微积分 A（2）期末样题答案

系名________________ **班级**______________ **姓名**______________ **学号**___________

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1．设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\}$，$I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,dxdydz$。化为柱坐标下的累次积分 $I=$____。

答案：$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\rho}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\rho,z)dz$

2． 设曲线 L 的参数方程为 $x=1-\sin t$， $y=1-\sqrt{2}\cos t$， $0\le t\le 2\pi$，则第一类曲线积分 $\int_L\sqrt{x^2-2x+2}\,dl=$______________________。

答案：3π

3．设 S 为上半单位球面 $x^2+y^2+z^2=1,\quad z\ge 0$，则 $\iint\limits_S(x+1)^2dS=$__________________。

答案：

$$\iint\limits_S(x+1)^2dS=\iint\limits_S(x^2+1)dS=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+1)dS$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+y^2+z^2)dS+\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}dS=\frac{8}{3}\pi$$

4．$\vec{V}(x,y,z)=(x+y+z,xy+yz+zx,xyz)$，则 $div\vec{V}=$__________________。

答案：$1+x+z+xy$

5．$f(x,y,z)=e^{x+y+z}$，则 $gradf=$_________________，$rot(gradf)=$__________。

答案：$e^{x+y+z}(1,1,1)$， **0**

6. 设 函 数 $f(x)=x^2+x+2$ 在 $[0,2)$ 上 的 Fourier 展 开 为

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)$$，则 $S(0)=$____________________________。

答案：5

7．三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}x^{99}y^{100}z^{101}dxdydz=$__________________。

答案：0

8．级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$的和为__________________。

答案：$(e^2-3)/2$

9．函数$\frac{1}{1-x}$在$x_0=2$点的 Taylor 级数为________________________________。

答案：$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$

10. 曲线积分$\int_{L^+}\frac{x^\lambda dy-y^\lambda dx}{x^2+y^2}=0$对上半平面的任意光滑闭曲线$L$都成立，则常数$\lambda=$__________________。

答案：1

11. S^+为$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则$\oiint_{S^+}xdy\wedge dz+\cos ydz\wedge dx+dx\wedge dy=$__________。

答案：$\frac{4}{3}\pi$

12. 函数$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$在$x_0=0$点的幂级数展开为______________________________。

答案：$x-\frac{1}{3\cdot 3!}x^3+\frac{1}{5\cdot 5!}x^5+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$

13. 设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$x=3$处收敛, 且当$x>3$时发散, 则$a=$____________。

答案：2

14. 设$D=\left\{(x,y),\quad 0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le 1\right\}$, 则$D$的形心坐标$(\overline{x},\overline{y})=$____________。

答案：$(\frac{3}{8},\frac{3}{5})$

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 设S^+为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$的下侧，求$\iint_{S^+}(x+y)dy\wedge dz+(2y-z)dz\wedge dx$。

解：加平面：$S_1^+:z=1,x^2+y^2\le 1$，上侧为正，

$$\iint_{S^+ + S_1^+} (x+y)dy\wedge dz + (2y-z)dz\wedge dx = 3\iiint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1} dxdydz = \pi$$ …………5 分

$$\iint_{S_1^+} (x+y)dy\wedge dz + (2y-z)dz\wedge dx = 0$$ …………5 分

故 $\iint_{S^+} (x+y)dy\wedge dz + (2y-z)dz\wedge dx = \pi$ 。

2． 求两个球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 、 $x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 相交部分的体积。

解：建立直角坐标系，使得两个球体可表为：

小球： $x^2+y^2+z^2\le 1$，大球： $x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 。于是两个球面的交线方程为

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2+(z-2)^2=4 \end{cases}$ 。 解之得 $\begin{cases} x^2+y^2=15/16 \\ z=1/4. \end{cases}$ 于是所求立体体积为

$$\iint_{x^2+y^2\le 15/16} (z_1(x,y)-z_2(x,y))dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 15/16} [\sqrt{1-x^2-y^2}-(2-\sqrt{4-x^2-y^2})]dxdy$$

……………………………………………5 分

$$= \iint_{x^2+y^2\le 15/16} (\sqrt{1-x^2-y^2}+\sqrt{4-x^2-y^2})dxdy - 2\pi\cdot 15/16$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{15}/4} (\sqrt{1-r^2}+\sqrt{4-r^2})rdr - \frac{15\pi}{8}$$

……………………………………………3 分

$$= \pi\int_0^{15/16} (\sqrt{1-s}+\sqrt{4-s})ds - \frac{15\pi}{8} = \frac{13\pi}{24}$$ 。

……………………………………2 分

3．设 $f(x)=\sin^2(x^2)$，

（I）求 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开；

（II）求 $f^{(n)}(0), n=1,2,3,\cdots$ 。

解:（I） $f(x)=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2x^2)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{2^2}{2!}x^{2\cdot 2}+\frac{2^4}{4!}x^{2\cdot 4}+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{4n}+\cdots\right)\right]$

$$=\frac{2}{2!}x^{2\cdot 2}-\frac{2^3}{4!}x^{2\cdot 4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{4n}+\cdots$$ ………………………5 分

（II）$f^{(4n)}(0)=(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}\cdot(4n)!}{(2n)!}$

$f^{(m)}(0)=0,\quad m$ 不能被 4 整除。 ……………………5 分

4． 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}\quad(x>0)$，求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx$ 。

解：级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\ln 2,\ln 3]$ 一致收敛，故 ……………………1 分

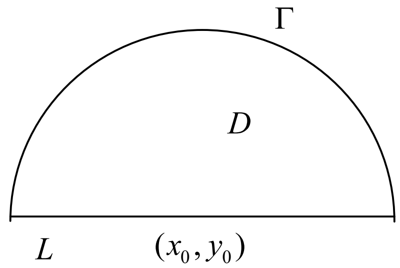
$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}\right)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3}ne^{-nx}dx$$ ……………………5 分

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$ ……………………4 分

三．证明题

1．（8 分）设函数 $X(x,y),Y(x,y)\in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$，在以任意点 (x_0,y_0) 为中心，任意正数 r 为半径的上半圆周 Γ 上的第二类曲线积分 $\int_\Gamma X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$ 。求证：在 $\mathbb{R}^2$ 上有 $X(x,y)\equiv 0,\dfrac{\partial Y}{\partial x}(x,y)\equiv 0$ 。

证明：



加上直径 L，记半圆域为 D。

$$\int_\Gamma X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$$

$$\int_{\Gamma+L}X(x,y)dx+Y(x,y)dy=\int_{\partial D}X(x,y)dx+Y(x,y)dy$$
$$=\int_L X(x,y)dx+Y(x,y)dy$$

由 Green 公式，

$$\int_{\partial D}X(x,y)dx+Y(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy=\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}\frac{1}{2}\pi r^2$$

其中 (ξ,η) 为 D 中一点。而

$$\int_L X(x,y)dx+Y(x,y)dy=\int_{x_0-r}^{x_0+r}X(x,y_0)dx=X(\varsigma,y_0)2r$$

两者相等，

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}\frac{1}{2}\pi r^2=Y(\varsigma,y_0)2r$$

令 $r\to 0$ ， $Y(x_0,y_0)=0$ 。由 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 的任意性， $X(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$ 。 $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)\equiv 0$ ， $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 。

2.（8 分）设 $f(x)$ 是 2π 周期的连续函数, 记 $F(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$ 。

（I）求证 $F(x)$ 也是 2π 周期的连续函数;

（II）记 $\{a_n,b_n\}$ 与 $\{A_n,B_n\}$ 分别是 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的 Fourier 系数列, 求证:

$$A_0={a_0}^2,\ A_n={a_n}^2+{b_n}^2,\ B_n=0,\quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

证明: （I）首先, $F(x)$ 是连续函数。下证 $F(x)$ 是偶函数:

$$F(-x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(t-x)dt\overset{u=t-x}{=}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+x)f(u)du=F(x)\quad\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

（II） $B_n=0$ （$n=1,2,\cdots\cdots$） ……………………………………2 分

而 $f(x)$ 是 2π 周期的连续函数, 于是

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi{a_0}^2\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nxdx\overset{u=x+t}{=}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\cos n(u-t)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(u)(\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt)du$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n \cos nt + b_n \sin nt)dt = a_n{}^2 + b_n{}^2$$ …………………2 分

2.（8 分）（I）2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的定义为 $f(x)=\cos\alpha x$（α 不是整数），将其展成 Fourier 级数（提示：$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$）；

（II）利用（I）证明：$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},\quad x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

解：（I）

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{(\alpha-n)}+\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{(\alpha+n)}\right]=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2},\quad n=0,1,2,\cdots$$

…………2 分

$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots,$ ……………………………………………………2 分

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right],\qquad x\in[-\pi,\pi]$$ …………2 分

（II）令 $x=\pi$，$\cot\alpha\pi=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right]$，在令 $\alpha\pi=x$，则

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},\quad x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$ …………2 分