习题 1.3 作业参考解答

数学科学系　朱浩然　2017311249

1. 下列函数当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，其极限是否存在？若存在，求出极限.

(1) $\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

解： 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2=0$，且当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$x^2+y^2\neq 0$. 又

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{\sin s}=1.$$

由复合函数极限的性质有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1.$$

(3) $(x^2+y^2)e^{-x-y}$.

解： 由极限的乘法运算法则有

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)e^{-x-y}\\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{-x}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{-y}\\
=&\,0\cdot 1\cdot 1\\
=&\,0.
\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

解：令 $y=kx$，即令 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋向于 $(0,0)$，

则

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k=1.\end{cases}$$

由极限的唯一性知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

(7) $\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$.

解：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x^3-y^3}{x+y}=\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^3-x}}\frac{x^3-y^3}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-(x^3-x)^3}{x^3}=\lim_{x\to 0}1-(x^2-1)^3=2.$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$ 不存在.

注：讨论极限一般默认在定义域内讨论. 例如此题中不考虑 $y=-x$ 的情况.

(9) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

解：令 $y=kx$，则

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+k^2}=\begin{cases}1, & k=0,\\ \dfrac{1}{2}, & k=1.\end{cases}$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

(11) $\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$.

解：令 $x=ky^2$，则

$$\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=\frac{k^4y^{12}}{(k^2+1)^3y^{12}}=\frac{k^4}{(k^2+1)^3}=\begin{cases}0, & k=0,\\ \dfrac{1}{8}, & k=1.\end{cases}$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ 不存在.

6. 判断下列函数的在 $(0,0)$ 点的连续性

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

解：根据函数连续的定义，考虑 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的极限.

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有

$$\begin{aligned}&|\sin(x^3+y^3)|\leq|x^3+y^3|\leq|x|^3+|y|^3,\\ \Rightarrow&\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{|x|^3+|y|^3}\right|\leq 1.\end{aligned}$$

又

$$0\leq\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}=\frac{(|x|+|y|)(|x|^2-|xy|+|y|^2)}{|x|^2+|y|^2}\leq|x|+|y|,$$

故

$$\begin{aligned}0&\leq\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\\ &=\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{|x|^3+|y|^3}\right|\cdot\left|\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}\right|\\ &\leq|x|+|y|\to 0.\quad((x,y)\to(0,0))\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

解： 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，有

$$\begin{aligned} & x^2+y^2 \geq 2|xy|, \\ \Rightarrow\ & 0 \leq \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq 2^{-\frac{3}{2}}|xy|^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad ((x,y)\to(0,0)) \\ \Rightarrow\ & \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 = f(0,0). \end{aligned}$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

8. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = +\infty$，证明：$f$ 有最小值.

证明. 设 $f(0,0) = A$. 则由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = +\infty$ 知，

$$\exists\, M > 0, s.t.\ \text{当}\, x^2+y^2 > M\, \text{时，有}\, f(x,y) > A. \tag{8.1}$$

考虑有界闭集 $B = \bar{B}((0,0), \sqrt{M}) = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq M\}$.

由 $f \in C(\mathbb{R}^2)$ 知 $f \in C(B)$.

从而 f 在 B 上有最小值，即

$$\exists\, (x_0,y_0) \in B, s.t.\ f(x_0,y_0) = \min_{\mathbf{z}\in B} f(\mathbf{z}). \tag{8.2}$$

由 $(0,0) \in B$ 知 $f(0,0) \geq f(x_0, y_0)$.

故由(8.1)知 $f(x,y) > A \geq f(x_0, y_0), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B$.

由(8.2)知 $f(x,y) \geq f(x_0, y_0), \forall (x,y) \in B$.

综上所述，$f(x,y) \geq f(x_0, y_0), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

即 f 有最小值. $\square$

10. 当 $(x,y) \to (0,0)$ 时，讨论下列无穷小量的阶 (若有阶，求阶；若无阶，说明理由).

(1) $\sin(x^2+y^2)$.

解：此题中 $\rho = \|(x,y)-(0,0)\| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$. 用阶的定义.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\rho^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1 \neq 0.$$

故 $\sin(x^2+y^2)$ 是 2 阶无穷小.

(3) $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解：对 $k \geq 2$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\rho^k} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \rho^{2-k}, \text{不存在}.$$

对 $k < 2$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\rho^k} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \rho^{2-k} = 0.$$

所以 $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 无阶.

(5) $ax^2+2bxy+cy^2$.

解：一方面，假设有阶，设 $ax^2+2bxy+cy^2$ 是 k 阶无穷小. 则

$$\exists\,\alpha\neq 0, s.t. \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\rho^k}=\alpha.$$

令 $y=tx$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+2bt+ct^2}{(t^2+1)^{\frac{k}{2}}}\cdot x^{2-k}=\alpha,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

令 $t=0$，则有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} a\cdot x^{2-k}=\alpha,\\
&\Rightarrow a=\alpha,\ k=2,\\
&\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a+2bt+ct^2}{t^2+1}=\alpha,\\
&\Rightarrow \frac{a+2bt+ct^2}{t^2+1}=\alpha,\\
&\Rightarrow (c-\alpha)t^2+2bt+(a-\alpha)=0,\ \forall t\in\mathbb{R},\\
&\Rightarrow c-\alpha=0,\ 2b=0,\ a-\alpha=0,\\
&\Rightarrow a=c=\alpha\neq 0,\ b=0.
\end{aligned}$$

以上为必要条件.

另一方面，当 $a=c\neq 0, b=0$ 时，令 $k=2$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\rho^k}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{a(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=a\neq 0.$$

此时，$ax^2+2bxy+cy^2$ 为 2 阶无穷小.

综上所述，当 $a=c\neq 0, b=0$ 时，$ax^2+2bxy+cy^2$ 为 2 阶无穷小，其余情形无阶.