《微积分A2》第二十八讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年05月25日

例: 求函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的 Maclaurin 级数.

解: 这里取函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的定义依次为如下两个微分方程的初值问题的解

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

注: 仅仅利用上述微分方程以及初值条件, 就可以证明函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 各项熟知的性质, 例如周期性, 和角公式等.

回忆上个学期已经证明，$\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$. (利用三角函数的积化和差公式) 由此得

$$|\cos^{(k)}(x)| = \left|\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right| \le 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

根据函数解析的充分条件知，$\cos x$ 在整个实轴上解析. 进一步 $\cos^{(k)}(0) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$. 于是

$$\cos^{(2k-1)}(0) = 0, \quad \cos^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

于是就得到函数 $\cos x$ 的 Maclaurin 级数为

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

类似可证，函数 $\sin x$ 的 Maclaurin 级数为

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

解答完毕.

Theorem

定理: 对任意实数 $\alpha \in \mathbb{R}$, 函数 $(1+x)^\alpha$ 在点 $x=0$ 处解析, 并且有如下 Maclaurin 级数

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k^\alpha x^k$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots,$$

并且级数的收敛区间为 $(-1,1)$, 这里 $C_k^\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

证: 证明分三步. 第一步证明幂级数 $\sum C_k^\alpha x^k$ 的收敛半径为 1. 这是因为

$$\left|\frac{C_{k+1}^\alpha}{C_k^\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)/(k+1)!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)/k!}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| \to 1, \quad k\to+\infty.$$

由此得 $\rho = \overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|C_k^\alpha|} = \lim_{k\to+\infty}\frac{|C_{k+1}^\alpha|}{|C_k^\alpha|} = 1$. 故收敛半径为 $R=\rho^{-1}=1$. 记 $\sum C_k^\alpha x^k$ 的和函数为 $S(x)$, $x\in(-1,1)$.

证明续一

第二步. 证明 $S(x)$ 满足微分方程

$$(1+x)S'(x) = \alpha S(x), \quad \forall x \in (-1,1).$$

对幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k^\alpha x^k$ 逐项求导得

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k^\alpha k x^{k-1}.$$

$$\Rightarrow \quad (1+x)S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k^\alpha k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k^\alpha k x^k$$

$$= C_1^\alpha + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[C_{k+1}^\alpha (k+1) + C_k^\alpha k\right] x^k$$

$$= \alpha + \left[\frac{2\alpha(\alpha-1)}{2!} + \frac{\alpha}{1}\right]x$$

$$+ \left[\frac{3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \frac{2\alpha(\alpha-1)}{2!}\right]x^2 + \cdots$$

$$= \alpha\left\{1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots\right\} = \alpha S(x).$$

第三步. 求解微分方程 $(1+x)S' = \alpha S$. 这是变量分离型方程.

可按标准解法求其解:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\alpha}{1+x} \Rightarrow \ln S(x) = \alpha \ln(1+x) + C_1 \Rightarrow S(x) = C(1+x)^{\alpha}$$

证明续三

其中 $x \in (-1, 1)$, $C = e^{C_1}$. 注意 $S(0) = 1$, 故 $C = 1$. 此即 $S(x) = (1+x)^{\alpha}$. 定理得证. $\square$

情形一: $\alpha = -1$. 此时

$$C_k^{-1} = \frac{-1(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k.$$

于是

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

在上式中, 若用 $-x$ 代替 x, 则得到熟知的等式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

<u>情形二</u>: $\alpha = \frac{1}{2}$. 此时

$$C_1^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2};$$

$$C_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{4\cdot 2} = -\frac{1}{4!!};$$

$$C_3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{1}{2^3}\frac{1\cdot 3}{3!} = \frac{3!!}{6!!};$$

$$\vdots$$

$$C_k^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!}.$$

由此得

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots,$$

这里 $\forall x\in(-1,1)$.

通过对某些已知函数的幂级数进行逐项求导，逐项积分或变量代换等方式，可求得许多函数的幂级数.

例：利用已知函数的 Maclaurin 级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1. \quad (*)$$

我们可以得到许多其他函数的 Maclaurin 级数.

(i) 以 x^2 代替上式中 x 得

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

(ii) 对级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

两边积分得

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

或 $$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

(iii) 对级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1$$

两边求导得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

例子

例：求函数 $f(x)=\frac{1}{4-x}$ 在点 $x=1$ 处的 Taylor 级数.

解：先将函数 $f(x)$ 作如下变形，然后方括弧里的函数按熟知的级数展开，则

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{3-(x-1)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x-1}{3}+\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+\left(\frac{x-1}{3}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^k}{3^{k+1}},\quad |x-1|<3.$$

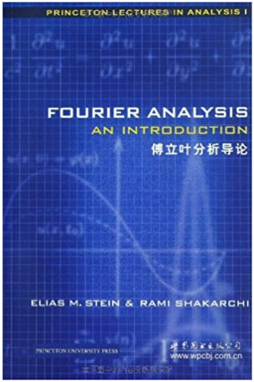
解答完毕.

推荐一本关于Fourier 级数理论的参考书

Elias M. Stein and Rami Sharkachi,

Fourier Analysis, an Introduction, 297 pages

Princeton University Press, 2002. 世图影印版2013.



目的: 将一般函数 $f(x)$ 表示为三角级数

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos xk + b_k \sin kx).$$

Definition

定义：称函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \cdots$$

为三角函数系．三角函数系中任意一个有限线性组合

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为三角多项式，其中 $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$．如果 a_n, b_n 不同时为零，则称这个线性组合为 n 阶三角多项式．

Theorem

定理: 三角函数系满足如下性质(称为正交性质):

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0, \qquad \forall k \geq 1;$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)(\cos mx) dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)(\sin mx) dx,$
$\forall n \neq m;$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)(\sin mx) dx = 0, \qquad \forall n, \forall m.$

换言之, 三角函数系中的任意一个函数, 均与其他函数正交.

证明: 结论 (i) 显然. 结论 (ii) 和 (iii) 可利用三角函数的积化和差公式证明. 细节略.

假设函数 $f(x)$ 可以表示为如下三角级数的和

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ x \in [-\pi, \pi]. \quad (*)$$

我们想知道，这些系数 a_0, a_n, b_n 如何由函数 $f(x)$ 确定. 为此假定上述三角级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 于是在等式 (*) 两边积分，并利用三角函数的正交性得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

用 $\cos mx$ $(m \geq 1)$ 乘以展式 (*) 的两边得 $f(x)\cos mx$

$$= a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx).$$

对上式两边积分，从 $-\pi$ 到 π，并注意到三角函数的正交性质得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = a_m \pi.$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \quad \forall m \geq 1.$$

注意在等式

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

中，用 $\frac{a_0}{2}$ 代替 a_0，则系数 a_m，$m \geq 0$ 可以统一地写作

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \quad \forall m \geq 0.$$

同理可以确定系数 b_m 如下

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \quad \forall m \geq 1.$$

总结上述的分析可得如下定理.

定理: 假设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可表示为如下一致收敛的三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{+\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx),\quad \forall x\in[-\pi,\pi],$$

则级数的系数可由函数 $f(x)$ 如下确定

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx dx,\quad \forall m\geq 0,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx dx,\quad \forall m\geq 1.$$

定义: 假设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 记

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \quad \forall m \geq 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \quad \forall m \geq 1.$$

称 a_m $(m \geq 0)$ 为余弦系数, b_m $(m \geq 1)$ 为正弦系数. 余弦和正弦系数都称作为 $f(x)$ 的 Fourier系数. 由这些系数所构造的下述三角级数称为 $f(x)$ 的(形式) Fourier 级数, 并用如下符号记之

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty}(a_m\cos mx + b_m \sin mx).$$

例: 求函数 e^{-x} 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数.

解: 根据系数计算公式得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}dx = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

以下同时计算系数 a_n 和 b_n:

$$a_n + b_n i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\big(\cos nx + i\sin nx\big)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x+inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(-1+in)x}dx$$

例子续一

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(-1+ni)x}}{-1+ni}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi(-1+ni)}\left[e^{(-1+ni)\pi} - e^{-(-1+ni)\pi}\right]$$

$$= \frac{-1-ni}{\pi(1^2+n^2)}\left[e^{-\pi}e^{n\pi i} - e^{\pi}e^{-n\pi i}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n(1+ni)}{\pi(1+n^2)}(e^{\pi} - e^{-\pi}),$$

即

$$a_n + b_n i = \frac{(-1)^n(1+ni)}{1+n^2}(e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

比较上述等式的实虚部得

$$a_n = \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}, \quad b_n = \frac{(-1)^n n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}.$$

于是

$$e^{-x} \sim \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(\cos nx + n\sin nx)}{1+n^2}\right\}.$$

上式就是函数 e^{-x} 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数. 解答完毕.

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积. (i) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $b_n=0$, 即

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx,\qquad (*)$$

其中 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx$, $\forall n\geq 0$; (ii) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $a_n=0$, 即

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx,\qquad (**)$$

其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx$, $\forall n\geq 1$.

注: 当 $f(x)$ 为偶函数, 式 (*) 中的展式称为余弦级数, 当 $f(x)$ 为奇函数, 式 (**) 中的展式称为正弦级数.

Proof.

证明: (i) 当函数 $f(x)$ 为偶函数时, 函数 $f(x)\sin nx$ 为奇函数, $f(x)\cos nx$ 为偶函数, 故 $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0, \ \forall n \geq 1;$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \ \forall n \geq 0.$

(ii) 当函数 $f(x)$ 为奇函数时, 证明类似. 细节略. □

例: 求函数 x 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数.

解: 函数 x 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数, 故它的余弦系数为零, 即 $a_n=0$, $\forall n\geq 0$. 考虑正弦系数的计算. 对任意正整数 $n\geq 1$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right]=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

因此所求的 Fourier 级数为如下正弦级数

$$x\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

解答完毕.

例: 求函数 x^2 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数.

解: 由于函数 x^2 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数, 故它的正弦系数为零, 即 $b_n=0,\ \forall n\geq 1$. 考虑余弦系数的计算:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2dx=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nxdx=\cdots=\frac{4(-1)^n}{n^2}.\ (\text{两次分部积分})$$

故

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

解答完毕.

问题

对给定 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数 $f(x)$，要解决如下两个问题：

(1) 函数 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in [-\pi,\pi]$$

是否收敛？

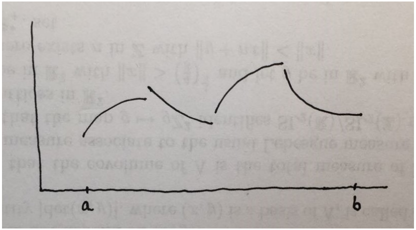
(2) 当上述级数收敛时，级数是否收敛于 $f(x)$？即上述符号 $\sim$ 可否写作等号 $=$.

分段可微函数

Definition

定义: 称函数 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的分段可微函数, 如果存在有限个点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, 使得对 $i = 1, \cdots, m$, (1) $f(x)$ 在每个开区间 (x_{i-1}, x_i) 上可微; (2) 导函数 $f'(x)$ 在点 x_i 处的左右极限均存在.

注: 依定义, 分段可微函数仅有有限个不连续点和不可微点.



定理 [课本第308页定理7.2.4]: 假设 $f(x)$ 为区间 $[-\pi,\pi]$ 上的分段可微函数，则 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛，且其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)], & x \in (-\pi,\pi), \\ \frac{1}{2}[f(-\pi^+) + f(\pi^-)], & x = \pm\pi. \end{cases}$$

注：定理证明比较冗长．略去．

注一: 记号 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限, 其定义如下

$$f(x_0^-) \triangleq \lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad f(x_0^+) \triangleq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

注二: 特别当 $f(x)$ 为分段可微的连续函数, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$ 时, $S(x) = f(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$$

即之前的符号 $\sim$ 现在可换为等号 $=$.

例一：已证

$$f(x) = x \sim 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

由于函数 x 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段可微，故根据上述 Dirichlet 收敛定理知，上述 Fourier 级数处处收敛，且其和函数为

$$S(x) \triangleq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi), \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

这里 $S(\pm\pi) = 0$. 这是因为

$$f(-\pi^+) \triangleq \lim_{x\to-\pi^+} x = -\pi, \quad f(\pi^-) \triangleq \lim_{x\to\pi^-} x = \pi,$$

所以 $S(\pm\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi^+) + f(\pi^-)] = 0$.

根据 Dirirchlet 收敛定理，可以求得一些重要级数的和. 例如在上述和函数的表达式中，取 $x = \frac{\pi}{2}$ 得

$$\frac{\pi}{2} = S(\frac{\pi}{2}) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi/2)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1+1}\sin(2k+1)\pi/2}{2k+1}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi + \frac{\pi}{2})}{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

即 $$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

亦即 $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

此即

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

例：已证

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

由于 $f(x) = x^2$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上连续的偶函数，分段可微，且 $f(-\pi) = f(\pi)$，故根据上述 Dirichlet 收敛定理知，上述 Fourier 级数处处收敛，且其和函数就是 x^2，即

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} = x^2, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

令 $x = \pi$ 得

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi}{n^2} = \pi^2,$$

即
$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2.$$

由此得到伟大的定理

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \text{(Euler 1734)}$$

令 $x = 0$ 得

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$$

此即

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

即

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

情形一: 区间 $[0, 2\pi]$ 上函数的 **Fourier 级数.**

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上可积，记系数

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx dx, \quad \forall m \geq 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \quad \forall m \geq 1,$$

则称如下三角级数为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的(形式)

Fourier 级数，并记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \ x \in [0, 2\pi].$$

定理: 假设 $f(x)$ 为区间 $[0, 2\pi]$ 上的分段可微函数, 则 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在 $[0, 2\pi]$ 上处处收敛, 且其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)], & x \in (0, 2\pi), \\ \frac{1}{2}[f(0^+) + f(2\pi^-)], & x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

证明略.

例: 求函数 $f(x)=x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数, 并求其 Fourier 级数的和函数.

解: 根据计算公式

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xdx=2\pi,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos kxdx$$

$$=\frac{1}{k\pi}x\sin kx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi}\sin kxdx=0,\quad \forall k\geq 1,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin kxdx=\frac{-1}{k\pi}x\cos kx\Big|_0^{2\pi}$$

$$+\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi}\cos kxdx=-\frac{2}{k},\quad \forall k\geq 1,$$

因此函数 x 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 Fourier 级数为

$$x \sim \pi - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k} \sin kx, \quad x \in [0, 2\pi].$$

根据收敛定理可知,

$$\pi - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k} \sin kx = \begin{cases} x, & x \in (0, 2\pi), \\ \pi, & x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

回忆在学习级数理论时, 我们曾经证明了级数 $\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k}$ 收敛, $\forall x \in (0, 2\pi)$. 现在我们可以得到其和函数

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in (0, 2\pi).$$

解答完毕.

作业

第6章总复习题(page 292-294):

4, 8(1)(2)(3), 9, 13(1)(3)(5), 14(1)(2).

(注: 题8(1)的求和指标n 从2 开始)

习题7.1(page 303): 1(1)(2)(3), 2, 3.