微积分A2第十一次习题课讨论题　　　　杨利军　May 18-23, 2020

本次习题课讨论题涉及以下三方面内容.

一．数项级数的一般理论

二．交错级数

三．通过分析一般项的阶来判断级数的收敛性

一．级数的一般理论

1. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 判断如下哪些级数必收敛.

(i). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$;

(ii). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$;

(iii). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{2n})$;

(iv). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n + u_{n+1})$;

2．设 $0 < nu_n \le 1$, 判断下列哪些级数收敛.

(i). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$;

(ii). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$;

(iii). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{u_n}$;

(iv). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2 \ln n$;

3．设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 判断以下哪些结论正确.

(i) 极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$;

(ii) 极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\le 1$;

(iii) 若极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 则极限值小于1;

(iv) 若极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 则极限值小于等于1.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 绝对收敛, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}u_{2n-1}=5$. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的和.

5. 考虑交错级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

的一个重排级数

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots, \tag{1}$$

排列规则为按顺序两正一负. 证明上述重排级数收敛, 并求出这个级数的和.

6. 证明下述级数发散.

(i) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\cdots$

(ii) $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$

7. 若正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}x_n$ 收敛, 且数列 $\{x_n\}$ 单调下降, 证明 $\lim_{n\to+\infty}nx_n=0$.

8. 假设正项级数 $\sum a_k$ 发散, 判断级数 $\sum\frac{a_k}{1+a_k}$ 的收敛性.

二. 交错级数

1. 设 $a>0$, 讨论如下交错级数的收敛性, 以及绝对收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{a}{1+a^n}. \tag{2}$$

2. 设 $a\neq 0$, 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin[\pi\sqrt{n^2+a^2}] \tag{3}$$

的收敛性, 以及绝对收敛性.

3. 讨论级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\cos\frac{k\pi}{3}, \tag{4}$$

的收敛性.

4. 讨论如下级数的条件收敛和绝对收敛性

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right],\quad p>0. \tag{5}$$

三. 通过分析一般项的阶来判断级数的收敛性

1. 假设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 还假设

$$\lim_{n\to+\infty}[n^p(e^{1/n}-1)a_n]=1, \tag{6}$$

其中 $p>0$, 求正数 p 的取值范围.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶连续可微, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f\Big(\frac{1}{n}\Big) \tag{7}$$

绝对收敛.

3. 设

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, \quad \forall n \geq 1, \tag{8}$$

讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}, \tag{9}$$

的收敛性, 其中 $p > 0$.

4. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n \sin^{2n} x}{n} \tag{10}$$

的绝对收敛性.

5. 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调下降, 且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x_n$ 发散. 判断级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{1+x_n}\Big)^n \tag{11}$$

的收敛性, 并说明理由.