《微积分A2》第二十九讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年05月27日

情形一：区间 $[0, 2\pi]$ 上函数的 Fourier 级数.

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上可积，记系数

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx dx, \quad \forall m \geq 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \quad \forall m \geq 1,$$

则称如下三角级数为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的(形式) Fourier 级数，并记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx), \ x \in [0, 2\pi].$$

定理: 假设 $f(x)$ 为区间 $[0,2\pi]$ 上的分段可微函数，则 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在 $[0,2\pi]$ 上处处收敛，且其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)], & x \in (0,2\pi), \\ \frac{1}{2}[f(0^+) + f(2\pi^-)], & x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

证明略.

例子

例: 求函数 $f(x)=x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数, 并求其 Fourier 级数的和函数.

解: 根据计算公式

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xdx=2\pi,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos kxdx$$

$$=\frac{1}{k\pi}x\sin kx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi}\sin kxdx=0,\quad \forall k\geq 1,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin kxdx=\frac{-1}{k\pi}x\cos kx\Big|_0^{2\pi}$$

$$+\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi}\cos kxdx=-\frac{2}{k},\quad \forall k\geq 1,$$

因此函数 x 在区间 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数为

$$x \sim \pi - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k}\sin kx, \quad x \in [0,2\pi].$$

根据收敛定理可知,

$$\pi - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k}\sin kx = \begin{cases} x, & x \in (0,2\pi), \\ \pi, & x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

回忆在学习级数理论时, 我们曾经证明了级数 $\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k}$ 收敛, $\forall x \in (0,2\pi)$. 现在我们可以得到其和函数

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in (0,2\pi).$$

解答完毕.

情形二：区间 $[-L, L]$ 上函数的 Fourier 级数.

设函数 $f(x)$ 在 $[-L, L]$ 上可积. 作变量代换 $x = \frac{Lt}{\pi}$ 或 $t = \frac{x\pi}{L}$, 并记 $g(t) = f(x) = f(\frac{Lt}{\pi})$, 则函数 $g(t)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的可积函数. 设

$$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt dt, \quad \forall n \geq 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt dt, \quad \forall n \geq 1.$$

换回变量 $x=\frac{Lt}{\pi}$ 或 $t=\frac{x\pi}{L}$，则得到 $f(x)$ 在区间 $[-L,L]$ 上的形式 Fourier 级数

$$f(x)=g(t)=g(\frac{\pi x}{L})\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\Big),$$

其中 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L}g(\frac{\pi x}{L})\cos\frac{n\pi x}{L}d\frac{\pi x}{L}$$
$$=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\quad \forall n\geq 0.$$

同理 $$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,dt=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ \forall n\geq 1.$$

对于区间 $[0, L]$ 上的可积函数，通常用奇延拓或偶延拓的方式，将 $f(x)$ 的定义区间从 $[0, L]$ 延拓至 $[-L, L]$.

偶延拓：对任意 $x \in [-L, 0)$，定义 $f(x) = f(-x)$. 延拓后的函数 $f(x)$ 为偶函数. 因此它有形式余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

其中

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \forall n \geq 0.$$

奇延拓: 对任意 $x \in [-L, 0)$，定义 $f(x) = -f(-x)$. 这样延拓后的函数 $f(x)$ 为奇函数(?). 因此它有形式正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

其中

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad \forall n \geq 1.$$

定理: 假设 $f(x)$ 为区间 $[-L, L]$ 上的分段可微函数, 则 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$$

在 $[-L, L]$ 上处处收敛, 且其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)], & x \in (-L, L), \\ \frac{1}{2}[f(-L^+) + f(L^-)], & x = \pm L. \end{cases}$$

例一：求函数 x 在区间 $[-1,1]$ 上的 Fourier 级数，并求其 Fourier 级数的和函数.

解：这个问题属于情形二，$L=1$. 由于 x 是奇函数，故它的余弦系数为零. 考虑它的正弦系数：

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}x\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

故所求 Fourier 级数为

$$x \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\pi x)}{n}, \quad x\in[-1,1].$$

由于函数 x 在区间 $[-1,1]$ 上分段可微，故根据收敛性定理可知，上述 Fourier 级数在区间 $[-1,1]$ 上处处收敛，且其和函数为

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\pi x)}{n}=\begin{cases} x, & x\in(-1,1), \\ 0, & x=\pm 1. \end{cases}$$

解答完毕.

例: 求函数 $f(x)=2-x,\ x\in[0,2]$ 以 4 为周期的余弦级数，并求这个余弦级数的和函数.

解: 将函数 $f(x)$ 作偶延拓至区间 $[-2,2]$，然后对延拓后的偶函数展为余弦级数. 延拓后的函数 $f(x)$ 可表为 $f(x)=2-|x|$，$x\in[-2,2]$，其正弦系数 $b_k=0,\ k\geq 1$. 以下来计算余弦系数:

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(2-x)dx=2;$$

$$a_k=\frac{2}{2}\int_0^2(2-x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx$$

$$= -\int_0^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \cdots = \frac{4[1-(-1)^k]}{(k\pi)^2}.$$

于是对 $\forall k \geq 1$,

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{8}{[(2k-1)\pi]^2}.$$

于是所求的余弦级数为

$$2 - x \sim 1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos[(2k-1)\pi x/2]}{(2k-1)^2}, \quad x \in [0,2].$$

例二续二

由于延拓后的函数 $f(x) = 2 - |x|$ 在区间 $[-2, 2]$ 上连续，分段可微，故根据收敛性定理可知，上述余弦级数在 $[-2, 2]$ 上处处收敛，且收敛于函数 $2 - |x|$. 特别

$$1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2k-1)\pi x/2]}{(2k-1)^2} = 2 - x, \qquad x \in [0, 2].$$

解答完毕.

(i) 法国数学家 **Du Bois Raymond** 举例说明，存在 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数，其 **Fourier** 级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 的一个稠密子集上发散(**1876**年)；

(ii) 俄国数学家 **Kolmogorov** 首次给出 **Lebesgue** 可积函数的例子，其 **Fourier** 级数几乎处处发散 (**1923**)，以及处处发散的例子 (**1926**)；

(iii) 瑞典数学家 **Carleson** 于 **1966** 年证明了 **Lebesgue** 平方可积函数的 **Fourier** 级数几乎处处收敛. 凭借这一重要成果，他荣获 **1992**年的 **Wolf** 奖.

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 于 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续. 设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

则对于 $\forall x\in[-\pi,\pi]$,

$$\int_0^x f(s)ds=\int_0^x\frac{a_0}{2}ds+\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x(a_k\cos ks+b_k\sin ks)ds,$$

即
$$\int_0^x f(s)ds=\frac{a_0x}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{a_k}{k}\sin kx+\frac{b_k}{k}(1-\cos kx)\right].$$

证: 令

$$F(x) \triangleq \int_0^x \left[f(s) - \frac{a_0}{2}\right] ds,$$

则 $F(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 分段可微, 且 $F(-\pi) = F(\pi)$, 因为

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(s) - \frac{a_0}{2}\right] ds$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds - \pi a_0 = 0.$$

由 Dirichlet 收敛定理可知, $F(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上, 处处收敛于 $F(x)$, 即

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

其中

$$A_k \triangleq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx dx, \quad \forall k \geq 0,$$

$$B_k \triangleq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx dx, \quad \forall k \geq 1.$$

以下计算系数 A_k 和 B_k:

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) d\sin kx$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left[F(x)\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\sin kx dx\right]$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right]\sin kx dx$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = -\frac{1}{k}b_k,$$

其中 $k \geq 1$. 同理可证 $B_k = \frac{1}{k}a_k$, $k \geq 1$. 考虑 A_0. 于收敛等式

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)$$

中, 令 $x = 0$ 得

$$0 = F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}A_k = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{k},$$

证明续三

即

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k}.$$

于是

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k(1 - \cos kx)}{k} \right]$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x (a_k\cos ks+b_k\sin ks)ds.$$

即 $$F(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x (a_k\cos ks+b_k\sin ks)ds.$$

亦即 $$\int_0^x f(s)ds=\frac{a_0x}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{a_k}{k}\sin kx+\frac{b_k}{k}(1-\cos kx)\right].$$

定理得证. $\square$

Theorem

定理：设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，$f(-\pi)=f(\pi)$，且其导数 $f'(x)$ 分段连续. 设

$$f(x)\sim(=)\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

则

$$\begin{aligned} f'(x) &\sim \left[\frac{a_0}{2}\right]'+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)' \\ &=\sum_{k=1}^{+\infty}(-ka_k\sin kx+kb_k\cos kx). \end{aligned}$$

证: 由假设 $f'(x)$ 分段连续, 故可积. 因此 $f'(x)$ 的 Fourier 级数存在. 设

$$f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k' \cos kx + b_k' \sin kx),$$

这里 a_0', a_k', b_k' 记 $f'(x)$ 的 Fourier 系数, 即

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}\Big[f(\pi) - f(-\pi)\Big] = 0,$$

$$a_k' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kxdx$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = kb_k,$$

$$b_k' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} f(x) \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$- \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = -ka_k.$$

这表明

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} (-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx).$$

定理得证. $\square$

<u>定理</u> **[Fejér 1900]:** 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 并设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

记

$$S_n(x) \triangleq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\sigma_n(x) \triangleq \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n+1}(x)}{n+1},$$

则在 $[-\pi, \pi]$ 上, 从而在 $\mathbb{R}$ 上, $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

<u>注</u>: Fejér 定理的证明不易, 这里从略. 证明可参见常庚哲史济怀的《数学分析教程》第三版下册, page 325.

Corollary

推论：每个 2π 周期连续函数可以被三角多项式一致逼近．也就是说，设 $f(x)$ 是任意一个以 2π 为周期的连续函数，那么对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在一个三角多项式 $T(x)$，使得 $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$，$\forall x \in \mathbb{R}$.

证：由 Fejér 定理知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N = N(\varepsilon)$，使得 $|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$，$\forall n \geq N$，$\forall x \in \mathbb{R}$．取三角多项式 $\sigma_N(x)$ 即可满足要求．证毕． $\square$

均方逼近问题

问题: 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积. 固定任意一个正整数 N, 问怎样的 N 次三角多项式

$$T_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

这里 $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, 可使得如下均方误差很小(最小)?

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x) - T_N(x)\Big]^2 dx \to \min.$$

Theorem

定理: 设 $S_N(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的前 $N+1$ 项部分和, 即

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中 a_0, a_k, b_k, $k \geq 1$, 为函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 则对任意 N 阶三角多项式 $T_N(x)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_N(x)]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T_N(x)]^2 dx.$$

换言之, 对于可积函数 $f(x)$ 而言, 在所有 N 阶三角多项式中, $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和 $S_N(x)$ 均方逼近 $f(x)$ 的效果最佳.

定理证明

证明: 定义均方差

$$\delta \triangleq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_N(x)]^2dx,$$

这里 δ 实际上是 $2N+1$ 个变元 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_N,\beta_N$ 的函数.

对 δ 作展开

$$\delta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f^2(x)-2f(x)T_N(x)+T_N^2(x)]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_N(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_N^2(x)dx$$

上式的第二项可写作

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_N(x)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right]dx$$

$$= \alpha_0 \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + 2\sum_{k=1}^{N}\left[\alpha_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx\right.$$

$$\left.+\beta_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx\right] = \alpha_0 a_0 + 2\sum_{k=1}^{N}[\alpha_k a_k + \beta_k b_k].$$

和式的第三项可写作

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_N^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}dx + \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha_0\alpha_k \cos kx + \alpha_0\beta_k \sin kx)dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right]^2 dx.$$

根据三角多项式的正交性可知

证明续三

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_N^2(x)dx=\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k^2+\beta_k^2).$$

综上得

$$\delta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\left[\alpha_0a_0+2\sum_{k=1}^{N}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)\right]$$

$$+\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k^2+\beta_k^2)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\frac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{k=1}^{N}\left[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right]$$

$$-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{N}(a_k^2+b_k^2).$$

观察上式，$\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$ 为变量，a_0, a_k, b_k 为函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数(常数). 由此可见，当 $\alpha_0 = a_0$，$\alpha_k = a_k$，$\beta_k = b_k$，$k = 1, \cdots, N$ 时，即取 $T_N(x) = S_N(x)$ 时，均方差

$$\delta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T_N(x)]^2 dx$$

取得最小值. 此时我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_N(x)]^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \frac{1}{2}a_0^2 - \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2).$$

命题得证. $\square$

Corollary

定理: 对任意 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数 $f(x)$, 成立如下不等式(称 Bessel 不等式)

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

证明: 在最佳均方逼近定理的证明过程, 对任意正整数 N, 我们得到如下等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_N(x)]^2dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{N}(a_k^2+b_k^2).$$

由此可见, 对任意正整数 N

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{N}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

令 $N\to+\infty$, 即得 Bessel 不等式. 推论得证. □

Corollary

推论: 设 a_0, a_k, b_k 是任意可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 则当 $k \to +\infty$ 时, $a_k \to 0$, $b_k \to 0$.

Proof.

证明: 根据 Bessel 不等式可知, 级数

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

收敛, 从而 $a_k^2 + b_k^2 \to 0$, $k \to +\infty$. 命题得证. □

根据 Bessel 不等式，如果三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是某个可积函数的 Fourier 级数，无论收敛与否，其由其系数所构成的级数

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

收敛．因此虽然如下两个三角级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{k}},\qquad \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\cos kx}{\ln k},$$

均收敛，但它们都不是任何可积函数的 Fourier 级数．

Theorem

<u>定理</u>: 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 记 $S_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx=0.$$

证明: 这里只证 $f(x)$ 是以 π 为周期的连续函数情形. 此时根据 Fejér 定理可知在 $[-\pi,\pi]$ 上, $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x)$, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in [-\pi,\pi],$$

其中 $\sigma_n(x)$ 是部分和序列 $\{S_k(x)\}$ 的前 $n+1$ 项的算术平均, 即

$$\sigma_n(x) \triangleq \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n+1}(x)}{n+1},$$

证明续

故 $\sigma_n(x)$ 也是至多 n 次三角多项式. 因此根据 Fourier 级数的最佳均方逼近定理可知, $\forall n \geq N$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - \sigma_n(x)]^2 < 2\pi\varepsilon^2,$$

定理得证. $\square$

Parseval 等式

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则如下等式成立

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx, \qquad (*)$$

其中 $\{a_0,a_k,b_k\}_{k\geq 1}$ 为函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

注: 等式 (*) 常称作 Parseval 等式. 将 Bessel 不等式中的不等号该为等号即是 Parseval 等式. 实际上 Bessel 不等式在更大的范围内成立, 而 Parseval 等式成立的范围相比而言较小.

Proof.

证: 之前已证

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-S_n(x)\Big]^2 dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

根据 Fourier 平方收敛性可知，上述等式左边当 $n\to+\infty$ 时的极限为零．这就证明 Parseval 等式成立． □

例: 之前已证

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{k^2},\quad \forall x\in[-\pi,\pi],$$

即函数 x^2 的 Fourier 系数为 $a_0=\frac{2\pi^2}{3}$, $a_k=\frac{4(-1)^k}{k^2}$, $b_k=0$. 于是由 Parseval 等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

我们得到

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2\pi^2}{3}\right]^2+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{4(-1)^k}{k^2}\right]^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)^2dx.$$

即

$$\frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{2\pi^4}{5}.$$

由此我们得到 Euler 于 1734 年所证明的公式

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

注: 对任意正整数 m, Euler 已证明级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}}$$

可以表示为 π^{2m} 的有理数倍数. 人们期待但至今无人能证明

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}\pi^3,$$

其中 p, q 均为正整数.

作业

习题7.2(page 314): 1, 2, 3.

第7章总复习题(page 314): 1, 2.

第5章总复习题(page 260-261):

1(1)(2)(3), 2(1), 6, 8(1)(3)(5)(7).

注: 题1(3) 中的等式右边似应加一个负号.