清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　**微积分 A**　　(卷 A)

系名________________　**班级**______________　**姓名**______________　**学号**____________

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（**请将答案直接填写在横线上！**）

1．判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1000n+1}$ 的敛散性（收敛或发散）__________。

2．幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域为____________________。

3．设 $D=\{(x,y),0\le x,y\le 1\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上有一阶连续的偏导数，$f(x,1)=0$，$\forall x\in[0,1]$，且 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=2$，则 $\iint\limits_D y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dxdy=$____________.

4．设函数 $|x|$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$，其和函数记作 $S(x)$，则 $S(x)$ 在点 $x=3\pi$ 处的值为 $S(3\pi)=$_______。

5．级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)^p}$ $(x\ge 0)$ 为条件收敛的充分必要条件是 p 的取值范围为____________。

6．函数 $\sin^2 x$ 以 2π 为周期的 Fourier 级数为_____________________。

7．对积分 $\int_0^2 dx\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})dy$ 作极坐标变换，所得的累次积分为____________________。

8．设平面闭域 $D=\{(x,y),\ |\mathrm{x}|+|y|\le 1\}$，则积分 $\iint\limits_D x^{2015}\sin(x^4y^2)dxdy=$_____。

9. 设曲线 L 为函数 $y=e^{x^2}$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的图像，起点为 $(0,1)$，终点为 $(1,e)$，则第二型曲线积分 $\int_{L^+}xdx+ydy=$___________。

10．设 S 为 R^3 中的闭圆盘：$x^2+y^2\le 1$，$z=0$。规定 S 的正法向向下，则第二型曲面积分 $\iint\limits_{S^+}(x^2+y^2)dx\wedge dy=$_______________。

11．全微分方程 $(x+2y)dx+(2x-y)dy=0$ 的通解为__________________.

12．设 S 为单位球面：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$，外法向为正，则第二型曲面积分 $\oiint\limits_{S^+} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=$____________________。

13．函数 $\dfrac{1}{4-x}$ 在点 $x=2$ 处的 Taylor 级数展开式为____________________。

14．设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，而在 $x=4$ 处发散，则该幂级数的收敛域为

____________________。

15．交换累次积分 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 次序后，所得的积分为____________________。

二．计算题（每题 10 分，共 4 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

1．设 S 为空间立体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界曲面，求第一类曲面积分 $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS$ 。

2．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1}$ 的和函数.

3．求第二型曲线积分 $I=\int\limits_{\Gamma^+} xdy-ydx$，其中定向曲线 Γ^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线，逆着正 z 轴朝下看，Γ^+ 的正向是逆时针方向。

4．计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+} x^2ydy\wedge dz-xy^2dz\wedge dx+3zdx\wedge dy$，其中定向曲面 S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 在平面 $z=1$ 下方的部分，正法向向下。

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

1.（8 分）设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_n>0$，$\forall n\ge 1$，且 a_n 单调下降。证明，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_n}$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ 。

2.（7 分）设 S 为单位球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$，$A=(a_{ij})$ 为 3×3 的实对称矩阵，$\mathrm{tr}(A)$ 代表矩阵 A 的迹，即 A 的对角元素之和。分两个步骤：(i) A 为对角阵；(ii) A 为一般对称阵，证明第一型曲面积分 $\oiint\limits_S (x^TAx)dS=\dfrac{4\pi}{3}\mathrm{tr}(A)$，这里 $x^TAx=\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$ 。