《微积分A2》第十七讲

教师　杨利军

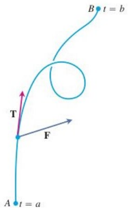
清华大学数学科学系

2020年04月15日

设空间向量场(即三维空间到自身的映射)

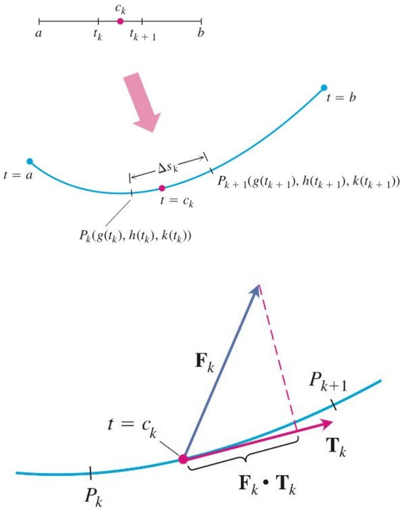
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z)\big)$$

是域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上的力场. 设 C 是 D 内的一条曲线, 且 C 有正则表示 $\mathbf{r}(t) = (g(t), h(t), k(t))$, $a \le t \le b$. 记 $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ 为曲线 C 的单位切向量. 如图所示.



考虑力场 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 关于质点由起点 $A = \mathbf{r}(a)$ 沿着曲线 C 运动至终点 $B = \mathbf{r}(b)$ 所做的功. 为此对区间 $[a,b]$ 作分割 π: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 于是曲线 C 被分割成 n 个弧段 $P_{k-1}P_k$, 其中 $P_k = \mathbf{r}(t_k)$, $k = 1,\cdots,n$. 当分割很细时, 弧段 $P_{k-1}P_k$ 上的力场 $\mathbf{F}$ 可近似看作常力 $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(\mathbf{r}(c_k))$, 而弧段 $P_{k-1}P_k$ 近似为直线段 $\mathbf{T}_k\triangle s_k$, 这里 $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}(c_k)$, $c_k \in [t_{k-1},t_k]$ (任取). 故力场 $\mathbf{F}$ 对质点沿弧段 $P_{k-1}P_k$ 运动所做的功近似为 $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k\triangle s_k$. 如下图所示.

做功问题续二，小弧段上功的近似



于是力场 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 关于质点由起点 $A=\mathbf{r}(a)$ 沿着曲线 C 运动至终点 $B=\mathbf{r}(b)$ 所做的功有近似 $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{T}_k\triangle s_k$. 假设力场 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 连续, 曲线 C 正则, 则当 $\|\pi\|\to 0$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{T}_k\triangle s_k\to\int_C\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=:W.$$

即上式右边的线积分可以看作(定义为)所求的功. 根据第一型线积分的计算公式得所求的功就是

$$W=\int_a^b\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{T}(t)\|\mathbf{r}'(t)\|dt=\int_a^b\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt.$$

注意 $\mathbf{T}(t)\|\mathbf{r}'(t)\|=\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\|\mathbf{r}'(t)\|=\mathbf{r}'(t)$.

积分(功)的六种表示

TABLE 16.2 Six different ways to write the work integral

$\mathbf{W} = \displaystyle\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$	The definition
$= \displaystyle\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$	Compact differential form
$= \displaystyle\int_{a}^{b} \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt$	Expanded to include dt; emphasizes the parameter t and velocity vector $d\mathbf{r}/dt$
$= \displaystyle\int_{a}^{b} \left(M\frac{dg}{dt} + N\frac{dh}{dt} + P\frac{dk}{dt}\right)dt$	Emphasizes the component functions
$= \displaystyle\int_{a}^{b} \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt}\right)dt$	Abbreviates the components of $\mathbf{r}$
$= \displaystyle\int_{a}^{b} M\,dx + N\,dy + P\,dz$	dt's canceled; the most common form

Definition

定义: 连续的空间向量场

$$F(x,y,z)=\big(M(x,y,z),N(x,y,z),P(x,y,z)\big)$$

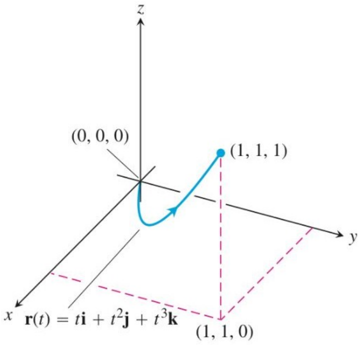
关于有向正则曲线 $r(t)=(g(t),h(t),k(t))$, $a\le t\le b$, 即 $r(a)$ 为起点, $r(b)$ 为终点的第二型线积分定义为

$$\int_a^b F\cdot T ds=\int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)dt,$$

其中 $T=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ 代表有向曲线 C 的单位切向量. (注: 曲线 C 的定向信息体现在 T 中)

例子

例: 设力场为 $\mathbf{F}(x,y,z)=(y-x^2, z-y^2, x-z^2)$, 曲线(路径) C 为 $\mathbf{r}(t)=(t,t^2,t^3)$, $t\in[0,1]$, 起点为 $(0,0,0)$, 终点为 $(1,1,1)$. 如图所示. 求力场 F 关于质点沿路径 C 运动所做的功.



解: 根据第二型曲线积分的定义知, 所求的功为

$$W = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)dt.$$

简单计算得 $r'(t) = (t, t^2, t^3)' = (1, 2t, 3t^2)$, 由定义

$$F(x, y, z) = (y - x^2, z - y^2, x - z^2)$$

$$\Rightarrow \quad F(x(t), y(t), z(t)) = (0, t^3 - t^4, t - t^6).$$

$$\Rightarrow \quad F(r(t)) \cdot r'(t) = 2t(t^3 - t^4) + 3t^2(t - t^6)$$

$$= 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8.$$

故所求的功为

$$W = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)dt$$

$$= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)dt = \frac{29}{60}.$$

解答完毕.

第二型线积分的记号

如同力场作功的积分记号, 向量场 $\mathbf{F} = (M, N, P)$ 关于有向曲线 C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$ 的第二型线积分也有如下不同的记号:

$$
\begin{array}{ll}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds & \text{定义式记号} \\
= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt & \text{计算公式} \\
= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} & \text{上式的缩写} \\
= \int_C [M x'(t) + N y'(t) + P z'(t)] dt & \text{内积展开} \\
= \int_C M dx + N dy + P dz & \text{上式的缩写}
\end{array}
$$

注一: 设 C 为平面或空间曲线. 若规定曲线 C 的起点和终点, 则称曲线 C 为有向曲线. 当 C 不封闭时, 只有两个定向.

注二: 当曲线 C 定向确定之后, 常记作 C^+. 此时曲线 C 的另一个定向则记作 C^- 或 $-C$.

注三: 设定向曲线 C 有参数表示 $r = r(t)$, $a \le t \le b$. 若 $r(a)$ 和 $r(b)$ 分别是起点和终点, 则称参数表示协调, 通常若无特别说明, 以下出现的定向曲线的参数表示均为协调的.

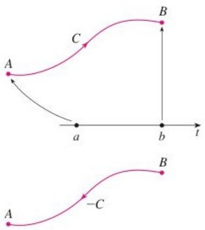
注四: 当曲线 C 为平面简单(即不自相交)的封闭曲线时, 通常规定逆时针为正向, 而顺时针为负向. 空间封闭曲线的定向问题复杂, 需个案处理.

相反定向曲线上的线积分值反号

Theorem

定理: 对任意定向曲线 C, 其反向曲线记作 −C, 则

$$\int_{-\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = -\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds.$$



Proof.

证明: 设定向曲线 $\mathbf{C}$ 有协调参数表示 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $a\le t\le b$, 则 $-\mathbf{C}$ 有相应的协调参数表示 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(-t)$, $-b\le t\le -a$. 于是根据线积分计算公式

$$\int_{-C}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\int_{-b}^{-a}\mathbf{F}(\mathbf{r}(-t))\cdot[\mathbf{r}(-t)]'dt$$

$$=-\int_{-b}^{-a}\mathbf{F}(\mathbf{r}(-t))\cdot\mathbf{r}'(-t)dt=-\int_{b}^{a}\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))\cdot\mathbf{r}'(s)(-1)ds$$

$$=-\int_{a}^{b}\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))\cdot\mathbf{r}'(s)ds=-\int_{C}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds.$$

$\square$

与空间曲线类似，平面向量场 $\mathbf{F}(x,y)=(M(x,y),N(x,y))$ 在平面有向曲线 C: $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$, $(a\le t\le b)$ 上的第二型线积分定义为

$$\int_a^b \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt,$$

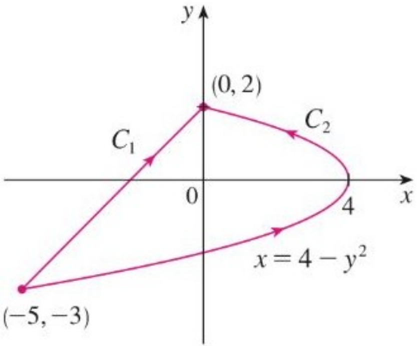
其中 $\mathbf{T}$ 代表有向曲线 C 的单位切向量，即 $\mathbf{T}=\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$.

如同空间情形，平面向量场 $\mathbf{F}=(M,N)$ 关于有向平面曲线 C $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$, $a\le t\le b$ 的第二型线积分也有如下不同的记号:

$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$	定义
$=\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt$	计算公式
$=\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$	上式的缩写
$=\int_C [Mx'(t)+Ny'(t)]dt$	内积展开
$=\int_C Mdx+Ndy$	上式的缩写

例子

<u>例</u>: 计算平面第二型线积分 $J = \int_C y^2 dx + x dy$, 其中(i) $C = C_1$ 为连接起点 $(-5, -3)$ 和终点 $(0, 2)$ 的直线段; (ii) $C = C_2$ 为连接起点 $(-5, -3)$ 和终点 $(0, 2)$ 的抛物线 $x = 4 - y^2$. 如图示.



解：情形一：$C = C_1$. 此时有向曲线(直线段) C 有参数表示 $x = 5t - 5,\ y = 5t - 3,\ 0 \le t \le 1$. 于是所求线积分

$$J = \int_C y^2 dx + x dy = \int_0^1 \Big[y(t)^2 x'(t) + x(t) y'(t) \Big] dt$$

$$= \int_0^1 \Big[(5t-3)^2 (5t-5)' + (5t-5)(5t-3)' \Big] dt$$

$$= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt = -\frac{5}{6}.$$

例子续二

情形二: $C = C_2$. 此时有向曲线 C 有协调参数表示 $x = 4 - y^2$, $y = y$, $-3 \le y \le 2$. 于是所求线积分

$$J = \int_C y^2 dx + x dy$$

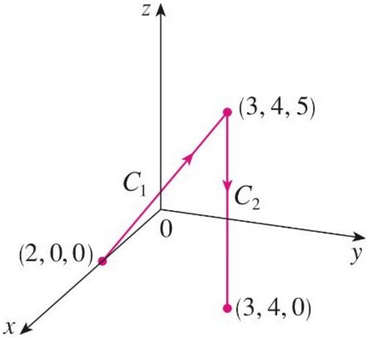
$$= \int_{-3}^{2} \left[y^2 (4 - y^2)' + (4 - y^2)(y)' \right] dy$$

$$= \int_{-3}^{2} (-2y^3 - y^2 + 4) dy = 40\frac{5}{6}.$$

解答完毕.

注: 这个例子表明, 起点和终点相同, 但积分路径不同所得到的积分值一般是不同的.

例: 计算第二型线积分 $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, 其中 C 为定向直线段 C_1, 由点 $(2,0,0)$ 到点 $(3,4,5)$, 接着另一个定向直线段 C_2, 由点 $(3,4,5)$ 到点 $(3,4,0)$. 如图所示.



解: 定向直线段 C_1 有协调的参数表示 $r(t) = (1-t)(2,0,0)$ $+t(3,4,5) = (2+t, 4t, 5t)$，即 $x = 2+t$，$y = 4t$，$z = 5t$，$0 \le t \le 1$. 于是

$$\int_{C_1} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 (4t)dt + (5t)4dt + (2+t)5dt$$

$$= \int_0^1 (10 + 29t)dt = 24.5$$

定向直线段 C_2 有参数表示 $r(t)=(1-t)(3,4,5)+t(3,4,0)$ $=(3,4,5-5t)$, 即 $x=3$, $y=4$, $z=5-5t$, $0\le t\le 1$. 于是

$$\int_{C_2} ydx+zdy+xdz=\int_0^1 3(-5)dt=-15.$$

综上得

$$\int_C ydx+zdy+xdz=\int_{C_1}\cdots+\int_{C_2}\cdots$$

$$=24.5-15=9.5.$$

解答完毕.

记号问题

注意如下两个积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \quad \int_{C^+} M(x,y)dx$$

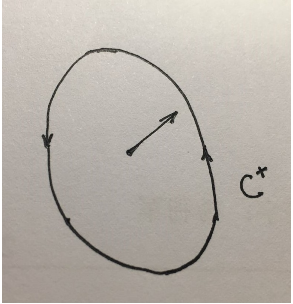
实际意义不同. 前者是一元函数的定积分, 后者是第二型线积分, 其中 C^+ 为一条定向的平面曲线. 后者可理解为平面场 $F(x,y) = (M(x,y),0)$ 关于曲线 C^+ 的第二型线积分. 当曲线 C^+ 有协调表示 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$ 时,

$$\int_{C^+} M(x,y)dx = \int_a^b M(x(t),y(t))x'(t)dt.$$

当 C^+ 为空间定向曲线时, 积分 $\int_{C^+} M(x,y,z)dx$ 的意义类似.

例子

课本第190页4.4.2: 设 C^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线(空间圆周), 其正向这样定义, 如果我们位于点 $(1,1,1)$ 处察看, 圆周 C^+ 的正向为逆时针. 如图所示. 求第二型线积分 $J=\int_{C^+} zdx+xdy+ydz$.



解: 之前我们计算过这个大圆周 C (无定向) 上的第一型线积分 $\int_C x^2 ds$. 为此我们构造了单位正交向量组 e_1, e_2, e_3 如下

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由此我们得到了圆周 C 的一个参数表示

$$\begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{bmatrix} = [R\cos\theta]\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + [R\sin\theta]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

例子续二

问题: 上述参数表示是否与定向协调? 这个问题的实质是单位正交向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是否构成右手系. 若构成右手系, 则上述参数表示与定向协调. 向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 构成右手系, 当且仅当 α, β, γ 构成右手系, 当且仅当行列式 $\det[\alpha, \beta, \gamma] > 0$. 经计算知

$$\det[\alpha, \beta, \gamma] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 6 > 0.$$

这说明上述圆周 C 的参数表示与定向协调. 于是根据第二型线积分计算公式知所求积分为

例子续三

$$J = \int_{C^+} zdx + xdy + ydz$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[z(\theta)x'(\theta) + x(\theta)y'(\theta) + y(\theta)z'(\theta) \Big] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Bigg\{ \Big[\frac{R}{\sqrt{6}}\cos\theta - \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta \Big] \Big[\frac{R}{\sqrt{6}}\cos\theta + \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta \Big]'$$

$$+ \Big[\frac{R}{\sqrt{6}}\cos\theta + \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta \Big] \Big[-\frac{2R}{\sqrt{6}}\cos\theta \Big]'$$

$$+ \Big[-\frac{2R}{\sqrt{6}}\cos\theta \Big] \Big[\frac{R}{\sqrt{6}}\cos\theta - \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta \Big]' \Bigg\} d\theta$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \right] \left[-\frac{1}{\sqrt{6}} \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \right] \right.$$

$$+ \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \right] \left[\frac{2}{\sqrt{6}} \sin\theta \right]$$

$$\left. + \left[-\frac{2}{\sqrt{6}} \cos\theta \right] \left[-\frac{1}{\sqrt{6}} \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \right] \right\} d\theta.$$

注意乘积 $\cos\theta\sin\theta$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的积分为零. 故在展开上述积分的被积函数时, 只需保留平方项 $\cos^2\theta$ 和 $\sin^2\theta$. 于是

$$J = R^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{12}} \cos^2\theta + \frac{1}{\sqrt{12}} \sin^2\theta \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{12}} \sin^2\theta + \frac{2}{\sqrt{12}} \cos^2\theta \right\} d\theta$$

$$= \frac{R^2}{\sqrt{12}} \int_0^{2\pi} (3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) d\theta = \sqrt{3}\pi R^2.$$

解答完毕.

如何求分布在曲面上物质的质量?

设曲面 S 上分布有某种物质，且已知分布密度函数 $\rho(x,y,z)$，如何求这种物质的总质量？当 S 为平面区域时，密度函数是二元函数 $\rho(x,y)$，则依定义知二重积分 $\iint_S \rho(x,y)dxdy$ 就是所要求的总质量. 对于一般空间曲面，我们仍采用三步策略：分割，求和，取极限.

1). <u>分割</u>: 对曲面 S 作分割 π: $S=\cup_{ij}S_{ij}$, 每个小曲面块 S_{ij} 的质量有近似 $\rho(P_{ij}^*)|S_{ij}|$, 其中 $P_{ij}^*\in S_{ij}$ 为取样点, $|S_{ij}|$ 表示 S_{ij} 的面积;

2). <u>求和</u>: 根据第一步可知整个曲面 S 上某种物质的总质量有近似 $\sum_{ij}\rho(P_{ij}^*)|S_{ij}|$;

3). <u>取极限</u>. 我们有理由定义如下极限

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i,j}\rho(P_{ij}^*)|S_{ij}|$$

就是曲面 S 上这种物质的总质量, 这里自然假设极限存在, 且极限值与样本点集 $\{P_{ij}^*\}$ 的选择无关, $\|\pi\|=\max\{\mathrm{diam}(S_{ij})\}$.

第一型曲面积分定义

Definition

定义: 设 $f(x,y,z)$ 是空间域 Ω 上的函数, 设 $S \subset \Omega$ 是域 Ω 内的一个曲面. 对 S 作分割 π: $S = \cup_{ij} S_{ij}$, 称如下极限

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS \triangleq \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i,j} f(P_{ij}^*)|S_{ij}|$$

为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上的第一型面积分, 这里假设上述极限存在, 且极限值与样本点集 $\{P_{ij}^*\}$ 的选择无关.

Theorem

定理: 设 $f(x,y,z)$ 是空间域 Ω 上的连续函数, 设 $S\subset\Omega$ 是域 Ω 内的一个曲面, 有正则的参数表示 $r=r(u,v)$, $(u,v)\in D$, 其中 D 为平面有界闭域, 则函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上的第一型面积分存在, 且

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(r(u,v))|r_u\times r_v|dudv.$$

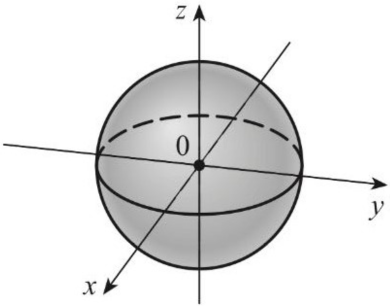
注: 第一型线积分计算公式 $\int_a^b f(r(t))|r'(t)|dt$ 与上述第一型面积分计算公式具有相似性!

当曲面 S 为显式曲面，即为某二元函数 $z = z(x, y)$，$(x, y) \in D$ 的图像时，第一型曲面积分有如下计算公式

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy.$$

因为显式曲面是一种特殊的参数曲面 $(x, y) \mapsto (x, y, z(x, y))$，$(x, y) \in D$，且 $|r_x \times r_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$.

例: 计算第一型面积分 $J=\iint_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$, $R>0$.



解: 将球面 S 分解为上下两个部分 $S = S_{上} \cup S_{下}$. 这样可以将这两个部分均表为显式曲面. (一般而言显式曲面的积分公式比较简单方便计算)

$$S_{上}: \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2,$$

$$S_{下}: \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2.$$

对于 $S_{上}$

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$1+z_x^2+z_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}.$$

于是

$$\iint_{S_{上}} * = \iint_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr=2\pi R\int_0^R\frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}dr$$

$$=2\pi R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\sin^2\theta}{R\cos\theta}\cdot R\cos\theta d\theta=2\pi R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\pi^2R^3.$$

由对称性可知

$$\iint_{S_{下}} * = \iint_{S_{上}} * .$$

于是

$$\iint_{S} \sqrt{x^2+y^2} dS$$

$$= \iint_{S_{上}} \sqrt{x^2+y^2} dS + \iint_{S_{下}} \sqrt{x^2+y^2} dS$$

$$= 2\iint_{S_{上}} \sqrt{x^2+y^2} dS = \pi^2 R^3.$$

解答完毕.

回忆第一型面积分的计算公式

Theorem

定理: 设 $f(x,y,z)$ 是空间域 Ω 上的连续函数, 设 $S\subset\Omega$ 是域 Ω 内的一个曲面, 有正则的参数表示 $r=r(u,v)$, $(u,v)\in D$, 其中 D 为平面有界闭域, 则函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上的第一型面积分存在, 且

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(r(u,v))|r_u\times r_v|dudv.$$

证明大意: 对平面域 D 作分割 π: $D=\cup_{ij}D_{ij}$, 不妨设小块区域 $D_{ij}=[u_{i-1},u_i]\times[v_{j-1},v_j]$, 则曲面 S 有分割 $S=\cup_{ij}S_{ij}$, 其中 $S_{ij}=r(D_{ij})$. 考虑和式

$$\sum_{i,j} f(P_{ij}^*)|S_{ij}|,$$

其中取样点 $P_{ij}^*\in S_{ij}$. 由曲面面积公式得

$$|S_{ij}|=\iint_{D_{ij}}|r_u\times r_v|dudv=|r_u\times r_v|_{(u_i',v_j')}\triangle u_i\triangle v_j,$$

这里 $(u_i',v_j')\in D_{ij}$, $\triangle u_i=u_i-u_{i-1}$, $\triangle v_j=v_j-v_{j-1}$.

因样本点 $P_{ij}^* \in S_{ij} = r(D_{ij})$，故 $P_{ij}^* = r(u_i'', v_j'')$，$(u_i'', v_j'') \in D_{ij}$.

于是

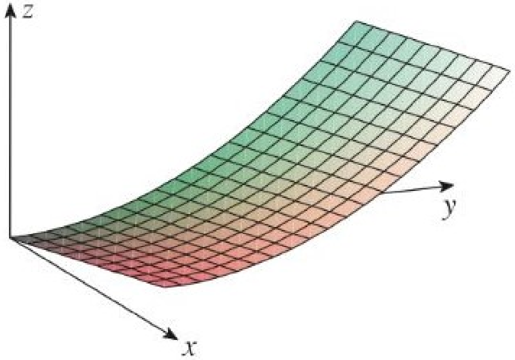
$$\sum_{i,j} f(P_{ij}^*)|S_{ij}|$$

$$= \sum_{i,j} f(r(u_i'', v_j''))|r_u \times r_v|_{(u_i', v_j')} \triangle u_i \triangle v_j.$$

故可期待当 $\|\pi\| \to 0$ 时，右边 $\to \iint_D f(r(u, v))|r_u \times r_v| dudv$.

证毕. $\square$

例: 计算第一型面积分 $\iint_S y dS$, 其中 S 为曲面 $z = x + y^2$ 的一部分, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$. 如图所示.



解: 简单计算得 $z_x = 1$, $z_y = 2y$. 于是根据显式曲面情形的计算公式得

$$\iint_S y dS = \iint_{0\le x\le 1, 0\le y\le 2} y\sqrt{1+1^2+(2y)^2} dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 \sqrt{2+4y^2} y dy = \frac{13\sqrt{2}}{3}.$$

解答完毕.

作业

习题4.3 (page 186-187):　1(1)(3)(5), 2, 3, 4, 6, 8, 9.

题6注：将质心改为形心

习题4.4 (page 191-193):　1, 2(1)(3)(5).