多元函数求极限的常用方法

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2019年02月19日

方法总结

1. 利用函数的连续性,

方法总结

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质；

方法总结

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质;
2. 利用不等式放缩，

方法总结

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质;
2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则;

方法总结

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质；
2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则；
3. 作适当的变量替换，

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质；

2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则；

3. 作适当的变量替换，将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式.

1. 利用函数的连续性, 以及极限的运算性质;

2. 利用不等式放缩, 以及两边夹法则;

3. 作适当的变量替换, 将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式. 例如

方法总结

1. 利用函数的连续性, 以及极限的运算性质;

2. 利用不等式放缩, 以及两边夹法则;

3. 作适当的变量替换, 将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质；

2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则；

3. 作适当的变量替换，将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质；

2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则；

3. 作适当的变量替换，将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1,$$

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质；

2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则；

3. 作适当的变量替换，将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式．例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1,\cdots$$

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质；

2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则；

3. 作适当的变量替换，将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式．例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1,\cdots$$

4. 利用初等变形，

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质;

2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则;

3. 作适当的变量替换，将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1,\cdots$$

4. 利用初等变形，如分母有理化，

方法总结

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质;

2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则;

3. 作适当的变量替换，将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式. 例如

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \ \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = 1, \cdots$$

4. 利用初等变形，如分母有理化，取对数等方法，

1. 利用函数的连续性，以及极限的运算性质；

2. 利用不等式放缩，以及两边夹法则；

3. 作适当的变量替换，将问题转化为已知的(一元函数)标准极限模式. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1,\cdots$$

4. 利用初等变形，如分母有理化，取对数等方法，将问题简化.

例一

例一:

例一：求极限

例一：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

例一：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解:

例一: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解: 由于 $|\sin u| \leq |u|, \forall u \in \mathbb{R},$

例一: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解: 由于 $|\sin u| \leq |u|, \forall u \in \mathbb{R}$, 故

例一: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解: 由于 $|\sin u| \leq |u|, \forall u \in \mathbb{R}$, 故

$$0 \leq$$

例一：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解：由于 $|\sin u| \le |u|$, $\forall u \in \mathbb{R}$，故

$$0 \le \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2}$$

例一：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解：由于 $|\sin u| \le |u|, \forall u \in \mathbb{R}$，故

$$0 \le \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}.$$

例一：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解：由于 $|\sin u| \le |u|, \forall u \in \mathbb{R}$，故

$$0 \le \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}.$$

已证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$,

例一：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解：由于 $|\sin u| \le |u|, \forall u \in \mathbb{R}$，故

$$0 \le \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}.$$

已证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$，因此所求极限为

例一：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解：由于 $|\sin u| \le |u|, \forall u \in \mathbb{R}$，故

$$0 \le \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}.$$

已证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$，因此所求极限为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0.$$

例一：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

解：由于 $|\sin u| \le |u|, \forall u \in \mathbb{R}$，故

$$0 \le \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}.$$

已证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$，因此所求极限为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0.$$

解答完毕.

例二

例二:

例二: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,

例二：求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中

例二：求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中

$$f(x,y) =$$

<u>例二</u>: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中

$$f(x,y) = \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \right.$$

例二：求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ & \end{cases}$$

例二: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$$

例二：求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$$

解：以下证明

<u>例二</u>: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0. \end{cases}$$

<u>解</u>: 以下证明

$$|f(x,y)| \leq |y|,$$

例二：求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0. \end{cases}$$

解：以下证明

$$|f(x,y)| \leq |y|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (*)$$

例二：求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0. \end{cases}$$

解：以下证明

$$|f(x,y)| \leq |y|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (*)$$

由此立刻得到 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

例二：求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0. \end{cases}$$

解：以下证明

$$|f(x,y)| \leq |y|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (*)$$

由此立刻得到 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

情形一：$x = 0.$

例二：求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$$

解：以下证明

$$|f(x,y)|\leq |y|, \quad \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, \quad (*)$$

由此立刻得到 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

情形一：$x=0$. 此时 $|f(x,y)|=|y|$.

例二: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0. \end{cases}$$

解: 以下证明

$$|f(x,y)| \leq |y|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (*)$$

由此立刻得到 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

情形一: $x = 0$. 此时 $|f(x,y)| = |y|$. 结论(*)成立.

例二，续

情形二.

情形二. $x \neq 0$.

例二，续

情形二. $x \neq 0$. 此时若 $y = 0$,

例二，续

情形二. $x \neq 0$. 此时若 $y = 0$, 则 $|f(x, y)| = 0$.

例二，续

情形二． $x \neq 0$． 此时若 $y = 0$，则 $|f(x, y)| = 0$． 若 $y \neq 0$，

情形二. $x \neq 0$. 此时若 $y = 0$, 则 $|f(x, y)| = 0$. 若 $y \neq 0$, 则

情形二. $x \neq 0$. 此时若 $y = 0$, 则 $|f(x, y)| = 0$. 若 $y \neq 0$, 则

$$|f(x, y)|$$

例二，续

情形二． $x \neq 0$．此时若 $y = 0$，则 $|f(x, y)| = 0$．若 $y \neq 0$，则

$$|f(x, y)| = \frac{|\sin(xy)|}{|x|}$$

情形二．$x \neq 0$．此时若 $y = 0$，则 $|f(x, y)| = 0$．若 $y \neq 0$，则

$$|f(x, y)| = \frac{|\sin(xy)|}{|x|} = \frac{|\sin(xy)|}{|xy|}|y|$$

例二，续

情形二. $x \neq 0$. 此时若 $y = 0$, 则 $|f(x,y)| = 0$. 若 $y \neq 0$, 则

$$|f(x,y)| = \frac{|\sin(xy)|}{|x|} = \frac{|\sin(xy)|}{|xy|}|y| \leq |y|.$$

情形二． $x \neq 0$． 此时若 $y = 0$，则 $|f(x,y)| = 0$． 若 $y \neq 0$，则

$$|f(x,y)| = \frac{|\sin(xy)|}{|x|} = \frac{|\sin(xy)|}{|xy|}|y| \leq |y|.$$

综上可知不等式

情形二．$x \neq 0$．此时若 $y = 0$，则 $|f(x, y)| = 0$．若 $y \neq 0$，则

$$|f(x,y)| = \frac{|\sin(xy)|}{|x|} = \frac{|\sin(xy)|}{|xy|}|y| \leq |y|.$$

综上可知不等式 $|f(x, y)| \leq |y|$，

例二，续

情形二. $x \neq 0$. 此时若 $y = 0$，则 $|f(x,y)| = 0$. 若 $y \neq 0$，则

$$|f(x,y)| = \frac{|\sin(xy)|}{|x|} = \frac{|\sin(xy)|}{|xy|}|y| \leq |y|.$$

综上可知不等式 $|f(x,y)| \leq |y|, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ 成立.

例二，续

情形二． $x \neq 0$．此时若 $y=0$，则 $|f(x,y)|=0$．若 $y \neq 0$，则

$$|f(x,y)| = \frac{|\sin(xy)|}{|x|} = \frac{|\sin(xy)|}{|xy|}|y| \leq |y|.$$

综上可知不等式 $|f(x,y)| \leq |y|, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ 成立．解答完毕．

例三

例三:

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

解:

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$.

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x = r\cos\phi$,

<u>例三</u>: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}$.

<u>解</u>: 取对数得 $\ln f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$,

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 于是

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, 于是

$$0 \le |\ln f(x,y)|$$

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, 于是

$$0 \le |\ln f(x,y)| = |xy\ln(x^2+y^2)|$$

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 于是

$$0\le|\ln f(x,y)|=|xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$=|r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2|$$

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, 于是

$$0 \le |\ln f(x,y)| = |xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$= |r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2| \le 2r^2|\ln r|$$

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 于是

$$0\le|\ln f(x,y)|=|xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$=|r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2|\le 2r^2|\ln r|\to 0,$$

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 于是

$$0\le|\ln f(x,y)|=|xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$=|r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2|\le 2r^2|\ln r|\to 0,\ r\to 0^+.$$

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, 于是

$$0 \le |\ln f(x,y)| = |xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$= |r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2| \le 2r^2|\ln r| \to 0,\ r \to 0^+.$$

(回忆 $r^\epsilon \ln r \to 0$,

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 于是

$$0\le|\ln f(x,y)|=|xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$=|r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2|\le 2r^2|\ln r|\to 0,\ r\to 0^+.$$

(回忆 $r^\epsilon\ln r\to 0$, 当 $r\to 0^+$).

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, 于是

$$0 \le |\ln f(x,y)| = |xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$= |r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2| \le 2r^2|\ln r| \to 0,\ r \to 0^+.$$

(回忆 $r^\epsilon \ln r \to 0$, 当 $r \to 0^+$). 因此 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

例三

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, 于是

$$0 \le |\ln f(x,y)| = |xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$= |r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2| \le 2r^2|\ln r| \to 0,\ r\to 0^+.$$

(回忆 $r^\epsilon \ln r \to 0$, 当 $r\to 0^+$). 因此 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$= e^{\lim \ln f(x,y)}$

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 于是

$$0\le|\ln f(x,y)|=|xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$=|r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2|\le 2r^2|\ln r|\to 0,\ r\to 0^+.$$

(回忆 $r^\epsilon\ln r\to 0$, 当 $r\to 0^+$). 因此 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$=e^{\lim\ln f(x,y)}=e^0$

例三: 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}$.

解: 取对数得 $\ln f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. 作极坐标变换

$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, 于是

$$0 \le |\ln f(x,y)| = |xy\ln(x^2+y^2)|$$

$$= |r^2\cos\phi\sin\phi||\ln r^2| \le 2r^2|\ln r| \to 0,\ r \to 0^+.$$

(回忆 $r^\epsilon \ln r \to 0$, 当 $r \to 0^+$). 因此 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$= e^{\lim \ln f(x,y)} = e^0 = 1$

例四

例四

例四:

例四

例四: 求极限

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：虽然极限

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，

例四: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解: 虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，但我们有估计

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，但我们有估计 $\frac{|xy|}{x^2+y^2}$

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，但我们有估计 $\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}$.

例四: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解: 虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在, 但我们有估计 $\frac{|xy|}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$. 因此

例四: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解: 虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在, 但我们有估计 $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$. 因此

$$0 \leq$$

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，但我们有估计 $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$. 因此

$$0 \leq \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$$

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，但我们有估计 $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$. 因此

$$0 \le \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，但我们有估计 $\frac{|xy|}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$. 因此

$$0\le\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\to 0,$$

<u>例四</u>: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

<u>解</u>: 虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，但我们有估计 $\frac{|xy|}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$. 因此

$$0\le\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\to 0,\quad (x,y)\to(+\infty,+\infty).$$

例四：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

解：虽然极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，但我们有估计 $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$. 因此

$$0 \le \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \to 0, \quad (x,y)\to(+\infty,+\infty).$$

故所求极限为零.

例五

例五:

<u>例五</u>: 求极限

例五：求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

例五: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解:

<u>例五</u>: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

<u>解</u>: 作极坐标变换 $x = r\cos\phi$,

例五: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解: 作极坐标变换 $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$,

例五: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解: 作极坐标变换 $x=r\cos\phi,\ y=r\sin\phi$, 则

例五: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解: 作极坐标变换 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 则

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

例五: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解: 作极坐标变换 $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, 则

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{r(\cos\phi+\sin\phi)}{r^2(\cos^2\phi-\cos\phi\sin\phi+\sin^2\phi)}$$

例五: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解: 作极坐标变换 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 则

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{r(\cos\phi+\sin\phi)}{r^2(\cos^2\phi-\cos\phi\sin\phi+\sin^2\phi)}$$

$$=\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r(1-\cos\phi\sin\phi)}$$

例五: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解: 作极坐标变换 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 则

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{r(\cos\phi+\sin\phi)}{r^2(\cos^2\phi-\cos\phi\sin\phi+\sin^2\phi)}$$

$$=\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r(1-\cos\phi\sin\phi)}=\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r(1-\frac{1}{2}\sin2\phi)}.$$

例五: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解: 作极坐标变换 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 则

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{r(\cos\phi+\sin\phi)}{r^2(\cos^2\phi-\cos\phi\sin\phi+\sin^2\phi)}$$

$$=\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r(1-\cos\phi\sin\phi)}=\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r(1-\frac{1}{2}\sin2\phi)}.$$

由此可见,

例五: 求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解: 作极坐标变换 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, 则

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{r(\cos\phi+\sin\phi)}{r^2(\cos^2\phi-\cos\phi\sin\phi+\sin^2\phi)}$$

$$=\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r(1-\cos\phi\sin\phi)}=\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r(1-\frac{1}{2}\sin2\phi)}.$$

由此可见, 当 $r\to+\infty$,

例五，续

例五，续

$$0 \le \frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|}$$

例五，续

$$0 \leq \frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|} = \frac{|\cos\phi+\sin\phi|}{r|1-\frac{1}{2}\sin 2\phi|}$$

例五，续

$$0 \le \frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|} = \frac{|\cos\phi+\sin\phi|}{r|1-\frac{1}{2}\sin 2\phi|} \le \frac{2}{r(1-\frac{1}{2})}$$

$$0 \le \frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|} = \frac{|\cos\phi+\sin\phi|}{r|1-\frac{1}{2}\sin 2\phi|} \le \frac{2}{r(1-\frac{1}{2})} \to 0.$$

例五，续

$$0 \leq \frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|} = \frac{|\cos\phi+\sin\phi|}{r|1-\frac{1}{2}\sin 2\phi|} \leq \frac{2}{r(1-\frac{1}{2})} \to 0.$$

因此所求极限

例五，续

$$0 \le \frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|} = \frac{|\cos\phi+\sin\phi|}{r|1-\frac{1}{2}\sin 2\phi|} \le \frac{2}{r(1-\frac{1}{2})} \to 0.$$

因此所求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

$$0 \leq \frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|} = \frac{|\cos\phi+\sin\phi|}{r|1-\frac{1}{2}\sin2\phi|} \leq \frac{2}{r(1-\frac{1}{2})} \to 0.$$

因此所求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

二元函数极限不存在的证明方法

如果感觉极限

如果感觉极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在,

如果感觉极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，那么常采用以下两种方式证明其不存在性.

如果感觉极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，那么常采用以下两种方式证明其不存在性.

1. 寻找一条路径，

如果感觉极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，那么常采用以下两种方式证明其不存在性.

1. 寻找一条路径，使得当动点 (x,y) 沿着这条特殊路径趋向于 (x_0,y_0) 时，

如果感觉极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，那么常采用以下两种方式证明其不存在性.

1. 寻找一条路径，使得当动点 (x,y) 沿着这条特殊路径趋向于 (x_0,y_0) 时，所考虑的极限不存在;

如果感觉极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，那么常采用以下两种方式证明其不存在性.

1. 寻找一条路径，使得当动点 (x,y) 沿着这条特殊路径趋向于 (x_0,y_0) 时，所考虑的极限不存在；

2. 寻找两条特殊路径，

如果感觉极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，那么常采用以下两种方式证明其不存在性.

1. 寻找一条路径，使得当动点 (x,y) 沿着这条特殊路径趋向于 (x_0,y_0) 时，所考虑的极限不存在;

2. 寻找两条特殊路径，使得当动点 (x,y) 沿着这两条特殊路径趋向于 (x_0,y_0) 时所得到的极限不同;

如果感觉极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，那么常采用以下两种方式证明其不存在性.

1. 寻找一条路径，使得当动点 (x,y) 沿着这条特殊路径趋向于 (x_0,y_0) 时，所考虑的极限不存在;

2. 寻找两条特殊路径，使得当动点 (x,y) 沿着这两条特殊路径趋向于 (x_0,y_0) 时所得到的极限不同;

3. 尝试证明对应的两个累次极限存在但不相等.

如果感觉极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，那么常采用以下两种方式证明其不存在性.

1. 寻找一条路径，使得当动点 (x,y) 沿着这条特殊路径趋向于 (x_0,y_0) 时，所考虑的极限不存在;

2. 寻找两条特殊路径，使得当动点 (x,y) 沿着这两条特殊路径趋向于 (x_0,y_0) 时所得到的极限不同;

3. 尝试证明对应的两个累次极限存在但不相等.

例一

<u>例一</u>:

<u>例一</u>：证明如下极限不存在

<u>例一</u>: 证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

例一：证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明：

例一: 证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明: 考虑动点沿着路径 $(x,y)=(x,-x+x^3)$

例一: 证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明: 考虑动点沿着路径 $(x,y)=(x,-x+x^3)$ 趋向于点 $(0,0)$ 的极限:

例一：证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明：考虑动点沿着路径 $(x, y) = (x, -x + x^3)$ 趋向于点 $(0, 0)$ 的极限：

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$$

例一: 证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明: 考虑动点沿着路径 $(x,y)=(x,-x+x^3)$ 趋向于点 $(0,0)$ 的极限:

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\frac{x^2(-x+x^3)^2}{x^3+(-x+x^3)^3}$$

例一：证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明：考虑动点沿着路径 $(x,y)=(x,-x+x^3)$ 趋向于点 $(0,0)$ 的极限：

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \frac{x^2(-x+x^3)^2}{x^3+(-x+x^3)^3} = \frac{x^2(x^2-2x^4+x^6)}{x^3+(-x^3+3x^5-3x^7+x^9)}$$

例一: 证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明: 考虑动点沿着路径 $(x,y)=(x,-x+x^3)$ 趋向于点 $(0,0)$ 的极限:

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \frac{x^2(-x+x^3)^2}{x^3+(-x+x^3)^3} = \frac{x^2(x^2-2x^4+x^6)}{x^3+(-x^3+3x^5-3x^7+x^9)}$$

$$= \frac{x^4-2x^6+x^8}{3x^5-3x^7+x^9} = \frac{1-2x^2+x^4}{3x-3x^3+x^5}.$$

例一: 证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明: 考虑动点沿着路径 $(x,y)=(x,-x+x^3)$ 趋向于点 $(0,0)$ 的极限:

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \frac{x^2(-x+x^3)^2}{x^3+(-x+x^3)^3} = \frac{x^2(x^2-2x^4+x^6)}{x^3+(-x^3+3x^5-3x^7+x^9)}$$

$$= \frac{x^4-2x^6+x^8}{3x^5-3x^7+x^9} = \frac{1-2x^2+x^4}{3x-3x^3+x^5}.$$

由此可见所考虑的极限不存在.

例一：证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明：考虑动点沿着路径 $(x,y)=(x,-x+x^3)$ 趋向于点 $(0,0)$ 的极限：

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \frac{x^2(-x+x^3)^2}{x^3+(-x+x^3)^3} = \frac{x^2(x^2-2x^4+x^6)}{x^3+(-x^3+3x^5-3x^7+x^9)}$$

$$= \frac{x^4-2x^6+x^8}{3x^5-3x^7+x^9} = \frac{1-2x^2+x^4}{3x-3x^3+x^5}.$$

由此可见所考虑的极限不存在. 命题得证.

例一: 证明如下极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}.$$

证明: 考虑动点沿着路径 $(x,y)=(x,-x+x^3)$ 趋向于点 $(0,0)$ 的极限:

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \frac{x^2(-x+x^3)^2}{x^3+(-x+x^3)^3} = \frac{x^2(x^2-2x^4+x^6)}{x^3+(-x^3+3x^5-3x^7+x^9)}$$

$$= \frac{x^4-2x^6+x^8}{3x^5-3x^7+x^9} = \frac{1-2x^2+x^4}{3x-3x^3+x^5}.$$

由此可见所考虑的极限不存在. 命题得证. 证毕. □

例二

例二:

例二: 判断如下极限是否存在.

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时,

例二

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

解:

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y = x$ 和 $y = 2x$ 的极限分别为

<u>例二</u>: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

<u>解</u>: 动点沿着两条直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y = x$ 和 $y = 2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4}$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \to 1,$$

<u>例二</u>: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

<u>解</u>: 动点沿着两条直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \to 1, \quad x\to 0,$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \to 1, \quad x \to 0,$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \qquad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \to 1, \quad x \to 0,$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{4x^4}{4x^4+x^2}$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y = x$ 和 $y = 2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \to 1, \quad x \to 0,$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{4x^4}{4x^4+x^2} = \frac{4x^2}{4x^2+1}$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y = x$ 和 $y = 2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \to 1, \quad x \to 0,$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{4x^4}{4x^4+x^2} = \frac{4x^2}{4x^2+1} \to 0,$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \quad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \to 1, \quad x\to 0,$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{4x^4}{4x^4+x^2} = \frac{4x^2}{4x^2+1} \to 0, \quad x\to 0.$$

例二: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \qquad (*)$$

解: 动点沿着两条直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \to 1, \quad x \to 0,$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{4x^4}{4x^4+x^2} = \frac{4x^2}{4x^2+1} \to 0, \quad x \to 0.$$

由此可见所考虑的极限不存在.

<u>例二</u>: 判断如下极限是否存在. 存在时, 求出这个极限.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}. \qquad (*)$$

<u>解</u>: 动点沿着两条直线 $y = x$ 和 $y = 2x$ 的极限分别为

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \to 1, \quad x \to 0,$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{4x^4}{4x^4+x^2} = \frac{4x^2}{4x^2+1} \to 0, \quad x \to 0.$$

由此可见所考虑的极限不存在. 解答完毕.