1.1 已知如图 1.1 所示的网络系统，取 v_C、i_L 为状态变量，试写出系统的状态方程。

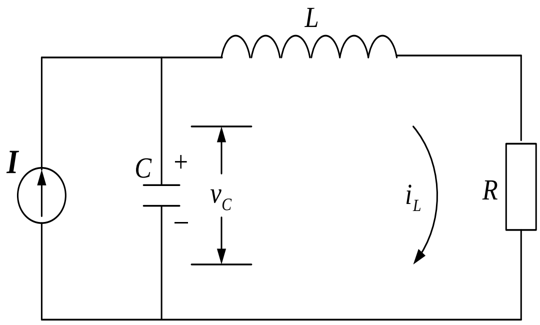


图 1.1

解：由电路知识可以得出下列方程：

$$\begin{cases} v_C = L\dfrac{di_L}{dt} + i_L R \\ I = i_L + C\dfrac{dv_C}{dt} \end{cases},$$

于是可以得到状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} I, \quad \boldsymbol{x} \triangleq \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}。$$

1.3 图 1.3 所示水箱系统中，管道阻尼系数均为 R，水箱截面积为单位截面积。设 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 为水箱 I、II 的液位。流量 $y(t)$ 为输出，流量 $u(t)$ 为输入，求此水箱系统的状态方程和输出方程。

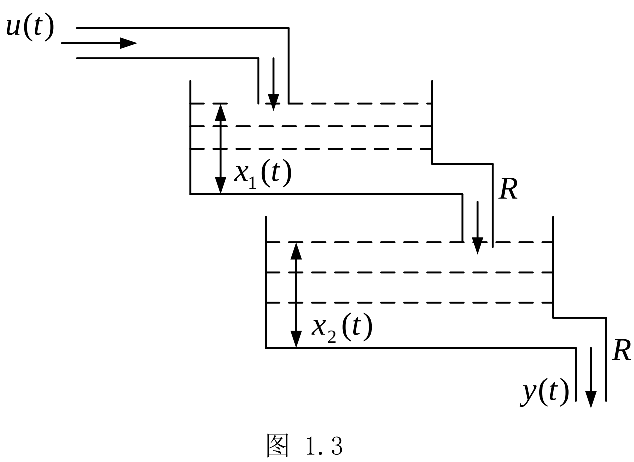


图 1.3

解 由物理知识可以得到下列方程: $\begin{cases} u-\dfrac{x_1}{R}=\dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{x_1-x_2}{R}=\dfrac{dx_2}{dt} \\ y=\dfrac{x_2}{R} \end{cases}$,

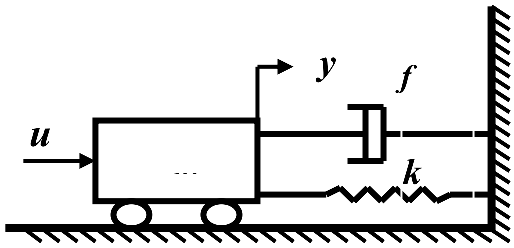
于是可得状态方程和输出方程为: $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R} & 0 \\ \dfrac{1}{R} & -\dfrac{1}{R} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$ 。

$$y=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

1.6 已知如图 1.6 所示的机械位移系统，图中 $\boldsymbol{m}$ 为小车的质量，$\boldsymbol{u}$ 为外作用力，$\boldsymbol{y}$ 为输出位移，$\boldsymbol{f}$ 为阻尼系数，$\boldsymbol{k}$ 为弹簧系数，选择小车的位移和速度为状态变量。

（1）试列写系统状态空间表达式;

（2）试写出输出位移 $\boldsymbol{y}$ 与外作用力 $\boldsymbol{u}$ 之间的传递函数。



解: 由物理知识可得: $m\ddot{y}+f\dot{y}+ky=u$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$,

可得状态方程为: $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{f}{m} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}u \quad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 。

传递函数为: $g(s)=\dfrac{1}{ms^2+fs+k}$ 。

1.8 设系统的差分方程为

$$\boldsymbol{y(k+3)+3y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=u(k+2)+2u(k+1)+u(k)}$$

输出为 $y(k)$，试写出系统的状态方程。

解: 系统的状态方程为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

1.9 某国家有一亿人口，其中城市人口有一千万。假定城市每年有其前一年人口的 4% 迁到农村，而农村又有前一年人口的 2% 迁到城市，城市人口的自然增长率为 0.8%，农村人口的自然增长率为 1%，试建立城乡人口变化的数学模型（包括状态方程和初始条件。提示：设 $x_1(k)$ 为第 k 年城市人口数，$x_2(k)$ 为第 k 年农村人口数。人口变化按照先增长后迁移的方式计算。）

解：由题意可得系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+0.008-0.04)X_1(k)+0.02X_2(k) \\ 0.04X_1(k)+(1+0.01-0.02)X_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.968 & 0.02 \\ 0.04 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix}$$

（先增长后迁移）。 初始条件：$X_1(0)=1 \ \ X_2(0)=9$（单位：千万）

1.10 系统的运动方程为

$$\dddot{y} + 7\ddot{y} + 14\dot{y} + 8y = 3u$$

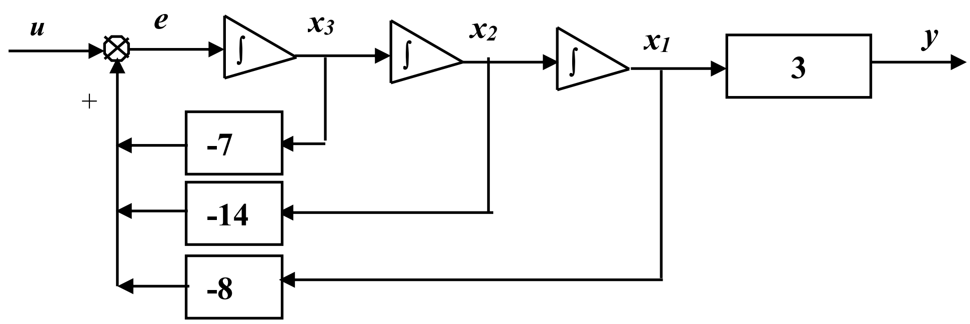
输入为 u，输出为 y，试写出它的能控标准 **I** 型和能观标准 **II** 型，并画出它们相应的系统模拟结构图。

解：能控标准 I 型：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \ ;$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

系统模拟结构图为：

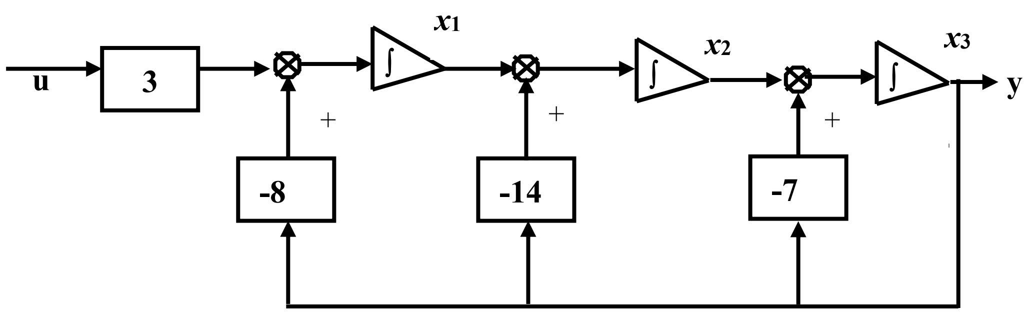


能观标准 II 型为:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-8\\1&0&-14\\0&1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

系统模拟结构图为:



1.11 已知系统:

$$\dddot{y}+7\ddot{y}+13\dot{y}+7y=\dddot{u}+8\ddot{u}+11\dot{u}+5u$$

输入为 u，输出为 y，试写出能控标准 **I** 型和能观标准 **II** 型，并画出它们相应的系统模拟结构图。

解:

能控标准 I 型为:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-7&-13&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

;

$$y=\begin{bmatrix}-2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+u$$

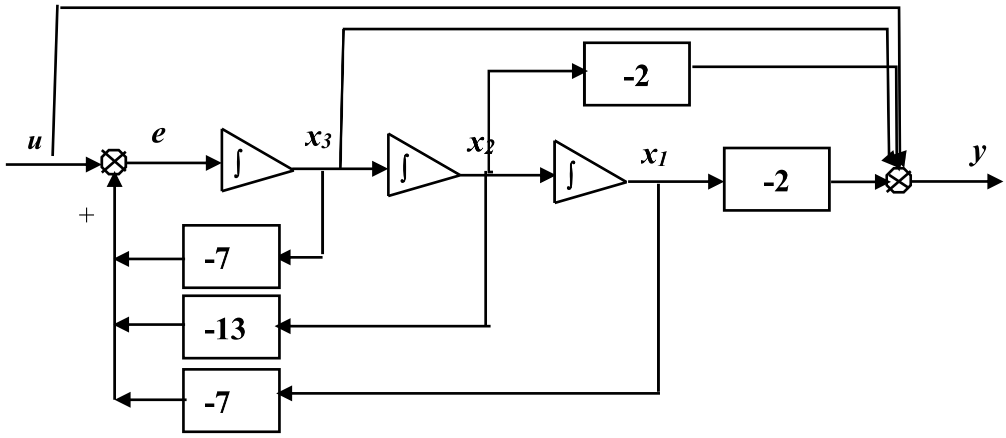
能观标准 II 型为:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-7\\1&0&-13\\0&1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}u$$

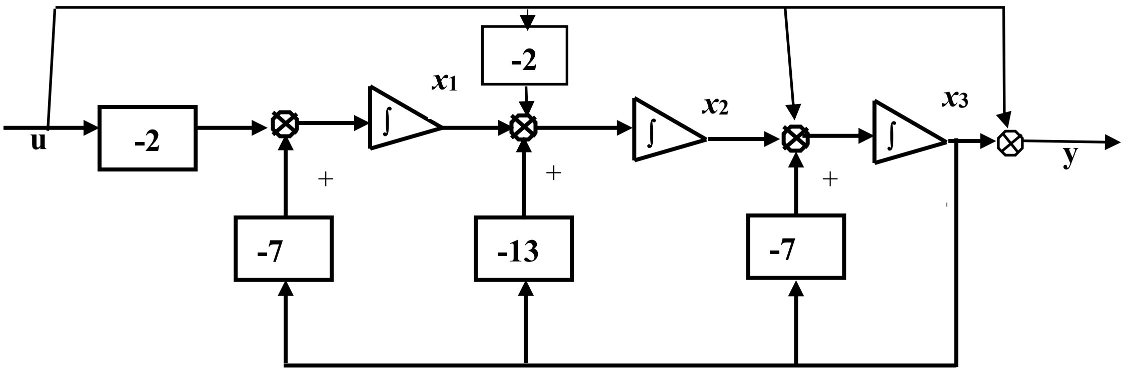
。

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+u$$

能控型结构图



能观型结构图



1.12 已知系统的方程为

$$\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}=u$$

试导出系统的状态空间表达式。选取状态变量，使状态矩阵为对角标准型。

解：由系统方程得到系统的传递函数为：

$$g(s)=\frac{1}{s^3+3s^2+2s}=\frac{1/2}{s}+\frac{-1}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}$$

于是可得对角标准型为：

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\underline{x}$$

1.13 试求如下系统的状态空间表达式，使之成为解耦标准型。

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

解：由传递函数得到：

$$g(s)=\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}=\frac{4}{s+1}+\frac{-2}{s+2},$$

于是可得对角标准型为:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}&=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\\ y&=\begin{bmatrix}4 & -2\end{bmatrix}\underline{x}\end{aligned}。$$

1.15 将如下系统化为特征值规范型。

$$\begin{cases}\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-6}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-11}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-6}\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{2}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

解: 解得特征值为: $\lambda=-1,-2,-3$, 选 $T=\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\ 5 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

可得对角标准型为:

$$\left(\begin{array}{c|c}\tilde{\boldsymbol{A}} & \tilde{\boldsymbol{b}}\\ \hline \tilde{\boldsymbol{c}}^T & \tilde{d}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -3 & -\frac{5}{2}\\ \hline 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

1.16 已知系统传递函数为

$$\boldsymbol{g(s)=\frac{2s^2+6s+5}{s^3+4s^2+5s+2}}$$

试写出它的约当标准型。并画出相应的系统结构图。

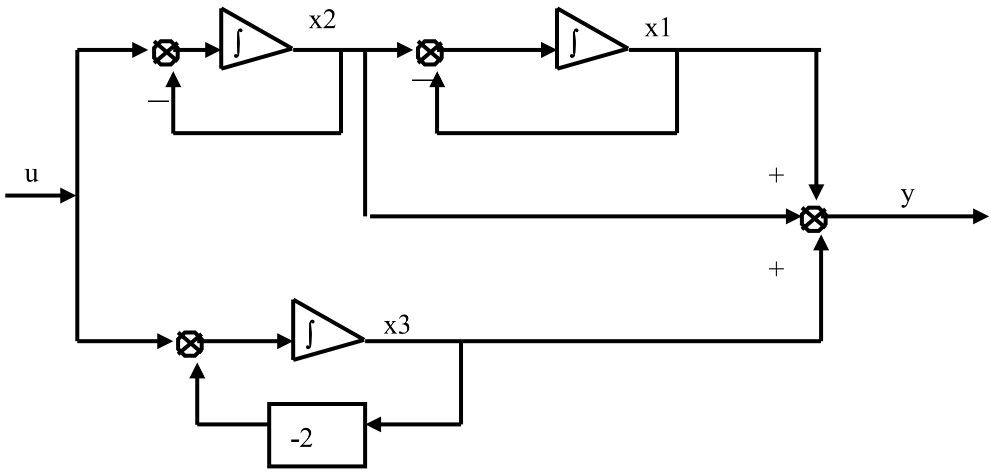
解: 由传递函数得到:

$$g(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+2}$$

于是可得约当标准型为:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}&=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u\\ y&=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\underline{x}\end{aligned}。$$

系统结构图:



1.17　已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

试求系统的传递函数阵。

解:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)} \begin{pmatrix} s^2+2s+2 & 2s+2 \\ -(7s^2+24s+24) & 2s^2+2s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} + \frac{-5}{s+3} + \frac{5}{s+4} & \frac{-1}{s+2} + \frac{4}{s+3} + \frac{-3}{s+4} \\ \frac{-2}{s+2} + \frac{15}{s+3} + \frac{-20}{s+4} & \frac{2}{s+2} + \frac{-12}{s+3} + \frac{12}{s+4} \end{pmatrix}$$

1.18　已知如下两个子系统：

$$\Sigma_1: \quad \dot{\underline{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \quad , y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_1$$

$$\Sigma_2: \quad \dot{\underline{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \underline{x}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad , y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}_2$$

(1) 求并联系统的状态空间表达式；

(2) 求Σ_1在前，Σ_2在后的串联系统状态空间表达式；

(3) 求Σ_1在主通道，Σ_2在反馈通道的反馈连接系统的状态空间表达式。

解：(1)　并联

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & & \\ -2 & -3 & & \\ \hdashline & & 0 & 1 \\ & & -4 & -4 \end{array}\right)\qquad \boldsymbol{b}=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 1 \end{array}\right)\qquad \boldsymbol{c}^T=\left(1 \quad 0 \mid 1 \quad 2\right)
$$

(2)　串联

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & & \\ -2 & -3 & & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)\qquad \boldsymbol{b}=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right)\qquad \boldsymbol{c}^T=\left(0 \quad 0 \mid 1 \quad 2\right)
$$

(3)　反馈

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)\qquad \boldsymbol{b}=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right)\qquad \boldsymbol{c}^T=\left(1 \quad 0 \mid 0 \quad 0\right)
$$

1.19　已知反馈系统的结构如图 1.7 所示，试列出系统的状态空间表达式。

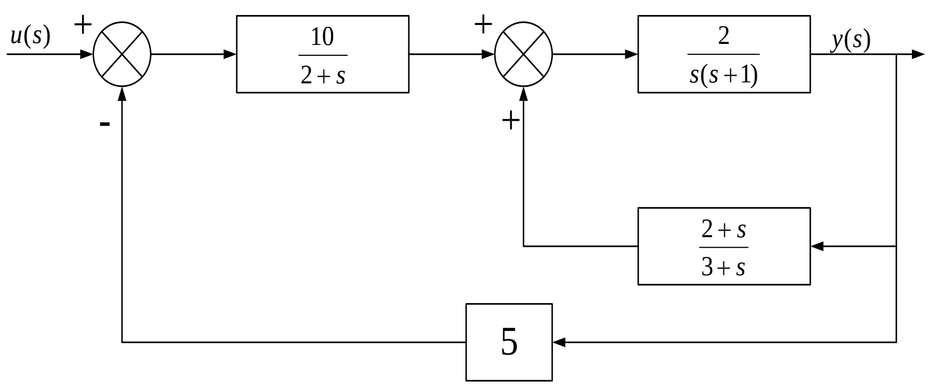
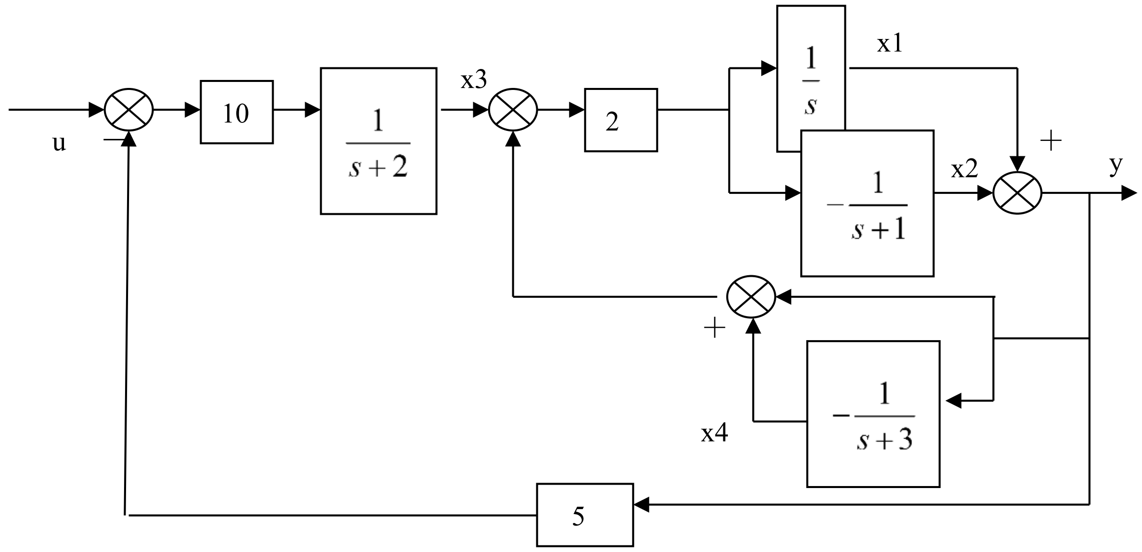


图 1.7

解：将结构图变化如下，并选取相应的状态变量：



列出方程得:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2(x_3 + y + x_4) \\ \dot{x}_2 + x_2 = -2(x_3 + y + x_4) \\ \dot{x}_3 + 2x_3 = 10(u - 5y) \\ \dot{x}_4 + 3x_4 = -y \\ y = x_1 + x_2 \end{cases},$$

于是可得状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 & -2 \\ -50 & -50 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$