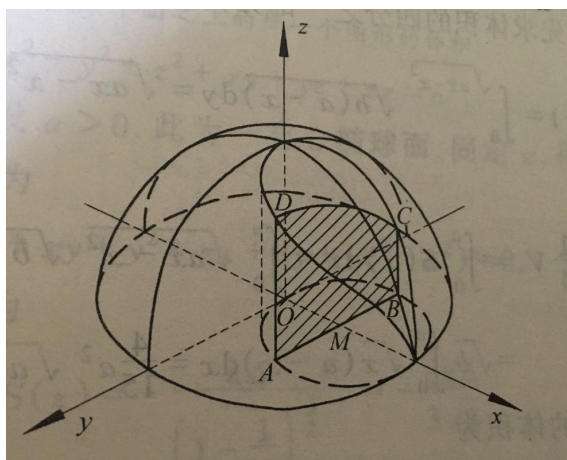


本次习题课讨论题涉及以下三个方面的问题. 一. 计算三个重要立体体积和表面积; 二. 关于重积分变量替换问题; 三. 重积分的物理应用.

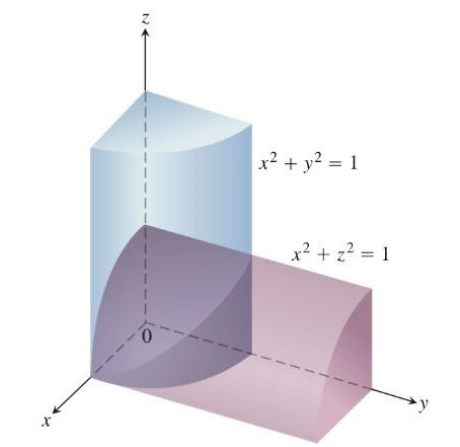
一. 计算三个重要立体的体积和表面积.

注: 求解这类题目, 最重要的是能够正确想象和画出这些立体的大致图形.

题1. 求由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和柱面 $x^2 + y^2 = ax$ (这里 $a > 0$) 所围, 并位于圆柱面内部的有界立体 V 的体积和表面积. 这个立体 V 通常称作 Viviani 立体. 它的上半部分如图所示.



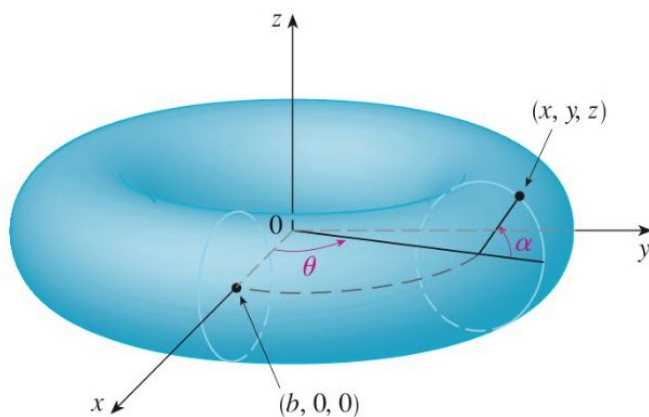
题2. 求两个圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 和 $x^2 + z^2 = a^2$ 相交部分 V 的体积和表面积, 这里 $a > 0$. (这是课本第162页习题3.4第9题3). 所考虑的立体 V 位于第一卦限的部分, 如图所示.



题3. 设环面 S 由如下参数式给出

$$x = (b + a \cos \alpha) \cos \theta, \quad y = (b + a \cos \alpha) \sin \theta, \quad z = a \sin \alpha, \quad (1)$$

其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 < a < b$, 如图所示. 求环面 S 的面积, 以及由环面 S 所包围的立体(实心轮胎)的体积.



二. 重积分的变量替换问题

题1. 计算积分

$$I = \iint_D \frac{1}{xy} dx dy$$

其中平面闭域 D 由如下不等式确定.

$$2 \leq \frac{x}{x^2 + y^2} \leq 4 \quad \text{and} \quad 2 \leq \frac{y}{x^2 + y^2} \leq 4. \quad (2)$$

题2. 求极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy$$

题3. 设 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 记

$$F(t) = \iiint_{V_t} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dx dy dz, \quad (3)$$

这里 V_t 圆柱体 $x^2 + y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq h$. 求极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}.$$

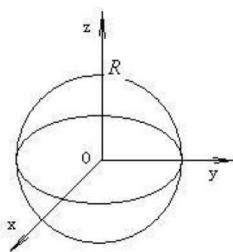
题4. 计算二重积分

$$I = \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy, \quad (4)$$

其中 D 代表由平面上直线 $x + y = 1$ 和两个坐标轴即 $x = 0$ 和 $y = 0$ 所围成的有界闭域.

三. 重积分的物理应用.

1. 假设半径为 $R > 0$ 的球体浮在水面. 现将球体压入水下, 使得水面刚好淹没球体, 即球心距离水面为 R . 求在这过程中外力所作的功.



2. 如图所示, 半径为 R 的均质圆盘的密度为常数 μ , 圆盘上方有一根竖直的长度为 l 的细棒, 其密度为常数 ρ , 其下端距离圆盘的原心为 a . 求圆盘对细棒的引力.

