3.3

(2)

3.3

(1) $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $\quad y'' = \frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}$, $\quad y''' = \frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})\cdot x^{-\frac{5}{2}}$ $\cdots$

$$y^{(10)} = -\frac{(2n-3)!!}{2^{10}}x^{-\frac{19}{2}} \quad (n=10) \quad = \frac{-17!!}{2^{10}}x^{-\frac{19}{2}}$$

(3) 由 $y=\frac{1}{x}\cdot \ln x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\,\frac{1}{x^{n+1}}$$

$$(\ln x)^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}$$

$$\therefore y^{(5)}=\sum_{k=0}^{5} C_5^k\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}(\ln x)^{(5-k)}$$

$$=\frac{274-120\ln x}{x^6}$$

(5) $$y^{(100)}=\sum_{k=0}^{100} C_{100}^k x^{(k)}(\sinh x)^{(100-k)}$$

$$=x\sinh x+100\cosh x$$

(7) 由 $(e^{ax})^n=a^n e^{ax}$

$$(\sin bx)^n=b^n\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\therefore y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{ax})^k(\sin bx)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} e^{ax}\sin\left[bx+\frac{(n-k)\pi}{2}\right]$$

(9) 取 $f(x)=x^3$，$g(x)=e^x$

$$y^{(n)}=C_n^0 x^3e^x+C_n^1\cdot 3x^2e^x+C_n^2\,6xe^x+6C_n^3e^x$$

$$y^{(n)}=x^3e^x+3nx^2e^x+3n(n-1)xe^x+n(n-1)(n-2)e^x$$

(4)

4. (3) $\cancel{y''_{(x)}=}\ y'_{(x)} = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)} = t$

$$y''_{(x)} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dt}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)}$$

$$y'''_{(x)} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f''(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{[f''(t)]^2}\cdot f'''(t)}{f''(t)} = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}$$

(5)

5. (3) $y'-2 = (1-y')\ln(x-y) + \dfrac{1-y'}{x-y}(x-y)$

$$y' = \frac{\ln(x-y)+3}{2+\ln(x-y)} = 1+\frac{1}{2+\ln(x-y)}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x-y}(1-y')}{[2+\ln(x-y)]^2} = \frac{1}{[2+\ln(x-y)]^3\,(x-y)}$$

(6)

6. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$，$(1+x^2)f'(x) = 1$

求(n+2)次导：$\sum\limits_{k=0}^{k=n+1} C_{n+1}^{k}(1+x^2)^{(k)} f^{(n+1-k)}_{(x)} = 0$

即 $(1+x^2)f^{(n+2)}_{(x)} + 2(n+1)xf^{(n+1)}_{(x)} + n(n+1)f^{(n)}_{(x)} = 0$

令 $x=0$ 则 $f^{(n+2)}_{(0)} = -n(n+1)f^{(n)}_{(0)}$

$f^{(1)}_{(0)} = 1$　$f^{(2)}_{(0)} = 0$　即 $f^{(n)}_{(0)} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ (n-1)!(-1)^k, & n=2k+1 \end{cases}\quad k\in N$

$f^{(n)}_{(0)} = \begin{cases} 0, & n为偶数 \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n为奇数 \end{cases}$

数学归纳法　$y^{(1)}_{(x)} = \dfrac{2\arcsin x}{\ldots}$

法二：

$y' = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(7)

7. $f'(x) = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}\, f'(x) = 2\arcsin x$

对x求导. $\sqrt{1-x^2}\, f''(x) - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2} f'(x)$

$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

即 $(1-x^2) f''(x) - x f'(x) = 2$

对x求n阶导.

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-x^2)^{(k)} [f''(x)]^{(n-k)} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{(k)} [f'(x)]^{(n-k)} = 0$

分别保留3项, 2项得

$(1-x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n+1) x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0.$

得证.

代入 $x=0$. $f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$

由 $f'(0) = 0$ $f''(0) = 2$

得 $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 2^{n-1}\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2, & n\text{为偶数} \end{cases}$

4.1

(2)

习题4.1.

2. 设常数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足 $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$. 证明：多项式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 $(0,1)$ 内有一零点.

解：令 $f(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x$.

$f(0)=0$, $f(1) = \frac{a_n}{n+1} + \cdots + a_0 = 0 = f(0)$.

由罗尔中值定理，$\exists \xi \in (0,1)$ s.t. $f'(\xi) = 0$.

而 $f'(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ $\therefore$ 多项式 $a_n x^n + \cdots + a_0$ 在 $(0,1)$ 上有零点 ξ.

(5)

5. $\forall x_0,\ x_0+\Delta x \in I$, s.t.

$$0 \le \left|\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right| \le M|\Delta x|$$

当$\Delta x \to 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left|\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right| = f'(x_0)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} M|\Delta x| = 0$

由夹逼原理, $f'(x_0)=0$.

则 $f'(x) \equiv 0$

由Lagrange中值定理, 对$\forall a, b \in I$且$a<b$,

$\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

$\therefore f(b)=f(a)$

$\therefore f(x)$恒为常数

(11.1)

年 月 日 星期

设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=A$

11、(1) 补充定义 $f(a)=f(b)=A$

则 $f(x)$ 在 a 处右连续，b 处左连续

$\therefore f\in C[a,b]$，f 在 (a,b) 可导，

由罗尔定理，$\exists\, \xi\in(a,b)$. s.t.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

(11.2)

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$.

考虑 $g(x)=\begin{cases} A, & x=a \\ f(x), & x>a \end{cases}$ 在 $[a,+\infty)$ 可导

考察 $x=|a|+1>a$

1° 若 $g(|a|+1)=g(a)=A$，由罗尔定理，

$\exists\,\xi\in(a,|a|+1)\subsetneqq(a,+\infty)$, s.t.

$g'(\xi)=f'(\xi)=0$.

2° 若 $g(|a|+1)\neq A$，不妨设 $g(|a|+1)>A$.

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$

$\therefore$ 对 $\varepsilon=g(|a|+1)-A>0$, $\exists M>|a|+1$,

只要 $x>M$，就有 $|g(x)-A|<\varepsilon$.

$\Rightarrow g(x)<g(|a|+1)$

而 $g(x)$ 在 $[a,M]$ 上有最大值 B，且

$B\geqslant g(|a|+1)>g(a)=A$

若 $B=g(M)$，则 $g(M)$ 是 $g(x)$ 的最大值.

由费马定理 $g'(M)=f'(M)=0$.

若 $B>g(M)$，则 $\exists\,\xi\in(a,M)$, $g(\xi)=B$,

$g'(\xi)=f'(\xi)=0$.

当 $g(|a|+1)<A$ 时同理，找最小值即可.

证毕.

问：相应结论成立.

若改成 $(-\infty,a)$，则考虑 $g(-|a|-1)$ 即可

若改成 $(-\infty,+\infty)$，则考虑 $f(0)$. 若 $f(0)=A$，

则问题等同于(2)，拆分为两侧区间考察.

若 $f(0)>(<)A$，则利用两侧极限的定义，根据

$f(0)$ 值找到一段区间上的最大(小)值即可.

（12）

12.

$\because \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{|x|} = +\infty$. $\forall a\in \mathbb{R}$.

令 $g(x) = f(x) - ax$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{|x|} = \dfrac{f(x)}{|x|} - a = +\infty$.

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$\exists M>0$. s.t. $|x|>M$时. $g(x)>M$

$\therefore g(x)$. $x\in C[-M.M]$.

存在最大值和最小值 $A\cdot B$.

$\exists \xi\in[-M.M]$. s.t. $g(\xi)=\min\limits_{x\in[-M.M]} g(x)$

g(x)在R上可导，

有 $g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=a$.

（13）

13、令 $H(x)=[f(a)g(b)-f(b)g(a)][h(x)-h(a)]+[g(a)h(b)-g(b)h(a)][f(x)-f(a)]+\{h(a)f(b)-h(b)f(a)\}\{g(x)-g(a)\}$

$H(a)=H(b)=0$ $\therefore \exists\, \xi\in(a,b)$ s.t. $H'(\xi)=0$

即 $\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0.$

(14)

14、(1) 设 $g(x)=f(x)e^x$，则 $g(a)=g(b)=0.$

$g'(x)=[f'(x)+f(x)]e^x$

$g''(x)=[f''(x)+2f'(x)+f(x)]e^x$

有 $g'_+(a)=f'_+(a)e^a$

$g'_-(b)=f'_-(b)e^b$ 且 $f'_+(a)f'_-(b)>0$

$\therefore g'_+(a)g'_-(b)>0$

设 $g'_+(a)>0$, $g'_-(b)>0.$

则 $\exists\, \delta>0$, s.t.

$g(x)>g(a)=0$, $\forall x\in(a,a+\delta)$;

$g(x)<g(b)=0$, $\forall x\in(b-\delta,b)$

$\therefore \exists\, x_0\in(a,b)$ s.t. $g(x_0)=0$

由Lagrange中值定理.

$\exists\, x_1\in(a,x_0)$ s.t. $g'(x_1)=\dfrac{g(x_0)-g(a)}{x_0-a}=0$

$\exists\, x_2\in(x_0,b)$ s.t. $g'(x_2)=\dfrac{g(b)-g(x_0)}{b-x_0}=0.$

由 $g'(x)$ 可导.

知 $\exists\, \xi\in(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$. s.t. $g''(\xi)=\dfrac{g'(x_2)-g'(x_1)}{x_2-x_1}=0$

即 $f''(\xi)+2f'(\xi)+f(\xi)=0.$

(2) 设 $g(x)=f(x)e^{-x}$

则 $g_+'(a)\,g_-'(b)>0$ $\quad g''(x)=[f''(x)-2f'(x)+f(x)]e^{-x}$

由(1)，$\exists\, x_0\in(a,b)$ s.t. $g(x_0)=0$.

由Lagrange中值定理：

$\exists\, x_1\in(a,x_0)$ s.t. $g'(x_1)=\dfrac{g(x_0)-g(a)}{x_0-a}=0$

$\exists\, x_2\in(x_0,b)$ s.t. $g'(x_2)=\dfrac{g(b)-g(x_0)}{b-x_0}=0$

$\exists\, \theta\in \underset{\subseteq(a,b)}{(x_1,x_2)}$ s.t. $g''(\theta)=\dfrac{g'(x_2)-g'(x_1)}{x_2-x_1}=0$

即 $f''(\theta)-2f'(\theta)+f(\theta)=0$.

(3) 令 $g(x)=e^{-x}f(x)$，则 $g'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))$

$g(a)=g(b)=0$ 则 $\exists x_0\in(a,b)$

s.t. $g'(x_0)=0$.（罗尔定理）

即 $f'(x_0)-f(x_0)=0$

令 $G(x)=\cancel{f'(x_0)-f(x_0)}$ $f'(x)-f(x)$

$\cancel{G(a)\ G(b)}$ 则 $G'(x)=f''(x)-f'(x)$

且 $\lim\limits_{x\to a}G(x)\ \lim\limits_{x\to b}G(x)>0$

若 $\exists x_1\in(a,b)$，$x_1\neq x_0$

s.t. $G(x_1)=0$

则由罗尔定理，

$\exists\eta\in(a,b)$ s.t. $G'(\eta)=0$

若 $G(x)$ 在 (a,b) 仅一零点 x_0，则

x_0 为 $G(x)$ 极值点，由费马定理：

$G'(x_0)=0$

综上，$\exists\eta\in(a,b)$，s.t. $G'(\eta)=0$ 即

$f'(\eta)=f'(\eta)$

(4) 由 (3) 知:

$\exists x_0 \in (a,b)$, s.t. $f'(x_0)-f(x_0)=0$

令 $M(x)=e^x(f'(x)-f(x))$

则 $M'(x)=e^x(f''(x)-f(x))$

且 $\lim\limits_{x\to a} M(x)$ $\lim\limits_{x\to b} M(x)>0$, $M(x_0)=0$

若 $\exists$ $x_2 \in (a,b)$, ~~s.t.~~ $x_2 \neq x_0$,

s.t. $M(x_2)=0$

则由罗尔定理:

$\exists \xi \in (a,b)$, s.t. $M'(\xi)=0$

若 (a,b) 上 $M(x)$ 仅 x_0 一个零点, 则其为极值点,

由费马定理: $M'(x_0)=0$

综上, $\exists \xi \in (a,b)$, s.t. $M'(\xi)=0$ 即

$f''(\xi)=f(\xi)$