《微积分A2》第1周第2课

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年02月17–21日

$\mathbb{R}^n$ 的完备性 (completeness)

回忆实数集 $\mathbb{R}$ 具有完备性，是指 $\mathbb{R}$ 中的每个 Cauchy 序列均收敛．实数序列 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ 称为 Cauchy 序列，如果这个序列满足条件：对任意 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使得对任意正整数 $i, j \geq N$，均有 $|x_i - x_j| < \varepsilon$．欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 继承了实数集 $\mathbb{R}$ 的完备性．

Theorem

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的，即 $\mathbb{R}^n$ 中的每个 Cauchy 序列均收敛．

定理证明

Proof.

证明: 为简洁计, 只证明情形 $n = 2$ 时的结论. 设 $\{(x_k, y_k)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 Cauchy 点列, 则显然两个数列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 序列. 根据 $\mathbb{R}$ 的完备性可知数列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 均收敛. 设 $x_k \to x^*$, $y_k \to y^*$, 则 $(x_k, y_k) \to (x^*, y^*)$. 故 Cauchy 序列 $\{(x_k, y_k)\}$ 收敛, 且收敛于点 (x^*, y^*). 证毕. $\square$

Definition

定义: 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为有界的 (bounded), 如果存在正数 $M > 0$, 使得 $\|z\| \leq M, \forall z \in \Omega$; 点集 Ω 称为无界的 (unbounded), 如果它不是有界的.

注: 不难证明, 点集 Ω 无界, 当且仅当存在点列 $\{z_k\} \subset \Omega$, 使得 $\|z_k\| \to +\infty$, 当 $k \to +\infty$.

Theorem (B-W定理)

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的每个有界点列均有收敛子列.

定理证明

Proof.

证明: 只证 $n=2$ 的情形. 一般情形的证明类似. 设 $\{(x_k, y_k)\}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的有界点列, 则数列 $\{x_k\}$ 必有界. 根据实数集 $\mathbb{R}$ 的 B-W 定理, 可知数列 $\{x_k\}$ 含有收敛子列 $x_{k_j} \to x^*, j \to +\infty$. 考虑数列 $\{y_k\}$ 的子列 $\{y_{k_j}\}$. 显然它是有界数列. 再次利用 $\mathbb{R}$ 的 B-W 定理知, 数列 $\{y_{k_j}\}$ 有收敛子列 $y_{p_j} \to y^*, j \to +\infty$. 这里 $\{p_j\} \subset \{k_j\}$. 由此得到平面有界点列 $\{(x_k, y_k)\}$ 的一个收敛子列 $\{(x_{p_j}, y_{p_j})\}$, 且 $(x_{p_j}, y_{p_j}) \to (x^*, y^*), j \to +\infty$. 证毕. □

Definition

<u>定义</u>: 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点集 D 的直径, 常记作$\text{diam}(D)$, 定义为 $\text{diam}(D) \triangleq \sup\{\|p-q\|, p, q \in D\}$. 例如, 平面矩形的直径依定义就是矩形对角线的长度.

Theorem

设 F_k 为 $\mathbb{R}^n$ 的一列闭子集, $k = 1, 2, \cdots$. 若

(i) $\text{diam}(F_k) \to 0$, $k \to +\infty$,

(ii) $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_k \supseteq F_{k+1} \supseteq \cdots$,

则存在唯一一个点 z^* 属于每个闭集 F_k, 即 $z^* \in F_k$, $\forall k \geq 1$. 换言之, 无穷交集 $\cap_{k=1}^{+\infty} F_k$ 含且仅含一个点.

闭集的一个性质

Lemma

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为一个子集，则 D 为闭集，当且仅当 D 包含它的每个收敛点列的极限，即若点列 $\{x_k\} \subset D$ 收敛，且 $x_k \to x^*$，则 $x^* \in D$.

证明留作补充习题.

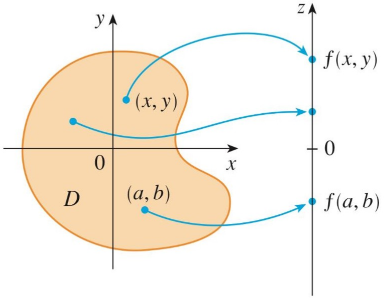
Proof.

证: 由于每个 F_k 均非空, 故对每个 k 可取 $x_k \in F_k$. 于是得到一个点列 $\{x_k\}$. 由集合 F_k 的包含关系知, $\{x_k, x_{k+1}, \cdots,\} \subset F_k$. 于是对任意两个正整数 $p, q \geq k$, $\|x_p - x_q\| \leq \mathrm{diam}(F_k) \to 0$, $k \to +\infty$. 这表明点列 $\{x_k\}$ 是 Cauchy 序列. 根据 $\mathbb{R}^n$ 的完备性知 $\{x_k\}$ 收敛. 设 $x_k \to x^*$. 根据上述引理 (闭集的性质) 可知 $x^* \in F_k, \forall k \geq 1$. 存在性得证. 设还存在 $x^{**} \in F_k, \forall k \geq 1$, 则 $\|x^{**} - x^*\| \leq \mathrm{diam}(F_k) \to 0$. 故 $\|x^{**} - x^*\| = 0$, 即 $x^{**} = x^*$. 唯一性得证. □

多元函数

Definition

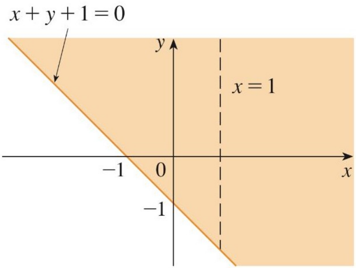
定义: 每个映射 $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 均称作一个 n 元函数, 其中 D 称为函数 f 的定义域. 通常 D 是开区域或闭区域. 如图为二元函数的示意图.



二元函数例子

Example

设 $f(x,y) \triangleq \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$，则 f 为二元函数，其定义域 D 如图，D 可写作 $D = \{(x,y), x+y+1 \geq 0, x \neq 1\}$.



Definition

定义: 每个映射 $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 均称作一个 n 元 m 维的向量值函数, 其中 D 也称为向量值函数 f 的定义域. 向量值函数通常以分量形式给出, 即 $f = (f_1, \cdots, f_m)$, 或写作

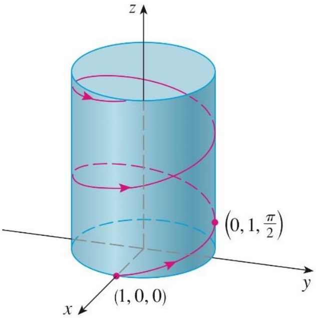
$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, \cdots, x_n), \\ \qquad \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n), \end{cases}$$

我们特别关注情形 $n = 1, 2$ 且 $m = 1, 2, 3$.

例：空间螺线

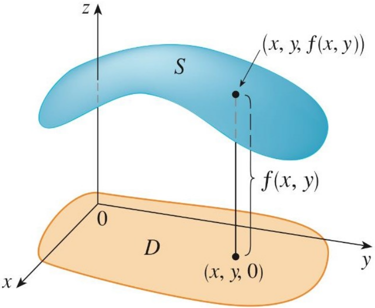
Example

例：定义向量值函数如下 $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. 这个向量值函数的象集合 $\{(\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}^1\}$ 称为一条空间螺线(helix). 如图.



Definition

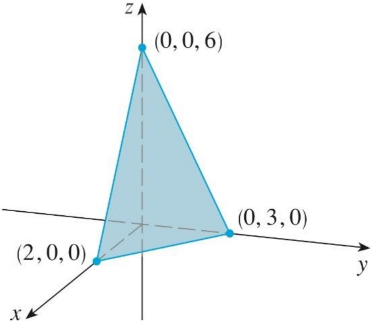
设 f 为二元函数，其定义域为 D，则称集合 $S = \{(x, y, f(x, y)),$ $(x, y) \in D\}$ 为函数 f 图像. 如图.



例一

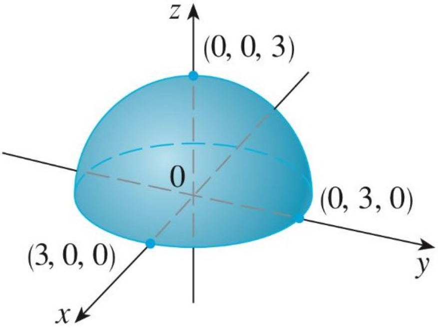
Example

例一：设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)\triangleq 6-3x-2y$, 即函数 f 为二元线性函数. 其图像如下.



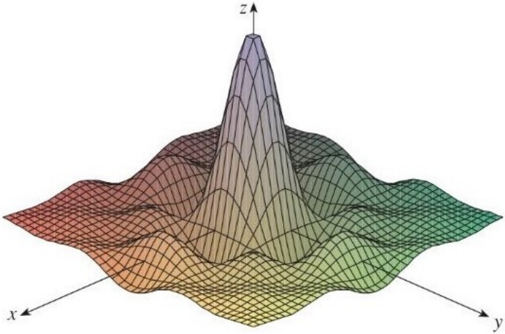
Example

例二: 二元函数 $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ 的图像 (半个球面), $x^2+y^2\le 9$.



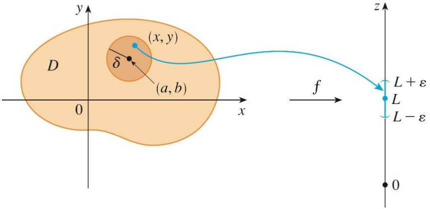
Example

例三：二元函数 $h(x,y) = \dfrac{\sin x \sin y}{xy}$ 的图像.

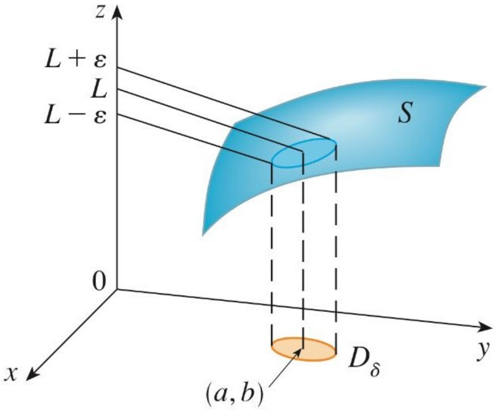


Definition

<u>定义</u>: 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在某点 $c = (a, b)$ 的一个去心邻域 $B^\circ(c, r)$ 上定义, $r > 0$. 若存在数 L, 使得对任意正数 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ (不妨设 $\delta \le r$), 使得 $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, $\forall (x, y) \in B^\circ(c, \delta)$, 则称 f 在点 (a, b) 处有极限值 L, 记作 $f(x, y) \to L$, 当 $(x, y) \to (a, b)$, 或 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$.



二元函数极限的几何意义



例: 考虑函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

在原点 $(0,0)$ 处是否存在极限. 极限存在时, 求这个极限.

解: 显然函数 $f(x,y)$ 在去心邻域 $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 上定义. 以下由定义来说明极限存在, 且极限为零. 考虑 $|f(x,y)-0|=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. 由于 $0\le x^2y^2\le\frac{1}{2}(x^4+y^4)$, 故

$$0\le\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{x^2+y^2}x^2+\frac{y^2}{x^2+y^2}y^2\right]$$

$$\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\|z\|^2.$$

例子续

对任意正数 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$, 只需 $\frac{1}{2}\|z\|^2 < \varepsilon$, 此即 $\|z\| < \sqrt{2\varepsilon}$. 故对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, 当 $0 < \|z\| < \delta$ 时, $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. 这就证明了函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处存在极限, 且极限值为零, 即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

解答完毕.

例二: 极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

不存在. 理由如下. 如果上述极限存在, 那么动点 (x,y) 以任何方式 (路径) 趋向原点 $(0,0)$ 时, 得到同一个极限值. 现考虑两个不同的路径, 动点沿着 x 轴和 y 轴趋向原点 $(0,0)$. 当动点 (x,y) 沿着 x 轴 (即 $y=0$) 趋向原点 $(0,0)$ 时,

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1, \quad (x,0)\to(0,0).$$

而当动点 (x, y) 沿着 y 轴 (即 $x = 0$) 趋向原点 $(0, 0)$ 时,

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \to -1, \quad (0, y) \to (0, 0).$$

这说明所考虑的极限不存在.

例三：判断极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

是否存在. 极限存在时求这个极限值.

解：由于

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = 3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 3|y|,$$

故所考虑的极限存在，且极限值为零. 解答完毕.

思考题：判断极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$ 是否存在.