第5章 Riemann积分

学习材料（9）

1 Riemann积分概念及Riemann积分存在条件

2 Riemann积分的性质

性质1（线性性） 若$f,g\in R[a,b]$，α,β为常数，则$\alpha f+\beta g\in R[a,b]$，且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta_1$ 时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1};$$

$\exists\delta_2>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta_1$时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b g(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2|\beta|+1}.$$

当区间$[a,b]$的一个分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\min\{\delta_1,\delta_2\}$时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^n[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)](x_i-x_{i-1})-\left[\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx\right]\right|\\
=&\left|\alpha\left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)dx\right]+\beta\left[\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b g(x)dx\right]\right|\\
\le&|\alpha|\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)dx\right|+|\beta|\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b g(x)dx\right|\\
\le&\frac{|\alpha|\varepsilon}{2|\alpha|+1}+\frac{|\beta|\varepsilon}{2|\beta|+1}<\varepsilon,\end{aligned}$$

于是由定义知，$\alpha f+\beta g\in R[a,b]$，且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

性质2（区域可加性）

设$c\in(a,b)$，则$f\in R[a,b]$充分必要条件$f\in R[a,c]$，$f\in R[c,b]$，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

证：充分性. $\forall\varepsilon>0$，由$f\in R[a,c]$，$f\in R[c,b]$和定理2的必要性知，存在$[a,c]$ 与$[c,b]$ 的分割T_1与T_2使得

$$U(f,T_1)-L(f,T_1)<\frac{\varepsilon}{2},\ U(f,T_2)-L(f,T_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令T^*是将T_1与T_2分点合并构成区间$[a,b]$的分割，则

$$U(f,T^*)-L(f,T^*)=U(f,T_1)-L(f,T_1)+U(f,T_2)-L(f,T_2)<\varepsilon,$$

故由定理2的充分性知$f\in R[a,b]$.

必要性. $\forall\varepsilon>0$，由$f\in R[a,b]$和定理2 的必要性知，$\exists\delta>0$，当区间$[a,b]$的分割T 满足$|T|<\delta$ 时，就有

$$U(f,T)-L(f,T)<\varepsilon.$$

若T_1和T_2分别是区间$[a,c]$和区间$[c,b]$的分割满足$|T_1|<\delta$，$|T_2|<\delta$，令T^*是将T_1与T_2分点合并构成区间$[a,b]$的分割，则$|T^*|<\delta$，于是

$$U(f,T^*)-L(f,T^*)<\varepsilon,$$

即

$$U(f,T_1)-L(f,T_1)+U(f,T_2)-L(f,T_2)<\varepsilon,$$

故由定理2的充分性知$f\in R[a,c]$，$f\in R[c,b]$.

利用定积分的定义容易证明

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

性质3（保序性）

若$f,g\in R[a,b]$，且$f(x)\le g(x)\ (\forall x\in[a,b])$，则

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

特别
1. 若$f\in R[a,b]$，且$f(x)\ge 0\ (\forall x\in[a,b])$，则

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0.$$

2. 若$f\in R[a,b]$，且$m\le f(x)\le M\ (\forall x\in[a,b])$，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

3. 若$f\in R[a,b]$，则$|f|\in R[a,b]$且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx.$$

证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta_1$ 时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\int_a^b f(x)dx-\varepsilon<\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})<\int_a^b f(x)dx+\varepsilon;$$

$\exists\delta_2>0$，当区间$[a,b]$的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\delta_2$时，对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\int_a^b g(x)dx-\varepsilon<\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})<\int_a^b g(x)dx+\varepsilon.$$

任取区间$[a,b]$的一个分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

满足$|T|<\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\int_a^b f(x)dx-\varepsilon\quad<\quad\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})<\int_a^b g(x)dx+\varepsilon,$$

于是得

$$\int_a^b f(x)dx-\varepsilon<\int_a^b g(x)dx+\varepsilon,$$

由$\varepsilon>0$的任意性知，

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

对区间$[a,b]$的任一分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

有

$$\begin{aligned}U(|f|,T)-L(|f|,T)&=\sum_{i=1}^n\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\left||f(\xi)|-|f(\eta)|\right|(x_i-x_{i-1})\\&\le\sum_{i=1}^n\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|f(\xi)-f(\eta)|(x_i-x_{i-1})\\&=U(f,T)-L(f,T),\end{aligned}$$

故由$f\in R[a,b]$及定理2知$|f|\in R[a,b]$.

性质4（积分中值公式）

设$f,g\in R[a,b]$，且

$$m\le f(x)\le M,\ g(x)\ge0\ (\forall x\in[a,b]),$$

则$\exists\mu\in[m,M]$，使得
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx,$$
特别当$f\in C[a,b]$时，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$
证：$\forall x\in[a,b]$，则
$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x),$$
故由定积分的保序性得
$$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx.$$
若$\displaystyle\int_a^b g(x)dx=0$，则由上式知$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，从而对$\forall\mu\in[m,M]$，都有
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx;$$
若$\displaystyle\int_a^b g(x)dx>0$，则
$$m\le\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx}\le M,$$
取$\mu:=\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx}$，即知$\mu\in[m,M]$，且$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$.

性质5

若$f,g\in R[a,b]$，则$f\cdot g$，$\sqrt{f^2+g^2}\in R[a,b]$; 且当$|g(x)|\ge M>0$ $(\forall x\in[a,b])$时，则$\dfrac{1}{g}\in R[a,b]$.

证：
记
$$M^*=:\sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)|+\sup_{\eta\in[a,b]}|g(\eta)|.$$
对区间$[a,b]$的任一分割
$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$
则
$$\begin{aligned}
U(fg,T)-L(fg,T) &= \sum_{i=1}^n\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|f(\xi)g(\xi)-f(\eta)g(\eta)|\,(x_i-x_{i-1})\\
&\le \sum_{i=1}^n\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\left[|f(\xi)|\cdot|g(\xi)-g(\eta)|+|f(\xi)-f(\eta)|\cdot|g(\eta)|\right](x_i-x_{i-1})\\
&\le M^*\sum_{i=1}^n\left[\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|g(\xi)-g(\eta)|+\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|f(\xi)-f(\eta)|\right](x_i-x_{i-1})\\
&= M^*\cdot\left[U(g,T)-L(g,T)+U(f,T)-L(f,T)\right],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U(\sqrt{f^2+g^2},T)-L(\sqrt{f^2+g^2},T) &= \sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\left|\sqrt{f^2(\xi)+g^2(\xi)}-\sqrt{f^2(\eta)+g^2(\eta)}\right|(x_i-x_{i-1}) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\sqrt{[f(\xi)-f(\eta)]^2+[g(\xi)-g(\eta)]^2}(x_i-x_{i-1}) \quad （|\,|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|\,|\le \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}[\,|f(\xi)-f(\eta)|+|g(\xi)-g(\eta)|\,]\,(x_i-x_{i-1}) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|f(\xi)-f(\eta)|+\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|g(\xi)-g(\eta)|\right](x_i-x_{i-1}) \\
&= U(g,T)-L(g,T)+U(f,T)-L(f,T),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U\left(\frac{1}{g},T\right)-L\left(\frac{1}{g},T\right) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\left|\frac{1}{g(\xi)}-\frac{1}{g(\eta)}\right|(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}\left|\frac{g(\xi)-g(\eta)}{g(\xi)\cdot g(\eta)}\right|(x_i-x_{i-1}) \\
&\le \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]}|g(\xi)-g(\eta)|(x_i-x_{i-1}) \\
&= \frac{1}{M^2}\cdot[U(g,T),L(g,T)],
\end{aligned}
$$

故由定理2的充分性知$f\cdot g$，$\sqrt{f^2+g^2}$，$\dfrac{1}{g}\in R[a,b]$.

定义1 设I是个区间，f是定义在I上的函数. 若有函数$F:I\to R$使得

$$F'(x)=f(x),\ \forall x\in I,$$

则称在区间I上F是f的一个原函数。

例1 设$f(x)=[x]$，问f有原函数吗？

解：f没有原函数。反证法，若F是f的一个原函数，则

$$F'(x)=f(x)=[x],$$

因此F'有第一类间断点，但这与“导函数既无可去间断点，也无第一类间断点”的结论矛盾。因此f 没有原函数。

定理3（Newton-Leibnitz公式、微积分基本公式）

设$f\in R[a,b]$，且存在$[a,b]$上函数F满足$F'(x)=f(x)$（称F是f在$[a,b]$上的一个原函数），则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

证：对区间$[a,b]$的任一分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

$\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\begin{aligned}
|\sigma(f,T;\xi_i)-[F(b)-F(a)]| &=\!=\!=\!=\!= \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^n[F(x_i)-F(x_{i-1})]\right| \\
&\underset{\exists\xi_i^*(x_{i-1},x_i)}{=\!=\!=\!=\!=} \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^n f(\xi_i^*)(x_i-x_{i-1})\right| \\
&=\!=\!=\!=\!= \left|\sum_{i=1}^n[f(\xi_i)-f(\xi_i^*)](x_i-x_{i-1})\right| \\
&\le U(f,T)-L(f,T),
\end{aligned}$$

由$f\in R[a,b]$及定理2知由定义知

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

证毕。

例1 求1. $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$；2. $\int_a^b e^x dx$；3. $\int_0^\pi \sin x dx.$

解：

1. $\frac{1}{1+x^2}$在$[0,1]$连续，且$\frac{1}{1+x^2}$在$[0,1]$ 有原函数$\arctan x$，所以由Newton-Leibnitz 公式得

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

2.

$$\int_a^b e^x dx=e^x|_0^\pi\quad=e^b-e^a.$$

3.

$$\int_0^\pi \sin x dx=-\cos x|_0^\pi\quad=2.$$

例2 设$f(x)=\max\{1,x^2\}$，求$\int_0^2 f(x)dx.$

解：

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ x^2, & x\ge 1.\end{cases}$$

故$f\in C[0,2]$，从而由定理3知$f\in R[0,2]$，于是

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)dx &=\!=\!=\!=\!= \int_0^1 dx+\int_1^2 x^2dx \quad \text{（积分的区域可加性）}\\
&=\!=\!=\!=\!= x|_0^1+\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{10}{3}\quad \text{（Newton-Leibnitz公式）}.
\end{aligned}$$

例3 计算$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$近似值，使误差小于$10^{-6}$.

解：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}dx &== \int_0^{\frac{1}{2}} \left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{\sin\xi}{7!}x^6\right]dx \\
&\approx\approx \int_0^{\frac{1}{2}} \left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\right]dx \\
&== \frac{1}{2}-\frac{1}{144}+\frac{1}{9600} \\
&== 0.5-0.00694444444444444+0.0001041666666666 \\
&\approx\approx 0.5-0.006944+0.000104=0.49316
\end{aligned}
$$

公式误差

$$
\left|\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\xi}{7!}x^6dx\right| \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{7!}x^6dx=\frac{1}{4515840}<\frac{1}{4}\times 10^{-6}
$$

计算误差$< 5\times 10^{-7}+2\times 10^{-7}$

总误差$< \frac{1}{4}\times 10^{-6}+5\times 10^{-7}+2\times 10^{-7}<10^{-6}$

例4 求$I=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]$

解：

$$
\begin{aligned}
I &== \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}\,\frac{1}{n} \quad \text{（}[0,1]n\text{等分，}\xi_i\text{取为区间的右端点）} \\
&\Leftarrow== \int_0^1 \sqrt{1+\cos\pi x}dx \\
&== \int_0^1 \sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{2}dx \\
&== \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 \\
&== \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.
\end{aligned}
$$

例5 设$f \in C[a,b]$，且$f(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a,b])$，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$，则$f(x) \equiv 0$.

解：反证法。若$\exists x_0 \in (a,b)$，使得$f(x_0) > 0$，则由连续函数的局部保号性，$\exists \delta_0 > 0$，使得

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad (\forall x \in [x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]),$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \!=\!=\!=\!= \int_a^{x_0-\delta_0} f(x)dx + \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)dx + \int_{x_0+\delta_0}^{b} f(x)dx \quad \text{（积分的区域可加性）} \\ &\geq \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \frac{f(x_0)}{2}dx \quad \text{（积分的保序性）} = f(x_0)\delta_0 > 0,\end{aligned}$$

但这与$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$矛盾。所以$f(x) \equiv 0$.

例6 求证

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx = 0.$$

证：$\forall \varepsilon \in (0,\pi)$，当$p > \dfrac{\ln\left[\frac{\varepsilon}{\pi-\varepsilon}\right]}{\ln\cos\frac{\varepsilon}{2}}$时，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx &= \underline{\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^p x dx}} + \underline{\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx} \quad \text{（积分的区域可加性）} \\ &\leq \underline{\underline{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^p \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} + \underline{\frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{（积分的保序性）} \\ &= \frac{\pi-\varepsilon}{2}\cos^p\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

故

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx = 0.$$

例7 设$f \in R[0,1]$，且f在0处连续，求证

$$\lim_{h\to0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

证：因

$$\lim_{h\to0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(0)dx = \lim_{h\to0^+} f(0)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{x=0}^{x=1} = \lim_{h\to0^+} f(0)\arctan\frac{1}{h} = \frac{\pi}{2}f(0),$$

故只需证

$$\lim_{h\to0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx = 0.$$

$\forall \varepsilon > 0$，由f在0处连续知，$\exists \delta > 0$，使得

$$|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{\pi} \quad (\forall x \in [0, \delta]).$$

于是当$0 < h < \dfrac{\varepsilon \delta^2}{2\int_0^1 |f(x) - f(0)|\, dx + 1}$时，则

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} [f(x) - f(0)] dx \right| &\leq \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} |f(x) - f(0)|\, dx, \\
&= \int_0^\delta \frac{h}{h^2 + x^2} |f(x) - f(0)|\, dx + \int_\delta^1 \frac{h}{h^2 + x^2} |f(x) - f(0)|\, dx, \\
&\leq \int_0^\delta \frac{h}{h^2 + x^2} \frac{\varepsilon}{\pi} dx + \int_\delta^1 \frac{h}{\delta^2} |f(x) - f(0)|\, dx, \\
&= \frac{\varepsilon}{\pi} \arctan \frac{\delta}{h} + \frac{h}{\delta^2} \int_\delta^1 |f(x) - f(0)|\, dx, \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{h \to 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} [f(x) - f(0)] dx = 0.$$

3 变上限积分与原函数的存在性

设$f \in R[a, b]$，则由积分的区域可加性知，

$$f \in R[a, x], f \in R[x, b] \ (\forall x \in (a, b)).$$

为了方便使用，规定

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \ \int_b^b f(x) dx = 0$$

称函数

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \ (\forall x \in [a, b])$$

为f在区间$[a, b]$上的变上限积分，称函数

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt \ (\forall x \in [a, b])$$

为f在区间$[a, b]$上的变下限积分

定理1 设$f \in R[a, b]$，$F(x) = \int_a^x f(t) dt \ (\forall x \in [a, b])$，则

1. $F \in C[a, b]$；

2. 若函数f在$x_0 \in [a,b]$处连续，则F在x_0处可导，且$F'(x_0) = f(x_0)$.
特别若$f \in C[a,b]$，则F是f在区间$[a,b]$上的一个原函数。

证：由$f \in R[a,b]$和第一节定理1知，f有界，记$M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

1. $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，若$x_1 > x_2$，则

$$\begin{aligned}
|F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f(t)dt - \int_a^{x_2} f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t)dt \right| \ \ (\text{积分的区域可加性}) \\
&\le \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|dt \ \ (\text{积分的保序性}) \\
&< M(x_1 - x_2) \ \ (\text{积分的保序性}) \\
&= M|x_1 - x_2|;
\end{aligned}$$

若$x_1 < x_2$，则

$$|F(x_1) - F(x_2)| = |F(x_2) - F(x_1)| \quad \le \quad M|x_2 - x_1| = M|x_1 - x_2|.$$

综上，有

$$|F(x_1) - F(x_2)| \le M|x_1 - x_2|,$$

由此知$F \in C[a,b]$.

2. 不妨设$x_0 \in (a,b)$. $\forall \varepsilon > 0$，由函数f在x_0处连续知，$\exists \delta > 0$，当$x \in N^*(x_0, \delta)$时，

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

于是当$x \in N_+^*(x_0, \delta)$时，

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt - f(x_0) \right| \ \ (\text{积分的区域可加性}) \\
&= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]dt \right| \ \ (\text{积分的线性性质}) \\
&\le \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|dt \ \ (\text{第二节命题2}) \\
&\le \frac{1}{x - x_0} \cdot \varepsilon (x - x_0) \ \ (\text{积分的保序性}) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

故$F'_+(x_0) = f(x_0)$. 同理可得$F'_-(x_0) = f(x_0)$. 所以

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

例1 设$f \in C[a,b]$，$g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$可导，则

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x), \ \ \left(\int_{g(x)}^{b} f(t)dt \right)' = -f(g(x)) \cdot g'(x).$$

证: 令$F(u)=\int_a^u f(t)dt\ (u\in[a,b])$，则

$$\int_a^{g(x)} f(t)dt = F(g(x)),$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)' &= [F(g(x))]' \\ &\Leftarrow F'(g(x))\cdot g'(x)\ \text{(复合函数求导公式)} \\ &\Leftarrow f(g(x))\cdot g'(x)\quad \text{(定理1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\int_{g(x)}^{b} f(t)dt\right)' &= \left(\int_a^b f(t)dt - \int_a^{g(x)} f(t)dt\right)' \\ &= -\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)' \\ &= -f(g(x))\cdot g'(x).\end{aligned}$$

例2 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}$.

解:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3} &\Longleftarrow \lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt\right)'}{3x^2}\ \text{(L'Hospital 法则)} \\ &\Longleftarrow \lim_{x\to0}\frac{(x^2)'\sin\sqrt{x^2}}{3x^2}\ \text{(例1)} \\ &== \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

4 不定积分

4.1 不定积分概念

定义1 设I是个区间，f是定义在I上的函数. 若有函数$F: I \to R$使得

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I,$$

则称在区间I上F是f的一个原函数。

注1 f有原函数，但f未必可积；f可积，但f未必有原函数。

例1 设$f(x) = [x]$，问f有原函数吗？

解：f没有原函数。反证法，若F是f的一个原函数，则

$$F'(x) = f(x) = [x],$$

因此F'有第一类间断点，但这与“导函数既无可去间断点，也无第一类间断点”的结论矛盾。因此f 没有原函数。

定理1 设I是个区间，若$f \in C(I)$，则函数f在区间I上有原函数。

定义2 设I是个区间，f是定义在I上的函数，并假设f有原函数，称函数族

$$\int f(x)dx =: \{H | H\text{是}f\text{在区间}I\text{上的原函数}\}$$

为f在区间I上的不定积分。

设F是f在区间I上的一个原函数，则对任意的常数C，$F(x) + C$也是f在区间I上的原函数。另一方面，如果$G(x)$也是f在区间I上的任一个原函数，则

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) \equiv 0,$$

从而存在常数C，使得$G(x) \equiv F(x) + C.$

定理2 设I是个区间，f是定义在I上的函数。若函数F是f在区间I上的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

其中C表示任意常数。

注1 不定积分的几何意义？

常用不定积分公式：

$$\int 0dx = C; \qquad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int 1dx = x + C; \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1; \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1; \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C;$$

注2 初等函数并不一定有初等原函数，例如$\frac{\sin x}{x}$，e^{x^2}没有初等原函数，通常称这些函数积不出来。

注3 设函数F, G分别是函数f, g在区间I上的原函数，α，β是常数。若α，β不全为零，则

$$\begin{aligned}\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx &= \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \\ &= \alpha F(x) + \beta G(x) + C.\end{aligned}$$

这种方法称为<u>线性法</u>。

例3 求$\int \frac{1}{1-x^2}dx.$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}dx = \int \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right]dx &= \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.\end{aligned}$$

例4 求$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}dx.$

解：

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right]dx = \tan x - \cot x + C.$$

4.2 换元积分法

若

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

则$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, 于是

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

故欲求$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$，可令$\varphi(x) = u$，将$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$变换为$\int f(u)du$，求出结果$F(u)+C$后再把$u = \varphi(x)$代入：

$$\begin{aligned}
\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &\overline{\overline{=====}} \int f(\varphi(x))d\varphi(x) \\
&\underset{\text{令 } \varphi(x)=u}{=====} \int f(u)du \\
&===== F(u) + C \\
&\underset{\text{令 } u=\varphi(x)}{=====} F(\varphi(x)) + C.
\end{aligned}$$

这种方法称为<u>第一换元法</u>，或<u>凑微分法</u>。

若

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = H(t) + C,$$

则$[H(\varphi^{-1}(x))]' = H'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$，于是

$$\int f(x)dx = H(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

故欲求$\int f(x)dx$，可令$x = \varphi(t)$，将$\int f(x)dx$变换为$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$，求出结果$H(t)+C$后再把$t = \varphi^{-1}(x)$代入：

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &\underset{\text{令 } x=\varphi(t)}{=====} \int f(\varphi(t))d\varphi(t) \\
&===== \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\
&===== H(t) + C \\
&\underset{\text{令 } t=\varphi^{-1}(x)}{=====} H(\varphi^{-1}(x)) + C.
\end{aligned}$$

这种方法称为<u>第二换元法</u>。

例1 求不定积分$\int \tan x dx.$

解：

$$\begin{aligned}\int \tan x dx === \int \frac{\sin x}{\cos x}dx &\overset{}{=====} \int \frac{-1}{\cos x} d\cos x \\ &\underset{令\ \cos x = u}{=====} \int \frac{-1}{u} du \\ &===== -\ln|u| + C \\ &\underset{令\ u = \cos x}{=====} -\ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

例2 求不定积分$\int \frac{1}{\cos x}dx.$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}dx === \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx &===== \int \frac{1}{1-\sin^2 x} d\sin x \\ &\underset{令\ \sin x = u}{=====} \int \frac{1}{1-u^2} du \\ &===== \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C \\ &\underset{令\ u = \sin x}{=====} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

例3 求不定积分$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx &\underset{\substack{令 x = \tan t, \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}}{=====} \int \cos t d\tan t \\ &===== \int \cos t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt \\ &===== \ln[\sec t + \tan t] + C \\ &\underset{将 t 用 x 表示}{=====} \ln\left[\sqrt{x^2+1} + x\right] + C.\end{aligned}$$

例4 求不定积分$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

解：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx \underset{\substack{令x=\sec t,\\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}}{=====} \int \frac{1}{\tan t}d\sec t$$

$$===== \int \frac{1}{\tan t}\cdot\sec t\cdot\tan t dt = \int \sec t dt == \int \frac{1}{\cos t}dt$$

$$==== \ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$\underset{将t用x表示}{=====} \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$$

例5 求不定积分$\int \sqrt{1-x^2}dx$.

解：

$$\int \sqrt{1-x^2}dx \underset{\substack{令x=\sin t,\\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}}{=====} \int \cos t d\sin t$$

$$===== \int \cos t\cos t dt == \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$===== \frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C$$

$$\underset{将t用x表示}{=====} \frac{\arcsin x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C.$$