1.

(a). Ω_1 一定有顶点.

这是由于对于标准型线性规划, 若 Ω_1 非空, 则至少有一个基本可行解.

又由于标准模型的基本可行解是顶点. 故一定存在顶点

(b). Ω_2 不一定有顶点.

反例: 取 A 为 1×2 矩阵, 例如 $[2 \quad 4]$. 取 $b=[1]$

则 $\Omega_2: \{x\in R^2 \mid 2x_1+4x_2 \geq 1\}$

表示一直线区域. A行满秩. Ω_2 非空. 没有顶点.

(c). Ω_3 一定有顶点.

若 $A=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_m)^T_{m\times n}$ $\quad b=(b_1, b_2 \ldots b_m)^T_{m\times 1}$

由于 Ω_3 非空. 设 $Ax\geq b$ 在边界上的解为 x_0.

由于 A 列满秩, 故行数 $m>$ 列数 n

因此, 考虑产生约束的等式.

$\exists k\geq n$. 使得

$$\begin{cases} a_1' x_0 = b_1' \\ a_2' x_0 = b_2' \\ \quad\vdots \\ a_k' x_0 = b_k' \\ a_{k+1}' x_0 = b_{k+1}' \\ \quad\vdots \\ a_m' x_0 = b_m \end{cases}$$

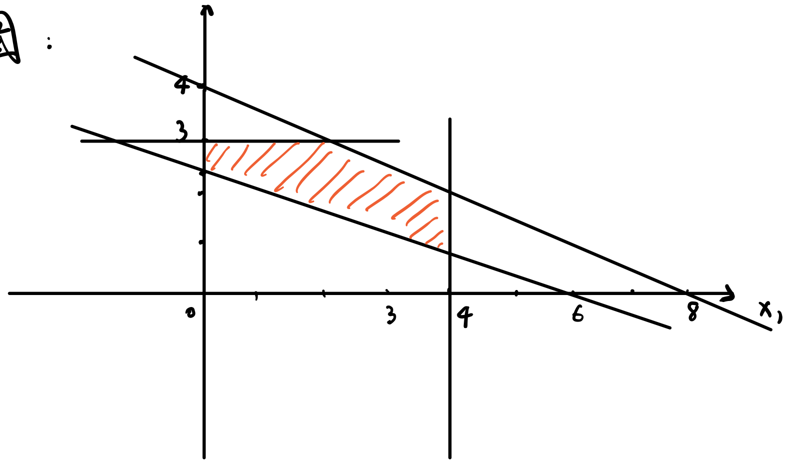
(此处顺序与前处不同)

$k=n$ 时, 满足 n 个线性无关的行, 系数阵可逆, 约束解唯一

$k>n$ 时. 剩余等式可表示为 n 个线性无关的行的线性组合. 可化归为 $k=n$.

因此 x_0 唯一, 一定存在顶点

2. 作图：



联立方程，易知所有顶点为：

$(0,3)$ $(2,3)$ $(4,2)$ $(4,0.8)$ $(0,2.4)$

(2) 假设标准型线性规划

$$\max\ c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax \ge b$$

在 x_1，x_2 上同时达到最优值.

则 $c^T x_1 = c^T x_2 = \max$.

由于可行域是凸集，因而 $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ 在可行域内 $(\lambda \in [0,1])$

故 $c^T(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda c^T x_1 + (1-\lambda) c^T x_2 = \max$.

因而线性规划问题有无穷多个最优解

3. 转化为 $A\vec{x} = \vec{b}$ 形式，即：

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$[A_2\ \ A_4] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.　　$|B| = 2$，故可逆.

$B^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} > 0$.　因此 A_2，A_4 构成可行基

$N = [A_1 \ A_3] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 解得 $x_2 = 2$ $x_4 = 4$

基本可行解为：$(0 \quad 2 \quad 0 \quad 4)^T$