微积分A(2)第三次习题课讨论题参考解答　　　　　　杨利军　　Mar 23-27, 2020

一. 关于复合函数以及隐函数求导

1. 设 $f(x,y)$ 为二阶连续可微函数. 作正交变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{1}$$

这里 $Q = [q_{ij}]$ 为二阶正交矩阵, 即 $Q^TQ = QQ^T = E$. 再记 $\hat{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. 证明 $f_{xx} + f_{yy} = \hat{f}_{uu} + \hat{f}_{vv}$.

注：微分算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 通常称作二维 Laplace 算子. 微分方程 $\Delta z = 0$, 即方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

称为 Laplace 方程. 满足Laplace 方程的 C^2 函数称为调和函数. 习题的结论表明, 二维 Laplace 微分算子具有二阶正交变换的不变性, 或者说二维调和函数关于正交变换是不变的. 类似可定义 n 维 Laplace 算子. 不难证明 n 维 Laplace 算子(或调和函数)关于 n 阶正交变换同样具有不变性。

证: 根据复合函数求导的链规则可知

$$\hat{f}_u = f_x x_u + f_y y_u = f_x q_{11} + f_y q_{21}.$$

进一步

$$\hat{f}_{uu} = [f_x]_u q_{11} + [f_y]_u q_{21} = [f_{xx} x_u + f_{xy} y_v] q_{11} + [f_{xx} x_u + f_{xy} y_u] q_{21}$$
$$= [f_{xx} q_{11} + f_{xy} q_{21}] q_{11} + [f_{xx} q_{11} + f_{xy} q_{21}] q_{21} = f_{xx} q_{11}^2 + f_{yy} q_{21}^2 + 2 f_{xy} q_{11} q_{21}.$$

同理可证

$$\hat{f}_{vv} = f_{xx} q_{12}^2 + f_{yy} q_{22}^2 + 2 f_{xy} q_{12} q_{22}.$$

于是

$$\hat{f}_{uu}+\hat{f}_{vv}=f_{xx}(q_{11}^2+q_{12}^2)+f_{yy}(q_{21}^2+q_{22}^2)+2f_{xy}(q_{11}q_{21}+q_{12}q_{22}).$$

由于 $Q=[q_{ij}]$ 为正交矩阵, 故 $q_{11}^2+q_{12}^2=1$, $q_{21}^2+q_{22}^2=1$, $q_{11}q_{21}+q_{12}q_{22}=0$. 因此 $\hat{f}_{uu}+\hat{f}_{vv}=f_{xx}+f_{yy}$. 证毕. ∎

2. 设函数 $f(x,y,z,t)$, $g(y,z,t)$, $h(z,t)$ 连续可微, 并由方程组

$$\begin{cases} g(y,z,t)=0, \\ h(z,t)=0. \end{cases} \tag{2}$$

可确定连续可微的隐函数 $z=z(y)$, $t=t(y)$. 记函数 $u(x,y)=f(x,y,z(y),t(y))$. 试用函数 f,g,h 的偏导数来表示偏导数 $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$.

解: 显然

$$u_x(x,y)=f_x(x,y,z(y),t(y)).$$

考虑 u_y. 对式 $u(x,y)=f(x,y,z(y),t(y))$ 关于 y 求导数得

$$u_y=f_y(x,y,z,t)+f_z(x,y,z,t)z'(y)+f_t(x,y,z,t)t'(y). \tag{3}$$

注意上式中, $z=z(y)$, $t=t(y)$. 我们还需要将导数 $z'(y)$, $t'(y)$ 用函数 g,h 的偏导数表出. 对方程组 (2) 关于 y 求导得

$$\begin{cases} g_y+g_zz'+g_tt'=0, \\ h_zz'+h_tt'=0. \end{cases}$$

解之得

$$z'(y)=\frac{-g_yh_t}{g_zh_t-g_th_z}, \quad t'(y)=\frac{g_yh_z}{g_zh_t-g_th_z}.$$

将上述表达式带入式 (3)得

$$u_y(x,y)=f_y+\frac{g_y(f_th_z-f_zh_t)}{g_zh_t-g_th_z}.$$

上式中函数 f,g,h 的偏导数均在 $(x,y,z(y),t(y))$ 处取值. 这里应假设分母 $g_zh_t-g_th_z\neq 0$. 这也是解隐函数 $z(y)$, $t(y)$ 所需要的条件. 解答完毕.

二．关于曲面与切平面

1． 在曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的某些点处作切平面, 使得该切平面经过直线 L:

$$\begin{cases} 10x+2y-2z &= 27 \\ x+y-z &= 0. \end{cases}$$

求这些点的坐标，以及这些点处的切平面方程.

解：设所求曲面上的点为 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, 则不难写出曲面在该点处的切平面方程为

$$3x_0x+y_0y-z_0z=27. \tag{4}$$

另一方面，每个经过直线 L 的平面, 除了平面 $x+y-z=0$, 均可表为

$$(10x+2y-2z-27)+\lambda(x+y-z)=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

或写作

$$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z=27. \tag{6}$$

而平面 $x+y-z=0$ 不可能是切平面 (4). (注：平面方程 (5) 通常称为经过直线 L 的平面束方程)。 比较方程 (4) 和 (6)， 我们知道必存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$3x_0=10+\lambda, \quad y_0=2+\lambda, \quad z_0=2+\lambda. \tag{7}$$

上述三个方程与点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 所满足的曲面方程

$$3x_0^2+y_0^2-2z_0^2=27 \tag{8}$$

一起构成了关于四个变量 x_0, y_0, z_0, λ 的四个方程。 不难解得两组解

$$(x_0,y_0,z_0,\lambda)=(3,1,1,-1) \quad \text{和} \quad (-3,-17,-17,-19). \tag{9}$$

于是曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 有两个点 $(x,y,z)=(3,1,1)$ 和 $(-3,-17,-17)$, 对应的切平面分别为

$$9x+y-z=27 \quad \text{和} \quad 9x+17y-17z=-27,$$

它们均包含直线 L. 解答完毕。

2. 在曲面 S: $2x^2-2y^2+2z=1$ 上的某些点作切平面，使得该切平面与直线L

$$\begin{cases} 3x-2y-z &= 5 \\ x+y+z &= 0. \end{cases}$$

平行. 求这些点的轨迹。

解：直线 L 的方向向量为 $\vec{\tau}:=(3,-2,-1)\times(1,1,1)=(-1,-4,5)$ 。 曲面 S 上的点 (x,y,z) 处的法方向为 $\vec{n}:=(4x,-4y,2)$ 。 根据假设条件可知 $\vec{\tau}\cdot\vec{n}=0$. 由此立刻得到 $2x-8y=5$. 因此所求点的轨迹为

$$\begin{cases} 2x-8y &= 5 \\ 2x^2-2y^2+2z &= 1. \end{cases}$$

这是一条空间抛物线. 解答完毕.

3. 假设函数 $f(u,v)$ 连续可微. 记由方程

$$f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$$

所定义的隐式曲面为 S. 证明曲面 S 上任意一点处的切平面通过一定点. 并求此点位置.

证明: 记

$$u=\frac{x-a}{z-c},\quad v=\frac{y-b}{z-c},\quad F(x,y,z)=f(u,v).$$

设点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$, 即 $F(x_0,y_0,z_0)=0$. 为求曲面 S 在该点处的切面, 我们来计算偏导数.

$$\begin{aligned} &F_x(x,y,z)=f_u(u,v)\tfrac{1}{z-c}, \\ &F_y(x,y,z)=f_v(u,v)\tfrac{1}{z-c}, \\ &F_z(x,y,z)=-f_u(u,v)\tfrac{x-a}{(z-c)^2}-f_v(u,v)\tfrac{y-b}{(z-c)^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

于是曲面 S 在点 $(x_0,y_0,z_0)\in S$ 处的切平面方程为

$$F_x^0(x-x_0)+F_y^0(y-y_0)+F_z^0(z-z_0)=0,$$

这里 F_x^0, F_y^0, F_z^0 表示这些偏导数在点 P_0 处所取得值. 由式(10)得切平面方程为

$$f_u^0\frac{(x-x_0)}{(z_0-c)}+f_v^0\frac{(y-y_0)}{(z_0-c)}-\left[f_u^0\frac{(x_0-a)}{(z_0-c)^2}+f_v^0\frac{(y_0-b)}{(z_0-c)^2}\right](z-z_0)=0.$$

于上式两边同乘以 $(z_0-c)^2$ 知切平面方程为

$$f_u^0(x-x_0)(z_0-c)+f_v^0(y-y_0)(z_0-c)-f_u^0(x_0-a)(z-z_0)-f_v^0(y_0-b)(z-z_0)=0.$$

将 $(x,y,z)=(a,b,c)$ 带入上式知等式成立. 这说明曲面 S 上任意一点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面通过一定点 (a,b,c). 命题得证. ∎

三. 关于无约束极值问题

1. 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

解：这个问题可看作条件极值问题：

$$\begin{cases}\min\ x^2+y^2+z^2\\ z^2=xy+x-y+4.\end{cases}\tag{11}$$

下次习题课我们将解答这个条件极值问题。 显然条件极值问题 (11) 可以通过消去变量 z^2 化为无约束的极值问题：

$$\min\ f(x,y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,\tag{12}$$

其中 $f(x,y)=x^2+y^2+xy+x-y+4$。 经简单计算可知方程组 $f_x=0$, $f_y=0$ 有唯一一组解 $(x,y)=(-1,1)$. 简单计算得 $f(x,y)$ 的 Hesse 矩阵为

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

是常数阵. 易见它是正定的. 因此函数 f 在唯一驻点 $(-1,1)$ 处有严格极小值 3. 由此可以断言, 所求的最短距离为 $\sqrt{3}$. 另解完毕.

2．在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大.

解：设三角形的两边的边长分别为 x, y, 则第三边的边长为 $2p-x-y$. 显然 $x, y \in (0, p)$, 因为三角形的任意两边之和大于第三边. 不妨设三角形绕边长为 x 的边旋转, 并假设该边上的高为 h. 简单计算表明三角形的形心距边 x 距离为 $h/3$. 再根据 Guldin 第二定理知三角形绕边 x 所得的旋转体体积为 $V = 2\pi r \cdot S = 2\pi(h/3) \cdot \frac{1}{2}xh = \pi x h^2/3$. 以下我们将 h^2 用 x, y 来表示. 一方面三角形的面积可表为 $S = xh/2$. 由此得 $h = \frac{2S}{x}$. 另一方面三角形面积 S 可用海伦公式表示, 即 $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. 由此得到旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V = \frac{\pi x h^2}{3} = \frac{\pi x}{3}\left(\frac{2S}{x}\right)^2 &= \frac{4\pi}{x} p(p-x)(p-y)(x+y-p) \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}{x}. \end{aligned}$$

记

$$f(x, y) = \frac{(p-x)(p-y)(x+y-p)}{x}.$$

简单计算得

$$f_x = \frac{p-y}{x^2}\big(p^2 - x^2 - py\big), \quad f_y = \frac{p-x}{x}\big(2p - x - 2y\big).$$

令 $f_x = 0$, $f_y = 0$, 即

$$\begin{cases} x^2 + py &= p^2, \\ x + 2y &= 2p. \end{cases}$$

解得 $x = p/2$, $y = 3p/4$. 简单计算表明, 函数 $f(x, y)$ 在唯一驻点 $(x, y) = (p/2, 3p/4)$ 处的 Hesse 矩阵为

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

显然这个 Hesse 矩阵负定. 因此当 $(x, y) = (p/2, 3p/4)$ 时所形成的旋转体的体积最大. 解答完毕.

3. 假设函数 $u(x,y)$ 在闭圆盘 $\overline{D}$: $x^2+y^2\leq 1$ 上连续, 在开园盘 D: $x^2+y^2<1$ 上二阶连续可微且满足方程 $u_{xx}+u_{yy}=u$. 若在边界 ∂D: $x^2+y^2=1$ 上函数 $u(x,y)$ 非负, 即

$$u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1}\geq 0,$$

证明函数 $u(x,y)$ 在整个闭圆盘 $x^2+y^2\leq 1$ 上非负. (注：这是课本习题 1.9 题 5(2), 第 94 页)

证明：用反证法。根据连续函数在有界闭域上的最值性，可知函数 $u(x,y)$ 在有界闭域 $\overline{D}$ 的某点 $(x_0,y_0)\in\overline{D}$ 处取得最小值。 若该最小值非负，则结论得证. 假设最小值是负的，即 $u(x_0,y_0)<0$。 由假设知函数在边界 ∂D 上非负。因此该点不在边界上， 而在开区域 D 内, 即 $(x_0,y_0)\in D$. 考虑函数 u 在点 (x_0,y_0) 处的 Hesse 矩阵

$$H=\begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy}\\ u_{yx} & u_{yy}\end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}.$$

熟知矩阵所有特征值之和等于矩阵的迹. 据此有 $[u_{xx}+u_{yy}]_{(x_0,y_0)}=\lambda+\mu$, 这里 λ, μ 记矩阵 H 的两个特征值. 由于函数 u 在点 (x_0,y_0) 处取得极小值, 故两个特征值 λ, μ 应都是非负的. 因为如果 λ 和 μ 之一为负数, 则不难证明 $u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不可能取得极小值. 证明如下. 假设 $\lambda<0$, 取特征值 λ 对应的特征向量 ξ, 考虑函数 $f(x,y)$ 在最小值点 (x_0,y_0) 处的二阶 Taylor 展式, 带 Peano 余项, 即

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}h^TH^0h+o(\|h\|^2),$$

这里 $h=(x-x_0,y-y_0)^T$. 取 $\varepsilon>0$ 充分小, $h=\varepsilon\xi$, 即 $(x,y)^T=(x_0,y_0)^T+\varepsilon\xi$, 则

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\lambda\varepsilon^2}{2}\|\xi\|^2+o(\varepsilon^2)=f(x_0,y_0)+\frac{\lambda\varepsilon^2}{2}\left(\|\xi\|^2+\frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\right).$$

由于 $\lambda<0$, 故点 (x_0,y_0) 不可能是 $f(x,y)$ 的极小点. 这就证明了 Hesse 矩阵 H 的两个特征值均非负. 因此矩阵 H 的迹 $trace(H)\geq 0$, 即在点 (x_0,y_0) 处, $u_{xx}+u_{yy}\geq 0$. 但另一方面, 根据假设知在点 (x_0,y_0) 处, $u_{xx}+u_{yy}=u<0$. 这就得到了一个矛盾. 证毕.

4．假设 $f(x,y)$ 在全平面上有连续的偏导数，并且满足

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)>0,\quad \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}. \tag{13}$$

证明原点是函数 f 的唯一极小值点, 并且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{14}$$

证明：对任意点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, 记 $\phi(t)=f(tx,ty)$, 则 $\phi(1)=f(x,y)$, $\phi(0)=f(0,0)$,

$$\phi'(t)=xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty)=\frac{1}{t}\Big(txf_x(tx,ty)+tyf_y(tx,ty)\Big)>0,\quad \forall t>0,$$

最后一个不等式是根据条件(13)得得到的. 于是

$$f(x,y)-f(0,0)=\phi(1)-\phi(0)=\phi'(\tau)>0,\quad \tau\in(0,1).$$

这说明对任意点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$， $f(x,y)>f(0,0)$. 因此原点 $(0,0)$ 是最小值点. 故 $\nabla f(0,0)=(0,0)$, 即 $df(0,0)=0$. 由此立刻得到等式(14). 证毕. ∎

5. 设函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个邻域内二阶连续可微. 若 $F(x_0,y_0)=0$, $F_x(x_0,y_0)=0$, 且 $F_yF_{xx}|_{(x_0,y_0)}<0$, 则由方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 附近所确定的隐函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

证明: 根据隐函数的导数公式

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\bigg|_{y=f(x)}$$

可知 $f'(x_0)=0$, 并且函数 $f(x)$ 与函数 $F(x,y)$ 有相同的光滑性, 即 $f(x)$ 也是 C^2 的. 对上式求导得

$$f''(x)=\frac{F_x[F_{xy}+F_{yy}f']-F_y[F_{xx}+F_{xy}f']}{F_y^2}\bigg|_{y=f(x)}.$$

由假设可知

$$f''(x_0)=\frac{-F_yF_{xx}}{F_y^2}\bigg|_{(x_0,y_0)}>0.$$

由一元函数的极值理论可知, 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值. 证毕. ∎