$\therefore \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^p \le \frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}$.

(3) 这 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i \le \ln \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. $x_i > 0$?

$y = \ln x$ $y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\therefore y$ 上凸. 原不等式成立

9. $x = x_0$ 时成立 其他情况: 由拉格朗日定理, $\exists$ 一 ξ 在 x 与 x_0 之间 使 $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$x > x_0$ 时 $\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge f'(x_0)$

$\Leftrightarrow f'(\xi) \ge f'(x_0)$ 此时 $\xi > x_0$.

$x < x_0$ 时 $\Leftrightarrow f'(\xi) \le f'(x_0)$. ~~这~~ $\therefore$ 此时 $\xi \le x_0$

~~由于 x_0 任意, 知 ξ 可将遍历~~

证必要性: $f(x)$ 下凸 则 $f'(x) \uparrow$. 由上分析得证.

证充分性: 由于 x_0 任取, 知 ξ 将遍历 (a,b) (x_0 任取, $x \to x_0$ 时 $\xi \to x_0$) 则 $\forall x \le y$ 有 $f'(x) \le f'(y)$. $\therefore f'(x) \uparrow$ 由上分析得证.

4.6.1

(1) 定义域：$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ ，$\lim\limits_{x\to 1} y(x) = +\infty$

有竖直渐近线 $x=1$，无水平渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1$ $\cancel{\to\infty}$ 　 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = -1$

$\lim\limits_{x\to\infty} (y(x)-x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x-1}}+1} = \frac{1}{2}$

有斜渐近线：$y = x + \frac{1}{2}$

不全.