第2章函数的极限与连续

学习材料（3）

1 函数

1.1 函数的基本概念

定义 设$D\subset R$，$D\neq\emptyset$. 若存在对应规则f，使得$\forall x\in D$，$\exists$唯一$y\in R$满足

$$y=f(x),$$

则称f是从D到R的一个函数，记作$f:D\to R$，
称$D(f)=:D$为函数f的定义域(Domain);
称集合$R(f)=:\{f(x)|x\in D\}$为函数f的值域（Range）

注. 确定一个函数两个要素：定义域，对应规则f.

偶函数：称$f:D\to R$为偶函数，若$\forall x\in D$，都有$-x\in D$，且$f(-x)=f(x)$.
(非偶函数？)

奇函数：称$f:D\to R$为奇函数，若$\forall x\in D$，都有$-x\in D$，且$f(-x)=-f(x)$.
(非奇函数？)

单调增函数：称$f:D\to R$为单调增函数，若$\forall x_1,x_2\in D$，由$x_1<x_2$有$f(x_1)<f(x_2)$.
(非单调增函数？)

单调减函数：称$f:D\to R$为单调减函数，若$\forall x_1,x_2\in D$，由$x_1<x_2$有$f(x_1)>f(x_2)$.
(非单调减函数？)

单调非增函数：称$f:D\to R$为单调非增函数，若$\forall x_1,x_2\in D$，由$x_1<x_2$有$f(x_1)\geq f(x_2)$.

单调非减函数：称$f:D\to R$为单调非减函数，若$\forall x_1,x_2\in D$，由$x_1<x_2$有$f(x_1)\leq f(x_2)$.

注: 单调增函数、单调减函数、单调非增函数、单调非减函数统称单调函数。

周期函数：称$f:D\to R$为周期函数，若$\exists T>0$，使得$\forall x\in D$，都有$x+T,x-T\in D$，且$f(x+T)=f(x)$.
(非周期函数？)

有界函数：称$f:D\to R$为有界函数，若$\exists M>0$，使得$\forall x\in D$，都有$|f(x)|\leq M$. 记

$$\sup_{x\in D}f(x)=:\sup\{f(x)|x\in D\},\quad \inf_{x\in D}f(x)=:\inf\{f(x)|x\in D\}.$$

(无界函数？称$f: D \to R$为无界函数，若$\forall M > 0$，$\exists x_M \in D$，使得$|f(x_M)| \geq M$.)

单射：设$f: D \to R$. $\forall x_1, x_2 \in D(f)$，若$x_1 \neq x_2$，则必有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称$f$是单射。

反函数：设$f: D(f) \to R(f)$是单射，则$\forall x \in R(f)$，必$\exists$ 唯一$y \in D(f)$，使得

$$x = f(y),$$

由此确定一个法则

$$x \in R(f) \mapsto y \in D(f)$$

称此法则为f的反函数，记作f^{-1}.

注1. $D(f^{-1}) = R(f),\ R(f^{-1}) = D(f)$.

注2. $y = f(x)$的图形与其反函数$y = f^{-1}(x)$的图形关于直线$y = x$对称，画图。因为若点(a, b)的坐标满足$b = f(a)$，即点(a, b)在曲线$y = f(x)$上，则$a = f^{-1}(b)$，即点(b, a)在曲线$y = f^{-1}(x)$上。

例1判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

(2) $f(x) = \begin{cases} x(1-x) & if \quad x > 0 \\ x(1+x) & if \quad x < 0, \end{cases}$

解：

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln\left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right] \\ &= -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

故f是奇函数;

(2)当$x > 0$时，

$$f(-x) = -x[1 + (-x)] = -x(1-x) = -f(x),$$

当$x < 0$时，

$$f(-x) = -x[1 - (-x)] = -x(1+x) = -f(x),$$

故f是奇函数。

例2 设函数$y = f(x)$, $x \in R$的图形关于直线$x = a$、$x = b$均对称$(a < b)$，求证：函数$y = f(x)$, $x \in R$是周期函数，并求其周期。

解：由已知(画图)

$$f(a-x) = f(a+x), \quad f(b-x) = f(b+x) \quad \forall x.$$

于是

$$\begin{aligned} & f(x) = f(a + (x-a)) \\ = \ & f(a - (x-a)) = f(2a - x) = f(b + (2a - x - b)) \\ = \ & f(b - (2a - x - b)) = f(x + 2(b-a)), \end{aligned}$$

故f是周期函数，其周期为$2(b-a)$.

例3 证明$\sin|x|$是非周期函数。

解：(画图)反证法。若不然，则$\exists T>0$，使得

$$\sin|x+T|=\sin|x| \quad \forall x\in R.$$

现取$x=\frac{\pi}{2}$，有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=1,$$

即

$$\cos T=1,$$

故$T=2k\pi$，其中k是正整数。再取$x=-\frac{\pi}{2}$，有

$$\sin\left|-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right|=1,$$

即

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1,$$

也即

$$-1=1,$$

但这是个矛盾。该矛盾说明原假设不对，所以$\sin|x|$是非周期函数。

例4 设$f(x)=\begin{cases} x & if \quad x<1 \\ x^2 & if \quad 1\le x\le 4 \\ 2^x & if \quad 4<x, \end{cases}$

求f^{-1}.

解：
由$y=x,\ x<1$可得$x=y,\ y<1$;

由$y=x^2,\ 1\le x\le 4$可得$x=\sqrt{y},\ 1\le y\le 16$;

由$y=2^x,\ 4\le x$可得$x=\log_2 y,\ 16<y$;

于是得到f的反函数f^{-1}如下：$f^{-1}(x)=\begin{cases} x & if \quad x<1 \\ \sqrt{x} & if \quad 1\le x\le 16 \\ \log_2 x & if \quad 16<x. \end{cases}$.

1.2 函数的基本运算

函数的复合：设$f:D(f)\to R$，$g:D(g)\to R$，其中$D(f),D(g)\subset R$. 如果$D(f)\cap R(g)\neq\emptyset$，则可确定集合

$$D=:\{x\in D(g)|g(x)\in D(f)\}$$

上的一个函数$x\mapsto f(g(x))$，称该函数为f和g的复合函数，记作$f\circ g$，即

$$f\circ g(x)=f(g(x)),\quad x\in D=:\{x\in D(g)|g(x)\in D(f)\}.$$

画图。

注1. 若f是单射，则

$$f^{-1}\circ f(x)=x,\quad \forall x\in D(f);\quad f\circ f^{-1}(y)=y,\quad \forall y\in R(f).$$

函数的四则运算：设$f:D(f)\to R$，$g:D(g)\to R$，定义

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\quad x\in D(f)\cap D(g)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\quad x\in D(f)\cap D(g)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in D(f)\cap D(g)且g(x)\neq 0$$

例1 设$f(x)=\begin{cases} e^x & if\quad x<1 \\ x & if\quad 1\le x,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x+2 & if\quad x<0 \\ x^2-1 & if\quad 0\le x,\end{cases}$

求$f\circ g$.

解：$\forall x\in R$，

$$f\circ g(x)=f(g(x)) = \begin{cases} f(x+2) & if\quad x<0 \\ f(x^2-1) & if\quad 0\le x.\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} e^{x+2} & if\quad x<0, x+2<1 \\ x+2 & if\quad x<0, 1\le x+2 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} e^{x^2-1} & if\quad 0\le x, x^2-1<1 \\ x^2-1 & if\quad 0\le x, 1\le x^2-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{x+2} & if\quad x<-1 \\ x+2 & if\quad -1\le x<0 \\ e^{x^2-1} & if\quad 0\le x<\sqrt{2} \\ x^2-1 & if\quad \sqrt{2}\le x. \end{cases}$$

1.3 初等函数

六类基本初等函数

(1)常值函数$f(x)\equiv c,\quad x\in R$;

(2)幂函数$f(x)=x^\mu$，当$\mu\in N$时，则$D(f)=R$；但对一般的$\mu\in R$，总有$D(f)\supset\{x\in R\mid x>0\}$;

(3)指数函数$f(x)=a^x$，其中$a>0$, $a\neq 1$;

(4)对数函数$f(x)=\log_a x$，其中$a>0$, $a\neq 1$, $x>0$;

(5)三角函数$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$;

(6)反三角函数$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.

注1.

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

所有能用上述基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而构成的函数称之为初等函数。例如

双曲正弦 $\sinh x=:\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;

双曲余弦 $\cosh x=:\frac{e^x+e^{-x}}{2}$;

双曲正切 $\tanh x=:\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1.4 凸函数与凹函数

定义(凸函数) 设I为R中一个区间，f是定义在I的函数。若$\forall x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2$及$\forall\mu\in(0,1)$都有

$$f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\le \mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2),$$

则称f是（向下）凸的。

注1 凸函数的几何意义?

例1. 函数$f(x)=x^2$是凸函数。画图。

证明：$\forall x_1,x_2\ (x_1<x_2)$及$\forall\mu\in(0,1)$，都有

$$\begin{aligned}
& f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)-\mu f(x_1)-(1-\mu)f(x_2)\\
= & [\mu x_1+(1-\mu)x_2]^2-\mu x_1^2-(1-\mu)x_2^2\\
= & \mu[\mu-1]x_1^2-(1-\mu)\mu x_2^2+2\mu(1-\mu)x_1x_2\\
= & \mu[\mu-1]\left[x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\right]\\
= & \mu[\mu-1]\left[x_1-x_2\right]^2\\
\le & 0,
\end{aligned}$$

故

$$f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\le \mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2),$$

因此f是（向下）凸的。

注2 可以证明：
函数$f:I\to R$是凸函数$\Longrightarrow$
$\forall x_1,x_2\cdots x_n\in I$及任意一组满足$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n=1$的非负实数$\mu_1,\mu_1,\cdots,\mu_n$，都有

$$f(\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_nx_n)\le\mu_1f(x_1)+\mu_2f(x_2)+\cdots+\mu_nf(x_n).$$

证：我们只证$n=3$的情形。若$\mu_3=0$，结论显然。若$\mu_3\ne0$，则

$$\begin{aligned}
f(\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3) &= f\left(\mu_1x_1+(\mu_2+\mu_3)\left(\tfrac{\mu_2}{\mu_2+\mu_3}x_2+\tfrac{\mu_3}{\mu_2+\mu_3}x_3\right)\right)\\
&\le \mu_1f(x_1)+(\mu_2+\mu_3)f\left(\tfrac{\mu_2}{\mu_2+\mu_3}x_2+\tfrac{\mu_3}{\mu_2+\mu_3}x_3\right)\\
&\le \mu_1f(x_1)+(\mu_2+\mu_3)\left[\tfrac{\mu_2}{\mu_2+\mu_3}f(x_2)+\tfrac{\mu_3}{\mu_2+\mu_3}f(x_3)\right]\\
&= \mu_1f(x_1)+\mu_2f(x_2)+\mu_3f(x_3).
\end{aligned}$$

命题 设I为R中一个区间，f是定义在I的函数。$f: I\to R$是凸的
$\Longleftrightarrow$ $\forall x_1,\xi,x_2\in I,\ x_1<\xi<x_2$都有

$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi},$$

$\Longleftrightarrow$ $\forall x_1,\xi,x_2\in I,\ x_1<\xi<x_2$都有

$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

$\Longleftrightarrow$ $\forall x_1,\xi,x_2\in I,\ x_1<\xi<x_2$都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}.$$

注： 上命题三个等价陈述的的几何意义？

证明：(1). $\forall x_1,\xi,x_2\in I,\ x_1<\xi<x_2$，则

$$f(\xi)\le\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left[\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}+\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}\right]f(\xi)\le\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),$$

即

$$\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}[f(\xi)-f(x_1)]\le\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(\xi)],$$

也即

$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}.$$

(2). $\forall x_1,\xi,x_2\in I,\ x_1<\xi<x_2$，则

$$f(\xi)\le\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

$\Longleftrightarrow$

$$f(\xi)\le\left[1-\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}\right]f(x_1)+\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),$$

即

$$f(\xi)-f(x_1)\le\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)],$$

也即

$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

(3). $\forall x_1,\xi,x_2\in I,\ x_1<\xi<x_2$，则

$$f(\xi)\le\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

$\Longleftrightarrow$

$$f(\xi)\le\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}f(x_1)+\left[1-\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}\right]f(x_2),$$

即

$$\frac{x_2-\xi}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)]\le f(x_2)-f(\xi),$$

也即

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}.$$

定义(凹函数) 设I为R中一个区间，f是定义在I的函数。若$\forall x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2$及$\forall\mu\in(0,1)$都有

$$f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\ge\mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2),$$

则称f是（向下）凹的。

2 函数极限

2.1 函数极限概念及函数极限的性质

例1

$$f(x)=\begin{cases}x^3+5x^2-15x-4, & 当x\ne 2,\\ 3, & 当x=2.\end{cases}$$

当x无限趋于2时，$f(x)$无限趋于-6时。

问题： “x与2接近到什么程度时，才能使$f(x)$与-6之间的差小于0.1？”

解：我们的问题是找正数δ，使得当$|x-2|<\delta$且$x\ne 2$时(即当$0<|x-2|<\delta$时)，有

$$\underline{|f(x)-(-6)|<0.1},$$

即

$$|x^3+5x^2-15x+2|<0.1,$$

也即

$$\big|(x-2)(x^2+7x-1)\big|<0.1.$$

当$0<|x-2|<1$时，$1<x<3$，于是

$$|f(x)-(-6)|=\big|(x-2)(x^2+7x-1)\big|\le|x-2|(3^2+7\times 3+1)\le 31|x-2|,$$

故当$0<|x-2|<\frac{0.1}{31}=\frac{1}{310}$时，

$$|f(x)-(-6)|<0.1.$$

类似地，对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{1,\frac{\epsilon}{31}\}$，当$0<|x-2|<\delta$时，

$$|f(x)-(-6)|=\left|(x-2)(x^2+7x-1)\right|\le 31|x-2|<\varepsilon.$$

定义1 设f是定义在x_0某个空心邻域上的函数，A为一常数。如果$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称x趋于x_0时，$f(x)$的<u>极限</u>为A，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的几何解释？

注2 所以要求$0<|x-x_0|$即$x\neq x_0$的原因：

1. f在x_0处不一定有定义；
2. 即使$f(x_0)$有定义，$f(x_0)$与f在x_0处的极限值A也没有关系，即$|f(x_0)-A|$也不一定小。

类似可定义

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists M\in R$，当$x<M$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists M\in R$，当$x>M$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$;

$\lim\limits_{x\to \infty}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当$|x|>M$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

注3 以上定义的几何解释？

例2 （1）$\lim\limits_{x\to x_0}e^x=e^{x_0}$；（2）当$x_0>0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$.

证:

例3 设f是定义在x_0某个空心邻域上的函数，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件是两个单侧极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等。

证明：必要性是显然的。

充分性。设

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

$\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$知，$\exists \delta_1 > 0$，当$x_0 - \delta_1 < x < x_0$时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon;$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$知，$\exists \delta_2 > 0$，当$x_0 < x < x_0 + \delta_2$时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

下面讨论函数极限的性质，仅以极限过程$\to x_0$为例，其它五种极限过程对应的结论及证明方法类似。

性质1（唯一性）
若f在x_0处存在极限，则其极限值是唯一的。

性质2（局部有界性）
若f在x_0处存在极限，则f在x_0附近有界，即$\exists \delta_0 > 0$，$\exists M_0 > 0$，当$|x - x_0| < \delta_0$时，有

$$|f(x)| \le M_0.$$

性质3（局部保序性）
设$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x\to x_0} g(x) = B$.

(1). 若$A > B$，则$\exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有

$$f(x) > g(x).$$

(2). 若$\exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，$f(x) \ge g(x)$，则

$$A \ge B.$$

性质4（夹挤原理）
设定义在x_0某个空心邻域上的函数f, g, h满足

$$f(x) \le g(x) \le h(x).$$

若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A,$$

则

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A.$$

性质5（四则运算）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

(1).

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.$$

(2).

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B.$$

(3) 若$B\neq 0$，

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{A}{B}.$$

性质6（复合函数极限）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，且当$x\neq x_0$时$g(x)\neq u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x)=A.$$

证：（画图）$\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，$\exists\delta>0$，当$0<|u-u_0|<\delta$时，

$$|f(u)-A|<\varepsilon.$$

对于上述$\delta>0$，再由$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$及$x\neq x_0$时$g(x)\neq u_0$知，$\exists\delta_1>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，有

$$|g(x)-u_0|<\delta \text{ 且 } 0<|g(x)-u_0|$$

即

$$0<|g(x)-u_0|<\delta,$$

于是

$$|f\circ g(x)-A|=|f(g(x))-A|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x)=A.$$

注5

条件“当$x\neq x_0$时$g(x)\neq u_0$”是重要的，否则，在极限过程“$x\to x_0$”中，有可能对某些$\tilde{x}$，有

$$g(\tilde{x})=u_0,$$

此时

1. $f\circ g(\tilde{x})=f(g(\tilde{x}))=f(u_0)$不一定有定义（因为$f$在$u_0$处不一定有定义）；
2. 即使$f\circ g(\tilde{x})=f(g(\tilde{x}))=f(u_0)$有定义，$|f\circ g(\tilde{x})-A|=|f(u_0)-A|$也不一定小。

注6

复合函数极限公式还可写成

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x) \xLeftarrow[\text{令 } u=g(x)]{} \lim_{u\to u_0} f(u)$$

（复合函数极限性质）若

1 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$;

2 当$x\neq x_0$ 时，$g(x)\neq u_0$;

3 极限 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ 存在.

定理1 设f是初等函数，$x_0 \in D(f)$，则

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to x_0^+) \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = f(x_0).$$

其中的极限过程视x_0为$D(f)$的内点（右端点、左端点）而定。

证明思路: 先对基本初等函数证明结论。然后对函数运算的次数（四则运算、复合运算）做归纳法，用性质5、性质6证明结论。

2.2 函数极限举例

例1 证明重要极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

证明：（画图）$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$，利用图形，有如下面积关系：

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x,$$

即

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

也即

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

而$\frac{x}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}$都是偶函数，故对$\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$，

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

即

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

因$\cos x$是初等函数，故

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

于是由函数极限的夹挤性得，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

例2

(1). 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=e.$$

(2). 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

证明：(1).

$$\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\right]$$

$\forall\varepsilon>0$，由$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$知，$\exists N_\varepsilon\in Z_+$，当$n>N_\varepsilon$时，有

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right|<\varepsilon.$$

取$M=N_\varepsilon+1$，当$x>M$时，有$[x]\geq N_\varepsilon+1>N_\varepsilon$，于是

$$\left|\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}-e\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=e.$$

(2). $\forall x\geq 2$，

$$\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}\quad\leq\quad\left(1+\tfrac{1}{[x]}\right)^{x}\leq\left(1+\tfrac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\tfrac{1}{[x]}\right),$$

$$\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}\quad\geq\quad\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{[x]}\geq\left(1+\tfrac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\frac{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)}.$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)\quad&=\quad\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)\\&=\quad e\cdot1=e,\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)}\quad&=\quad\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{[x]+1}\right)}\\&=\quad\tfrac{e}{1}=e,\end{aligned}$$

故由函数极限的夹挤性得，

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \xlongequal[\text{令 } u=-x]{} \lim_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u} \quad （\underline{函数极限定义}）$$

$$\xlongequal{} \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u-1}{u}\right)^{-u}$$

$$\xlongequal{} \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)$$

$$\Longleftarrow\!= e\cdot 1=e.$$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$及$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \xlongequal[\text{令 } u=\frac{1}{x}]{} \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} \quad （\underline{函数极限定义}）$$

$$\xlongequal{} e.$$

例3 设$a>0$, $a\neq 1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

解：令 $u=a^x-1$，则

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{u}{\log_a(1+u)}=\frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{\ln a}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \Longleftarrow\!= \lim_{u\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

（复合函数极限性质）

1 $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0\surd$;

2 当$x\neq 0$ 时，$a^x-1\neq 0$；$\surd$

3 极限 $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$ 存在.

$$\Longleftarrow\!= \frac{\ln a}{\lim\limits_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} \quad （函数极限四则运算性质）$$

$$\xlongequal{} \frac{\ln a}{\ln e}$$

$$\xlongequal{} \ln a.$$

例4 设$\mu \neq 0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu - 1}{x}$.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} \quad ==== \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x}$$

$$\Longleftarrow=== \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x} \quad \text{（函数极限的四则运算）}$$

$$\Longleftarrow=== \quad \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\cdot\lim_{x\to 0}\mu\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

（复合函数极限性质）

在第一极限式中，令$u=\mu\ln(1+x)$

1 $\lim\limits_{x\to 0} = \mu\ln(1+x) = \mu\ln(1+0) = 0\surd$;

2 当$x\neq 0$ 时，$\mu\ln(1+x)\neq 0$；$\surd$

3 极限 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}$ 存在.

$$==== \quad \ln e\cdot\mu\ln e = \mu.$$

例5 设$f:(a,b)\to R$是凸的，$x_0\in(a,b)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

证明：取$\delta_0=\min\{\frac{b-x_0}{2},\frac{x_0-a}{2}\}$, 则当$x\in(x_0,x_0+\delta_0)$时，由凸函数的等价叙述2和3知

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta_0)}{\delta_0}\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{f(x_0+\delta_0)-f(x_0)}{\delta_0},$$

即

$$f(x_0)+\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta_0)}{\delta_0}(x-x_0)\le f(x)\le f(x_0)+\frac{f(x_0+\delta_0)-f(x_0)}{\delta_0}(x-x_0),$$

从而由函数极限的夹挤性得

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

同理

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

于是由$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$和$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$得

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$