微积分A2第十三次习题课讨论题参考解答　　　　　　　杨利军　June 01-06, 2020

讨论题涉及以下两个方面的内容

一． Taylor 级数展开(幂级数展开)

二． Fourier 级数展开

一． Taylor 级数展开

注1．将一个(解析)函数展为 Taylor 级数(幂级数), 最常用最方便的方法是对某个已知函数的 Taylor 级数, 经过逐项求导或逐项积分, 来得到所求的 Taylor 级数. 很少情形下是通过直接计算函数的导数来求得 Taylor 级数, 除非各阶导数的计算很简单.

注2．应牢记几个基本函数的 Taylor 级数的展开式, 如 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ 等的 Maclaurin 展式. 见课本第287页例6.3.6.

1. 设函数 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 的 Maclaurin 展式.

解: 关于熟知的展式

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3+\cdots,\quad \forall x\in(-1,1)$$

两边求导得

$$\frac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k x^{k-1}=-1+2x-3x^2+4x^3-\cdots,\quad \forall x\in(-1,1).$$

由此得所求函数的 Maclaurin 展式

$$\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1} k x^{k-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k (k+1) x^k$$

$$=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots,\quad \forall x\in(-1,1).$$

解答完毕.

2. 设 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$. 求导数 $f^{(101)}(0)$.

解: 我们将通过求出函数 $f(x)$ 的 Maclaurin 展式来求得导数 $f^{(101)}(0)$. 根据熟知的展式

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u^k = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots, \quad |u| < 1,$$

可得

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{3k} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots, \quad |x| < 1,$$

由此得 $f(x)$ 的 Maclaurin 展式

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3} = x^2\Big[\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{3k}\Big] = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{3k+2}.$$

上述展式中, 项 x^{101} 的系数为 $(-1)^{33} = -1$. 因此

$$\frac{f^{(101)}(0)}{101!} = -1.$$

这表明所求导数为 $f^{(101)}(0) = -101!$. 解答完毕.

3. 求函数 $f(x) = \frac{x-1}{(1+x)^2}$ 在 $x = 1$ 处的 Taylor 展式, 并求其收敛域.

解：先求函数 $\frac{1}{1+x}$ 在点 $x = 1$ 处的 Taylor 展式. 将函数 $\frac{1}{1+x}$ 表示为

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\right].$$

再将方括弧里的函数按熟知的展式 $\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u^k$ 展开, 即

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{x-1}{2}\right]^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-1)^k.$$

显然上述幂级数的收敛半径为 2. 于是

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-1)^k, \quad |x-1| < 2.$$

对上述等式两边求导得

$$\frac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k k}{2^{k+1}}(x-1)^{k-1},\quad |x-1|<2.$$

于上式两边乘以 $(-1)(x-1)$ 得函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的 Taylor 展式

$$f(x)=\frac{x-1}{(1+x)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{2^{k+1}}(x-1)^k,\quad |x-1|<2. \tag{1}$$

上述 Taylor 展式的收敛半径仍然是 2. 故 Taylor 展式在开区间 $(1-2,1+2)=(-1,3)$ 处处收敛. 显然在端点 $x=-1$ 处, Taylor 级数为 $\sum_{k=1}^{+\infty}-k$, 发散; 在点 $x=3$ 处, Taylor 级数为 $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}k$, 也发散. 因此 Taylor 级数的收敛域为 $(-1,3)$. 解答完毕.

4. 求函数 $f(x)=xe^x$ 在 $x=1$ 处的 Taylor 展式.

解：为求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的幂级数, 我们将函数 $f(x)$ 表为

$$f(x)=xe^x=e(x-1+1)e^{x-1}=e(x-1)e^{x-1}+ee^{x-1}$$

再根据函数 e^u 的Maclaurin 展式 $e^u=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u^k}{k!}$ 可知

$$\begin{aligned}
f(x)&=e(x-1)e^{x-1}+ee^{x-1}\\
&=e(x-1)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^k}{k!}+e\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^k}{k!}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e(x-1)^{k+1}}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e(x-1)^k}{k!}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e(k+1)}{k!}(x-1)^k,\quad \forall x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

于是我们得到函数 $f(x)=xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展式如下

$$xe^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e(k+1)}{k!}(x-1)^k,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

解答完毕.

5. 求函数 $f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 的 Maclaurin 展式.

解：直接展开函数 $f(x)$ 不容易. 考虑其导数 $f'(x)$. 简单计算得

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}.$$

将导函数 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处作 Taylor 级数展开得

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}2(-1)^k x^{2k},\quad |x|<1.$$

再对上式两边积分, 并注意到 $f(0)=0$, 我们就得到所要求的 Maclaurin 展式

$$f(x)=\int_0^x\frac{2du}{1+u^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1},\quad |x|<1.$$

解答完毕.

二． Fourier 级数

注：Fourier 级数理论是一个很大数学领域, 通常称为调和分析. 同学们在本课程学习 Fourier 级数只需达到两个基本要求: (i) 写出给定函数的 Fourier 级数; (ii) 根据 Dirichlet 收敛定理(即课本第308页定理7.2.4), 确定 Fourier 级数的收敛情况.

1．求函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 这里函数 $f(x)$ 定义如下

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\pi,0],\\ x, & x\in[0,\pi).\end{cases}$$

解：计算函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\cdots=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx = \cdots = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

于是所求 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}.$$

解答完毕.

2. 证明如下等式

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi) \tag{2}$$

证明: 为证明等式(2), 考虑函数 $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上 Fourier 级数. 由于 $f(x)$ 是偶函数. 因此它的正弦系数 $b_n = 0, \forall n \geq 1$. 以下计算余弦系数 a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\Big]dx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi^3}{6} - 2\frac{\pi^3}{12}\Big] = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\Big]\cos nxdx = \cdots = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

因此

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}.$$

由于函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上连续可微, 故由 Dirichlet 收敛定理可知

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$$

即等式(2)成立. 证毕.

3. 设函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上的正弦级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$, 其和函数记作 $S(x)$. 求 $S(-\frac{1}{2})$ 的值.

解: 由于正弦级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$ 是对函数 $f(x)$ 作奇延拓后的 Fourier 级数, 根据 Dirichlet 收敛定理知, $S(-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, 解答完毕.

4． 将函数 $f(x)=x^2, x\in(0,\pi)$.

(1) 将函数 $f(x)$ 展为余弦级数, 并且在区间 $[0,\pi]$ 上求余弦级数的和函数；

(2) 将函数 $f(x)$ 展为正弦级数, 并且在区间 $[0,\pi]$ 上求正弦级数的和函数.

解: (1)对 $f(x)$ 作偶延拓, 则正弦系数 $b_n=0, \forall n\geq 1$. 往下计算余弦系数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2dx=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nxdx=\cdots=\frac{4(-1)^n}{n^2};\quad \forall n\geq 1$$

于是所求的余弦级数为

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in[0,\pi]. \tag{3}$$

由于偶延拓后的函数 $f(x)$ 满足 $f(-\pi)=f(\pi)$, 且 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上连续可微, 故由 Dirichlet 收敛定理可知, 余弦级数(3)的和函数 $S(x)=x^2, x\in[0,\pi]$.

(2) 对函数 $f(x)$ 作奇延拓, 故它的余弦系数 $a_n=0, \forall n\geq 0$. 以下计算正弦系数.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nxdx=\cdots=\frac{2\pi(-1)^{n-1}}{n}+\frac{4[(-1)^n-1]}{n^3\pi},\quad \forall n\geq 1$$

所求的正弦级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{2\pi(-1)^{n-1}}{n}+\frac{4[(-1)^n-1]}{n^3\pi}\right\}\sin nx,\quad x\in[0,\pi].$$

由于偶延拓后的函数 $f(x)$ 满足 $f(-\pi)=-f(\pi)$, 故 $S(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi)+f(\pi)]=0$. 而函数 $f(x)$ 在其他点 $x\in[0,\pi)$ 均连续可微, 根据 Dirichlet 收敛定理可知, 上述正弦级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leq x<\pi, \\ 0, & x=\pi. \end{cases}$$

解答完毕.

5．求符号函数

$$sgn(x)=\begin{cases} -1, & x\in(-\pi,0), \\ 0, & x=0, \\ 1, & x\in(0,\pi) \end{cases}$$

在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 级数.

解：由于函数 $sgn(x)$ 是奇函数, 故它的余弦系数 $a_n=0$, $n\geq 0$. 现计算它的正弦系数

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi},\quad \forall n\geq 1.$$

由此可见 $b_{2n}=0$, $b_{2n-1}=\frac{4}{(2n-1)\pi}$, $\forall n\geq 1$. 至此得到函数 $sgn(x)$ 的 Fourier 级数

$$sgn(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

注：将自变量 x 换为 $\frac{\pi x}{L}$ (自变量伸缩), 即可得到符号函数 $sgn(x)$ 在一般区间对称区间 $(-L,L)$ 上的 Fourier 级数

$$sgn(x)\sim\frac{4}{L}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{L},\quad x\in(-L,L).$$

解答完毕.