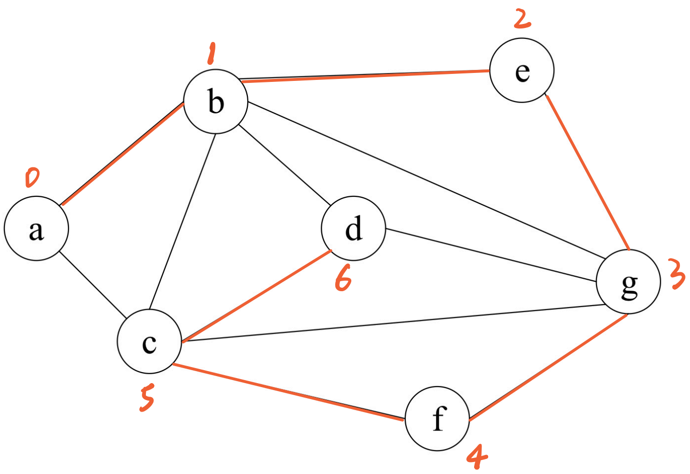
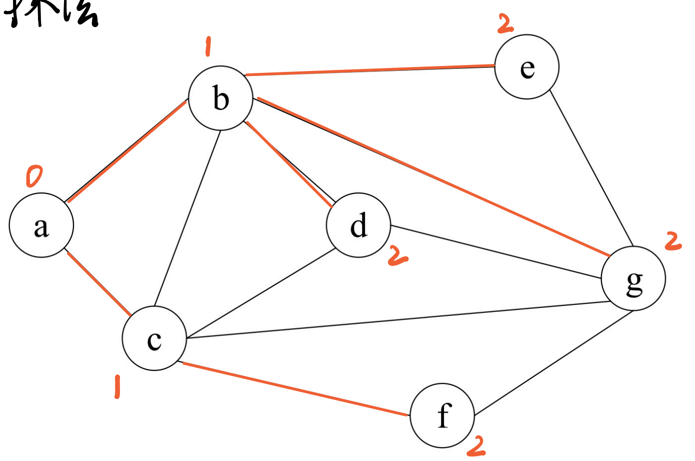
5. 深探法



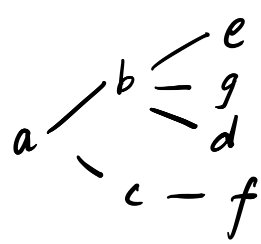

支撑树:

a-b-e-g-f-c-d

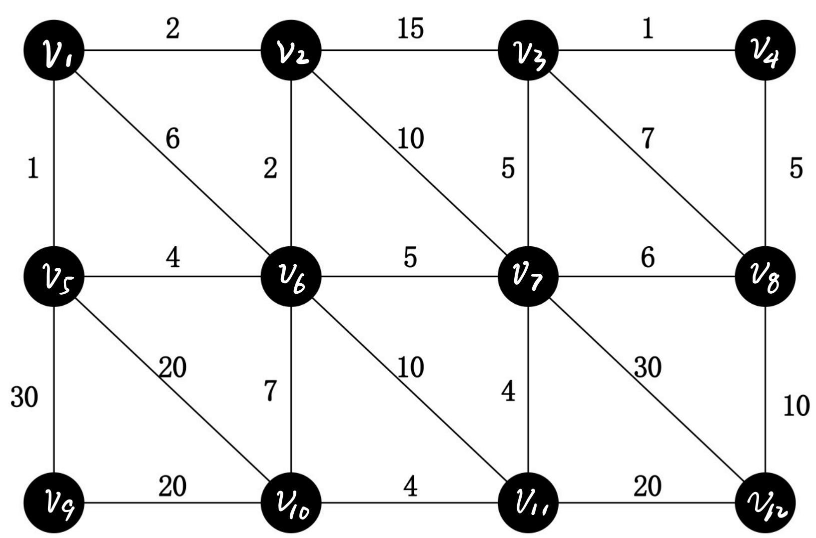
广探法




支撑树:




6.




Kruskal 算法

将边由小到大排列:

$(v_1, v_5)=1$, $(v_3, v_4)=1$, $(v_1, v_2)=2$, $(v_2, v_6)=2$

$(v_5, v_6)=4$, $(v_7, v_{11})=4$, $(v_{10}, v_{11})=4$, $(v_3, v_7)=5$

$(v_4, v_8)=5$, $(v_6, v_7)=5$, $(v_1, v_6)=6$, $(v_7, v_8)=6$

1. 构造 $f(x) = -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + \cdots + (-1)^n x_n^2$.

则显然 $f(x)$ 二阶连续可导.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & -2 & \\ & & & 2 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

对 $\forall x$. 均不是正定或半正定矩阵.

此时,可以找到凸集 $\Omega = \{x \mid x_2 \neq 0,\ x_1, x_3, \cdots, x_n = 0\}$.

$f(x)$ 在 $\Omega$ 上为 $f(x) = x_2^2$, 是凸函数

2. 不正确

上述命题仅满足必要性,即若 $\bar{x}$ 是该问题的局部最优解,在 $\bar{x}$ 处没有可行下降方向.

这是由于,造成没有可行下降方向的原因可能由约束本身导致,此时无法确保在邻域 $N(\bar{x}, \varepsilon) = \{x \mid \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}$, 使得对于每一个 $x \in S \cap N(\bar{x}, \varepsilon)$, $f(x) \geq f(\bar{x})$ 均成立

3. 一般线性规划问题可表示为:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^+ - x_j^-)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j^+ - x_j^-) = b_i. \quad x_j^+,\ x_j^- \geq 0.$$

可表示为 $\min\{C^{T\prime} x' \mid \text{s.t. } -x' \leq 0 \quad A' x' = \vec{b}\}$

其中, $C^{T\prime} = (C^T \,\vdots\, -C^T)$.

$$x' = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}.$$

$$A' = (A \,\vdots\, -A)$$

根据标准线性规划问题的结论可知.

对偶问题 $\max\{-\vec{b}^T U \mid s.t. \ -C' + A^{T\prime} U - V = 0. \ V \geq 0\}$

等价表示 $\max\{-\vec{b}^T U \mid s.t. \ A^{T\prime} U \geq C'\}$

4. 拉格朗日对偶问题

$$\max\{\varphi(U,V) \mid s.t. \ V \geq 0\}$$

其中对偶目标函数为

$$\varphi(U,V) = \min_{x \in R^n} L(x,U,V) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} h_j(x) u_j + \sum_{i=1}^{l} g_i(x) v_i$$

显然定义域 $\{(U,V) \mid V \geq 0\}$ 为凸集. 需证明目标函数为凹函数

$$\varphi(\lambda U_1 + (1-\lambda) U_2, \ \lambda V_1 + (1-\lambda) V_2)$$

$$= \min_{x \in R^n} [\lambda L(X, U_1, V_1) + (1-\lambda) L(X, U_2, V_2)]$$

$$\geq \lambda L(X_1', U_1, V_1) + (1-\lambda) L(X_2', U_2, V_2).$$

$$= \lambda \varphi(U_1, V_1) + (1-\lambda) \varphi(U_2, V_2).$$

因此 $\varphi(U,V)$ 为凹函数. 最大化凹函数为凸优化问题.

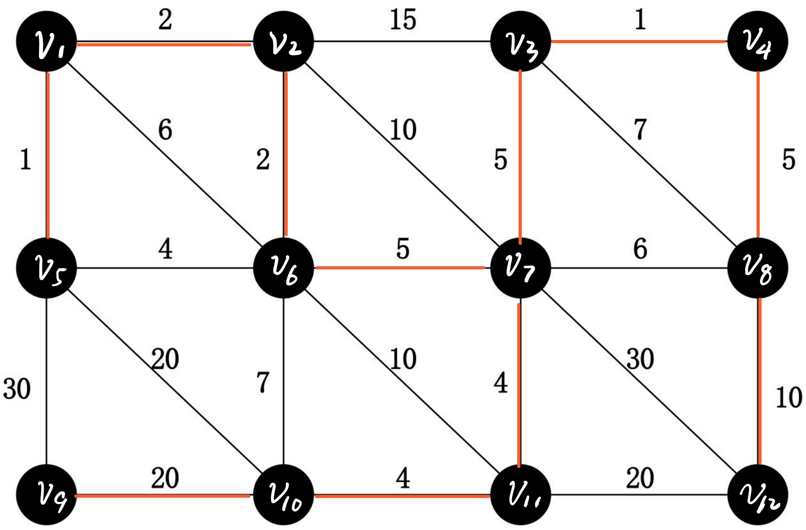
因此 Lagrange 对偶问题是凸优化问题.

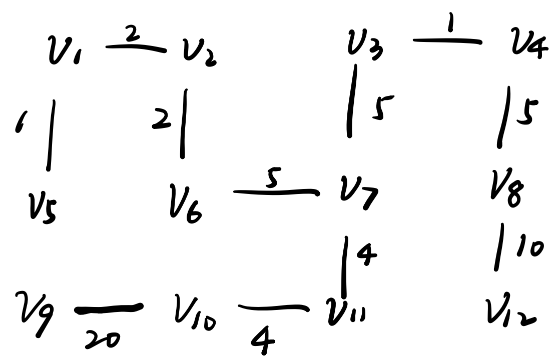
$(v_3, v_8)=7$ $(v_6, v_{10})=7$ $(v_2, v_7)=10$ $(v_6, v_{11})=10$

$(v_8, v_{12})=10$ $(v_2, v_3)=15$ $(v_5, v_{10})=20$ $(v_9, v_{10})=20$

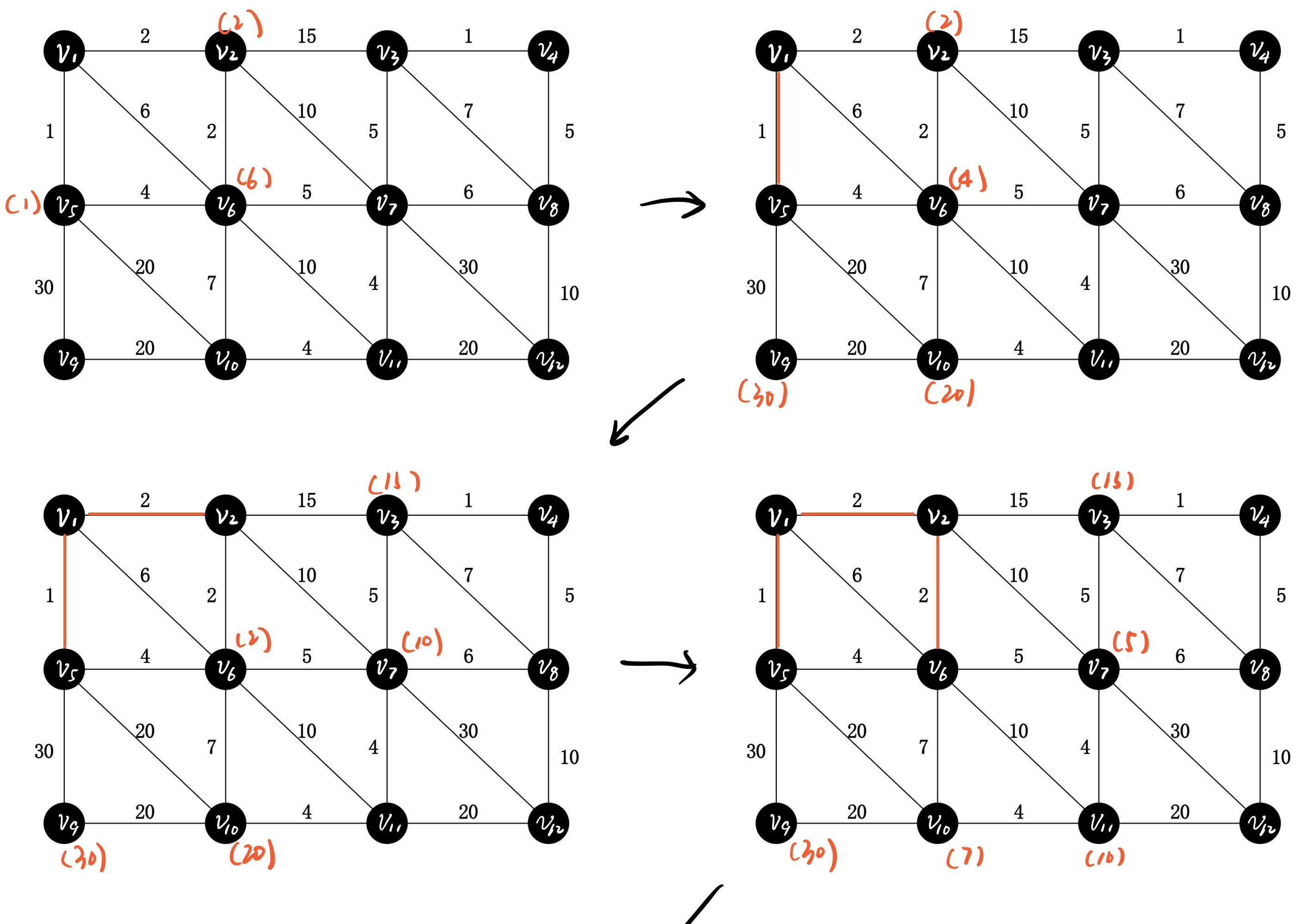
$(v_{11}, v_{12})=20$ $(v_5, v_9)=30$ $(v_7, v_{12})=30$

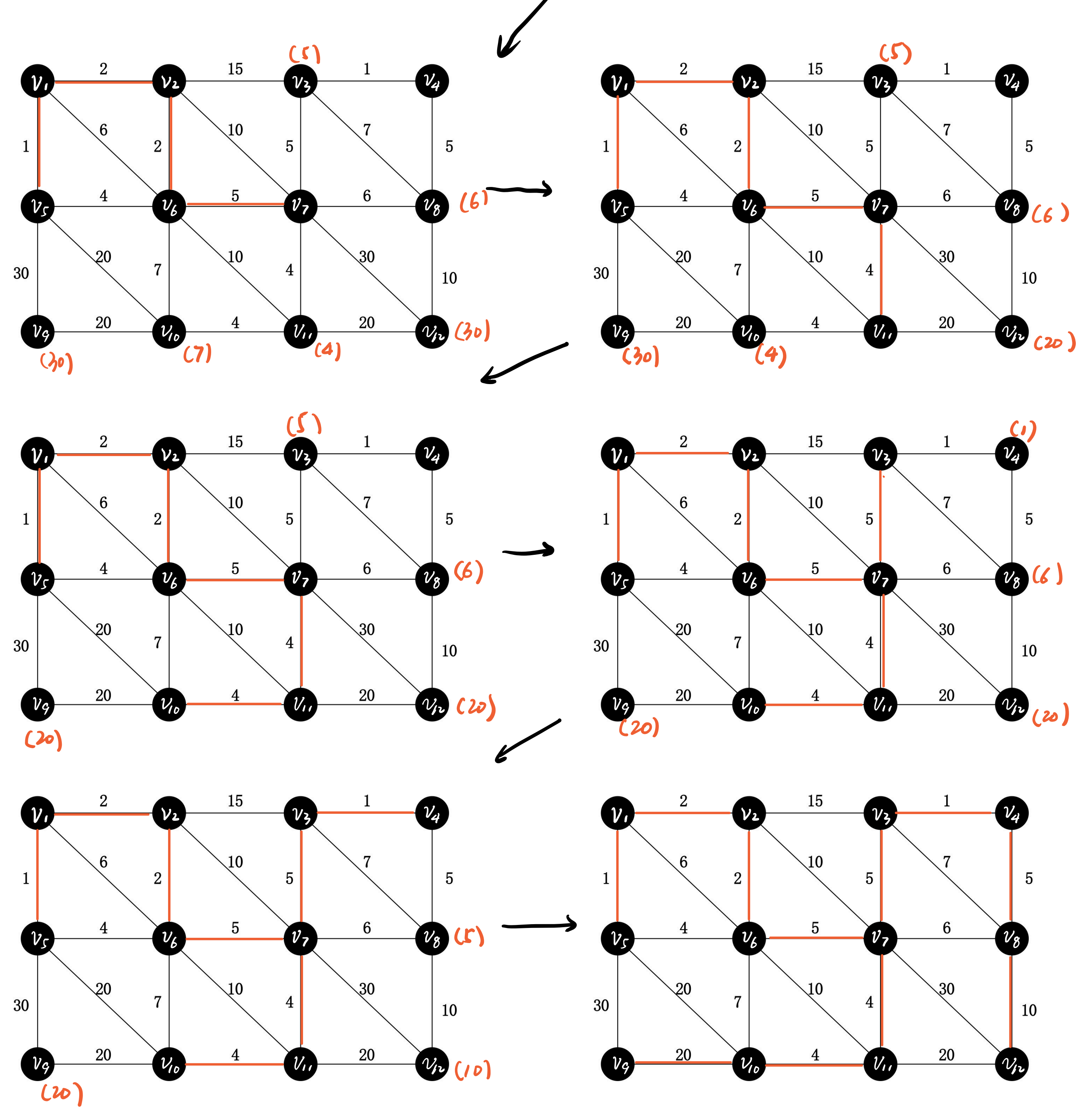
从小到大选择不构成圈的边构成最小支撑树





根据dijkstra算法，容易求得





即最小支撑树为：