讨论题涉及以下几个方面的内容

一． Taylor级数展开(幂级数展开)

二． Fourier级数展开

一． Taylor级数展开

注1．将一个(解析)函数展为 Taylor级数(幂级数), 最常用最方便的方法是对某个已知函数的Taylor级数, 经过逐项求导或逐项积分, 来得到所求的 Taylor级数. 很少情形下是通过计算函数的导数而得到Taylor级数, 除非各阶导数的计算很简单.

注2．应牢记几个基本函数的Taylor级数的展开式, 如 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ 等的Maclaurin 展式. 见课本第287页例6.3.6.

1. 设函数 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 的 Maclaurin 展式.

2. 设 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^3}$. 求导数 $f^{(101)}(0)$.

3. 求函数 $f(x)=\frac{x-1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1$ 处的 Taylor 展式, 并求其收敛域.

4. 求函数 $f(x)=xe^x$ 在 $x=1$ 处的 Taylor 展式.

5. 求函数 $f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 的 Maclaurin 展式.

二． Fourier 级数

注：Fourier 级数理论是一个很大数学领域, 通常称为调和分析. 同学们在本课程学习 Fourier 级数只需达到两个基本要求: (i) 写出给定函数的 Fourier 级数; (ii) 根据 Dirichlet 收敛定理(即课本第308页定理7.2.4), 确定 Fourier 级数的收敛情况.

1．求函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 这里函数 $f(x)$ 定义如下

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0], \\ x, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

2. 证明如下等式

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$$

3．设函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上的正弦级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$, 其和函数记作 $S(x)$. 求 $S(-\frac{1}{2})$ 的值.

4． 将函数 $f(x) = x^2$, $x \in (0, \pi)$.

(1) 将函数 $f(x)$ 展为余弦级数, 并且在区间 $[0, \pi]$ 上求余弦级数的和函数；

(2) 将函数 $f(x)$ 展为正弦级数, 并且在区间 $[0, \pi]$ 上求正弦级数的和函数.

5．求符号函数

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的 Fourier 级数.