《微积分A1》第十五讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2020年11月02日

1. 极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x} =$ ______.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a>0$ 处可导，则极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \_\_\_\_\_\_.$$

3. 极限 $\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}} =$ ______.

4. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 的无穷小的阶为 ______.

5. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的间断点类型为 ______.

6. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^x}{x}, & x\neq 0,\\ -1, & x=0,\end{cases}$$

则 $f'(0)=$ ______.

7. 设函数 $f(u)$ 可导，且函数 $y=f(\sin x)$ 存在可导的反函数 $x=x(y)$，则反函数的导数 $\frac{dx}{dy}=$ ______.

8. 函数 $y = e^{\sin(2x+1)}$ 的微分为 $dy =$ ______.

9. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $x = t + \sin t$, $y = t - \cos t$ 确定，则函数 $y(x)$ 的微分为 $dy =$ ______.

10. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$，则 $f'(0) =$ ______.

11. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$，则 $f'(x)$ 在开区间 $(0,2)$ 上有且仅有 ______ 个零点.

12. 设 $f(x)$ 可导．若 $\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$，则 $f'(x) = $ ________.

13.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{4x-3}\sin\frac{1}{x+1} = \_\_\_\_\_\_.$$

14.
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+4\sqrt{n}} - \sqrt{n-2\sqrt{n}}\right) = \_\_\_\_\_\_.$$

15.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2} = \_\_\_\_\_\_.$$

16.

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \underline{\qquad\qquad}.$$

17. 设 $f(x)\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^x-1}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\underline{\qquad\quad}$.

18.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \underline{\qquad\qquad}.$$

19. 若函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ 1, & x\leq 0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续，则 $a=\underline{\qquad\qquad}$.

填空题，续五

20. 设 $f(x) = x^{\sin x}$，则 $f'(\pi) =$ ________.

21. 设 $y = e^{-3x}\sin(2x)$，则 $dy =$ ________.

22. 函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 在点 $x = 0$ 处带有 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展式为 ________.

23. 设 $f(x) = x^2e^x$，则 $f^{(10)}(x) =$ ________.

24. 设 $f(x) = x^6|x|$ 在 $x = 0$ 处存在最高阶导数的阶数为

________.

25. 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域上有定义. 若极限

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0 - \delta) - f(x_0)}{\sin \delta}$$

存在，那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，________ (填是或否).

1. 设二阶可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x+y)=x-y$ 确定，求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to+\infty}a_{2n}=a$，$\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=b$，求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

3. 求极限

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3}.$$

4. 设 $y=2x+\sin x$，求其反函数 $x=x(y)$ 的二阶导数 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

5. 设

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{xe^{(1-x)t}+x^{2t}}{e^{(1-x)t}+x^{2t+1}},\quad x\in[0,+\infty),$$

求函数 $f(x)$ 的表达式，讨论 $f(x)$ 的连续性和可微性，并在可微点处计算其导函数.

6. 设函数 $y=f(x)$ 为三次可导，并且 $f'(x)\neq 0$，其反函数记作 $x=g(y)$. 试用函数 $f(x)$ 的前三阶导数来表示反函数 $g(y)$ 的前三阶导数. (课本第89页第三章总复习题题15)

1. 中间点的极限位置(课本第125 页第4 章总复习题题10). 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导且 $f''(x)\neq 0$, $\forall x\in(-1,1)$. 证明

(1) 对 $\forall x\in(-1,1)$, 存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$, 使得

$$f(x)=f(0)+f'(\theta(x)x)x;$$

(2) $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

推广: 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内 $n+1$ 阶可导, 且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$, $\forall x\in(-1,1)$, 则(1)对 $\forall x\in(-1,1)$, 存在唯一 $\theta(x)\in(0,1)$, 使得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}f^n(\theta(x)x)x^n$. (2) $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{n+1}$.

证明题，续一

2. 设 $f(x)$ 于闭区间 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，且 $f(x)$ 不恒等于 x. 证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)>1$.

3. 设 $a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{1+2a_n}{1+a_n}$，$\forall n\geq 1$. 证明极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在，并求出极限值.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(1)>0$，极限 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$ 存在且小于零. 求证方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0=f(1)$. 进一步假设 $\min\{f(x), x\in[0,1]\}=-1$. 证明存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f''(\xi)\geq 8$. (课本第 125 页第 4 章总复习题题11)

6. 证明不等式 $4x\ln x \geq x^2+2x-3$, $\forall x\in(0,2)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 上二阶可导，且 $f(a)=0=f(b)$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，证明下列结论：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)+2f'(\xi)+f(\xi)=0$;

(2) 存在 $\theta\in(a,b)$，使得 $f''(\theta)+2f'(\theta)+f(\theta)=0$;

(3) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f''(\eta)=f'(\eta)$;

(4) 存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $f''(\zeta)=f(\zeta)$.

注：这是课本第95页第14题