《微积分A2》第1周第4课

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2020年02月17-21日

二元函数的连续性 (continuity), 记号 $C(D)$

Definition

定义: (i) 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域 D 包含点 $z_0 = (x_0, y_0)$ 的一个邻域 $B(z_0, r)$. 若极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 且等于 $f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续. 若函数 $f(x,y)$ 在其定义域 D 的每个点都连续, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上处处连续.

记号: $C(D)$ 记开区域或闭区域 D 上处处连续函数的全体.

例：设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明函数 f 在原点 $(0,0)$ 处连续.

证明:

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$$

$$=|x|\frac{|x|}{|x|+|y|}+|y|\frac{|y|}{|x|+|y|}\leq|x|+|y|.$$

由此可见，当 (x,y) 的模充分小时，$|f(x,y)-f(0,0)|$ 可以任意小. 故 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$. 命题得证.

例: 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

易证, 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处的极限不存在, 见课本第 15 页例 1.3.2. 因此函数 f 在原点 $(0,0)$ 处不连续.

Definition

定义: 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数，其定义域 D 包含点 z_0 的一个邻域 $B(z_0, r)$. 若极限 $\lim_{z \to z_0} f(z)$ 存在且等于 $f(z_0)$，则称向量值函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续.

Theorem

记号同上述定义. 设 $f = (f_1, \cdots, f_m)$，则向量值函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ 每个分量函数 $f_k(z)$ 在点 z_0 处连续.

Proof.

回忆向量值函数极限的相关定理: 向量值函数在一点处有极限 $\Longleftrightarrow$ 其每个分量函数在这点有极限，可立刻得到结论. □

Theorem

定理: 两个连续函数的和, 差, 乘积, 以及商 (假设分母不为零) 均为连续函数.

Proof.

证明同一元函数情形. 细节略. □

Corollary

推论: (i) 二元多项式在全平面上连续; (ii) 二元分式函数 $p(x,y)/q(x,y)$ 在所有 $q(x,y) \neq 0$ 的点处连续, 这里 $p(x,y)$, $q(x,y)$ 均为二元多项式.

连续函数例子

Example

根据上述推论，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

处原点外处处连续.

Theorem

定理: 设 (i) $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, 且 $f(x)$ 于点 $x_0 \in D$ 处连续,

(ii) $g\colon D_1 \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, 且 $g(y)$ 于点 $y_0 \triangleq f(x_0)$ 处连续,

则复合函数 $f(g(x))$ 于点 $x_0 \in D$ 处连续.

证明: 根据复合函数极限定理立刻得到结论. 细节略.

复合函数连续性，例子

Example

例：证明函数 $\sin(xy+z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上处处连续.

证明：记 $f(x,y,z)=xy+z$, $g(u)=\sin u$，则 f 于 $\mathbb{R}^3$ 处处连续，g 于 $\mathbb{R}$ 处处连续. 由复合函数连续性定理知，函数 $g[f(x,y,z)]$ $=\sin(xy+z)$ 于 $\mathbb{R}^3$ 处处连续. 证毕. $\square$

Definition

定义: 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为任意子集, $f(z)$ 是定义在 D 上的函数. 称函数 f 在点 $z_0 \in D$ 处连续, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, $\forall z \in B(z_0, \delta) \cap D$. 若函数 f 在 D 中的每个点都连续, 则称它在 D 上(处处)连续.

例: 易证二元函数 $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 在闭单位圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上连续.

注: 我们对有界闭集上的连续函数特别感兴趣. 这个函数类相当于一元函数情形里有界闭区间上的连续函数类. 有界闭集常称作紧集(compact sets).

Theorem

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $f(z)$ 是定义在 D 上的连续函数, 则

(i)(有界性) 存在 $M > 0$, 使得 $|f(z)| \leq M, \forall z \in D$;

(ii)(最值性) 存在 $z_1, z_2 \in D$, 使得 $f(z_1) \leq f(z) \leq f(z_2), \forall z \in D$, 换言之, 连续函数 $f(z)$ 在有界闭集 D 上, 分别在点 z_1 和 z_2 处取得最小值和最大值.

注: 定理中的 D 为有界和闭的条件不可缺少. 不然结论不再成立. 例如对函数 $x^2 + y^2$ 而言, 取 $D = \mathbb{R}^2$ (无界)或取 D 为开圆盘 $x^2 + y^2 < 1$(不闭), 则函数无最大值.

定理证明

(i) 证有界性. 反证. 假设 $f(z)$ 在 D 上无界, 则必存在一个点列 $z_k \in D$, 使得 $|f(z_k)| \to +\infty$, $k \to +\infty$. 由于 D 有界, 故点列 $\{z_k\}$ 也有界. 根据 Bolzano-Weierstrass 定理可知, 这个点列有收敛子列 $\{z_{k_j}\}$. 设 $z_{k_j} \to z^*$, $j \to +\infty$. 由于 D 闭, 故 $z^* \in D$. 再利用函数 $f(z)$ 的连续性可知 $f(z_{k_j}) \to f(z^*)$, $j \to +\infty$. 此与 $|f(z_{k_j})| \to +\infty$, $j \to +\infty$ 的结论相矛盾. 有界性得证.

证明续一

(ii) 证最值性. 只证明函数 f 在 D 上必可取得最大值. 最小值情形的证明类似. 记 $M=\sup\{f(z),z\in D\}$. 由于 $f(z)$ 在 D 上有界, 故 M 为一个有限数. 由确界性质知, 对任意正整数 k, 存在 $w_k\in D$, 使得

$$M-\frac{1}{k}\le f(w_k)\le M,\quad \forall k\ge 1.$$

由 B-W 定理知点列 $\{w_k\}$ 有收敛子列 $\{w_{k_j}\}$. 设 $w_{k_j}\to w^*$. 由于 D 闭, 故 $w^*\in D$.

证明续二

于是在不等式

$$M - \frac{1}{k_j} \le f(w_{k_j}) \le M, \quad \forall j \ge 1.$$

中令 $j \to +\infty$ 即可得到 $M \le f(w^*) \le M$, 即 $f(w^*) = M$. 这表明函数 f 在点 w^* 处取得最大值 M. 证毕. □

Theorem

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为连通集，$f(z)$ 是 D 上的连续函数，则对任意两点 $z_1, z_2 \in D$，以及函数值 $f(z_1)$ 和 $f(z_2)$ 之间的任意一个数 μ，即 $\mu \in [f(z_1), f(z_2)]$ 或 $\mu \in [f(z_2), f(z_1)]$，存在一点 $z^* \in D$，使得 $f(z^*) = \mu$.

Proof.

由 D 的连通性定义知，存在完全包含在 D 中的折线连接 z_1, z_2. 不妨设这条折线就是连接 z_1, z_2 直线段. (当折线由多条直线段构成时可逐条处理). 于是这条直线段可由参数方程表示 $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, $t \in [0,1]$, 且 $z(0) = z_1$, $z(1) = z_2$. 令 $g(t) = f(z(t))$, 则根据复合函数连续性定理可知 $g(t)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $g(0) = f(z_1)$, $g(1) = f(z_2)$, 即 μ 是介于 $g(0)$ 和 $g(1)$ 之间的数. 根据一元连续函数的介值定理可知，存在 $t^* \in [0,1]$, 使得 $g(t^*) = \mu$. 于是存在 $z^* = z(t^*) \in D$, 使得 $f(z^*) = g(t^*) = \mu$. 证毕. □

总结: 任何有界闭区域上的连续函数具有三个性质:

有界性,

最值性,

介值性.

例子

<u>例</u>: 设 $f(z)$ 在全空间 $\mathbb{R}^n$ 上连续且满足条件 (i) $f(z) > 0$, $\forall z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; (ii) $f(cz) = cf(z)$, $\forall c > 0$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$. 证明存在两个正数 $a, b > 0$, 使得

$$a\|z\| \leq f(z) \leq b\|z\|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \quad (*)$$

<u>证</u>: 由条件 (ii) 可知 $f(0) = 0$. 故不等式 (*) 对任意 $b > a > 0$ 当 $z = 0$ 时均成立. 对于 $z \neq 0$, 显然不等式 (*) 等价于

$$a \leq \frac{f(z)}{\|z\|} \leq b \quad \text{or} \quad a \leq f\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \leq b. \qquad (**)$$

以下证(**), 即证明存在正数 $a, b > 0$, 使得 $a \leq f(w) \leq b$, $\forall w \in S$, 其中 S 表示单位球面, 即 $S = \{z \in \mathbb{R}^n, \|z\| = 1\}$. 易证 S 有界且闭. 由连续函数在有界闭集上的最值性可知, 存在 $z_1, z_2 \in S$, 使得

$$f(z_1) \leq f(z) \leq f(z_2), \quad \forall z \in S.$$

记 $a = f(z_1)$, $b = f(z_2)$, 则不等式(**) 成立. 从而不等式(*) 得证. □