微积分 A(2)期末试题答案(A 卷)

2017 年 6 月 13 日　上午 8:00-10:00

一．**填空题**（每空 3 分，共 15 题）（**请将答案直接填写在横线上！**）

1．向量值函数 $\vec{F}=(xy,e^{yz},\sin(zx))$ 的梯度 $div\vec{F}=$______________。$y+ze^{yz}+x\cos(zx)$

2．向量值函数 $\vec{F}=(1-y^2,x-2z,yz)$ 的旋度 $rot\ \vec{F}=$________________。$(z+2,0,2y+1)$

3．交换积分次序：$\int_0^1 dx\int_0^2 f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{\log_2 x}^2 f(x,y)dy$ =_____________。$\int_0^2 dy\int_0^{2^y} f(x,y)dx$

4．由曲线 $x+y=1,x+y=2,x-2y=0,x-2y=3$ 围成的区域面积为___________。1

5．设 Ω 为单位球 $x^2+y^2+z^2\le 1$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}[x^2+\sin(y^3e^{z^2})]dV$ =_______。$\frac{4\pi}{15}$

6．设 L 是由点 $A(-1,0)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段，则 $I=\int_L (x+2y)\,dl=$_____________。$4\sqrt{2}$

7．设 S 为平面 $x+y+z=1$ 包含在第一卦限中的部分，则 $\iint\limits_S\frac{dS}{(1+x+y)^2}$ =_________。

$\sqrt{3}(\ln 2-1/2)$

8．全微分方程 $\left(3x^2+2xy^3\right)dx+\left(3x^2y^2-2y\right)dy=0$ 的通解为____________________。

$x^3+x^2y^3-y^2=C$

9．求级数的和：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ =_______________________。1/2

10．判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{n^{-2}}-1)$ 的敛散性：________________。（填收敛或发散）。收敛

11．$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{(2n-1)}$ 的收敛域为_____________。$[-1,1)$

12．$\int_0^x\cos t^2 dt$ 在 $x_0=0$ 处的 Taylor 级数为____________________。$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)\cdot(2n)!}$

13．将 e^x 在区间 $(-1,1)$ 上的函数展成周期为 2 的 Fourier 级数，记 $S(x)$ 为此级数的和函数，则 $S(5)=$_____________。$\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})$

14. 将函数 $f(x)=x^2,\ x\in[0,\pi]$，展开成周期为 2π 的正弦级数：$\sum_{k=1}^{+\infty} b_n \sin nx$，则 $b_2=$

________________。$-\pi$

15. 设 L^+ 为有向曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+z=0 \end{cases}$，从 z 轴正向看去，逆时针方向为正方向。则第二类曲线积分 $\int_{L^+} 2z\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y+(x+2y)\mathrm{d}z=$ ______________。（$\sqrt{2}\pi$）

二．**计算题**（每题 10 分，共 4 题）（**请写出详细的计算过程和必要的根据！**）

1. 设 $\Omega=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 9, y-3\le z\le 0\}$，曲面 S^+ 是 Ω 的外表面，取外侧为正侧。试计算曲面积分 $I=\oiint_{S^+} yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+2y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

解：应用 Gauss 公式，

$$I=\iiint_\Omega 4y\,dV \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 9} dxdy\int_{y-3}^{0} 4y\,dz \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 9}(12y-4y^2)dxdy=-81\pi \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

2. 求 $f(x)=\ln(x^2-8x+20)$ 在 $x_0=4$ 点处的 Taylor 级数，并求其收敛半径与收敛域.

解：$f(x)=\ln(x^2-8x+20)=\ln[4+(x-4)^2]=\ln 4+\ln[1+(\frac{x-4}{2})^2]$ ……3 分

$$=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n}}{n2^{2n}} \qquad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

收敛半径 $R=2$，收敛域为区间 $[2,6]$ …………2 分

3. 设 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上连续，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{1}{2\pi}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ ,$$

求 $f(x,y)$.

解：记 $C=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则有

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{C}{2\pi} \qquad (*) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 1 \text{分}$$

注意D的面积为π，对（*）式两端在D上积分得

$$C=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{C}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2 \text{分}$$

D可以表示为$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ |\theta|\le\pi$，于是 ……………2 分

$$C=2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4 \text{分}$$

代入（*）式即得$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\dfrac{2}{3}$ ……………1 分

4. 设$f\in C^1(\mathbb{R})$，$f(0)=0$，且曲线积分$\int_{L^+} y[\mathrm{e}^x+2f(x)]\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$在$\mathbb{R}^2$上与路径无关。

(1) 求函数$f(x)$；

(2) 若L是从点$A(0,0)$到点$B(1,1)$的光滑有向曲线，求$I=\int_{L^+} y[\mathrm{e}^x+2f(x)]\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$。

解：(1) 由于曲线积分在$\mathbb{R}^2$上与路径无关，从而$y[\mathrm{e}^x+2f(x)]dx-f(x)dy$是全微分，故有

$$f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3 \text{分}$$

此方程的通解为 $f(x)=C\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x$， ………………………………2 分

而$f(0)=0$，从而$C=\dfrac{1}{3}$，$f(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x$。 ………………………………1 分

(2) 由(1)进而得

$$y[\mathrm{e}^x+2f(x)]dx-f(x)dy=\frac{1}{3}y(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-2x})dx+\frac{1}{3}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-2x})dy$$

$$=d[\frac{y}{3}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-2x})]。 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2 \text{分}$$

$$\therefore \qquad I=\int_L y[\mathrm{e}^x+2f(x)]dx-f(x)dy=\frac{y}{3}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-2x})\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{3}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-2}) \qquad \cdots\cdots 2 \text{分}$$

三. **证明题（请写出详细的证明过程!）**

1（8 分）设数列$\{a_n\}$单调下降且级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}$收敛，求证：级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛。

证明：由a_n单调下降且级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}=A$收敛可得，$\{a_{2n-1}\}$非负且收敛于$0$。于是$\{a_n\}$非负，

并且$\forall n\ge 1$，$0\le\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\le\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}\le A$，进而得

$$0\le\sum_{k=1}^{n}a_k\le 2A,\qquad \forall n\ge 1\quad。$$

所以（非负项）级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛。

2.（7 分）设$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，$f\in C^1(D)$，且$f(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in\partial D$。

求证：（1）$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（2）$|\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y|\le\frac{2\pi}{3}\max\limits_{(x,y)\in D}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}$ 。

证明：（1）
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$
$$=\int_0^2\left(yf(x,y)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}-\int_0^{\sqrt{4-x^2}}yf'_y(x,y)dy\right)dx$$
$$=-\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}yf'_y(x,y)dy=-\iint_D yf'_y(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$ ……………4 分

（2）与（1）同理可得，
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D xf'_x(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

$\therefore$
$$|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y|=\frac{1}{2}|\iint_D[xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y|$$
$$\le\frac{1}{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{[f'_x(x,y)]^2+[f'_y(x,y)]^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\le\frac{1}{2}\max_{(x,y)\in D}\sqrt{[f'_x(x,y)]^2+[f'_y(x,y)]^2}\cdot\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2\pi}{3}\max_{(x,y)\in D}\sqrt{[f'_x(x,y)]^2+[f'_y(x,y)]^2}\quad。$$ ……………3 分