boldsymbol{A}_{33}$，$\boldsymbol{A}_{44}$ 均具有负实部的极点。即其余三部分为渐近稳定的时候，闭环系统才是渐近稳定的。

这说明了结论的正确性。