微积分A2第十二次习题课讨论题参考解答　　杨利军　May 25-31, 2020

讨论题涉及以下几个方面的内容

一. 函数级数的收敛域

二. 一致收敛性

三. 幂级数的半径

四. 逐项求导与逐项求积分, 级数求和

一. 函数级数的收敛域

题1. 求如下函数级数的收敛域.(课本第292页习题第6章总复习题1(1))

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}. \tag{1}$$

解: 注意级数的一般项为 $u_n(x)$ 可写作

$$u_n(x) \triangleq \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} = \frac{1}{n^x}\left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \frac{1}{n^x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

由此可见,

$$\frac{u_n(x)}{(\frac{e}{n})^x} = \frac{\frac{1}{n^x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{(\frac{e}{n})^x} = \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^x} \to \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

级数(1)收敛, 当且仅当级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^x}{n^x}$$

收敛. 后一级数显然当 $x>1$ 时收敛, $x \le 1$ 时发散. 因此级数(1)的收敛域为 $(1,+\infty)$. 解答完毕.

题2. 求如下函数级数的收敛域

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n. \tag{2}$$

解: 由幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$ 可知, 级数(2)收敛, 当且仅当

$$-1 \leq \frac{x}{2x+1} < 1.$$

解第一个不等式 $-1 \leq \frac{x}{2x+1}$, 得

$$x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{1}{3}, +\infty). \tag{3}$$

解第二个不等式 $\frac{x}{2x+1} < 1$ 得

$$x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty). \tag{4}$$

由式(3)和(4)所确定的共同区间, 即级数(2)的收敛域为

$$(-\infty, -1) \cup [-\frac{1}{3}, +\infty).$$

解答完毕.

题3. 求如下函数级数的收敛域(课本第291习题第6章总复习题1(4)).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^x. \tag{5}$$

解：记 $\delta_n = \sqrt[n]{n} - 1$, 则 $\delta_n > 0$ 且 $\delta_n \to 0$, 当 $n \to +\infty$ 时. 由此得

$$1 + \delta_n = \sqrt[n]{n}, \quad \ln(1+\delta_n) = \frac{\ln n}{n}.$$

于是

$$\frac{\frac{\ln n}{n}}{\delta_n} = \frac{\ln(1+\delta_n)}{\delta_n} \to 1, \quad n \to +\infty.$$

从而对任意 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{(\frac{\ln n}{n})^x}{(\delta_n)^x} \to 1, \quad n \to +\infty.$$

根据比较判别法极限形式知, 级数(5)收敛, 当且仅当级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^x \tag{6}$$

收敛. 显然级数(6)收敛, 当且仅当 $x>1$ 收敛. 因此级数(5)收敛域为 $x>1$. 解答完毕

二． 一致收敛性

题1. 讨论如下级数在区间 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}. \tag{7}$$

解：显然对任意 $x\in[0,+\infty)$, 级数(7)都是Leibniz型级数, 故级数在区间$[0,+\infty)$ 上处处收敛. 记级数(7)的和函数为 $S(x)$, 部分和为 $S_n(x)$, 则根据 Leibniz 定理可知

$$|S(x)-S_n(x)|\leq\frac{1}{n+1+x}\leq\frac{1}{n+1},\quad \forall x\in[0,+\infty).$$

由 Weierstrass 判别法知级数(7)在区间$[0,+\infty)$上一致收敛. 解答完毕.

题2. 证明级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}ke^{-kx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

证明：反证. 假设级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}ke^{-kx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 则根据 Cauchy 一致收敛准可知, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N=N(\varepsilon)$ (与 x 无关), 使得

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}ne^{-nx}\right|<\varepsilon,\quad \forall n\geq N,\quad \forall p\geq 1,\quad \forall x>0.$$

取 $\varepsilon=1$, $p=1$, 则有

$$0<ne^{-nx}<1,\quad \forall n\geq N,\quad \forall x>0.$$

取 $n\geq N$ 充分大, 使得 $ne^{-1}>1$. 于是在上式中取 $x=\frac{1}{n}$, 则有 $ne^{-1}<1$. 矛盾. 证毕.

题3. 设函数 $u_k(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续, $\forall k\geq 1$. 假设级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x) \tag{8}$$

在开区间 (a,b) 上处处收敛, 但两数项级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(a) \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(b)$$

中至少有一个发散. 证明函数级数(8)在闭区间 (a,b) 上非一致收敛.
(注：这是课本第293页习题第6章总复习题4. 这道题可与课本第103页习题2.1 题6作比较. 由此可见函数项级数与含参数的广义积分有许多相似概念和结论.)

证明：为确定起见, 设假设 $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(b)$ 发散. 我们来证明级数(8)不可能在 (a,b) 上一致收敛. 反证. 假设级数(8)在 (a,b) 上一致收敛, 则根据 Cauchy 一致收敛准则知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 1, \quad \forall x \in (a,b).$$

于上式中令 $x \to b^-$, 并利用函数 $u_k(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的连续性知

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(b) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 1.$$

这表明级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(b)$ 收敛. 矛盾. 证毕.

三. 幂级数的收敛半径

题1. 假设幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(k+2)} (x-a)^k \tag{9}$$

在点 $x = 2$ 处条件收敛, 则幂级数(9)在点$x = \frac{1}{2}$ 的收敛情况是 (A)绝对收敛; (B)条件收敛; (C) 发散; (D)不能确定.

解：正确答案为 (C). 理由如下. 首先不难确定幂级数(9)的收敛半径为1. 这是因为

$$\overline{\lim}_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\ln(k+2)}} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\ln(k+2)}} = 1.$$

由假设幂级数(9)在点 $x=2$ 处条件收敛可知, 点 $x=2$ 位于它的收敛区间的端点, 且 $2-a=-1$, 即 $a=3$. 因此幂级数的收敛域为 $[2,4)$. 显然点 $x=\frac{1}{2}\not\in[2,4)$. 因此级数 $x=\frac{1}{2}$ 处发散. 解答完毕.

题2. 假设幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(x-a)^k \tag{10}$$

在点 $x=2$ 处收敛. 讨论实参数 a 的取值范围.

解: 显然幂级数的收敛半径为 1, 且幂级数(10)的收敛域为 $[a-1,a+1)$. 由于级数(10)在 $x=2$ 处收敛, 故 $a-1\le 2<a+1$. 由此得 $1<a\le 3$. 解答完毕.

题3. 假设级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k(x-1)^k \tag{11}$$

在 $x=-1$ 处条件收敛. 判断级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k \tag{12}$$

的收敛性: (A) 绝对收敛; (B) 条件收敛; (C) 发散; (D) 不定.

解: 正确答案为 (A), 即级数(12)绝对收敛. 理由如下. 由假设级数(11)在 $x=-1$ 处条件收敛可知, $x=-1$ 位于收敛区间的端点. 因此幂级数 $\sum_{k\ge1}a_kx^k$ 的收敛半径为 $R=2$, 其收敛区间为 $(-2,2)$. 因此点 $x=1$ 位于收敛开区间的内部. 因此幂级数在点 $x=1$ 处绝对收敛. 此即级数(12) 绝对收敛. 解答完毕.

题4. 记幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+1)x^k \tag{13}$$

的半径收敛为 R. 若设幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_kx^k \tag{14}$$

的收敛半径为 1. 问以下哪个结论正确? (A) $R=1$; (B) $R\le 1$; (C) $R\ge 1$.

解：结论(C)正确. 证明如下. 因为幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{+\infty} x^k$$

的收敛半径均为1. 根据级数的四则运算性质可知, 它们的和级数在区间 $(-1,1)$ 的每个点均收敛. 因此级数(13)的收敛半径至少是 1. 即结论(C)正确.
注: 级数(13)的收敛半径大于1是可能的. 例如 $a_k = \frac{1}{k!} - 1$ 时, 幂级数 $\sum_{k\geq 1} a_k x^k$ 的收敛半径为1, 而幂级数 $\sum_{k\geq 1}(a_k+1)x^k = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}x^k$ 的收敛半径为 $+\infty$. 解答完毕.

四．级数逐项求导与逐项积分, 级数求和

题1. 证明 Riemann-Zeta 函数

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \tag{15}$$

在区间 $(1,+\infty)$ 上连续, 并且具有各阶连续的导数. (课本第293 页第6章总复习题7)

证明：先证明函数 $\zeta(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上连续. 利用 Cauchy 积分判别法可知级数(15)对于任意 $x>1$ 均收敛. 这表明函数 $\zeta(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上处处有定义. 对任意点 $x_0 > 1$, 取 $\delta > 0$ 充分小, 使得 $x_0 - \delta > 1$. 于是在区间 $[x_0-\delta,+\infty)$ 上,

$$0 < \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{x_0-\delta}}, \quad \forall x \geq x_0 - \delta,$$

并且级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x_0-\delta}}$$

收敛. 于是根据Weierstrass定理知级数(15)在区间 $[x_0-\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 从而和函数 $\zeta(x)$ 在点 x_0 处连续. 由点 $x_0 \in (1,+\infty)$ 的任意性可知, 故和函数 $\zeta(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上处处连续. 考虑级数(15)逐项求导所得到级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{\ln n}{n^x}. \tag{16}$$

对于任意点 $x_0 \in (1,+\infty)$, 取 $\delta > 0$ 充分小, 可使得 $x_0 - \delta > 1$. 与上述的做法类似, 我们同样可以级数(16) 在区间$[x_0 - \delta, +\infty)$ 上一致收敛. 根据函数项级数逐项求导定理可知, 在区间 $(x_0 - \delta, +\infty)$ 上, 级数(15) 可导, 并且可以逐项求导, 特别在点 $x_0 > 1$ 的导数为

$$\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\right]'_{x=x_0} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^{x_0}}.$$

由点 $x_0 > 1$ 的任意性可知, 故函数 $\zeta(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上处处可导, 并且其导数可以由对级数逐项求导得到, 即

$$\zeta'(x) = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\right]' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x}, \quad \forall x \in (1,+\infty).$$

用归纳法可证, 函数 $\zeta(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上处处有各阶可导且导数可逐项求导的得到. 细节从略. 证毕.

题2．求如下级数的和

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}. \tag{17}$$

解：考虑幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)}. \tag{18}$$

易证上述幂级数的收敛半径为 1. 记它的和函数为 $S(x)$. 根据幂级数的性质可知, 在收敛区间$(-1,1)$ 上, 可对幂级数(18)逐项求一阶导数和二阶导数得

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}, \quad S''(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

注意二阶导数的幂级数的和函数是 $-\ln(1-x)$, 即

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x), \quad \forall x \in (-1,1).$$

(注：这个等式我们应该记住. 其证明非常简单. 对熟知的等式 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ 两边积分即可.) 因此 $S''(x) = -\ln(1-x)$, $\forall x \in (-1,1)$. 于等式的两边积分, 并注意到 $S'(0) = 0$, 即可得到

$$S'(x) = \int_0^x S''(t)dt = \int_0^x -\ln(1-t)dt = \cdots = (1-x)\ln(1-x) + x, \quad \forall x \in (-1,1).$$

再次积分, 并注意到 $S(0)=0$, 即可得到

$$S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x \Big[(1-t)\ln(1-t)+t\Big]dt=\cdots$$
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{1}{4},\quad \forall x\in(-1,1).$$

由于级数(18)在端点 $x=1$ 处收敛. (注: 在另一个端点 $x=-1$ 处级数也收敛. 不过我们目前不需要这个结论.) 因此和函数 $S(x)$ 在点 $x=1$ 处连续(左连续). 于是

$$S(1)=\lim_{x\to 1^-}S(x).$$

此即

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}.$$

另解：求和思想是, 通过分拆一般项, 使得部分和中的大部分项相互抵消. 级数(18)的一般项有如下分解

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}.$$

两边同乘以 $k(k+1)(k+2)$ 得

$$1=A(k+1)(k+2)+Bk(k+2)+Ck(k+1).$$

比较两边关于 $1=k^0,k,k^2,k^3$ 的系数可得 $A=C=\frac{1}{2}$, $B=-1$. 故对 $\forall k\geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right]$$

记级数(18)的前 n 项和为 S_n, 则

$$2S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]-\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right]\right\}=\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right].$$

于是

$$S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]\to\frac{1}{4},\quad n\to+\infty.$$

于是所求级数(18)的和为

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}.$$

解答完毕.

题3. 求幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1}$$

的和函数.

解: 显然上述幂级数的收敛半径为 1. 记幂级数的和函数为 $S(x)$. 根据幂级数的性质, 我们可以在开区间 $(-1,1)$ 上对这个幂级数进行任意次数的求导或求积分. 于是

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 t^{k-1}\right) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x k^2 t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^k = x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}\right)$$

$$= x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\right)' = x \left(\frac{x}{1-x}\right)' = x \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

此即

$$\int_0^x S(t)dt = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

对上述两边求导得

$$S(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

解答完毕.

题4. 求级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{2^k} \tag{19}$$

的和. (课本第235页习题5.1题6(8))

解法一：记级数(19)的部分和为 S_n, 即

$$S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}. \tag{20}$$

由此得

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \frac{7}{2^5} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}}. \tag{21}$$

由式(20)减去式(21)得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + 2\left(\frac{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\Big) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \to \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

由此得 $S_n \to 3$, 即

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{2^k} = 3.$$

解法二：将所考虑的级数(19)表为

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

熟知 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. 为求第一个级数的和. 考虑幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}.$$

不难确定其收敛半径为1. 记这个幂级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kt^{k-1}\right)dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x kt^{k-1}dt = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

由此得

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

于上式中令 $x = \frac{1}{2}$ 得 $S(\frac{1}{2}) = 4$, 此即

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = 4.$$

于是级数(19)的和为 $4-1=3$, 即

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2k-1}{2^k}=3.$$

解答完毕.

题5. 设常数 $a>1$, 求级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{a^k}$$

的和.

解：考虑幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kx^k.$$

在上一题的解答中, 我们已经求得如下幂级数的和函数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\quad \forall x\in(-1,1).$$

由此得

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \forall x\in(-1,1).$$

于上式令 $x=\frac{1}{a}$, 则得到所要求的级数的和

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{a^k}=\frac{\frac{1}{a}}{(1-\frac{1}{a})^2}=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

解答完毕.