《微积分A2》第1周第1课

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年02月17–21日

联系方式

办公室：理科楼A323

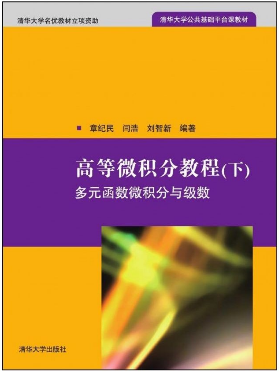
电话：62796895(O), 13521891215(M)

微信群名：微A2甲YLJ, 微A2乙YLJ

email: lyang@mail.tsinghua.edu.cn

教材

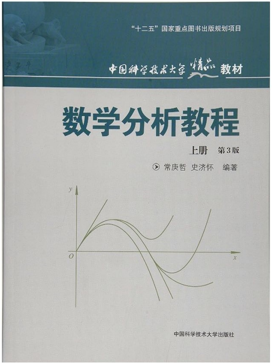
教材: 《高等微积分教程》(下), 章纪民, 闫浩, 刘智新编著, 清华大学出版社, 2015, (价39元, 教材中心有售)

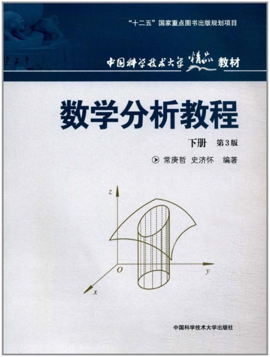


参考书 1

1. 《数学分析教程》上下两册，第三版，常庚哲史济怀编著.

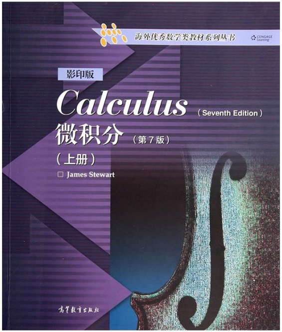
第二版的电子版已上载到网络学堂.

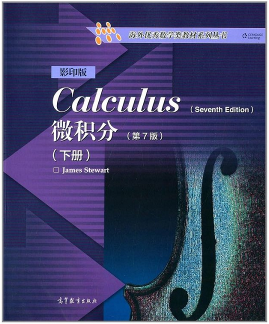




2. James Stewart, Calculus, 7th edition, 2012年, pp. 1381.

英文电子版已上载于网络学堂. 这本教材通俗易懂, 图文并茂, 说理透彻. 强烈推荐!

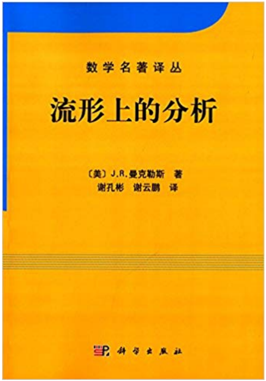




3. 《数学分析习题课讲义》上下两册，第二版，谢惠民等编著，

参考书 4

4. 《流形上的分析》，曼克勒斯(美)著



教学方式

鉴于当前的特殊时期，我们的远程上课方式采用：

观看老师上课录像 + 线上线下交流

具体做法如下：老师将制作好的上课录像(每周五个学时，对应有五个mp4文件)，以及上课讲义(每周也有五个pdf文件)，通过网络网络学堂，提前传送给同学们．请大家从头到尾认真观看上课录像，仔细研读上课讲义．然后独立完成本周所布置的作业．有需要可随时与老师和助教交流．

助教信息

陈付恺，数学系博士生，cfk19@mails.tsinghua.edu.cn

谷夏，数学系博士生，gux19@mails.tsinghua.edu.cn

朱雨薇，数学系博士生，zhuyw18@mails.tsinghua.edu.cn

周武爱，自动化系博士生，zwa17@mails.tsinghua.edu.cn

四位助教均已实名加入了两个班的微信群：

微A2甲YLJ，微A2乙YLJ

作业，线上和线下答疑

<u>作业</u>：每周布置一次作业，同学们从第二周开始，每周周一之前提交上一周的作业. 作业通过网络学堂提交. 助教也通过网络学堂，将批改好的作业返还给大家.

<u>线上答疑</u>：在我们两个班上课时间段，即每周周一 9:50-12:15，周三 8:00-9:35，13:30-15:05，周五 9:50-12:15，老师将开启腾讯(或 zoom)会议模式，在线回答同学们的问题.

<u>线下答疑</u>：除了在线答疑之外，大家还可以在任何时间通过微信向老师和助教提出任何问题. 必要时可将问题写在纸上，然后拍照发微信.

考试及成绩

期中考试: 2020年4月18日(周六)下午13:30–15:30，细节待定

成绩评定: 20% 作业成绩 + 30% 期中成绩 + 50% 期末成绩

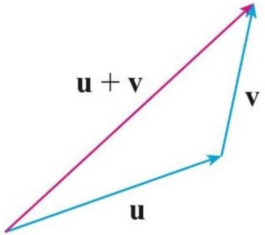
为简洁计考虑欧氏空间 $\mathbb{R}^2$, 其定义为 $\mathbb{R}^2 \triangleq \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$, 它的元素 (x, y) 常称作点或向量. 其上的加法与数乘定义如下

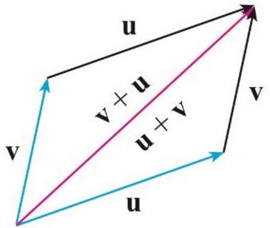
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \triangleq (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$c(a, b) \triangleq (ca, cb).$$

可以验证, 集合 $\mathbb{R}^2$ 关于上述加法和数乘构成一个线性空间.

加法的三角形法则，平行四边形法则

欧氏空间中的点和向量可看作同义语. 在线性代数课程里，我们知道两个点(或向量)的加法满足三角形法则，或平行四边形法则. 如图





$\mathbb{R}^2$ 的内积, 范数以及距离

欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中的任意两点 $\alpha_1 = (x_1, y_1)$, $\alpha_2 = (x_2, y_2)$ 标准内积为 $(\alpha_1, \alpha_2) \triangleq x_1x_2 + y_1y_2$. 任意点 $\alpha = (x, y)$ 的范数即长度定义为 $\|\alpha\| \triangleq \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{x^2 + y^2}$. 任意两点 α_1 和 α_2 的距离定义为 $\rho(\alpha_1, \alpha_2) \triangleq \|\alpha_1 - \alpha_2\|$, 即

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) \triangleq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

不难证明，上述所定义的距离具有如下性质：对任意三点α_1，α_2，α_3，

(i) 正定性：$\rho(\alpha_1,\alpha_2)\geq 0$；等号成立，当且仅当$\alpha_1=\alpha_2$；

(ii) 对称性：$\rho(\alpha_1,\alpha_2)=\rho(\alpha_2,\alpha_1)$；

(iii) 三角不等式：$\rho(\alpha_1,\alpha_2)\leq\rho(\alpha_1,\alpha_3)+\rho(\alpha_3,\alpha_2)$.

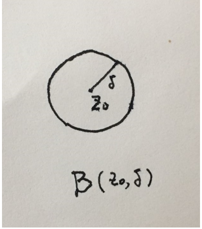
证明留作习题. 见习题1.1第1题(第7页).

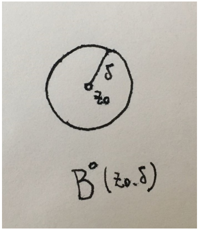
邻域，去心邻域

Definition

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. (i) 称点集 $\{x \in R^n, \|x_0 - x\| < \delta\}$ 为点 x_0 的 δ (开)邻域，也称作(开)球域，常记作 $B(x_0, \delta)$

(ii) 称点集 $\{x \in R^n, 0 < \|x_0 - x\| < \delta\}$ 为点 x_0 的去心 δ 邻域. 常记作 $B^\circ(x_0, \delta)$. 显然 $B^\circ(x_0, \delta) = B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$.





Definition

定义: 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集. (i) 点 $z_0 \in \mathbb{R}^n$ 称为点集 Ω 的内点(interior point), 如果 Ω 包含 z_0 的一个邻域 $B(z_0, \delta)$;

(ii) 集合 Ω 所有内点构成的集合称为 Ω 的内部, 常记作 Ω°;

(iii) 点 $z_0 \in \mathbb{R}^n$ 称为点集 Ω 的外点(exterior point), 如果 z_0 是余集 $\Omega^C = \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ 的内点;

(iv) 集合 Ω 所有外点构成的集合称为 Ω 的外部;

(v) 集合 Ω 称为开的(open), 如果 Ω 的每个点都是 Ω 的内点, 即 $\Omega = \Omega^\circ$;

(vi) 集合 Ω 称为闭的(closed), 如果其余集 Ω^C 是开集.

开集与闭集的例子

Example

(i) 我们约定，空集(常记作 $\emptyset$ 或 ϕ) 也称为开集. 由这个约定知欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 和空集 $\emptyset$ 既是开集又是闭集.

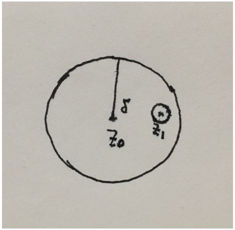
(ii) 上半开平面 $\{(x,y), y>0\} \subset \mathbb{R}^2$ 是开集，其余集下半开平面 $\{(x,y), y\le 0\} \subset \mathbb{R}^2$ (含 x 轴) 是闭集.

(iii) 平面 $\mathbb{R}^2$ 去掉一个点后的集合是开集.

(vi) 存在许多既不开也不闭的集合. 例如平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点集 $\{0<\|z\|\le 1\}$ 就是.

(vii) 任意邻域 $B(z_0,\delta)$ 为开集.

证明: 对于任意 $z_1\in B(z_0,\delta)$, 取 $0<\varepsilon<\delta-\rho(z_0,z_1)$, 则开球 $B(z_1,\varepsilon)\subset B(z_0,\delta)$.



因此 z_1 是邻域 $B(z_0,\delta)$ 的内点. 从而 $B(z_0,\delta)$ 的每个点都是内点. 这就证明了 $B(z_0,\delta)$ 是开集. 证毕. □

Theorem

定理: (i) 任意多个开集的并是开集;

(ii) 有限多个的开集的交 (intersection) 是开集;

(iii) 任意多个闭集的交是闭集;

(iv) 有限多个闭集的并 (union) 是闭集.

证明留作习题. 见习题 1.2 题 3(3), 题 4(4).

Definition

定义: 给定点集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

(i) 点 $z_0 \in \mathbb{R}^n$ 称为集合 Ω 的边界点(boundary point), 如果点 z_0 的每个邻域 $B(z_0, r)$ 既含有 Ω 的点, 又含有余集 Ω^C 的点;

(ii) 集合 Ω 所有边界点构成的集合称为 Ω 的边界, 常记作 $\partial\Omega$;

(iii) 并集 $\Omega \cup \partial\Omega$ 称为集合 Ω 的闭包(closure), 常记作 $\bar{\Omega}$.

例子

Example

(i) 平面上开圆盘 $\|z - z_0\| < r$ 的边界是圆周 $\|z - z_0\| = r$. 其闭包为 $\|z - z_0\| \leq r$, 称为闭圆盘.

(ii) 全空间 $\mathbb{R}^n$ 没有边界点, 故它的边界是空集, 即 $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$.

(iii) 单点集 $\Omega = \{a\}$ 的边界就是其自身, 即 $\partial\Omega = \Omega = \{a\}$.

Definition

(i) 点集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为(道路)连通的(connected), 如果对于 Ω 中的任意两点, 存在一条完全包含在 Ω 的折线连接这两个点.

(ii) 若点集 Ω 不是(道路)连通的, 则称它为非连通的.

(iii) 连通的非空开集称为开区域(或简称区域).

(iv) 开区域的闭包称为闭区域.

开区域与闭区域例子

Example

(i) 全空间 $\mathbb{R}^n$ 是开区域, 也是闭区域;

(ii) 每个开邻域 $\|z - z_0\| < r$ 都是开区域, 其闭包 $\|z - z_0\| \le r$ 都是闭区域;

(iii) 上半平面 $\{(x, y), y > 0\}$ (不含 x 轴) 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开区域,

(iv) 下半平面 $\{(x, y), y \le 0\}$ (含 x 轴) 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭区域.

Definition

设 $\{z_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 为一点列. 若存在 $z^* \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\rho(z_k, z^*) \to 0$, 或 $\|z_k - z^*\| \to 0$, 当 $k \to +\infty$, 则称点列 $\{z_k\}$ 收敛于点 z^*, 并记作 $z_k \to z^*$ 或 $\lim_{n\to+\infty} z_k = z^*$.

有理由相信, $\mathbb{R}^n$ 中的点列收敛, 当且仅当点列的 n 个坐标构成的 n 个数列均收敛. 以下是 $n = 3$ 时的结论.

Theorem

点列 $\alpha_k = (x_k, y_k, z_k) \to \alpha^* = (x^*, y^*, z^*)$, 当且仅当 $x_k \to x^*$, $y_k \to y^*$ 和 $z_k \to z^*$.

Proof.

$(x_k, y_k, z_k) \to (x^*, y^*, z^*)$

$\iff \sqrt{(x_k - x^*)^2 + (y_k - y^*)^2 + (z_k - z^*)^2} \to 0$

$\iff |x_k - x^*| \to 0,\ |y_k - y^*| \to 0,\ |z_k - z^*| \to 0$

此即 $x_k \to x^*$, $y_k \to y^*$, $z_k \to z^*$. 证毕. $\square$

$\mathbb{R}^n$ 的完备性 (completeness)

回忆实数集 $\mathbb{R}$ 具有完备性，是指 $\mathbb{R}$ 中的每个 Cauchy 序列均收敛．实数序列 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ 称为 Cauchy 序列，如果这个序列满足条件：对任意 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使得对任意正整数 $i, j \geq N$，均有 $|x_i - x_j| < \varepsilon$．欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 继承了实数集 $\mathbb{R}$ 的完备性．

Theorem

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的，即 $\mathbb{R}^n$ 中的每个 Cauchy 序列均收敛．

定理证明

Proof.

证明: 为简洁计, 只证明情形 $n = 2$ 时的结论. 设 $\{(x_k, y_k)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 Cauchy 点列, 则显然两个数列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 序列. 根据 $\mathbb{R}$ 的完备性可知数列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 均收敛. 设 $x_k \to x^*$, $y_k \to y^*$, 则 $(x_k, y_k) \to (x^*, y^*)$. 故 Cauchy 序列 $\{(x_k, y_k)\}$ 收敛, 且收敛于点 (x^*, y^*). 证毕. $\square$