

# Review

- 向量值函数在一点可微及微分的定义

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\|\alpha\|_m}{\|\Delta x\|_n} = 0$$

- $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T : \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  在  $x_0$  可微

$\Leftrightarrow n$ 元函数  $f_i : \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  在  $x_0$  可微,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

## •Chain Rule

$u = g(x) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $y = f(u) : g(\Omega) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,

$g(x)$ 在 $x_0 \in \Omega$ 可微,  $f(u)$ 在 $u_0 = g(x_0)$ 可微, 则

$$J(f \circ g)|_{x_0} = J(f)|_{u_0} \cdot J(g)|_{x_0},$$

$$\text{即 } \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \Big|_{x_0} = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} \Big|_{u_0} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \Big|_{x_0},$$

$$\text{简记为 } \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0} = \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{u_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0}.$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

## § 6. 隐函数定理与反函数定理

曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 在 $(0,1)$ 的某个邻域中可表示为

$y = \sqrt{1 - x^2}$ , 且 $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ ; 在 $(1,0)$ 的某个邻域

中可表示为 $x = \sqrt{1 - y^2}$ , 且 $x'(y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}$ .

**Question:** (1)  $f(x, y) = 0$ 何时确定隐函数 $y = y(x)$ ?

(2) 如何通过 $f(x, y)$ 的性质研究隐函数 $y = y(x)$ 的性质, 如连续性, 可微性?

(3) 如何计算隐函数的(偏)导数和(全)微分?

## 1. 一个方程确定的隐函数

设 $f(x, y) = 0$ ,  $f(x_0, y_0) = 0$ . 若存在连续可微的隐函数 $y = y(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ , 满足 $f(x, y(x)) \equiv 0$ , 两边对 $x$ 求导, 有

$$f_1'(x, y(x)) + f_2'(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0.$$

若 $f_2'(x_0, y_0) \neq 0$ , 则在 $x_0$ 的某个邻域中,

$$y'(x) = -\frac{f_1'(x_0, y_0)}{f_2'(x_0, y_0)} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

(这里求偏导函数时 $x, y$ 相互独立!)

**Thm.** 设 $F$ 在 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 的某个邻域 $W$ 中有定义,且

$$(1) F(x_0, y_0) = 0,$$

$$(2) F(x, y) \in C^1(W), \text{即 } F'_x, F'_y \text{ 在 } W \text{ 中连续},$$

$$(3) F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

则存在 $\delta > 0$ 以及 $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上定义的函数  
 $y = y(x)$ , 满足

$$(1) y(x_0) = y_0, \text{且 } F(x, y(x)) \equiv 0, \forall x \in I,$$

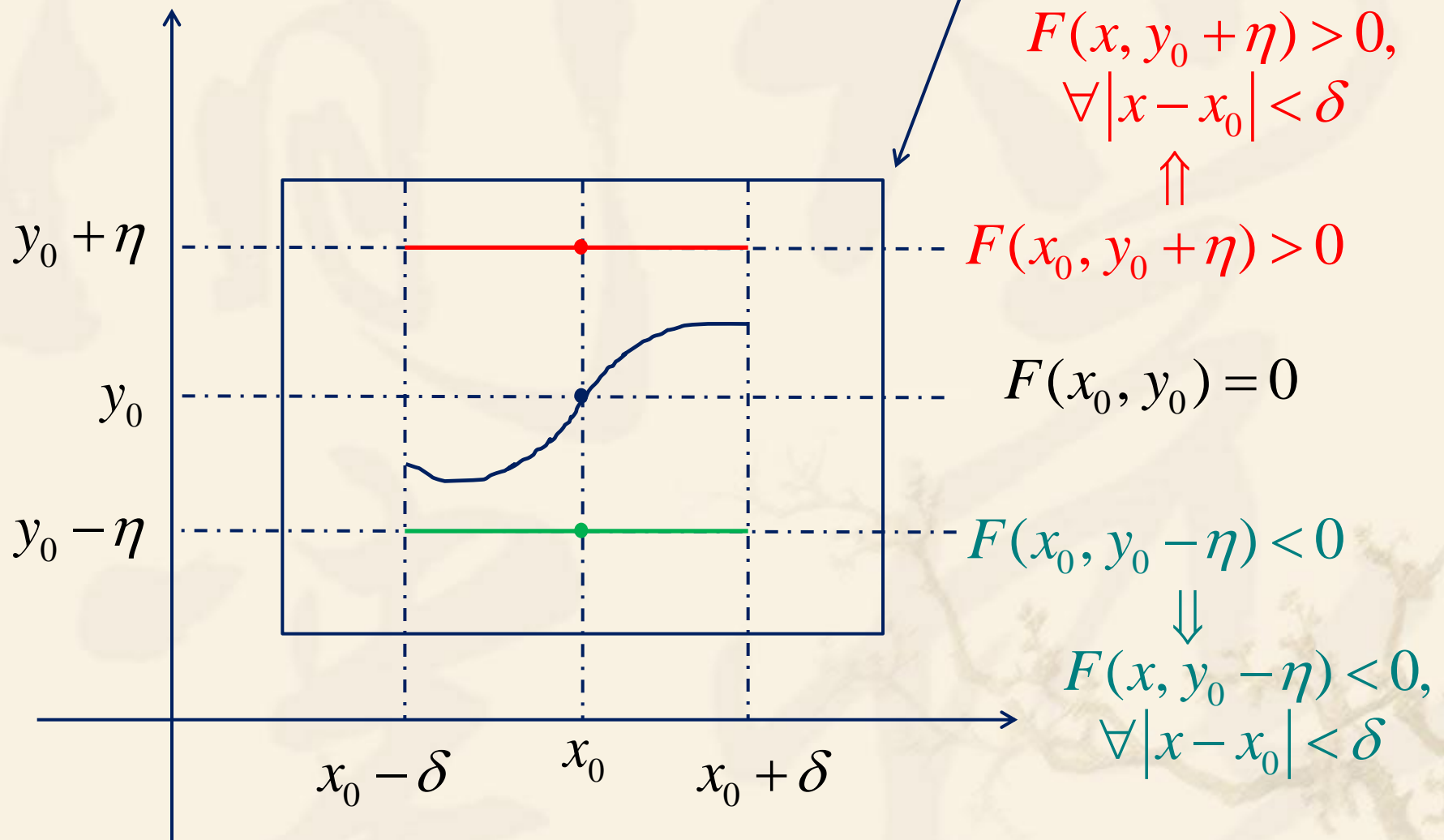
$$(2) y = y(x) \in C^1(I), \text{即 } y'(x) \text{ 在 } I \text{ 上连续},$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}, \forall x \in I.$$

(这里求偏导函数时 $x, y$ 相互独立!)



$$F'_y(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow F'_y(x, y) > 0, \forall (x, y) \in W_1$$



**Proof.** (1)先证隐函数的存在性.

因 $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$ , 不妨设 $F_y'(x_0, y_0) > 0$ .  $F \in C^1(W)$ , 则  
 $\exists a, b > 0, s.t. \textcolor{red}{F_y'(x, y) > 0, \forall |x - x_0| < a, |y - y_0| < b. (*)}$   
 $F(x_0, y)$ 对 $y$ 连续, 由(\*)及 $F(x_0, y_0) = 0$ , 给定 $\eta \in (0, b)$ , 有

$$F(x_0, y_0 - \eta) < 0 < F(x_0, y_0 + \eta).$$

由 $F$ 的连续性,  $\exists \delta \in (0, a), s.t.$

$$F(x, y_0 - \eta) < 0 < F(x, y_0 + \eta), \quad \forall |x - x_0| < \delta.$$

由(\*)知, 任意给定 $|x - x_0| < \delta$ ,  $F(x, y)$ 是 $y$ 的增函数. 结合连续函数的介值定理,  $\forall |x - x_0| < \delta, \exists! y = y(x) \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta), s.t. F(x, y) = 0$ .

(2)记(1)中构造的隐函数为 $y = f(x)$ ,下证其连续性.

由(1)中证明知,不论 $\eta > 0$ 取多小,都 $\exists \delta > 0$ ,当 $|x - x_0| < \delta$ 时,必有 $|y - y_0| < \eta$ . 因此  $y = f(x)$  在  $x_0$  连续.

任给 $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,记 $y_1 = f(x_1)$ ,则 $|y_1 - y_0| < \eta$ ,  
 $F(x_1, y_1) = 0, F'_y(x_1, y_1) > 0$ .即 $F$ 在 $(x_1, y_1)$ 与 $(x_0, y_0)$ 满足相同的条件.由前面的证明,  $F$ 在 $(x_1, y_1)$ 的充分小邻域中确定了同一个隐函数 $y = f(x)$ ,且 $f$ 在 $x_1$ 连续.



(3)最后证隐函数 $y = y(x)$ 的可导公式及连续可微性.

任意给定 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,由隐函数的连续性,当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \rightarrow 0$ .由隐函数的定义及 $F$ 的连续可微性知,

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, y(x) + \Delta y) - F(x, y(x)) \\ &= F'_x(x, y(x))\Delta x + F'_y(x, y(x))\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \end{aligned}$$

其中,  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_i = 0, i = 1, 2$ .

而 $F'_y(x, y(x)) > 0$ ,于是有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F'_x(x, y(x)) + \varepsilon_1}{F'_y(x, y(x)) + \varepsilon_2} \\ &= - \frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}, \quad \forall |x - x_0| < \delta.\end{aligned}$$

$$\text{即 } y'(x) = - \frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}, \quad \forall |x - x_0| < \delta.$$

由 $F$ 的连续可微性知,  $y'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续.  $\square$

**Remark:**  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 不是隐函数存在的必要条件.

设  $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ ,  $f(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0) = 0$  确定了连续可微的隐函数  $y = y(x_1, \dots, x_n)$ ,  $y_0 = y(x_1^0, \dots, x_n^0)$ , 满足

$$f(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0,$$

两边对  $x_i$  求偏导, 有

$$f'_i(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) \cdot 1 + f'_{n+1} \cdot y'_{x_i} = 0.$$

若  $f'_{n+1}(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0) \neq 0$ , 则在  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  的某邻域中,

$$y'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \frac{f'_i(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n))}{f'_{n+1}(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n))}$$

$$= - \frac{f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n))}{f'_y(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n))}.$$

右端求偏导函数时  
 $x_1, \dots, x_n, y$  相互独立

**Thm.** 设函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ 在点 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 的某个邻域 $W$ 中有定义, 且

$$(1) F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) = 0,$$

$$(2) F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in C^1(W),$$

$$(3) \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0)} \neq 0.$$

则存在点 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ 的一个邻域 $U$ , 以及定义在 $U$ 上的 $n$ 元函数 $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 满足

(1)  $y_0 = y(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , 且当  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$  时,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0;$$

(2)  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^1(U)$ , 即  $y'_{x_i}$  在  $U$  中连续,

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

$$(3) y'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}.$$

右端求偏导函数时  $x_1, \dots, x_n, y$  相互独立!

**Remark:**  $F'_y(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) \neq 0$  不是隐函数存在的必要条件.



## 2. 方程组确定的隐函数

设  $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m.$

$$F_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) = 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

若存在连续可微的隐函数

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, m.$$

满足

$$y_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = y_i^0, i = 1, 2, \dots, m.$$

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

简记为  $F(x, y) = 0, F(x_0, y_0) = 0, \begin{pmatrix} x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \\ F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m. \end{pmatrix}$   
 $F(x, y(x)) = 0, y(x_0) = y_0.$

由复合隐射的链式法则, 有  $\frac{\partial F}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial x} = 0,$

(求  $\frac{\partial F}{\partial(x, y)}$  时  $x, y$  相互独立!)

$$\text{即 } \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} I_n + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$\text{若 } \frac{\partial F}{\partial y} \text{ 可逆, 则 } \frac{\partial y}{\partial x} = - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

**Thm.**  $F(x, y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  在  $(x_0, y_0)$  的邻域  $W$  中有定义, 且满足 (1)  $F(x_0, y_0) = 0$ , (2)  $F \in C^q(W)$ , 即  $F$  的各分量函数在  $W$  中  $q$  阶连续可微, (3)  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$  可逆, 则存在  $x_0$  的某个邻域  $U \in \mathbb{R}^n$ , 以及定义在  $U$  上的向量值函数  $y = y(x)$ , 满足

(1)  $y(x_0) = y_0, F(x, y(x)) = 0, \forall x \in U;$

(2)  $y(x)$  在  $U$  上  $q$  阶连续可微;

(3)  $\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$ . 求  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$  时  $x, y$  相互独立!

**Remark:**  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ 可逆不是隐函数存在的必要条件.

**Remark:**  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto F(x, y)$ , 若  $\frac{\partial F}{\partial y}$  可逆,

则  $F(x, y) = 0$  确定隐“函数”  $y = y(x)$ , 求  $\frac{\partial y}{\partial x}$  有两种方法:

- 套用定理:  $\frac{\partial y}{\partial x} = - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}.$

**这里求Jaccobi矩阵时  $x, y$  相互独立!**

- 将  $F(x, y) = 0$  中  $y$  视为  $y = y(x)$ , 利用复合映射的链式法则, 方程组  $F(x, y(x)) = 0$  两边对  $x$  求Jaccobi矩阵.



**Remark:** 对具体的例子, 不必死记硬背隐函数定理中的公式, 只要将某些变量视为其它变量的隐函数, 再利用复合函数的求导法则即可.

**Remark:**  $m$ 个方程确定 $m$ 个隐函数, 将某 $m$ 个变量看成函数, 其它变量相互独立.



例.  $\varphi$ 可微,  $x^2 + z^2 = y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$  确定隐函数  $z = z(x, y)$ . 求  $z'_x, z'_y$ .

解: 视  $x^2 + z^2 = y\varphi(z/y)$  中  $z = z(x, y)$  为隐函数. 两边分别对  $x, y$  求偏导, 有

$$2x + 2zz'_x = y\varphi'(z/y) \cdot \frac{1}{y} z'_x,$$

$$2zz'_y = \varphi(z/y) + y\varphi'(z/y) \cdot \frac{1}{y^2} (yz'_y - z).$$

求解得

$$z'_x = \frac{2x}{\varphi'(z/y) - 2z}, \quad z'_y = \frac{y\varphi(z/y) - \varphi'(z/y)}{2yz - y\varphi'(z/y)}. \quad \square$$

例.  $u = f(x, y, z)$  有连续偏导数, 且  $z = z(x, y)$  由方程  $xe^x - ye^y = ze^z$  所确定, 求  $du$ .

解: 方程  $xe^x - ye^y = ze^z$  两边分别对  $x, y$  求偏导, 有

$$\left. \begin{aligned} e^x + xe^x &= z'_x e^z + z z'_x e^z \\ -e^y - ye^y &= z'_y e^z + z z'_y e^z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \frac{1+x}{1+z} e^{x-z}, \\ z'_y = \frac{-(1+y)}{1+z} e^{y-z}. \end{cases}$$

于是,

$$\begin{aligned} du &= u'_x dx + u'_y dy = (f'_x + f'_z z'_x) dx + (f'_y + f'_z z'_y) dy \\ &= \left( f'_x + \frac{1+x}{1+z} e^{x-z} f'_z \right) dx + \left( f'_y - \frac{1+y}{1+z} e^{y-z} f'_z \right) dy. \square \end{aligned}$$

**Remark:**  $du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$   
 $= f'_x dx + f'_y dy + f'_z (z'_x dx + z'_y dy)$   
 $= (f'_x + f'_z z'_x) dx + (f'_y + f'_z z'_y) dy.$

一阶微分的形式不变性

例.  $u = f(x - ut, y - ut, z - ut)$ ,  $g(x, y, z) = 0$ , 求  $u'_x, u'_y$ .

分析: 五个变量  $x, y, z, t, u$ , 两个方程, 确定两个隐函数  $z = z(x, y, t) = z(x, y)$ ,  $u = u(x, y, t)$ .

解法一: 视  $u = f(x - ut, y - ut, z - ut)$  中  $z = z(x, y)$  为隐函数, 两边分别对  $x, y$  求偏导, 有

$$u'_x = (1 - tu'_x)f'_1 + (-tu'_x)f'_2 + (z'_x - tu'_x)f'_3,$$

$$u'_y = (-tu'_y)f'_1 + (1 - tu'_y)f'_2 + (z'_y - tu'_y)f'_3.$$

其中  $f'_1, f'_2, f'_3$  在  $(x - ut, y - ut, z - ut)$  处取值.

视  $g(x, y, z) = 0$  中  $z = z(x, y)$ , 两边对  $x, y$  求偏导, 有

$$\begin{cases} g'_x + g'_z z'_x = 0, \\ g'_y + g'_z z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = -g'_x / g'_z, \\ z'_y = -g'_y / g'_z. \end{cases}$$

代入前两式, 求解得

$$u'_x = \frac{f'_1 + f'_3 z'_x}{1 + t(f'_1 + f'_2 + f'_3)} = \frac{f'_1 g'_z - f'_3 g'_x}{[1 + t(f'_1 + f'_2 + f'_3)] g'_z}$$

$$u'_y = \frac{f'_2 + f'_3 z'_y}{1 + t(f'_1 + f'_2 + f'_3)} = \frac{f'_2 g'_z - f'_3 g'_y}{[1 + t(f'_1 + f'_2 + f'_3)] g'_z}.$$

解法二：套用隐函数定理.



$$h(x, y, z, u, t) \triangleq f(x - ut, y - ut, z - ut) - u = 0,$$

$$g(x, y, z) = 0.$$

$$\frac{\partial(u, z)}{\partial(x, y, t)} = - \left( \frac{\partial(h, g)}{\partial(u, z)} \right)^{-1} \frac{\partial(h, g)}{\partial(x, y, t)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + t(f'_1 + f'_2 + f'_3) & -f'_3 \\ 0 & -g'_z \end{pmatrix}^{-1} \frac{\partial(h, g)}{\partial(x, y, t)}$$

$$= \frac{-1}{[1 + t(f'_1 + f'_2 + f'_3)] g'_z} \begin{pmatrix} -g'_z & f'_3 \\ 0 & 1 + t(f'_1 + f'_2 + f'_3) \end{pmatrix} \frac{\partial(h, g)}{\partial(x, y, t)}$$

$$\text{于是 } (u'_x, u'_y) = \frac{(g'_z \quad -f'_3)}{[1 + t(f'_1 + f'_2 + f'_3)] g'_z} \begin{pmatrix} f'_1 & f'_2 \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}. \quad \square$$

### 3. 逆映射定理

**Thm.** (逆映射的微分)  $f : \Omega (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  连续可微,  $x_0 \in \Omega$ . 若  $J(f)|_{x_0}$  可逆, 则存在  $y_0 = f(x_0)$  的某个邻域  $U$ , 使得  $U$  上定义了映射  $y = f(x)$  的逆映射  $x = f^{-1}(y)$ ,  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ , 且  $x = f^{-1}(y)$  在  $y_0$  可微,

$$\frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)} = \left( \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right)^{-1},$$

即  $J(f^{-1}) = (J(f))^{-1}$ .

**Proof:** 考虑方程组  $F(x, y) \triangleq f(x) - y = 0$ , 有

$$F(x_0, y_0) = 0, \text{ 且 } \frac{\partial F}{\partial x} \bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_0} \text{ 可逆.}$$



由隐函数定理, 存在  $y_0 = f(x_0)$  的邻域  $U$  及  $U$  上定义的函数  $x = x(y) \triangleq f^{-1}(y)$ , 满足

$$f(x(y)) - y \equiv 0, x(y_0) = x_0,$$

由复合映射的链式法则, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(y)) \cdot \frac{\partial x}{\partial y}(y) - I = 0, \quad \forall y \in U.$$

即  $J(f) \cdot J(f^{-1}) = I, J(f^{-1}) = (J(f))^{-1}$ .  $\square$



作业：习题1.6 No. 4,5,7,9.