第8次作业答案

7.3 (a) 非线性函数为 $y=\begin{cases}Kx-M, & x\le 0\\ Kx+M, & x>0\end{cases}$，取 $x(t)=X\sin\omega t$，则

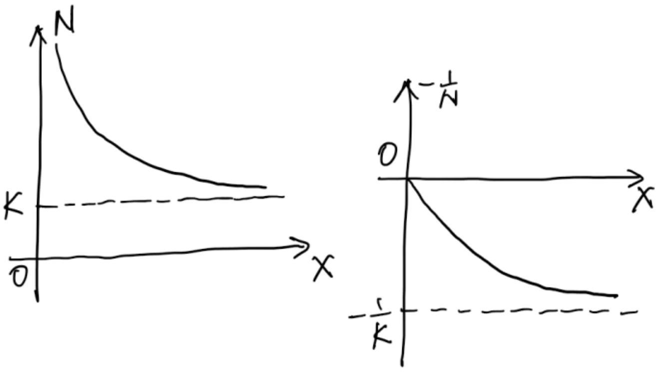
因为是奇函数，所以 $A_1=0$

$$\begin{aligned}B_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(KX\sin\omega t+M\right)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(KX\sin\omega t-M\right)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}KX\pi+2M\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}KX\pi+2M\right)\\&=KX+\frac{4M}{\pi}\end{aligned}$$

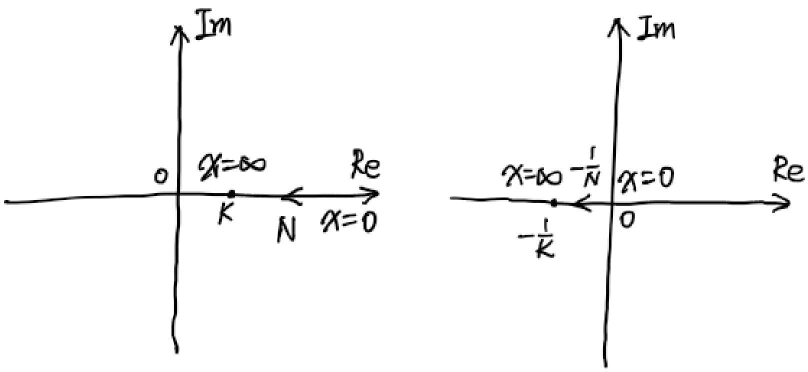
因此，其描述函数为 $N=\frac{B_1}{X}=K+\frac{4M}{\pi X}$，$\frac{-1}{N}=-\frac{\pi X}{K\pi X+4M}$。

注：由于题目描述含有歧义，所以绘制 $N(X)$、$-\frac{1}{N(X)}$ 关于 X 的图像或绘制复平面上的 $N(X)$、$-\frac{1}{N(X)}$ 的轨迹都认为正确

$N(X)$、$-\frac{1}{N(X)}$ 关于 X 的图像：



复平面上的 $N(X)$、$-\frac{1}{N(X)}$ 的轨迹：



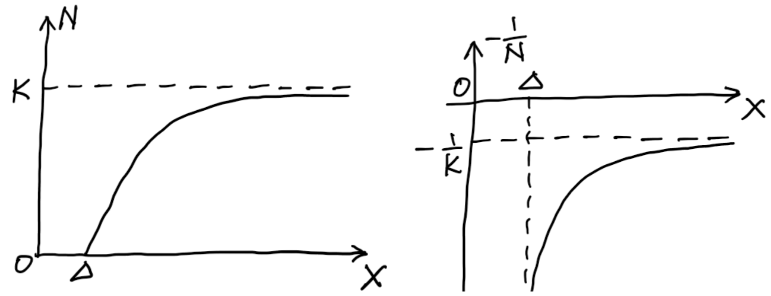
(b) 非线性函数为 $y=\begin{cases}Kx, & x\le-\Delta\text{或}x\ge\Delta\\ 0, & -\Delta\le x\le\Delta\end{cases}$，取 $x(t)=X\sin\omega t$，$\alpha_1=\arcsin\frac{\Delta}{X}$，

$\alpha_2=\pi-\arcsin\frac{\Delta}{X}$，$\alpha_3=\pi+\arcsin\frac{\Delta}{X}$，$\alpha_4=2\pi-\arcsin\frac{\Delta}{X}$，则

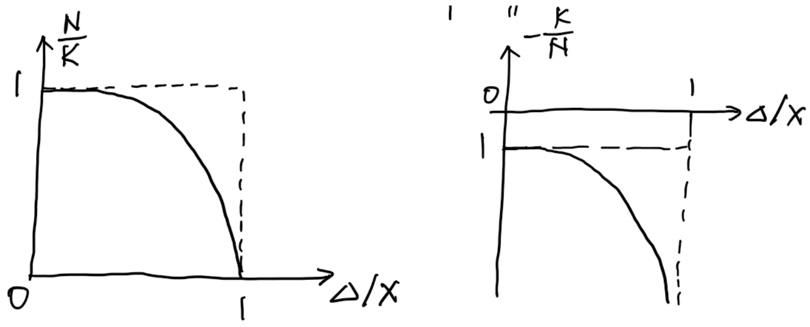
$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega t = \frac{2KX}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin^2\omega t\,\mathrm{d}\omega t \\
&= \frac{KX}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} 1-\cos 2\omega t\,\mathrm{d}\omega t = \frac{KX}{\pi}\left(\pi - 2\arcsin\frac{\Delta}{X} - \frac{\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1}{2}\right) \\
&= \frac{KX}{\pi}\left(\pi - 2\arcsin\frac{\Delta}{X} + \sin 2\alpha_1\right) \\
&= \frac{KX}{\pi}\left(\pi - 2\arcsin\frac{\Delta}{X} + 2\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right)
\end{aligned}
$$

因此，其描述函数为 $N = \frac{B_1}{X} = K - \frac{2K}{\pi}\left(\arcsin\frac{\Delta}{X} - \frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right)$，$\frac{-1}{N} = -\frac{X}{B_1}$。

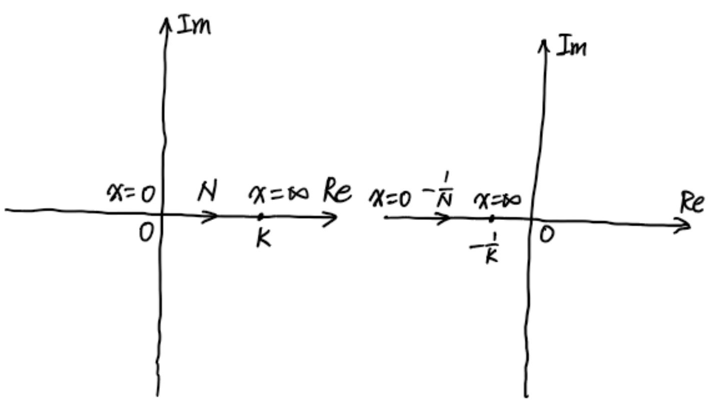
$N(X)$、$-\frac{1}{N(X)}$ 关于 X 的图像：



或



复平面上的 $N(X)$、$-\frac{1}{N(X)}$ 的轨迹：



7.5 非线性函数为 $Y_1(\omega)=A_1\cos\omega t+B_1\sin\omega t$， $N=\dfrac{Y_1}{X}e^{j\varphi_1}$， $\omega t_1=\arcsin\dfrac{0.2}{X}$， $\omega t_2=\omega t_1+\pi$ 。

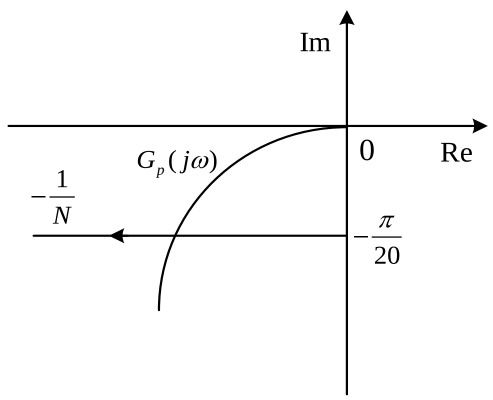
(a)

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\omega t_1}-\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega t+\frac{2}{\pi}\int_{\omega t_1}^{\pi}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega t\,,\\&=-\frac{4\sin\omega t_1}{\pi}=-\frac{4}{5\pi X}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_1&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\omega t_1}-\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega t+\frac{2}{\pi}\int_{\omega t_1}^{\pi}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega t\,,\\&=\frac{4\cos\omega t_1}{\pi}=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{0.2}{X}\right)^2}\end{aligned}$$

因此，$Y_1=\sqrt{A_1^2+B_1^2}=\dfrac{4}{\pi}\sqrt{\dfrac{1}{25X^2}+1-\dfrac{0.04}{X^2}}=\dfrac{4}{\pi}$，$\varphi_1=\arctan\dfrac{A_1}{B_1}=-\omega t_1=-\arcsin\dfrac{0.2}{X}$ 。

综上可知， $N=\dfrac{4}{\pi X}\left(\sqrt{1-\dfrac{0.04}{X^2}}-j\dfrac{0.2}{X}\right)$， $-\dfrac{1}{N}=-\dfrac{\pi}{4}\sqrt{X^2-0.04}-j\dfrac{\pi}{20}$ 。



由于 $G_o(j\omega)$ 穿越 $-\dfrac{1}{N}$，因此闭环系统不稳定，存在稳定的极限环。

(b) 交点处X为幅值， ω 为频率， $G_o(j\omega)=-\dfrac{1}{N}$ 。因此

$$\frac{4}{\pi X}\left(\sqrt{1-\frac{0.04}{X^2}}-j\frac{0.2}{X}\right)\cdot 5\frac{2}{j\omega\left(j\omega+1\right)}+1=0$$

进一步整理可得，$\dfrac{8}{\pi X}\sqrt{25-\dfrac{1}{X^2}}-\omega^2+j\left(\omega-\dfrac{8}{\pi X^2}\right)\dfrac{0.2}{X}=0$ 。令等式左边实部和虚部系数都等于0，可解得 $\omega=3.9095$， $X=0.8071$， $\mathrm{E}=\dfrac{X}{5}=0.1614$ 。

7.13 一阶系统微分方程为 $\dot{x}=-x+x^3$

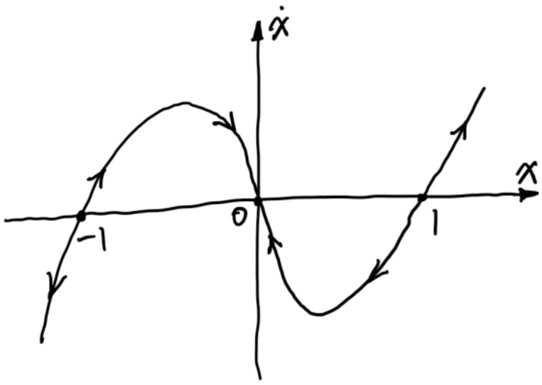
(a) 一阶系统微分方程本身就表示相轨迹。$\dot{x}=x(x-1)(x+1)$。

令 $x_1=x$，$x_2=\dot{x}=-x+x^3$，则

$$\dot{x}_1=\dot{x}=-x+x^3=-x_1+x_1^3$$
$$\dot{x}_2=\ddot{x}=-\dot{x}+3x^2\dot{x}=-x_2+3x_1^2x_2$$

由 $\dot{x}_1=0$，$\dot{x}_2=0$ 可得 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=-1\\x_2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=0\end{cases}$。

因此相轨迹在相平面上有三个奇点 $(0,0)$，$(1,0)$，$(-1,0)$。相轨迹如下图所示。

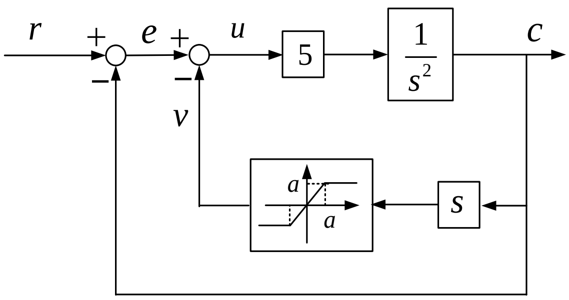


由相平面可知，当 $x(0)>1$ 或 $x(0)<-1$ 时，系统不稳定；当 $x(0)=\pm1$ 时，系统临界稳定；当 $-1<x(0)<1$ 时，系统稳定。

(b) 解微分方程 $\dot{x}=-x+x^3$ 得 $x=0$，$x=\pm1$ 或 $x=\pm\sqrt{\dfrac{-1}{e^{c+2t}-1}}$，其中 c 是与 $x(0)$ 有关的常数。由方程的解可知，$x=0$，$x=\pm1$ 是方程的三个平衡点。与相平面分析的结果相同。

对于 $x=\pm\sqrt{\dfrac{-1}{e^{c+2t}-1}}$，若 $x(0)>1$，则 $c<0$。因此存在某个 $t>0$，使得 $e^{c+2t}=1$，即 $x\to\infty$，因此 $x(0)>1$ 时，系统不稳定。同理可证 $x(0)<-1$ 时，系统不稳定。若 $-1<x(0)<1$，则 $x\to0$，因此 $-1<x(0)<1$ 时，系统稳定。该分析结果与相平面分析的结果相同。

7.18



(a) 当输入 $r=0$ 时，根据框图可知 $\ddot{c}=5u$，$\ddot{e}=-5u$，$v=e+\dfrac{1}{5}\ddot{e}$。由于

$$v=\begin{cases}-\dot{e}, & -a<\dot{e}<a\\ a, & \dot{e}<-a\\ -a, & \dot{e}>a\end{cases}$$ ，因此

$$e+\frac{1}{5}\ddot{e}=\begin{cases}-\dot{e}, & -1<\dot{e}<1\\ 1, & \dot{e}<-1\\ -1, & \dot{e}>1\end{cases}$$

当$\dot{e}<-1$时，$e+\frac{1}{5}\ddot{e}=1$。进一步可得$\frac{1}{10}\dot{e}^2=e-\frac{1}{2}e^2+c$，即$\frac{1}{10}\dot{e}^2+\frac{1}{2}\left(e-1\right)^2=c'$，此时相轨迹是以(1,0)为中心的椭圆的部分。

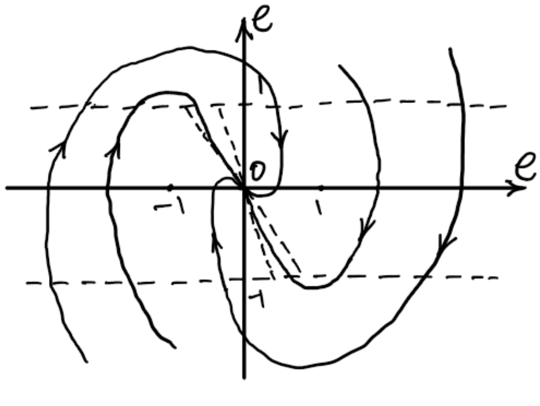
同理可得，当$\dot{e}>1$时，$\frac{1}{10}\dot{e}^2+\frac{1}{2}\left(e+1\right)^2=c''$，相轨迹是以(-1,0)为中心的椭圆的部分。

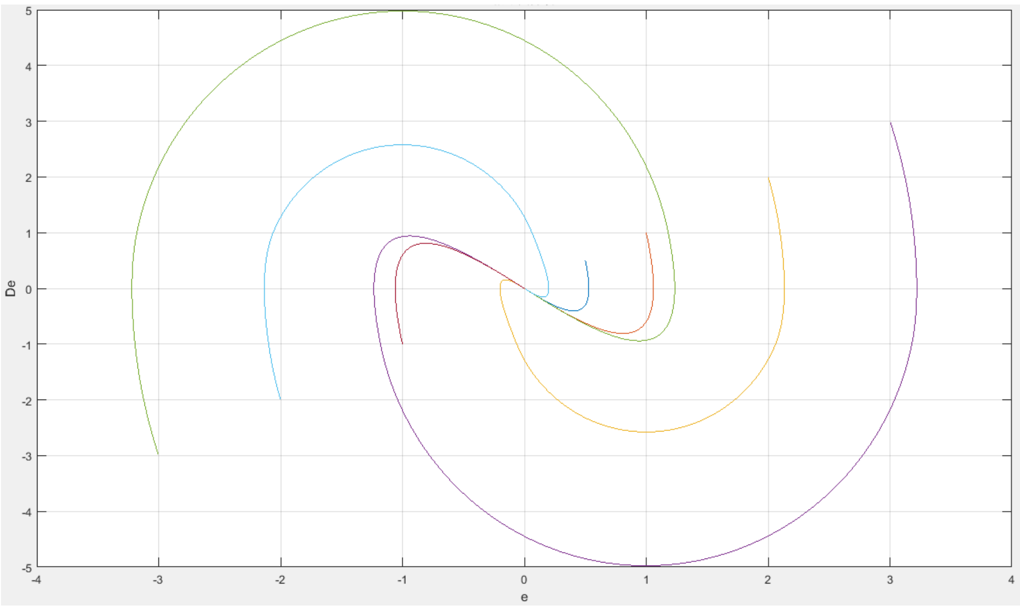
当$-1<\dot{e}<1$时，令$e_1=e$，$e_2=\dot{e}$，则

$$\dot{e}_1=\dot{e}$$
$$\dot{e}_2=\ddot{e}=-5\left(\dot{e}+e\right)$$

令$\dot{e}_1=\dot{e}_2=0$，解得$e_1=e_2=0$，则(0,0)为一奇点。该奇点对应的特征方程为$\lambda^2+5\lambda+5=0$，$\lambda=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$，因此(0,0)为一稳定节点。

综上所述，相轨迹为：





(b) 当输入 $r = Vt$ 时，由(1)中的分析可得

$$e + \frac{1}{5}\ddot{e} = \begin{cases} V - \dot{e}, & V - 1 < \dot{e} < V + 1 \\ 1, & \dot{e} < V - 1 \\ -1, & \dot{e} > V + 1 \end{cases}$$

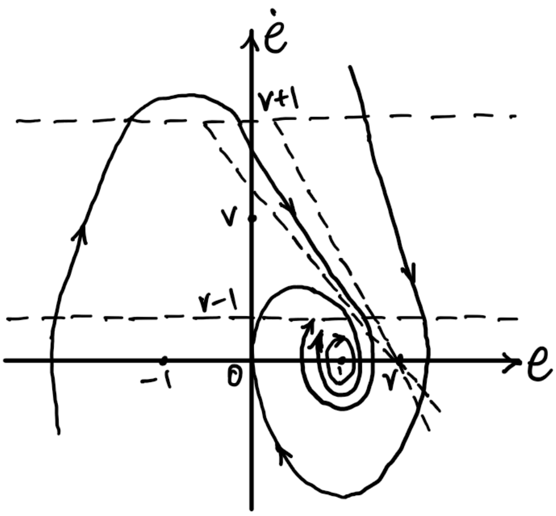
根据(1)作同样的分析，可得：

当 $\dot{e} < V - 1$ 时，$\frac{1}{10}\dot{e}^2 + \frac{1}{2}(e-1)^2 = c'$，此时相轨迹是以 $(1,0)$ 为中心的椭圆的部分。

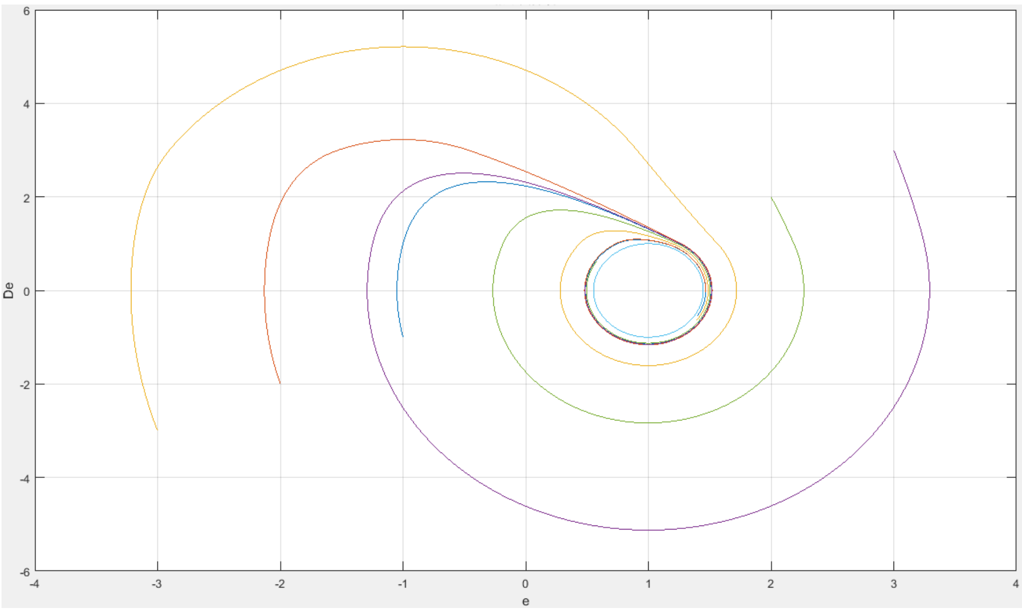
当 $\dot{e} > V + 1$ 时，$\frac{1}{10}\dot{e}^2 + \frac{1}{2}(e+1)^2 = c''$，相轨迹是以 $(-1,0)$ 为中心的椭圆的部分。

当 $V - 1 < \dot{e} < V + 1$ 时，$(V,0)$ 为一稳定节点。

$V \geq 1$ 时



$V = 2$ 时的相轨迹



$V \le -1$时与$V \ge 1$的相轨迹关于原点对称

$-1 < V < 1$时（以$V > 0$的情况为例）