

自动控制理论

(二) 现代控制理论

自动化系 尚超

中央主楼418A 010-62782459

c-shang@tsinghua.edu.cn

模块2 线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1 齐次方程的解（课本2.7）

TD2-1-2 非齐次方程的解（课本2.7）

TD2-2-1 状态转移矩阵的定义性质（课本2.8）

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质（课本2.8）

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算方法（课本2.7）

TD2-1-1 齐次方程的解

- 线性定常系统的状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad t \geq t_0$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

其中， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ ， $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 。这里讨论上述微分方程的求解方法。

- 一、齐次方程的解：首先考虑简单的情形，即输入 \mathbf{u} 为零的齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

的解。此时系统处于由初始状态引起的自由运动状态，所以齐次方程式的解也称自由解。

TD2-1-1 齐次方程的解

- 有如下命题:

若初始时刻 t_0 时的状态给定为 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 则微分方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

存在唯一解:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0$$

- 若初始时刻从 $t = 0$ 开始, 即 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, 则方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的解为:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0$$

其中, $e^{\mathbf{A}t} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 或 $e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 称为矩阵指数, 表达式为

$$e^{\mathbf{A}t} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

TD2-1-1 齐次方程的解

- 证明思路1：直接法
- 和通常的标量微分方程类似，先假定 $\dot{x} = Ax$ 的解为时间 t 的向量幂级数形式，即

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad t \geq 0$$

将上式代入 $\dot{x} = Ax$ 可得：

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + k b_k t^{k-1} + \cdots \\ = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots) \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

因为上式对 $t \geq 0$ 均成立，因此等式两边 t 的同次幂项的系数应相等，

可得

$$\begin{cases} b_1 = Ab_0 \\ b_2 = \frac{1}{2} Ab_1 = \frac{1}{2!} A^2 b_0 \\ \vdots \\ b_k = \frac{1}{k} Ab_{k-1} = \frac{1}{k!} A^k b_0 \end{cases}$$

\therefore 上述命题得证。令 $t = 0$ ，可得：

$$b_0 = x(0) = b_0$$

代入可得：

TD2-1-1 齐次方程的解

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \cdots \right) \mathbf{x}_0 \quad (*) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k \right) \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

- 仿照标量指数的定义

$$e^{at} \triangleq 1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}$$

可定义矩阵指数为：

$$e^{\mathbf{A}t} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

因此，(*)式可以表示为 $\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0}$ 。

- 若用 $(t - t_0)$ 代替 t ，即初始时刻为 t_0 ，同样可证明 $\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0, t \geq t_0}$ 。

TD2-1-1 齐次方程的解

- 证明思路2: Laplace 变换
- 对 $\dot{x} = Ax$ 两边进行 Laplace 变换, 可得

$$s \cdot x(s) - x_0 = A \cdot x(s)$$

其中 $x(s) = L[x(t)]$ 为状态向量 $x(t)$ 的 Laplace 变换, 经整理有:

$$(sI - A)x(s) = x_0$$

两边同乘 $(sI - A)^{-1}$, 从而有:

$$x(s) = (sI - A)^{-1} x_0$$

将上式作 Laplace 反变换, 即得齐次方程的解:

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1} \left[(sI - A)^{-1} x_0 \right] \\ &= L^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right] x_0 \quad (\text{拉氏反变换的线性性质}) \end{aligned}$$

TD2-1-1 齐次方程的解

- 注意到：
$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \underbrace{\left(\frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} + \cdots \right)}_{\doteq (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}} = \mathbf{I}$$

- 代入到 $\mathbf{x}(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}_0$ 即得：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= L^{-1} \left(\frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} + \cdots \right) \mathbf{x}_0 \\ &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \cdots \right) \mathbf{x}_0 \\ &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

\therefore 得证。

TD2-1-1 齐次方程的解

- 线性定常系统的渐近稳定性及判据
- 状态方程为：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad t \geq t_0 \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{*}$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 。当输入信号 u 为零时, 若系统对任意初始状态 \mathbf{x}_0 的自由解

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0$$

总满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, 那么则称线性系统 (*) 是渐近稳定的。

- 判据：系统(*)是渐近稳定的, 当且仅当 \mathbf{A} 的特征值均具有负实部。
- 分析：可以根据矩阵指数的性质证明。

模块2 线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1 齐次方程的解（课本2.7）

TD2-1-2 非齐次方程的解（课本2.7）

TD2-2-1 状态转移矩阵的定义性质（课本2.8）

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质（课本2.8）

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算方法（课本2.7）

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 这里我们讨论线性定常系统在控制作用 $u(t)$ 下的强制运动。
- 考虑一般的非齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (*)$$

在初始时刻 t_0 时, 初始状态为 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 则其解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau, \quad (**)$$

初始时刻 $t_0 = 0$ 时的状态为 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0)$, 其解为:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau, \quad (***)$$

显然, 线性系统(*)式的解由两部分组成:

- (**)和(***)的第一项表示由初始状态引起的自由运动
- (**)和(***)的第二项表示由控制作用引起的强制运动

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 证明：将(*)写为： $\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x} = B\mathbf{u}(t)$
- 上式两边同时左乘 e^{-At} 可得： $e^{-At}(\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x}) = e^{-At}B\mathbf{u}(t)$
- 即：
$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\mathbf{x}(t)] = e^{-At}B\mathbf{u}(t) \quad (****)$$
- 对 t 在 $t \sim t_0$ 之间进行积分，可得：
$$e^{-At}\mathbf{x}(t)\Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

即：

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) = e^{-At_0}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

上式两边同乘 e^{At} 可得：

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

(**)式得证！

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 重写(****)式: $\frac{d}{dt} [e^{-At} \mathbf{x}(t)] = e^{-At} \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$

- 对 τ 在 $0 \sim t$ 之间进行积分, 可得:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

- 定义状态转移矩阵: $\phi(t) = e^{At}$

- (**)式和(***)式可分别写成如下形式:

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t-t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

以及

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 在特殊的控制信号（如脉冲函数、阶跃函数或斜坡函数）的作用下，非齐次方程的解可简化为：

- ① $u(t)$ 为脉冲函数时， $u(t) = k\delta(t)$, $x(0^-) = x(0)$ ，有：

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}Bk$$

其中 k 为常数向量，与 $u(t)$ 具有相同的维数。

- ② $u(t)$ 为阶跃函数时， $u(t) = k \cdot 1(t)$, $x(0^-) = x(0)$

$$x(t) = e^{At}x(0) + A^{-1}(e^{At} - I)Bk$$

- ③ $u(t)$ 为斜坡函数时， $u(t) = k \cdot t \cdot 1(t)$, $x(0^-) = x(0)$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \left[A^{-2}(e^{At} - I) - A^{-1}t \right] Bk$$

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 与齐次方程类似，非齐次方程也可利用 Laplace 变换求解
- 对非齐次方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ 两边进行 Laplace 变换

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

- 化简为：

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

- 所以有： $\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)]$
- 进一步进行 Laplace 反变换，可得：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) \right\} + \underbrace{L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \right\}}_{\text{频域相乘}} \\ &= \phi(t)\mathbf{x}(0) + \underbrace{\int_0^t \phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{\text{时域卷积}}\end{aligned}$$

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 例：已知系统的状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -12 & 2/3 \\ -36 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad u(t) = 1(t) \text{ 为单位阶跃函数}$$

初始条件为 $\mathbf{x}(0) = [2, 1]^T$ ，求此非齐次状态方程的解 $\mathbf{x}(t)$ 。

- 解：

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+12 & -2/3 \\ 36 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+4)(s+9)} & \frac{2/3}{(s+4)(s+9)} \\ \frac{-36}{(s+4)(s+9)} & \frac{s+12}{(s+4)(s+9)} \end{bmatrix}$$

此外，

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(s) = \frac{1}{s}, \quad \mathbf{b}u(s) = \begin{bmatrix} 1/3s \\ 1/s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(s) = \begin{bmatrix} \frac{6s+1}{3s} \\ \frac{s+1}{s} \end{bmatrix}$$

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 从而有:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(s)] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+4)(s+9)} & \frac{2/3}{(s+4)(s+9)} \\ \frac{-36}{(s+4)(s+9)} & \frac{s+12}{(s+4)(s+9)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6s+1}{3s} \\ \frac{s+1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s^2+3s+1}{s(s+4)(s+9)} \\ \frac{s-59}{(s+4)(s+9)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 部分分式分解:

$$\mathbf{x}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{36s} - \frac{21/20}{s+4} + \frac{136/45}{s+9} \\ -\frac{63/5}{s+4} + \frac{68/5}{s+9} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Laplace 反变换}} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} - \frac{21}{20}e^{-4t} + \frac{136}{45}e^{-9t} \\ -\frac{63}{5}e^{-4t} + \frac{68}{5}e^{-9t} \end{bmatrix}$$

模块2 线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1 齐次方程的解（课本2.7）

TD2-1-2 非齐次方程的解（课本2.7）

TD2-2-1 状态转移矩阵的定义性质（课本2.8）

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质（课本2.8）

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算方法（课本2.7）

TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

- 齐次方程 $\dot{x} = Ax$ 的自由解为：

$$x(t) = e^{At} x(0) \quad \text{或} \quad x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$$

上式的物理意义是系统在 $t \geq 0$ 或 $t \geq t_0$ 的任意瞬时的状态 $x(t)$ ，仅仅是初始状态向量 x_0 的一种变换关系，变换矩阵为 e^{At} 或 $e^{A(t-t_0)}$ 。指数矩阵 e^{At} 或 $e^{A(t-t_0)}$ 是一个大小为 $n \times n$ 的函数矩阵。这意味着，它使得状态向量随着时间的推移在不断地作坐标变换，即不断地在状态空间中作转移。

- 因此指数矩阵 e^{At} 或 $e^{A(t-t_0)}$ 也称为状态转移矩阵，通常表示为：

$$\phi(t) = e^{At} \quad \text{或} \quad \phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

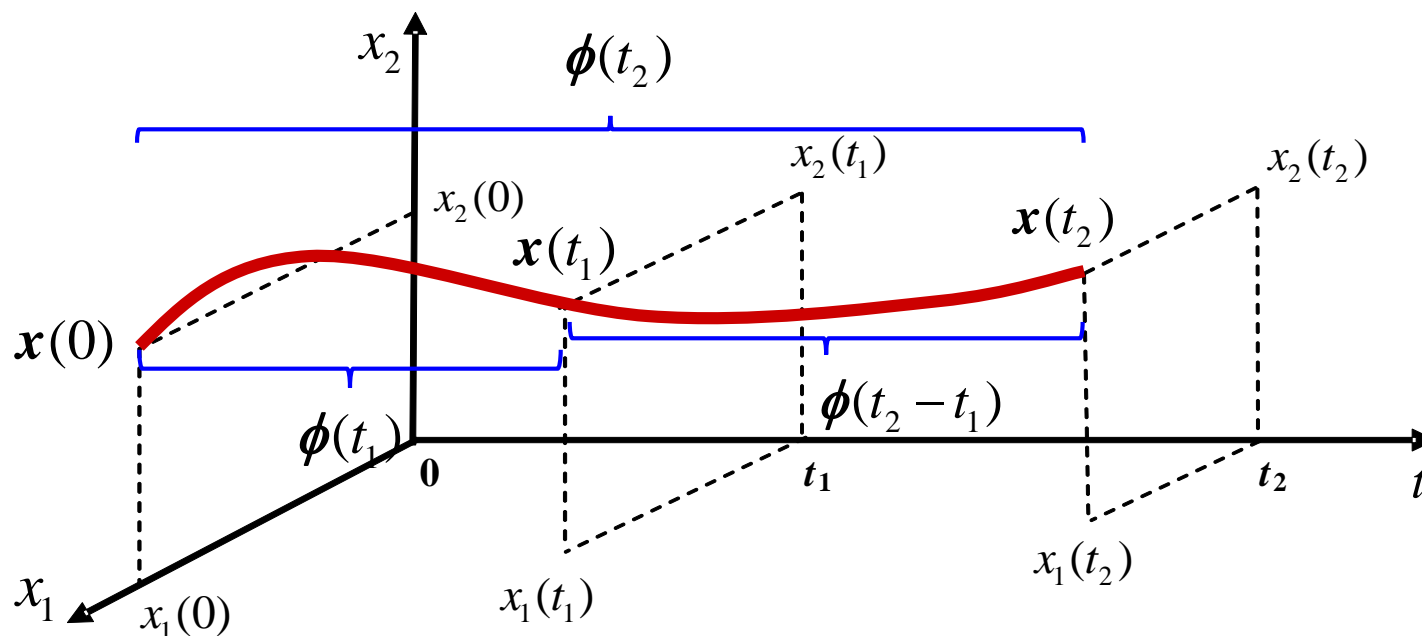
其中， $\phi(t)$ 表示从 $x(0)$ 到 $x(t)$ 的状态转移矩阵， $\phi(t-t_0)$ 表示从 $x(t_0)$ 到 $x(t)$ 的状态转移矩阵。

TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

- 因此，齐次方程 $\dot{x} = Ax$ 的解可以表示为：

$$x(t) = \phi(t)x_0 \quad \text{或} \quad x(t) = \phi(t-t_0)x_0$$

可以看出，系统作自由运动时，它的运动形态将由状态转移矩阵唯一决定，包含了系统自由运动的全部信息。其几何意义表示如下：

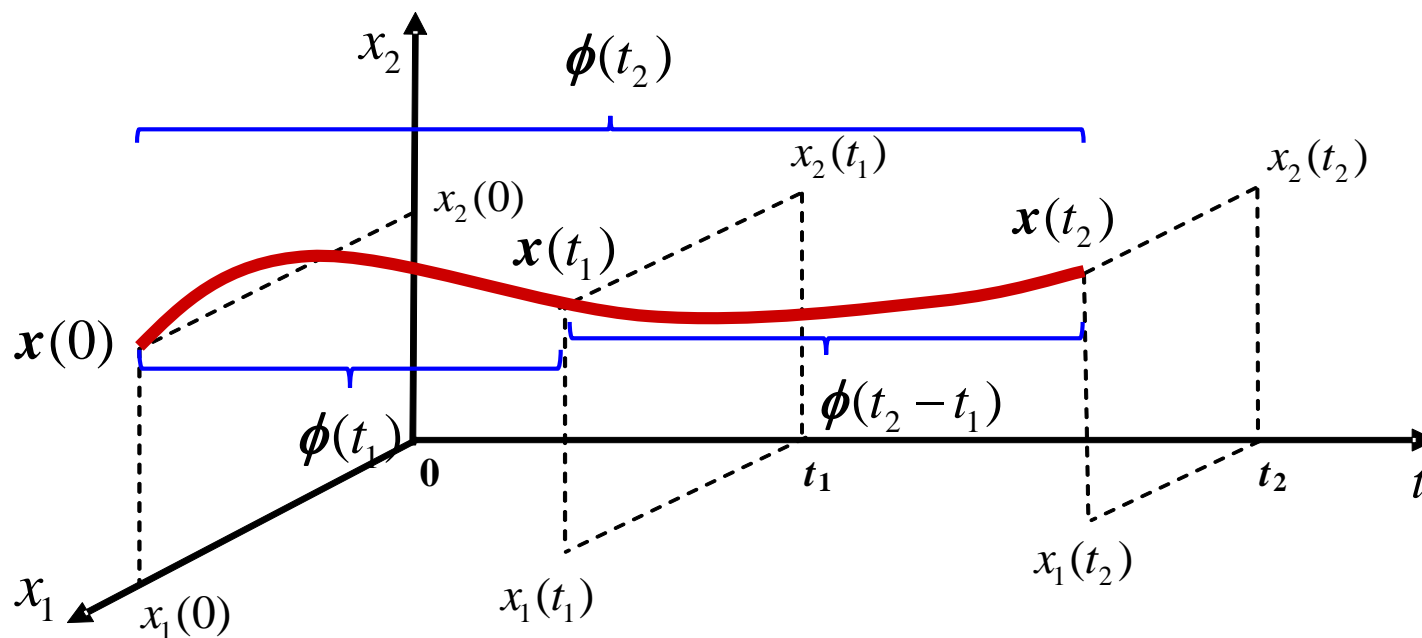


TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

- 图中设 $t = 0$ 时，状态的初态为 $\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \ x_2(0)]^T$ ，若已知状态转移矩阵 $\phi(t_1)$ ，则 $t = t_1$ 的状态为：

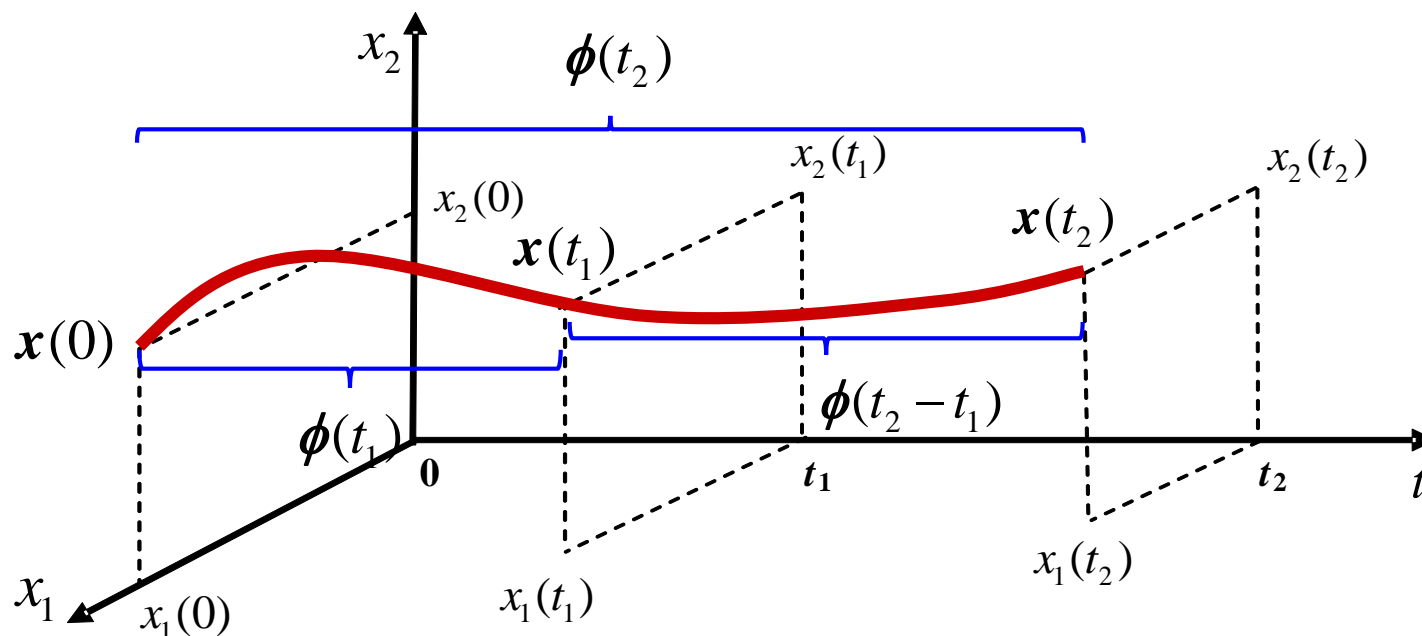
$$\mathbf{x}(t_1) = [x_1(t_1) \ x_2(t_1)]^T = \phi(t_1) \mathbf{x}(0)$$

若已知状态转移矩阵 $\phi(t_2)$ ，则 $t = t_2$ 的状态为： $\mathbf{x}(t_2) = [x_1(t_2) \ x_2(t_2)]^T = \phi(t_2) \mathbf{x}(0)$



TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

- 表明状态从 $x(0)$ 开始，随着时间的推移，它将按 $\phi(t_1)$ 或 $\phi(t_2)$ 作自由运动，最后状态转移到 $x(t_1)$ 或 $x(t_2)$ ，相应地在状态空间中描绘出一条如下图所示的运动轨线。
- 若 t_1 为初始时刻， $x(t_1)$ 为初始状态，则 $t = t_2$ 的状态为： $x(t_2) = \phi(t_2 - t_1) \cdot x(t_1)$



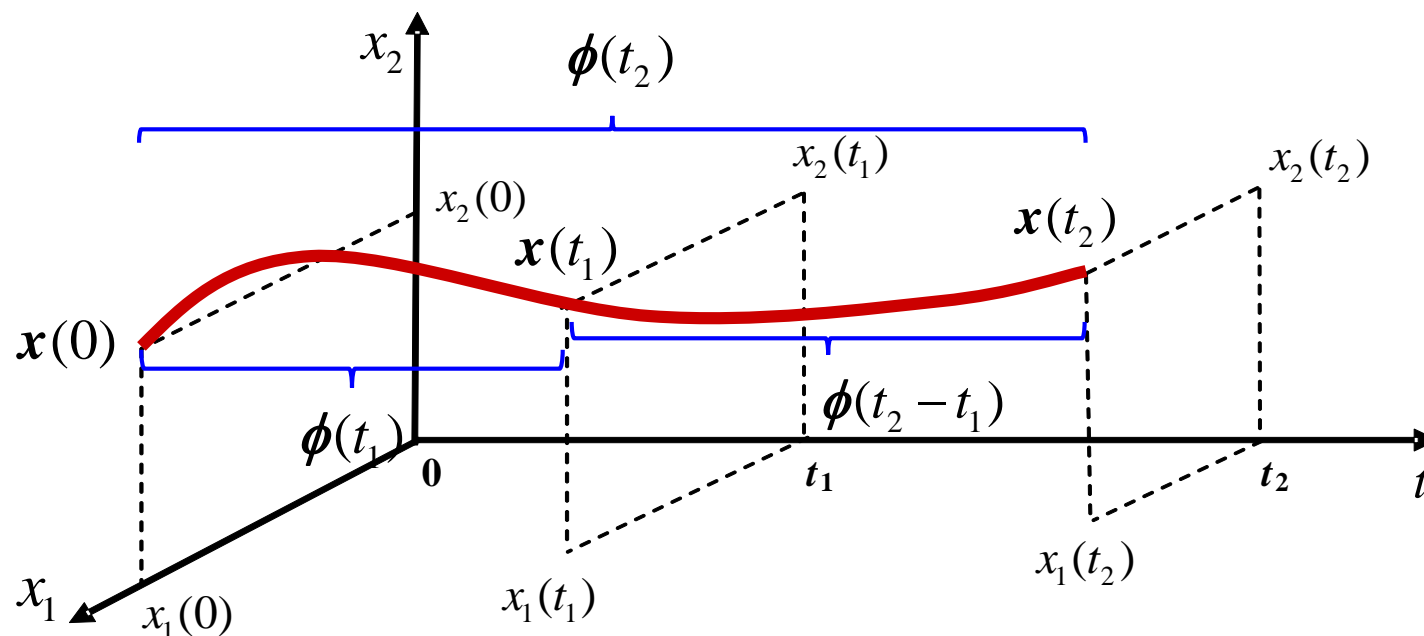
TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

$$\mathbf{x}(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{\phi}(t_1) \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t_2) = \begin{bmatrix} x_1(t_2) & x_2(t_2) \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{\phi}(t_2 - t_1) \mathbf{x}(t_1)$$

- 将 $\mathbf{x}(t_1)$ 代入上式，则得 $\mathbf{x}(t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_2 - t_1) \cdot \boldsymbol{\phi}(t_1) \cdot \mathbf{x}(0)$

表示从 $\mathbf{x}(0)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_1)$ ，再由 $\mathbf{x}(t_1)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_2)$ 的运动轨线。



模块2 线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1 齐次方程的解（课本2.7）

TD2-1-2 非齐次方程的解（课本2.7）

TD2-2-1 状态转移矩阵的定义性质（课本2.8）

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质（课本2.8）

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算方法（课本2.7）

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 注意到:

$$\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1) = \phi(t_2) \text{ 或 } e^{A(t_2 - t_1)}e^{At_1} = e^{At_2}$$

这种关系称为组合性质。

- 在经典控制理论中，求解高阶微分方程时，对初始条件的处理相当困难。通常假定初始时刻 $t = 0$, $x(0) = \mathbf{0}$ ，即从零初始条件出发去计算系统的输出响应。
- 而从以上分析中可以看出，在现代控制理论中，利用状态转移矩阵，对任意时刻的状态量 $x(t)$ ，可以由任意指定的初始时刻 t_0 的初始向量 $x(t_0)$ 求得。
- 换言之，矩阵微分方程的解，在时间上可以任意分段求取。这是状态空间模型描述的又一优点。

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质1: $\phi(t-t) = \phi(0) = I$ 或 $e^{A(t-t)} = e^{A0} = I$

- 证明: 由

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

直接可证得。意味着状态向量从 t 时刻又转移到 t 时刻，显然状态向量是不变的。

- 性质2: $\phi(t) \cdot \phi(\tau) = \phi(t+\tau)$ 或 $e^{At} \cdot e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$

称之为组合性质，意味着从 $t = -\tau$ 转移到 $t = 0$ ，再从 $t = 0$ 转移到 $t = t$ 的组合，即

$$\phi(t-0) \cdot \phi(0-(-\tau)) = \phi(t+\tau)$$

也可由 e^{At} 的定义得到。

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质3: $[\phi(t)]^{-1} = \phi(-t)$ 或 $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
- 证明: 根据 e^{At} 定义式

$$e^{-At}e^{At} = \left(I - At + \frac{1}{2!}A^2t^2 - \dots \right) \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots \right) = I$$

直接可证得。

- 这意味着转移矩阵总是非奇异的, 必有逆矩阵。
- 利用该性质, 在已知 $x(t)$ 的情况下, 可以反求出所有 t 时刻以前的状态 $x(t_0)$, $t_0 < t$

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质4: $\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) = \phi(t) \cdot A$ 或 $\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$
- 证明: 根据状态转移矩阵 e^{At} 定义

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

由于此无穷级数对有限 t 值是绝对收敛的, 所以上式两边可对 t 求导, 得:

$$\frac{d}{dt} e^{At} \triangleq A + A^2 t + \frac{1}{2!} A^3 t^2 + \frac{1}{3!} A^4 t^3 \cdots$$

因此:

$$\frac{d}{dt} e^{At} \triangleq A \cdot \left(I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 \cdots \right) = A \cdot e^{At}$$

或者:

$$\frac{d}{dt} e^{At} \triangleq \left(I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 \cdots \right) \cdot A = e^{At} \cdot A$$

即: $\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) = \phi(t) \cdot A$ 。证毕。

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质5: 设有 $n \times n$ 矩阵 A 和 B , 当且仅当 $AB = BA$ 时 (即: A 和 B 可交换), 有

$$e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t}$$

而当 $AB \neq BA$ 时, 则有 $e^{At} \cdot e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$ 。

- 证明: 根据定义, 有:

$$\begin{aligned} & e^{(A+B)t} - e^{At} \cdot e^{Bt} \\ &= \frac{BA - AB}{2!} t^2 + \frac{BA^2 + ABA + B^2A + BAB - 2A^2B - 2AB^2}{3!} t^3 + \dots \end{aligned}$$

上式仅当 $AB = BA$ 时为0。

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质6: 若 A 为对角阵, 即 $A = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

则有:

$$e^{At} = \phi(t) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda_1^k & & 0 \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \cdot \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质7: 若 A 能通过非奇异变换进行对角化, 即 $T^{-1}AT = \Lambda$, 则有:

$$e^{At} = \phi(t) = Te^{At}T^{-1}$$

- 证明: 根据 e^{At} 的定义 $e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$

由于 A 能通过非奇异变换进行对角线化

$$T^{-1}AT = \Lambda$$

$$T^{-1}A^2T = T^{-1}AT \cdot T^{-1}AT = \Lambda^2$$

$$\vdots$$

$$T^{-1}A^kT = (T^{-1}AT) \cdots (T^{-1}AT) = \Lambda^k$$

于是有:

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

$$\begin{aligned} T^{-1}e^{At}T &= T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k A^k\right)T = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k T^{-1}A^kT \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k (T^{-1}AT)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k \Lambda^k \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k \lambda_1^k & & & 0 \\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k \lambda_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = e^{\Lambda t} \\ T^{-1}e^{At}T &= e^{\Lambda t} \quad \longrightarrow \quad e^{At} = \phi(t) = Te^{\Lambda t}T^{-1} \end{aligned}$$

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质8: 若 A 为约当型矩阵

$$A = J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

则可得:

$$e^{Jt} = \phi(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- 证明: 与性质6类似。

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质9: 若 A 能通过非奇异变换变成约当标准型, 即 $T^{-1}AT = J$, 则有:

$$e^{At} = \phi(t) = Te^{Jt}T^{-1}$$

- 证明: 与性质7类似。

模块2 线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1 齐次方程的解（课本2.7）

TD2-1-2 非齐次方程的解（课本2.7）

TD2-2-1 状态转移矩阵的定义性质（课本2.8）

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质（课本2.8）

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算方法（课本2.7）

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 在具体分析线性定常系统时，不可避免地要遇到计算 $\phi(t)$ 和 e^{At} 的问题。下面讨论状态转移矩阵的几种计算方法：
- 1. 直接利用 e^{At} 的级数展开。根据矩阵指数的定义， e^{At} 可以展开成幂级数：

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (*)$$

即：

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{At}{2} \left(\frac{At}{1!} \right) + \frac{At}{3} \left(\frac{A^2 t^2}{2!} \right) + \cdots + \frac{At}{k} \left(\frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right) + \cdots \quad (**)$$

显然，即使 A 结构简单，利用上式计算也并不容易。式 (**) 中圆括号内每一项完全等于前一项。它给出了一种方便的递推方案，易于编程实现。

- 然而，由于 e^{At} 的收敛较慢，与其它方法相比，这种方法计算时间较长。

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 2. 利用 Laplace 反变换法求 e^{At}

$$e^{At} = L^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right]$$

这种方法归结为计算 $(sI - A)^{-1}$ ， $(sI - A)^{-1}$ 称为预解矩阵。

根据如下公式计算：

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

这是一种最为常用的计算方法，在维数较小时非常实用、然而，在维数较大时计算比较复杂，需要熟悉常用的 Laplace 反变换。

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 3. 变换 A 为对角标准型或约当标准型来计算 e^{At}
- 情形 1: A 特征值互异。当 A 有两两相异特征值时, 必能找到非奇异矩阵 T , 使下式成立:

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

由性质7可得: $e^{At} = \phi(t) = T \cdot e^{\Lambda t} \cdot T^{-1}$

- 例: 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 求 e^{At} 。
- 解: $f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$$\text{由 } A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 由 $A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

• 于是得:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathbf{T}e^{At}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 情形 2: A 的特征值有重根。在特征值有重根的情况下, 根据性质 9 可知

$$e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1} \quad \text{其中: } J = T^{-1}AT$$

- 例: 已知 $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 e^{At}
- 解: 先求 A 的特征值: $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & -1 \\ 4 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)^2 + 4 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 4)$

即得: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -4$

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

• 则: $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$ (性质 8)

• 进一步可知: $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ $T^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 11 & 7 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

• 所以 $e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 11 & 7 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} + e^{-t} & e^{-4t} \\ 2e^{-t} & 2e^{-t} + 3e^{-t} & -e^{-4t} \\ 4e^{-t} & 4te^{-t} + 8e^{-t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 11 & 7 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 6te^{-t} + 4e^{-4t} & 4e^{-t} - 3te^{-t} - 4e^{-4t} & -e^{-t} + 3te^{-t} + e^{-4t} \\ 4e^{-t} - 12te^{-t} - 4e^{-4t} & 5e^{-t} - 6te^{-t} + 4e^{-4t} & e^{-t} + 6te^{-t} - e^{-4t} \\ -4e^{-t} - 24te^{-t} + 4e^{-4t} & 4e^{-t} - 12te^{-t} - 4e^{-4t} & 8e^{-t} + 12te^{-t} + e^{-4t} \end{bmatrix} \quad (\text{性质 9}) \end{aligned}$$