1、设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$

求证：$\exists \xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geq 8$

2. 设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且 $|f''(x)|\leq M$.

求证：$\forall x\in[0,1]$，$|f'(x)|\leq \frac{M}{2}$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证：$\int_a^b x f(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

类似：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导数存在，且当 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$

证明 $\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 > \int_0^1 [f(x)]^3 dx$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(\frac{a+b}{2})=0$

证明：$\exists \xi\in[a,b]$，使得 $f''(\xi)=\frac{24}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)dx$

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

6. 对于 $x>0$，证明 $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt$（$n$ 为自然数）的最大值

不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

7. 设 $f(x)\in C[0,1]$，利用所学证明 $\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)dt\right]dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)f(x)dx$

8. 已知 $f(t)=\int_0^\pi |t-\sin x|dx$，求 $f(t)$ 的最小值.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有 2 阶导数，且 $f(-1)=f(1)$，$0\leq f''(x)\leq 1$

① 求证 $|f'(x)|\leq\frac{1}{4}(x^2+2|x|+1)$　　② 求证 $|f(1)-f(0)|\leq\frac{7}{12}$

10. 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，$0<k<1$

(1) 证明 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛

(2) $y(0)=1$，$y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$.