习题6.1

2、解：以下每题中分别用A、B、C表示函数项级数的收敛域、绝对收敛范围、条件收敛范围

(1) 当 $x\in(-\infty,0]$ 时，

$n\cdot e^{-nx}\geq n$. 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot e^{-nx}$ 发散.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，

$0<e^{-x}<1$，$\lim\limits_{n\to 0}e^{-nx}=0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot e^{-nx}=e^{-x}+2\cdot e^{-2x}+3\cdot e^{-3x}+\cdots\cdots$$

$$=(e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots\cdots)$$

$$+(e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots\cdots)$$

$$+(e^{-3x}+\cdots\cdots)$$

$$\vdots$$

$$=e^{-x}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}}+$$

$$e^{-2x}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}}+$$

$$e^{-3x}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}}+$$

$$\vdots$$

$$=\frac{1}{1-e^{-x}}(e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{e^{x}-2+e^{-x}}.$$

因此 $A=B=(0,+\infty)$，$C=\phi$.

(3) 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{x})^n=\infty$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{x})^n$ 发散.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，

设 $S_m(x)=\sum\limits_{n=1}^{m}(\frac{n+1}{x})^n$，取正整数 $M\geq|x|=-x$.

则对 $\forall m\geq M$，有

$$S_{2m+2}(x)-S_{2m}(x)=\left(\frac{2m+3}{x}\right)^{2m+2}+\left(\frac{2m+2}{x}\right)^{2m+1}$$

$$=\frac{(2m+3)^{2m+2}}{|x|^{2m+2}}-\frac{(2m+2)^{2m+1}}{|x|^{2m+1}}=\frac{(2m+3)^{2m+2}-|x|\cdot(2m+2)^{2m+1}}{|x|^{2m+2}}\quad(\because 2m+3> \quad >|$$

$$>\frac{(2m+3)^{2m+1}-(2m+2)^{2m+1}}{|x|^{2m+1}}>\frac{(2m+2)^{2m+1}\cdot C_{2m+1}^{1}}{|x|^{2m+1}}>\frac{(2M)^{2m+1}}{|x|^{2m+1}}\geq 2^{2m+1}.$$

这说明 $S_{2m+2}-S_{2m}(x)>0$，且 $\lim\limits_{m\to\infty}(S_{2m+2}(x)-S_{2m}(x))=\infty$

故 $\forall m\geq M$，有

$$S_{2m+2}(x)=(S_{2m+2}(x)-S_{2m}(x))+(S_{2m}(x)-S_{2m-2}(x))+\cdots+(S_{2M+2}(x)$$
$$-S_{2M}(x))+S_{2M}(x)$$
$$>(S_{2m+2}(x)-S_{2m}(x))+S_{2M}(x)$$

其中 $S_{2M}(x)$ 为定值，故 $\lim\limits_{m\to+\infty}S_{2m+2}(x)=+\infty$.

同理可证 $\forall m\geq M$，有

$S_{2m+1}(x)-S_{2m-1}(x)<0$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty}(S_{2m+1}(x)-S_{2m-1}(x))=-\infty$.

故 $\forall m\geq M$，有

$$S_{2m+1}(x)=(S_{2m+1}(x)-S_{2m-1}(x))+(S_{2m-1}(x)-S_{2m-3}(x))+\cdots+$$
$$(S_{2M+1}(x)-S_{2M-1}(x))+S_{2M-1}(x)$$
$$<(S_{2m+1}(x)-S_{2m-1}(x))+S_{2M-1}(x)$$

其中 $S_{2M-1}(x)$ 为定值，故 $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m+1}(x)=-\infty$.

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{x})^n=\lim\limits_{m\to\infty}S_m(x)$ 不存在.

综上可知 $A=B=C=\phi$.

(5) 当 $x\in(-1,1]$ 时.

$\frac{1}{1+x^n}>\frac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$ 发散.

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(+1,+\infty)$ 时，

因 $\lim\limits_{n\to+\infty}|x|^n=+\infty$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n\geq N$，$|x|^n>2$，即 $\frac{|x|^n}{2}>1$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{1+x^n}+\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}.$$

$$\left|\frac{1}{1+x^n}\right|\leq\frac{1}{|x|^n-1}<\frac{1}{|x|^n-\frac{|x|^n}{2}}=\frac{2}{|x|^n},\ \forall n\geq N.$$

而 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\frac{2}{|x|^n}=\frac{2}{|x|^N(1-\frac{1}{|x|})}$ 收敛.

故 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$ 绝对收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$ 绝对收敛.

因此 $A=B=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，$C=\phi$.

(7) 当 $x\in(-1,1]$ 时，($x\neq-1$，$x=-1$ 会使 $\frac{1}{n+x^n}$ 在 $n=1$ 时无意义)

对 $\forall n\geq2$，$\frac{1}{n+x^n}>\frac{1}{n-1}$，$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x^n}=\frac{1}{1+x}+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+x^n}$ 发散.

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，

因 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|x|^n}{n}=+\infty$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n\geq N$，$\frac{|x|^n}{n}>2$，即 $\frac{|x|^n}{2}>n$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x^n}=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+x^n}+\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{n+x^n}.$$

$$\left|\frac{1}{n+x^n}\right|\leq\frac{1}{|x|^n-n}<\frac{1}{|x|^n-\frac{|x|^n}{2}}=\frac{2}{|x|^n},\ \forall n\geq N.$$

而 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\frac{2}{|x|^n}=\frac{2}{|x|^N(1-\frac{1}{|x|})}$ 收敛.

故 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{n+x^n}$ 绝对收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x^n}$ 绝对收敛.

因此 $A=B=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，$C=\phi$.

(9). 对 $\forall x\in\mathbb{R}$，

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}=-\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+(2k-1)}-\frac{1}{x^2+2k}\right)=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+2k-1)(x^2+2k)}$$

对 $\forall k\in\mathbb{N}$，$\left|\frac{1}{(x^2+2k-1)(x^2+2k)}\right|\leq\frac{1}{(x^2+k)(x^2+k+1)}$.

而 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+k)(x^2+k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+k}-\frac{1}{x^2+k+1}\right)=\frac{1}{x^2+1}$ 收敛.

故 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+2k-1)(x^2+2k)}$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 收敛.

另一方面，对 $\forall x\in\mathbb{R}$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$N\geq x^2$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x^2}\geq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+N}=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n}.$$

因 $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right|$ 发散.

综上所述，$A=C=\mathbb{R}$，$B=\phi$.

3.（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2}$ 的收敛域为 $\mathbb{R}$.

因为总有 $\left|\frac{1-\cos nx}{n^2}\right|\leq\frac{2}{n^2}$ 与 x 无关.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2-\frac{1}{4}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)=4$ 收敛.

故由 Weierstrass 判别法知

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2}$ 在收敛域上一致收敛.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}x^3e^{-nx^2}$ 的收敛域为 $\mathbb{R}$，事实上易求和函数为 0（$x=0$ 时）或 $\frac{x^3}{e^{x^2}-1}$（$x\neq0$ 时）.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{2e\varepsilon^2}\right]+1\in\mathbb{N}^+$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}^+$，$\forall x\in\mathbb{R}$，有

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}x^3e^{-ix^2}\right|=\left|x^3\cdot e^{-(n+1)x^2}\cdot\sum_{i=0}^{p-1}e^{-ix^2}\right|=|x^3|\cdot e^{-(n+1)x^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{e^{px^2}}}{1-\frac{1}{e^{x^2}}}<\frac{|x^3|}{e^{nx^2}\cdot(e^{x^2}-1)}=\frac{x^3}{e^{nx^2}(e^{x^2}-1)}$$（不妨设 $x>0$）

由于 $\frac{1}{e^{x^2}-1}\leq\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq0$，该式通过求导不难验证在 $x>0$ 时成立.

故 $\frac{x^3}{e^{nx^2}(e^{x^2}-1)}\leq\frac{x^3}{e^{nx^2}\cdot x^2}=\frac{x}{e^{nx^2}}$，该式通过求导可知 $x>0$ 时，$x=\frac{1}{\sqrt{2n}}$ 取到最大值.

因此 $\frac{x}{e^{nx^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{2n}\cdot e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2en}}<\frac{1}{\sqrt{2eN}}<\frac{1}{\sqrt{2e\cdot\frac{1}{2e\varepsilon^2}}}=\varepsilon$.

以上证明了 $\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}x^3e^{-ix^2}\right|<\varepsilon$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}x^3e^{-nx^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

~~另一个办法：令 $\frac{1}{n}$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 单调且在 $\mathbb{R}$ 上一致趋于 0~~ （另有 6-1 节 PPT 第 22 页的 Weierstrass 判别法）

（5）$\left|\frac{\cos nx+\sin n^x}{n^{1.001}}\right|\leq\frac{|\cos nx|+|\sin n^x|}{n^{1.001}}\leq\frac{2}{n^{1.001}}$.

而在收敛域 I 上，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{1.001}}<\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{2}{x^{1.001}}dx=\int_{1}^{\infty}\frac{2}{x^{1.001}}dx=-2000\cdot x^{-0.001}\Big|_{x=1}^{x=\infty}=2000$.

故由 Weierstrass 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin n^x}{n^{1.001}}$ 在收敛域上一致收敛.

6. 解：$x\in[0,1]$时，$x^{n-1}(x-1)^2=\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdot\overbrace{\frac{x}{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{x}{\frac{n-1}{2}}\cdot\dots\cdot\frac{x}{\frac{n-1}{2}}}^{n-1个}\cdot(1-x)\cdot(1-x)$

$$\le\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left[\frac{\frac{x}{\frac{n-1}{2}}+\frac{x}{\frac{n-1}{2}}+\cdots+\frac{x}{\frac{n-1}{2}}+(1-x)+(1-x)}{n+1}\right]^{n+1}=\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}=4\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^2<\frac{4}{(n+1)^2}.$$

而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n+1)^2}<\sum\limits_{n=2}^{\infty}\cancel{\frac{4}{(n+1)(n+2)}}\frac{4}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2$，即$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n+1)^2}$收敛.

故由Weierstrass判别法可知$\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-1}(x-1)^2$在$x\in[0,1]$上一致收敛.

9. 证明：对$\forall\varepsilon>0$，因为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，由Cauchy收敛准则，$\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，对$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}^+$，有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

~~设 $A=\{i\mid i\in\{n+1,\dots,n+p\}$，且$a_i\ge0\}$，$B=\{i\mid i\in\{n+1,\dots,n+p\}$，且$a_i<0\}$，$A\cup B=\{n+1,\dots,n+p\}$，$A\cap B=\varnothing$~~

~~不妨设 $\sum\limits_{i\in A}a_i+\sum\limits_{i\in B}a_i=\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}a_i\ge0$，则 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|=a$~~

设$S_i=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_i$，$S_n=0$，则对$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}^+$，有$|S_{n+p}|<\varepsilon$.

故$\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，对$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}^+$，$x\in[0,+\infty)$，有

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_ie^{-ix}\right|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}(S_i-S_{i-1})\cdot e^{-ix}\right|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}S_ie^{-ix}-\sum_{i=n+1}^{n+p}S_{i-1}e^{-ix}\right|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}S_ie^{-ix}-\sum_{i=n+1}^{n+p-1}S_ie^{-(i+1)x}\right|$$

$$=\left|S_{n+p}e^{-(n+p)x}+\sum_{i=n+1}^{n+p-1}S_i(e^{-ix}-e^{-(i+1)x})\right|\le\left|S_{n+p}e^{-(n+p)x}\right|+\sum_{i=n+1}^{n+p-1}\left|S_i(e^{-ix}-e^{-(i+1)x})\right|$$

$$<\varepsilon\cdot e^{-(n+p)x}+\sum_{i=n+1}^{n+p-1}\varepsilon\cdot(e^{-ix}-e^{-(i+1)x})=\varepsilon\cdot e^{-(n+1)x}\le\varepsilon.$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot e^{-nx}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.（实际上就是Dirichlet判别法）

10. 证明：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|=A$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|=B$.

因$u_n(x)$是$[a,b]$上的单调函数，故$|u_n(x)|\le\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}\le|u_n(a)|+|u_n(b)|$，$\forall n\in\mathbb{N}^+$，$x\in[a,b]$.

故$\sum\limits_{n=1}^{m}|u_n(x)|\le\sum\limits_{n=1}^{m}(|u_n(a)|+|u_n(b)|)=\sum\limits_{n=1}^{m}|u_n(a)|+\sum\limits_{n=1}^{m}|u_n(b)|$，$m\in\mathbb{N}^+$，令$m\to+\infty$得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|\le A+B$.

即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上绝对收敛.

对$\forall\varepsilon>0$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$绝对收敛知$\exists N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，$N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，对$\forall n_1>N_1$，$n_2>N_2$，$p\in\mathbb{N}^+$，有

$|u_{n_1+1}(a)|+|u_{n_1+2}(a)|+\cdots+|u_{n_1+p}(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|u_{n_2+1}(b)|+|u_{n_2+2}(b)|+\cdots+|u_{n_2+p}(b)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

故$\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，$N(\varepsilon)>\max\{N_1,N_2\}$，对$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}^+$，$x\in[a,b]$有

$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}|u_i(x)|\le\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}|u_i(a)|+\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}|u_i(b)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.