

清华大学2021春季学期

电路原理C

第10讲

恒定激励下一阶动态电路的求解

内容

1 电容电感及动态电路简介

2 初值的获得

重点

3 经典解法

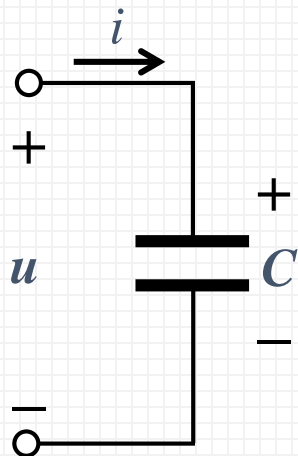
4 直觉解法

重点

5 从另一个角度观察解



电路符号



电容 (capacitor, capacitance)

(1) 线性非时变电容元件

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{u}$$

变量 电压 u 、电荷 q

单位 法

符号 F

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i d\tau$$

$$= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i d\tau$$

$$= u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i d\tau$$

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau$$

(2) 线性电容电压、电流关系

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

关联参考方向

当 u 为常数(直流)时, 电容相当于**开路**。电容有**隔直作用**。



(3) 电容的储能

$$p_{\text{吸}} = ui = u \cdot C \frac{du}{dt}$$

$$W_C = \int_{-\infty}^t Cu \frac{du}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2} Cu^2 \Big|_{u(-\infty)}^{u(t)} = \frac{1}{2} Cu^2(t) - \frac{1}{2} Cu^2(-\infty)$$

$$\begin{aligned} \text{若 } u(-\infty)=0 \quad & \frac{1}{2} Cu^2(t) = \frac{1}{2C} q^2(t) \geq 0 \\ & = \end{aligned}$$



电容具备存储**电场能量**的能力。

从 t_0 到 t 电容储能的变化量

$$W_C = \frac{1}{2} Cu^2(t) - \frac{1}{2} Cu^2(t_0)$$



(4) 电容的并、串联

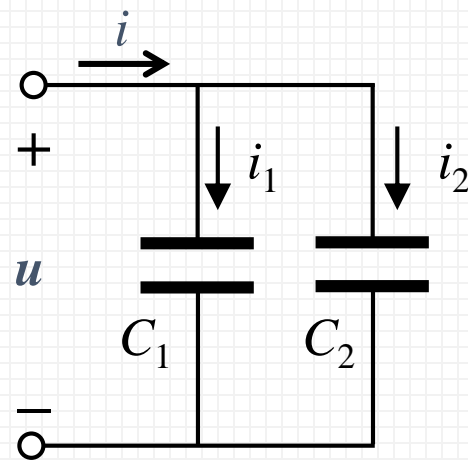
$$i_1 = C_1 \frac{du}{dt} \quad i_2 = C_2 \frac{du}{dt}$$

$$i = i_1 + i_2 = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{du}{dt}$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$$

电容的串联

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

串并特性与**电导**相同



电感 (inductor, inductance)

(1) 线性非时变电感元件

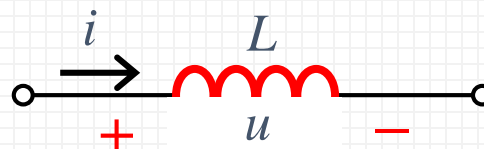
$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi}{i}$$

变量 电流 i , 磁链 ψ

单位 亨

符号 H

电路符号



关联参考方向

$$u = L \frac{di}{dt}$$

(2) 线性电感电压、电流关系

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\tau$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u d\tau + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u d\tau$$

$$= i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u d\tau$$

当 i 为常数(直流)时, 电感
相当于**短路**

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u d\tau$$



(3) 电感的储能

$$p_{\text{吸}} = ui = i L \frac{di}{dt}$$

$$W_{\text{吸}} = \int_{-\infty}^t Li \frac{di}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2} Li^2 \Big|_{i(-\infty)}^{i(t)} = \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(-\infty)$$

$$\begin{aligned} &\text{若 } i(-\infty)=0 \\ &= \frac{1}{2} Li^2(t) = \frac{1}{2L} \psi^2(t) \geq 0 \end{aligned}$$



电感具备存储**磁场能量**的能力。

从 t_0 到 t 电感储能的变化量

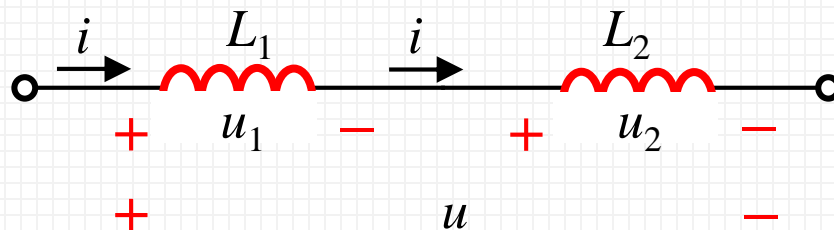
$$W_L = \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(t_0)$$



(4) 电感的串、并联

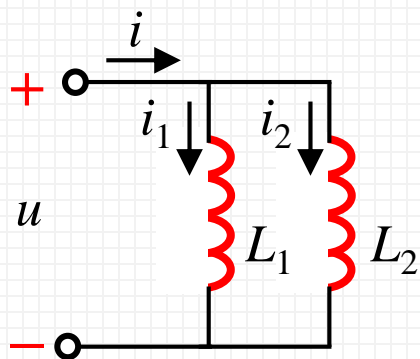
$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di}{dt}$$



$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$



$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$$

串并特性与**电阻**相同



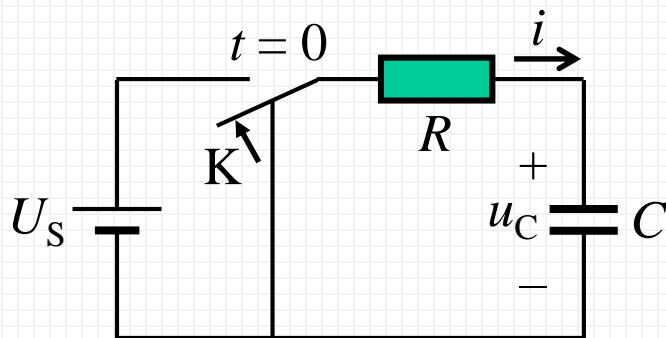
电容元件与电感元件的比较

	电容 C	电感 L
变量	电压 u 电荷 q	电流 i 磁链 ψ
关系式	$q = Cu$ $i = C \frac{du}{dt}$ $W_c = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2C}q^2$	$\psi = Li$ $u = L \frac{di}{dt}$ $W_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2L}\psi^2$

- (1) 元件方程是同一类型;
- (2) 若把 $u-i$, $q-\psi$, $C-L$, $i-u$ 互换, 可由电容元件的方程得到电感元件的方程;
- (3) C 和 L 称为对偶元件, ψ 、 q 等称为**对偶**元素。



(1) 动态电路 (Dynamic circuit)

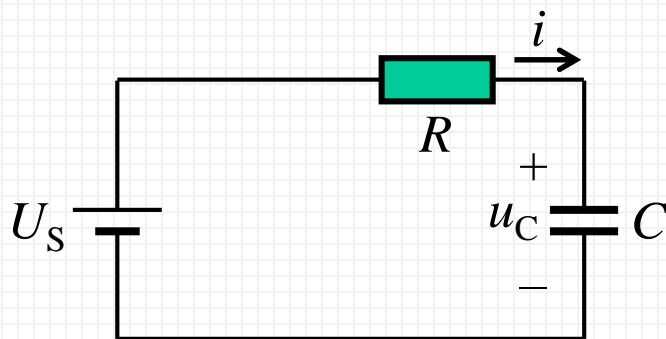


包含 L 、 C 储能元件的电路

稳态分析:

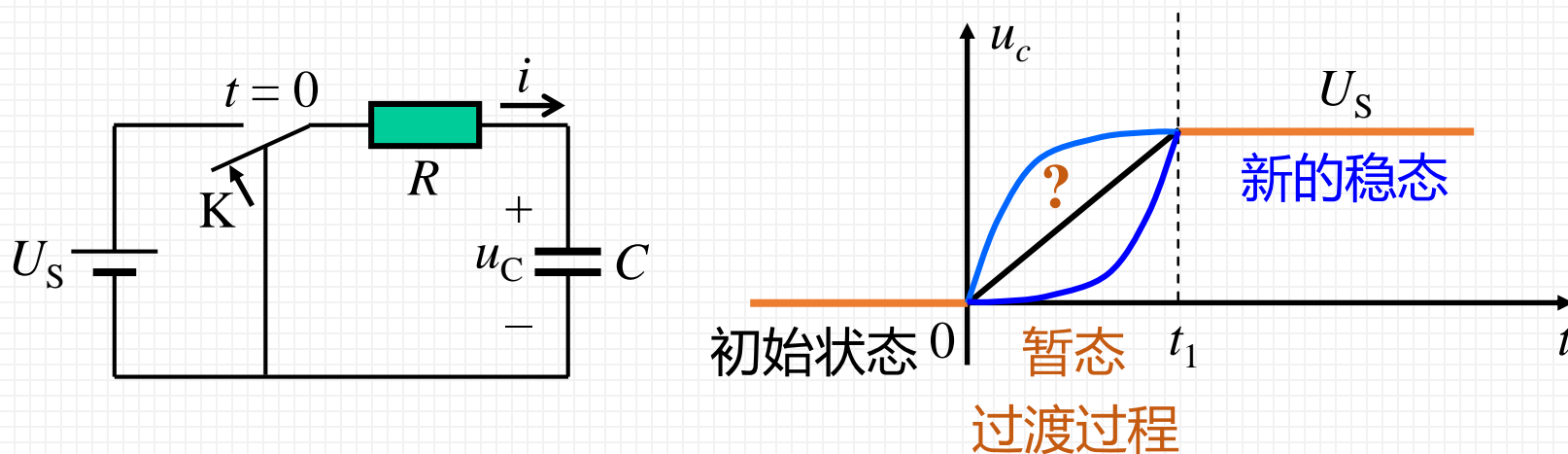
K 向上合闸之前:

$$i = 0, \quad u_C = 0$$



K 向上合闸很长时间以后:

$$i = 0, \quad u_C = U_S$$



动态电路的产生 电路状态发生变化时，储能元件能量的改变需要一段时间。

电路由一个稳态过渡到另一个稳态需要经历的过程称作**过渡过程** (transient process) 。



(2) 过渡过程发生的条件

1) 电路中存在储能元件 L 、 C

能量的存储和消耗需要一段时间

$$p = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

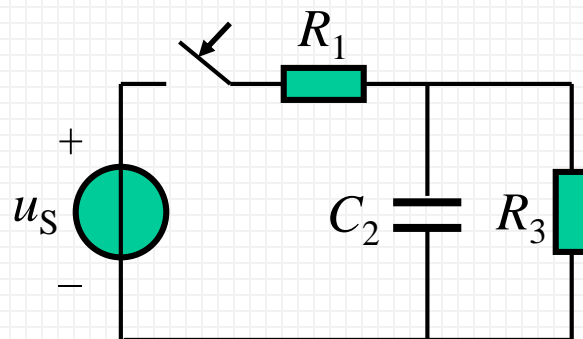
2) 电路的状态发生改变

电源的开合

支路的连接与分离

元件参数的瞬时改变

换路



开关元件的重要作用



(3) 稳态分析与暂态分析的区别

稳态分析

换路发生很长时间

I_L 、 U_C 不变

代数方程组描述电路

暂态分析

换路刚发生

i_L 、 u_C 随时间变化

微分方程组描述电路

(4) 一阶 (First-order) 与二阶 (second-order) 电路

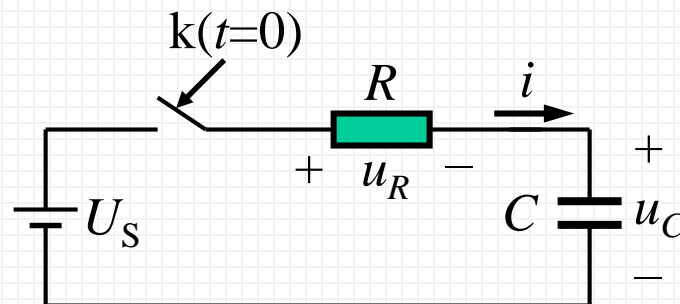
电路用一阶微分方程来描述

电路用二阶微分方程来描述



电路过渡过程分析的关键问题

- 如何根据电路列写ODE?
 - KCL+KVL+RLC的元件特性
- 如何获得ODE的初值?
 - 换路定理
- 如何求非齐次ODE的特解?
 - 对于直流和正弦激励，直接求其稳态解
 - 对于其他常见激励，查表寻找特解的函数类型
 - 将查表所得代入方程求出待定系数
 - 对于一般激励，利用卷积积分



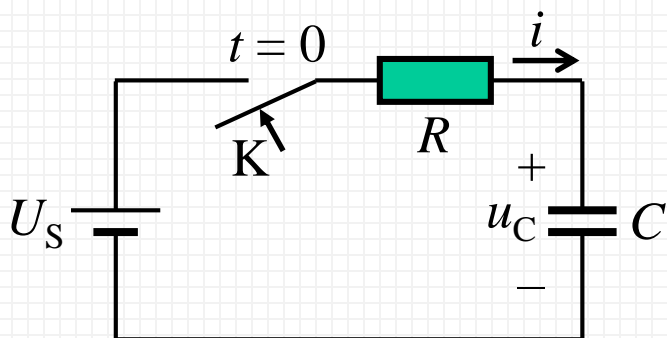
换路前 $u_C = U_0$

求：换路后电容电压 $u_C(t)$ 。

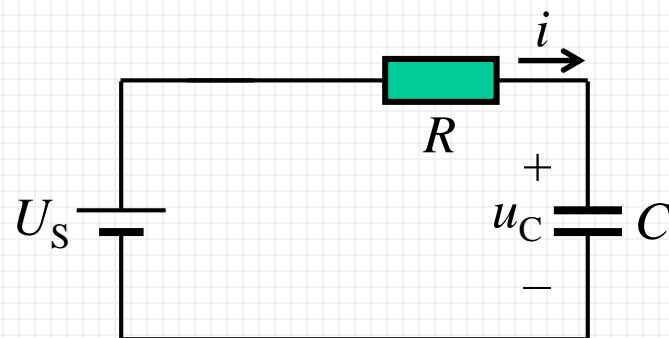


1 方程的列写

求电容电压 u_C



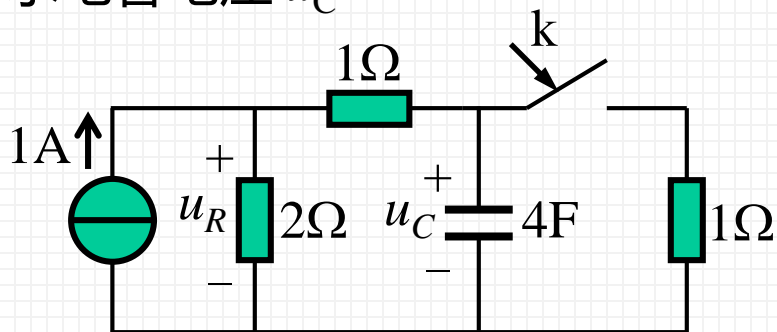
换路以后



$$U_s = u_C + Ri = u_C + RC \frac{du_C}{dt}$$

其他电路怎么办?

求电容电压 u_C



法1: 戴维南等效

法2: 不列方程
直觉求解



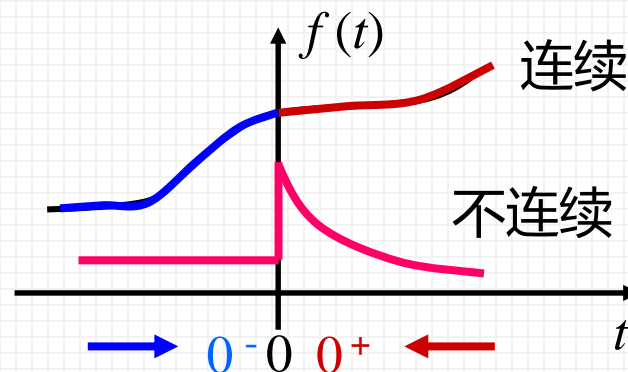
2、初值的获得

(1) $t = 0^+$ 和 $t = 0^-$ 的概念

换路发生在 $t=0$ 时刻

0^- 换路的前一瞬间

0^+ 换路的后一瞬间



$$f(0^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f(t)$$

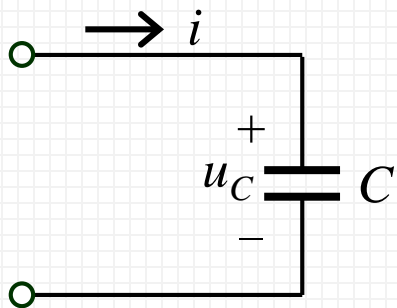
$$f(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$$

希望获得 $t = 0^+$ 时刻支路电压（电流）的初值和导数的初值。



(2) 换路定理

1)

 $t = 0^+$

$$u_C(t) = u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(\tau) d\tau$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i(\tau) d\tau$$

如果 $i(\tau)$ 为有限值

$$\int_{0^-}^{0^+} i(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \longrightarrow \quad u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

$$q = C \times u_C$$

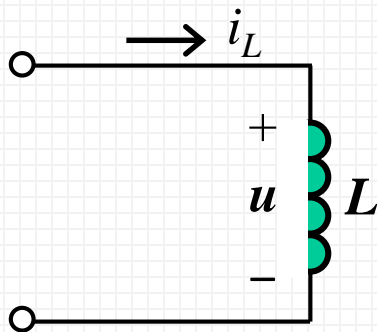
$$q(0^+) = q(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} i(\tau) d\tau$$

$$q(0^+) = q(0^-)$$

电荷守恒



2)



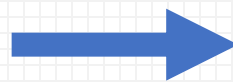
$$i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^t u(\tau) d\tau$$

 $t = 0^+$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} u(\tau) d\tau$$

如果 $u(\tau)$ 为有限值

$$\int_{0^-}^{0^+} u(\tau) d\tau \rightarrow 0$$



$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

$$\psi = Li_L$$

$$\psi(0^+) = \psi(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} u(\tau) d\tau$$

$$\psi(0^+) = \psi(0^-)$$

磁链守恒



换路定理

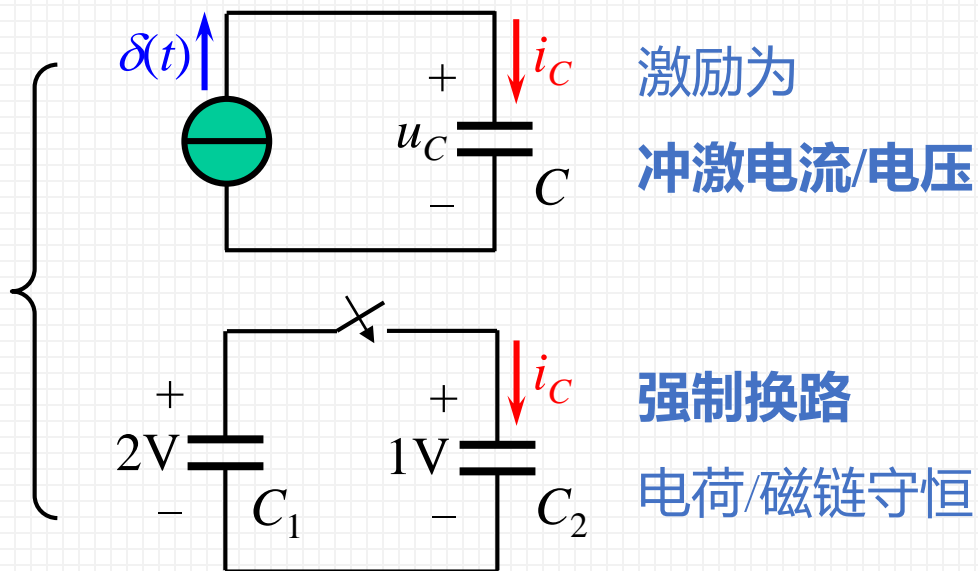
$$\begin{cases} q(0^+) = q(0^-) \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) \end{cases}$$

条件：换路时流经电容的电流为**有限值**

$$\begin{cases} \psi(0^+) = \psi(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases}$$

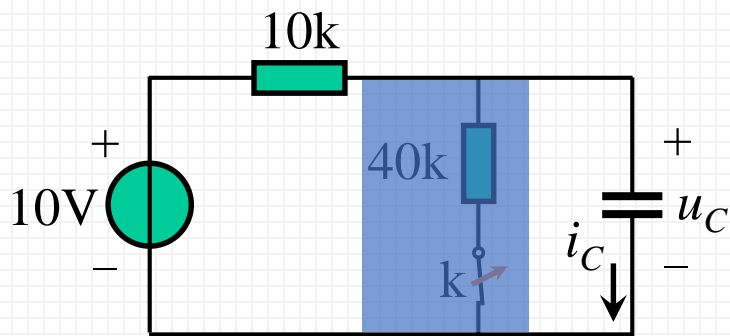
条件：换路时电感上的电压为**有限值**

什么时候 i_C 、 u_L 为**无穷值**?



(3) 确定电路的初值

例1 求电容电流初值 $i_C(0^+)$ 。



换路前 $u_C(0^-) = 8V$

根据换路定理 $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 8V$

如何求 i_C 在 (0^+) 时刻的值?

KVL $10ki_C(0^+) + u_C(0^+) = 10$

$$i_C(0^+) = \frac{10 - 8}{10k} = 0.2mA$$

结论1: i_C 随便跳

$$i_C(0^-) = 0 \neq i_C(0^+)$$

结论2:

求**初值**时**电容 C**可看作

独立电压源

电感 L可看作**独立电流源**

替代
定理

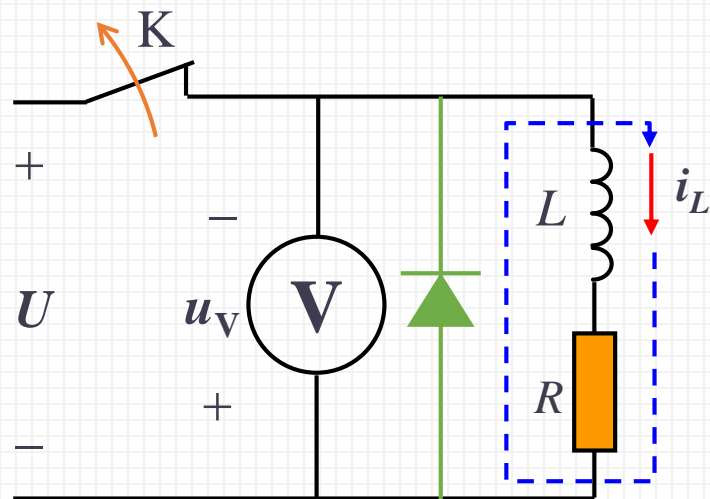
例2

已知: $U = 20\text{V}$ 、 $R = 1\text{k}\Omega$ 、 $L = 1\text{H}$

电压表内阻 $R_V = 500\text{k}\Omega$

设开关 K 在 $t = 0$ 时打开。

求: K 打开的瞬间, 电压表两端的电压。



换路前 $i_L(0_-) = \frac{U}{R} = \frac{20}{1} = 20\text{mA}$

换路瞬间 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 20\text{mA}$

换路瞬间, i_L 大小、方向都不变, 电感等效为一个大小为 $i_L(0_+)$ 的**恒流源**

$$u_V(0_+) = i_L(0_+) \cdot R_V = 20 \times 10^{-3} \times 500 \times 10^3 = 10000 \text{ V}$$

注意: 实际使用中 (如直流电机、直流继电器) 要加保护措施, 用**续流二极管**为电感**提供放电回路**, 否则线圈两端会产生高压, 对设备造成损坏。



火花塞



点火器



小结：求电路初值的步骤

(a) 由换路前的稳态电路求 $u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$

0^- 电路 (电阻电路) (电容 C 开路、电感 L 短路)

(b) 应用换路定理求 $u_C(0^+)$ 和 $i_L(0^+)$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

(c) 画 0^+ 时刻的等效电路

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

* 保留电路拓扑结构

** 用独立电压源替代电容 C 、用独立电流源替代电感 L

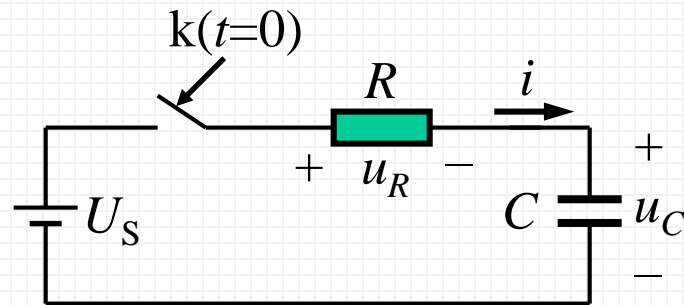
*** 独立电压源值为 $u_C(0^+)$ 、独立电流源值为 $i_L(0^+)$

(d) 由 0^+ 电路 (电阻电路) 求电路中其余支路量 0^+ 时刻的值



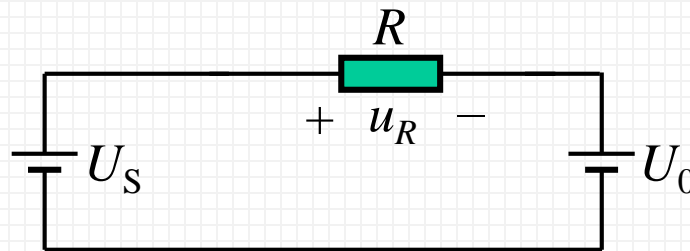
3 经典解法

例1 已知: $u_C(0^-)=U_0$
求: 电阻电压 $u_R(t)$ 。



$$\begin{cases} u_R + u_C = U_S \\ i = C \frac{du_C}{dt} \\ u_R = iR \end{cases} \quad \longrightarrow \quad u_R + \frac{1}{C} \int \frac{u_R}{R} dt = U_S \quad \longrightarrow \quad \frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = 0$$

$$u_R(0^+) = U_S - U_0$$



0⁺电路



常系数线性微分方程的求解过程

$$\begin{cases} a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b \\ y(0) = b_0 \end{cases}$$

特征方程

$$a_1 p + a_2 = 0$$

特征根

$$p = -\frac{a_2}{a_1}$$

齐次通解

$$y'' = Ae^{pt}$$

非齐次特解

$$y' = b$$

全解

$$y = Ae^{pt} + b$$

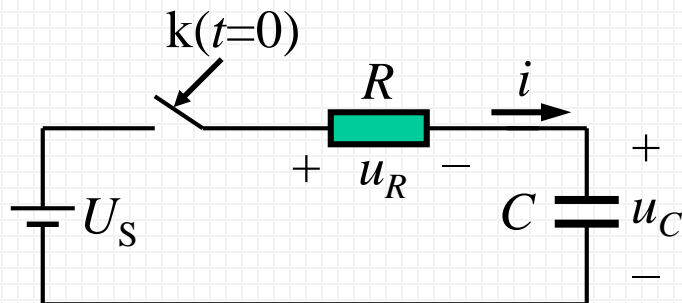
$$y(0) = b_0$$

$$A = b_0 - b$$

$$y = b + (b_0 - b)e^{pt} \quad t \geq 0$$



例1 已知: $u_C(0^-)=U_0$
求: 电阻电压 $u_R(t)$ 。



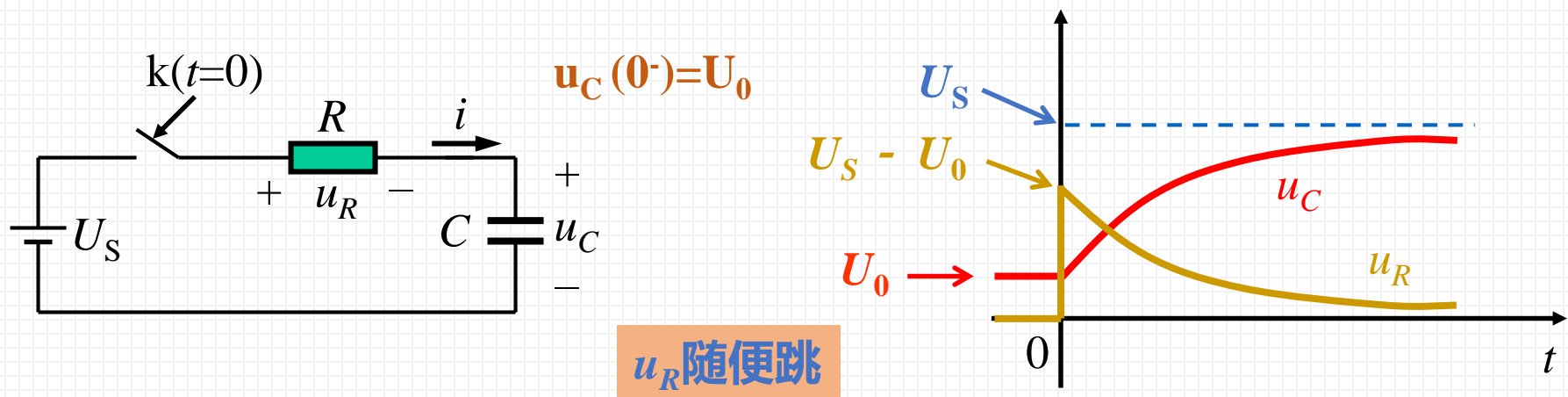
$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0 \quad \rightarrow \quad p + \frac{1}{RC} = 0 \quad \rightarrow \quad p = -\frac{1}{RC}$$

$$u_R = Ae^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

$$u_R(0^+) = U_S - U_0$$

$$A = U_S - U_0$$

$$u_R = (U_S - U_0)e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$



$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0 \quad \rightarrow \quad p = -\frac{1}{RC} \quad \rightarrow \quad u_R = (U_s - U_0)e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \quad \rightarrow \quad p = -\frac{1}{RC} \quad \rightarrow \quad u_C = U_s + (U_0 - U_s)e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

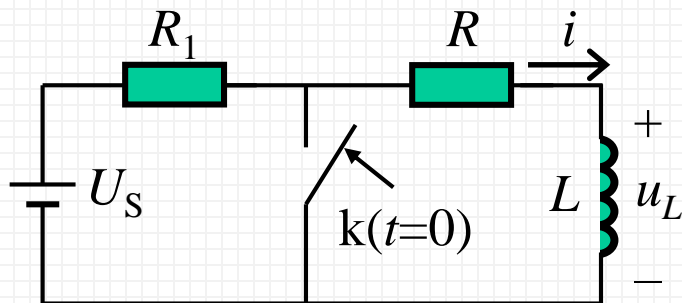
令 $\tau = -1/p = RC > 0$ ，一阶RC电路的时间常数(time constant)

激励和响应之间
不是线性关系!

$$[\tau] = [RC] = [\text{欧}][\text{法}] = [\text{欧}]\left[\frac{\text{库}}{\text{伏}}\right] = [\text{欧}]\left[\frac{\text{安秒}}{\text{伏}}\right] = [\text{秒}]$$



例2 求图示电路中电流*i*。



特征方程 $Lp + R = 0$

特征根 $p = -\frac{R}{L}$

令 $\tau = L/R$ 为一阶RL电路的**时间常数**

$$[\tau] = \left[\frac{L}{R}\right] = [\text{秒}]$$

全解 $i(t) = 0 + Ae^{-t/\tau}$

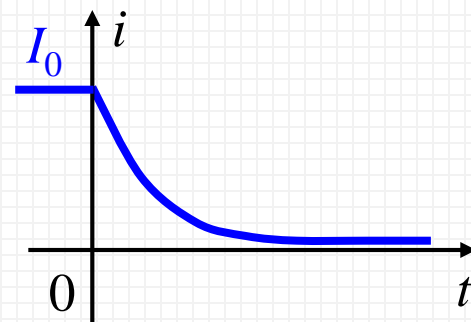
由初值确定 A $A = i(0^+) = I_0$

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

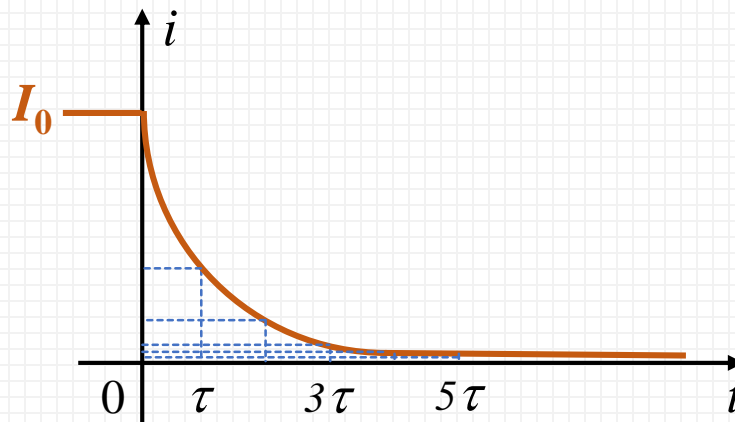
$$i(0^-) = \frac{U_s}{R_1 + R}$$

$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{U_s}{R_1 + R} = I_0$$



**关于 τ 的讨论**

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

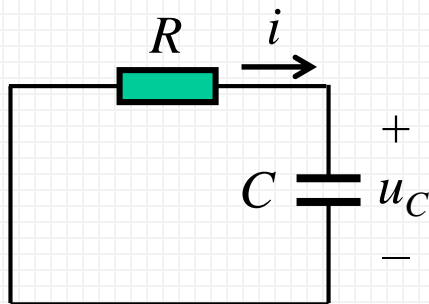


t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	I_0	$I_0 e^{-1}$	$I_0 e^{-2}$	$I_0 e^{-3}$	$I_0 e^{-5}$
	I_0	$0.368 I_0$	$0.135 I_0$	$0.05 I_0$	$0.007 I_0$

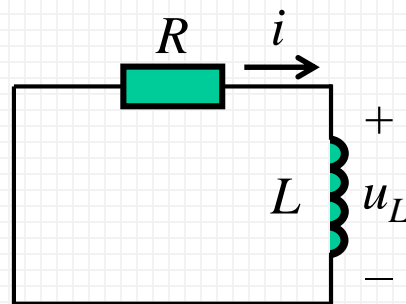
工程上通常认为 $3\tau \sim 5\tau$ 后过渡过程结束。

τ 越小，电压/电流变化越快。





$$\tau = RC > 0$$



$$\tau = L/R > 0$$

工程上通常认为 $3\tau \sim 5\tau$ 后过渡过程结束。

τ 越小，电压/电流变化越快。

同样是电阻 R ，为什么在 RC 电路中就是**越大越慢**，在 RL 电路中就是**越大越快**？

此处可以有弹幕



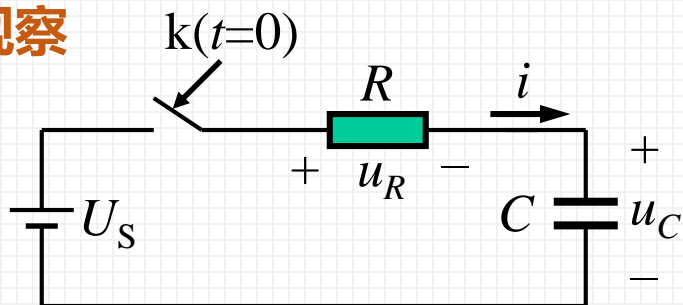
动态电路的经典解法

- 列（有关待求支路量的）微分方程。
- 由换路前 0^- 电路求 $u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$ 的值。
- 应用换路定理画 0^+ 电路，求待求支路量的 0^+ 时刻 值。
- 求微分方程对应的特征方程，得到齐次通解。
- 求出非齐次微分方程的1个特解，得到非齐次微分方程的全解。

全解 = 齐次解 + 特解
- 由 0^+ 时刻的值确定全解中的待定系数。

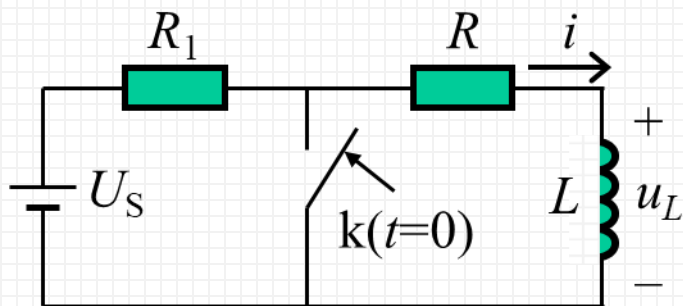
4 一阶电路的直觉解法 (三要素法)

观察



$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

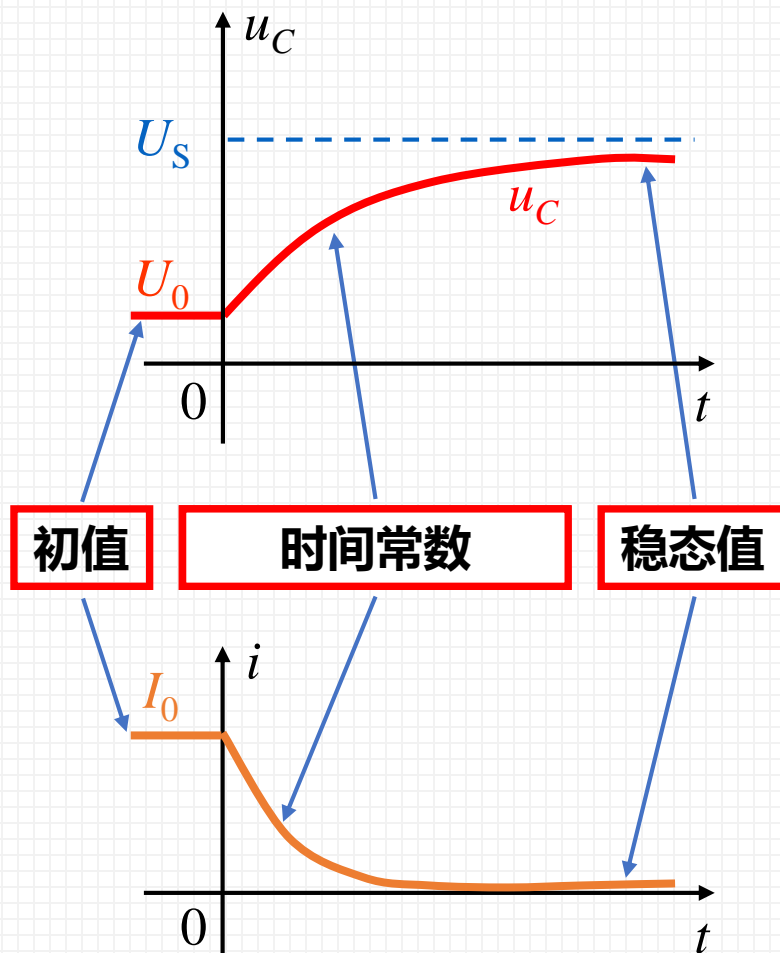
时间常数 $> 0 \rightarrow$ 特解 = 稳态解



$$i = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0$$

如果能够方便地求得这3个值?

不用列常微分方程!



讨论一阶电路的一般情况

任意支路量 f 的方程

$$\frac{df}{dt} + af(t) = u(t)$$

$a > 0$

待定系数

$$f(t) = \text{特解} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$t \rightarrow \infty$

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$f(0^+) = f(\infty) + A$$

一阶常系数常微分方程

特征根 $(-a) < 0$

时间常数 $(1/a) > 0$

特解 $= f(\infty)$

$$A = f(0^+) - f(\infty)$$

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

三要素 $\left\{ \begin{array}{ll} f(\infty) & \text{稳态解} \\ f(0^+) & \text{初值} \\ \tau & \text{时间常数} \end{array} \right.$

优点1: 可适用于各支路量

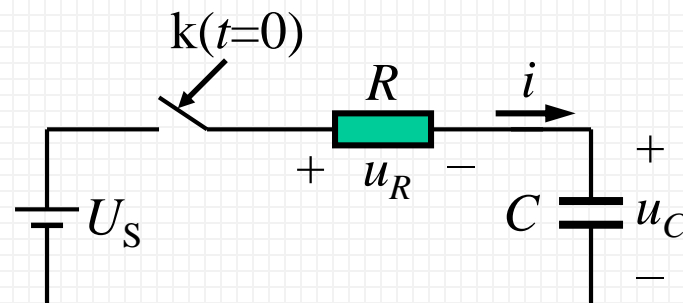
优点2: 不列写方程直接获得解



用直觉解法重做前面例

已知: $u_C(0^-) = U_0$

求: 电阻电压 $u_C(t)$, $u_R(t)$ 。



$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 \quad \xleftrightarrow{\text{电阻电路}} \quad u_R(0^+) = U_S - U_0$$

$$u_C(\infty) = U_S \quad \xleftrightarrow{\text{电阻电路}} \quad u_R(\infty) = 0$$

$$\tau = RC \quad \xleftrightarrow{\text{电阻电路}} \quad \tau = RC$$

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad \quad \quad u_R = (U_S - U_0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$



例 求图示电路中电压 $u_R(t)$ 。

$$u_R(t) = u_R(\infty) + [u_R(0^+) - u_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

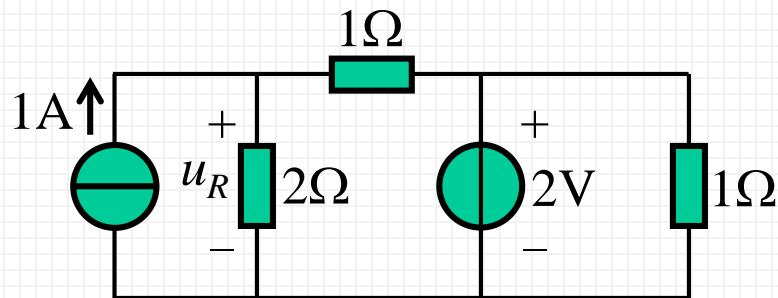
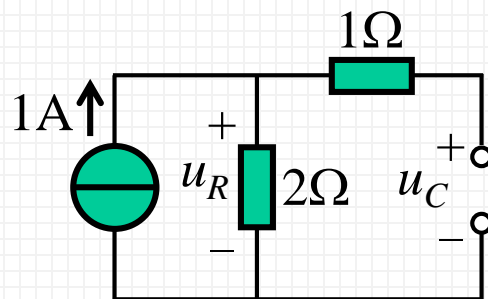
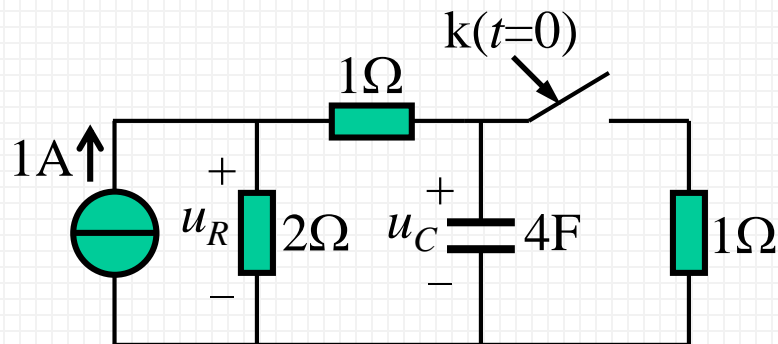
解 **0⁻ 电路**

(换路前稳态电路) $u_C(0^-) = 2\text{V}$
(第1个电阻电路)

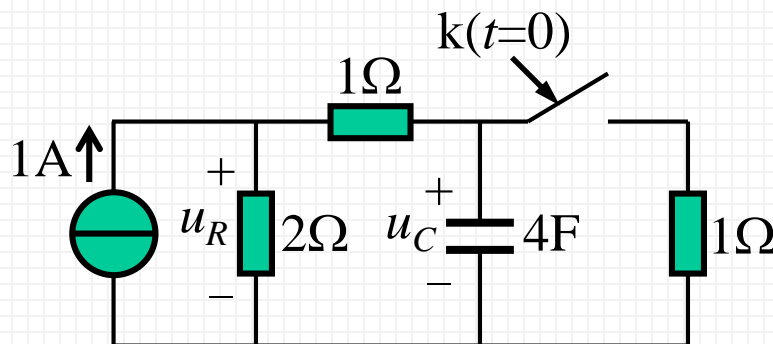
0⁺ 电路
(第2个电阻电路)

$$\frac{u_R(0^+) - 2}{1} + \frac{u_R(0^+)}{2} = 1$$

$$u_R(0^+) = 2\text{V}$$

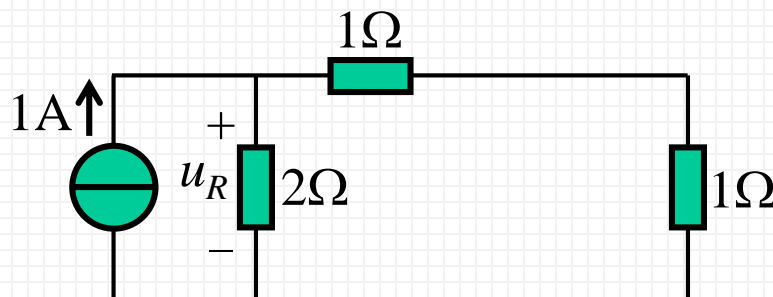


求电压 $u_R(t)$ 。



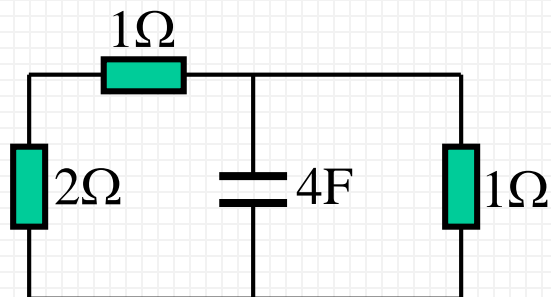
$$u_R(0^+) = 2 \text{ V}$$

换路后稳态电路
(第3个电阻电路)



$$u_R(\infty) = 1 \text{ V}$$

求时间常数电路
(第4个电阻电路)



$$\tau = \frac{3}{4} \times 4 = 3 \text{ s}$$

$$u_R(t) = u_R(\infty) + [u_R(0^+) - u_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 + e^{-\frac{t}{3}} \text{ V} \quad t \geq 0$$



关于直觉解法的讨论

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

❖ 适用于：

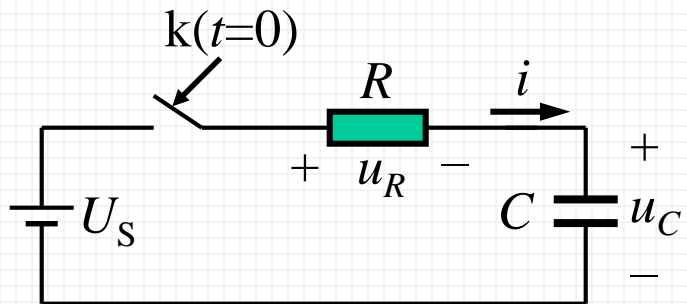
- 时间常数、初值、终值比较容易求的场合
- 直流激励或正弦激励 → L15
- 可用于求电路任意支路的电压或电流

❖ 仅对1阶电路适用

❖ 时间常数的概念仅对1阶电路适用



5 从另一个角度观察解

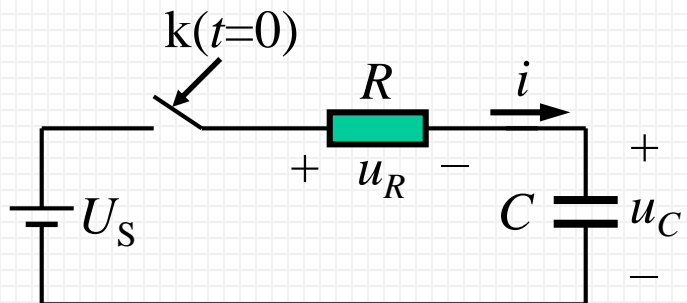


$$u_C(0^-) = U_0$$

求：电容电压 $u_C(t)$ 。

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

全响应



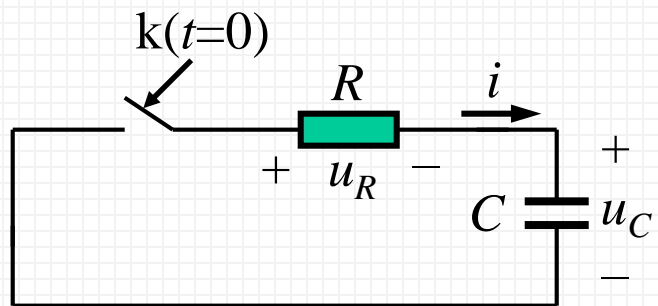
$$u_C(0^-) = 0$$

零状态(储能元件无初始储能)

$$u_C(0^+) = 0$$

$$u_C(\infty) = U_S \quad \tau = RC$$

$$u_C = U_S + (0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$



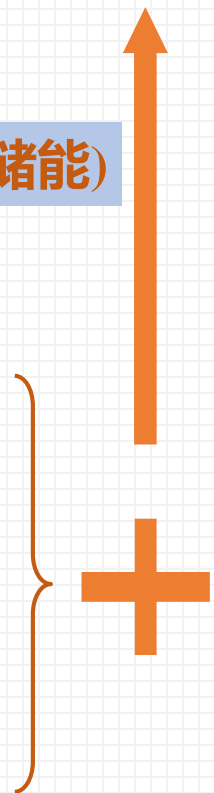
$$u_C(0^-) = U_0$$

零输入(没有外加电源)

$$u_C(0^+) = U_0$$

$$u_C(\infty) = 0 \quad \tau = RC$$

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$



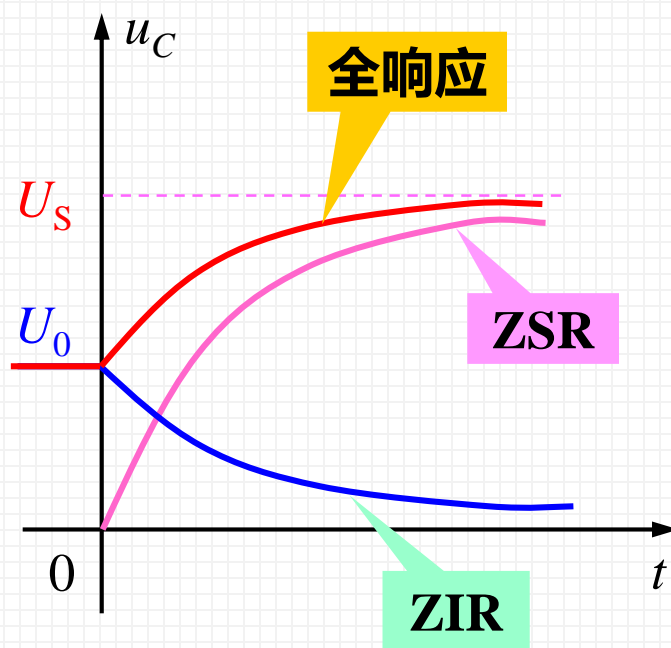
零输入响应(*zero-input response*) (**ZIR**): 没有外加激励, 由 L 、 C 初始储能引起的响应

零状态响应(*zero-state response*) (**ZSR**): L 、 C 没有初始储能, 由外加激励引起的响应

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_C(0^-) = 0 \\ i_L(0^-) = 0 \end{array} \right.$$

ZSR

ZIR





强制分量/非齐次特解 自由分量/齐次通解

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

数学视角

方程视角

$$= \underbrace{\left[u_C(\infty) - u_C(\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} \right]}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{u_C(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}}$$

电路视角

能量视角

零状态响应

零输入响应

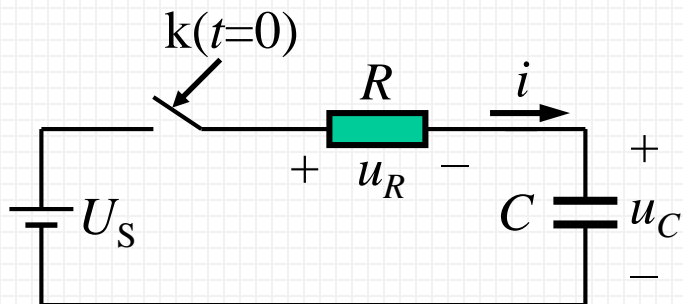
全响应 = 强制分量 + 自由分量

= 零输入响应 + 零状态响应

为什么要这样划分?

原因1: ZIR 和 ZSR 都是可能出现的过渡过程

原因2: ZSR 对于分析一般激励的响应非常重要



激励

$$U_S$$

$$2U_S$$

$$U_{S1} + U_{S2}$$

ZSR的激励 - 响应线性关系

$$u_C(0^-)=0 \quad \text{零状态}$$

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

响应

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

$$u_C = 2U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

$$u_C = (U_{S1} + U_{S2})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$