第6章　常微分方程

学习材料（13）

1　引言

例（最速降线问题） 1696年Bernoulli向全欧洲数学家提出一个很难的问题：如图，设在垂直平面内有任一两点，一个质点受地心引力的作用，自较高点A 下滑至较低点B，忽略摩擦力和阻力，问沿着什么曲线下滑，时间最短?

一个辅助结论：设质点从A_1经直线l到达A_2，质点速度在l 的上侧为v_1，下侧为v_2，则质点如何运动才最省时？显然在l 一侧质点应走直线，因此关键是质点何时越过l? Snell折射定律

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}.$$

建立数学模型：如图建立坐标系，若用x轴平行将AB分割成小段，考虑在第k层与$k+1$层质点在曲线上的下滑，依能量守恒律，可近似认为质点在每层内的速度不变，于是依辅助结论知

$$\frac{\sin\alpha_k}{v_k}=\frac{\sin\alpha_{k+1}}{v_{K+1}}.$$

由于上式对任何k成立，故导出

$$\frac{\sin\alpha_k}{v_k}=C\quad（常数）.$$

令平行线的间距趋于零，我们就得到在曲线上任何一点

$$\frac{\sin\alpha}{v}=C\quad（常数）,$$

其中α为该点切线与铅垂线的夹角。

据能量守恒原理，质点在意高度处的速度，完全由其到达该高度处所损失的势能确定，而与所经路线无关，设质点质量为m，重力加速度为g，质点从A下滑至$P(x,y)$点时速度为v，则

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy\ \ 或\ \ v=\sqrt{2gy}.$$

从几何关系得

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

于是最速降线的数学模型为

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}=c,\\ y(0)=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}y\left[1+(y')^2\right]=\widetilde{c},\\ y(0)=0.\end{cases}$$

2 基本概念

含有自变量x，未知函数$y(x)$，未知函数的导数$y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

称为常微分方程，其中导数出现的最高阶数n称为常微分方程的阶。

例如：$y' = x$是一阶常微分方程，$y'' + y = 0$是二阶常微分方程。

设函数$y = \varphi(x)$在区间I上n阶可导，且满足常微分方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

即

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0,\ \forall x \in I,$$

则称函数$y = \varphi(x)$为常微分方程$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 在区间I 上的一个解。

若n阶常微分方程$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$的解

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n),$$

或

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$$

含有n个（独立的）任意常数,$C_1, C_2, \cdots, C_n$，则称

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

为常微分方程$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$的通解，或称

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$$

为常微分方程$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$的隐式通解。

例如：$y = \frac{1}{2}x^2 + C$是$y' = x$的通解，$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 是$y'' + y = 0$的通解。

称

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right), \\ y(x_0) = y_1^0,\ y'(x_0) = y_2^0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \end{cases}$$

为常微分方程的初值问题。例如

$$\begin{cases} y'' = \frac{F(x,y,y')}{m}, \\ y(x_0) = y_1^0,\ y'(x_0) = y_2^0 \end{cases}$$

注1 以下各节，都假定初值问题的解$y = \varphi(x)$是存在的、唯一的，称

$$\left\{\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) | x \in I\right\}$$

为常微分方程过

$$\left(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0\right)$$

的积分曲线。初值问题

$$\begin{cases} y' = f\left(x, y\right), \\ y(x_0) = y^0 \end{cases}$$

积分曲线的几何意义（图）？初值问题

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right), \\ y(x_0) = y_1^0,\ y'(x_0) = y_2^0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \end{cases}$$

积分曲线的几何意义（图）？

3　初等解法

3.1　分离变量方程

形如

$$y' = f(x)g(y)$$

的常微分方程称为分离变量方程。

(1). 若$g(y^0) = 0$，则$y = y^0$就是该方程的解（此时的积分曲线图？）；

(2). 若$g(y^0) \neq 0$，原方程化为

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x).$$

然后沿着积分曲线积分得

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y(t))} y'(t) dt = \int_{x_0}^{x} f(t) dt,$$

换元$u = y(t)$，得初值问题的解

$$\int_{y^0}^{y} \frac{1}{g(u)} du = \int_{x_0}^{x} f(t) dt;$$

或沿着任何积分曲线积分得

$$\int \frac{1}{g(y)} y' dx = \int f(x) dx + C,$$

这是分离变量方程的通解.

例1 求初值问题

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2-1}{2}, \\ y(0) = c \end{cases}$$

的解？

解一：(1). 若$c^2 - 1 = 0$，即$c = \pm 1$，此时$y = \pm 1$。

(2). $c^2-1\neq 0$，有

$$\frac{2}{y^2-1}y'=1.$$

沿着积分曲线积分得

$$\ln\left[\frac{\frac{1-y}{1+y}}{\frac{1-c}{1+c}}\right]=x,$$

即

$$\frac{1-y}{1+y}=\frac{1-c}{1+c}e^x.$$

因此满足初始条件$y(0)=c$的解为

$$y=\frac{1-\frac{1-c}{1+c}e^x}{1+\frac{1-c}{1+c}e^x}=\frac{1+c-(1-c)e^x}{1+c+(1-c)e^x}.$$

解二：(1). 若$c^2-1=0$，即$c=\pm1$，此时$y=\pm1$。

(2). $c^2-1\neq 0$，有

$$\frac{2}{y^2-1}y'=1.$$

沿着任何积分曲线积分得

$$\ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right|=x+C_1,$$

即

$$\frac{1-y}{1+y}=\pm e^{C_1}e^x.$$

记$C=\pm e^{C_1}(\neq 0)$，则上式可写成

$$\frac{1-y}{1+y}=Ce^x.$$

这样得到原方程的通解

$$y=\frac{1-Ce^x}{1+Ce^x},\ C\neq 0.$$

将$y(0)=c$代人，得$C=\frac{1-c}{1+c}$. 因此满足初始条件$y(0)=c$ 的解为的解为

$$y=\frac{1-\frac{1-c}{1+c}e^x}{1+\frac{1-c}{1+c}e^x}=\frac{1+c-(1-c)e^x}{1+c+(1-c)e^x}.$$

练习 画出

$$\begin{cases} y'=\frac{y^2-1}{2}, \\ y(0)=c \end{cases}$$

的积分曲线。

例2 求初值问题

$$\begin{cases} y\left[1+(y')^2\right]=\widetilde{c}, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

的解？

解：将上面微分方程变形为

$$dx = \left(\frac{y}{\widetilde{c} - y}\right)^{\frac{1}{2}} dy.$$

令

$$\left(\frac{y}{\widetilde{c} - y}\right)^{\frac{1}{2}} = \tan t.$$

从而，$y = \widetilde{c} \sin^2 t,\ dy = 2\widetilde{c} \sin t \cos t dt$, 故

$$dx = \tan t dy = 2\widetilde{c} \sin^2 t dt = \widetilde{c}(1 - \cos 2t) dt.$$

积分后得到

$$x = \frac{\widetilde{c}}{2}\left(2t - \sin 2t\right) + c_1.$$

这曲线过原点，故由上面第一式得，$t = 0$时，$x = y = 0$，于是，$c_1 = 0$. 这样

$$\begin{cases} x = \frac{\widetilde{c}}{2}\left(2t - \sin 2t\right), \\ y = \widetilde{c} \sin^2 t = \frac{\widetilde{c}}{2}\left(1 - \cos 2t\right). \end{cases}$$

令$a = \dfrac{\widetilde{c}}{2},\ \theta = 2t$,则

$$\begin{cases} x = a\left(\theta - \sin\theta\right), \\ y = a\left(1 - \cos\theta\right). \end{cases}$$

这是摆线的标准参数方程，这种曲线是半径为a的圆周上一点沿x 轴滚动产生的。

3.2 齐次方程

形如

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的常微分方程称为<u>齐次方程</u>。

作变换

$$u = \frac{y}{x},$$

所以

$$y' = u + xu',$$

于是

$$xu' = f\left(u\right) - u.$$

例2 求微分方程

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

解：原方程可化为

$$y' = 2\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}.$$

作变换

$$u = \frac{y}{x},$$

所以

$$y' = u + xu',$$

于是

$$xu' = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}.$$

显然由$u=0$，得$y=0$是原方程的解。

又当$u \neq 0$时，由上式有

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}u' = \frac{1}{x}.$$

沿着任何积分曲线积分

$$\ln\left|\frac{u}{1+u^2}\right| = \ln|x| + C_1,$$

即

$$\frac{u}{1+u^2} = \pm xe^{C_1}.$$

记$C = \pm e^{C_1}(\neq 0)$，则上式可写成

$$\frac{u}{1+u^2} = Cx.$$

这样得到原方程的通解

$$\frac{y}{x^2+y^2} = C, \quad C \neq 0.$$

注1 同学们应当会将形如

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)$$

及形如

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

的微分方程化为齐次方程的形式，特别应会求解微分方程

$$y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}.$$

3.3 一阶线性方程

形如

$$y' + p(x)y = q(x)$$

的常微分方程称为<u>一阶线性非齐次方程</u>。

形如

$$y' + p(x)y = 0$$

的常微分方程称为<u>一阶线性齐次方程</u>。

考虑线性齐次线性方程初值问题

$$\begin{cases} y' + p(x)y = 0, \\ y(x_0) = y^0 \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} 0 &= [y' + p(x)y]\, e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \\ &= y' e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + y e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} p(x) \\ &= \left[y e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \right]', \end{aligned}$$

沿着积分曲线积分得

$$0 = y e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} - y^0,$$

即

$$y = y^0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

注2 $y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$ 和$y = y_0 e^{-\int_{C}^{x} p(t)dt}$ 都是线性齐次线性方程$y' + p(x)y = 0$的通解。C的几何意义？

$y = C_1 e^{-\int_{C_2}^{x} p(t)dt}$中任意常数$C_1, C_2$是独立吗？

考虑线性非齐次线性方程初值问题

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x), \\ y(x_0) = y^0 \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} q(x) e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} &= [y' + p(x)y]\, e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \\ &= y' e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + y e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} p(x) \\ &= \left[y e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \right]', \end{aligned}$$

沿着积分曲线积分得

$$\int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds = y e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} - y^0,$$

即

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \left[y^0 + \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds \right].$$

注3 上述解法中，就是乘以因子$e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}$，使得$[y'+p(x)y]\, e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}$是一个函数的导数。此方法称为积分因子法。

称形如
$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, 1$$
的常微分方程为Bernoulli方程。将上方程化为
$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x),$$
即
$$\frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x),$$
令$u = y^{1-\alpha}$，得
$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x).$$

例3 求解微分方程
$$y' - \frac{4}{x}y = \sqrt{y}x^2.$$

解：令$u = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$，得
$$u' - \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{x}u = \left(1-\frac{1}{2}\right)x^2,$$
即
$$u' - \frac{2}{x}u = \frac{1}{2}x^2,$$
于是通解为
$$u = e^{\int_1^x \frac{2}{t}dt}\left[C + \int_1^x \frac{1}{2}s^2 e^{-\int_1^s \frac{2}{t}dt}ds\right] = x^2\left(C + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$$
故原方程通解为
$$\sqrt{y} = x^2\left(C + \frac{1}{2}x\right).$$

3.4 用降阶法求解微分方程

某些高阶的微分方程可以用变量代换的方法降低阶数，进而求出方程的解。这里仅讨论两种简单的情形：

类型1. $F(x, y', y'') = 0$，右边不显含y. 求解方法：
令$p = p(x) = y'$，则$y'' = p'$，原方程化为$F(x, p, p') = 0$.

例5 求解微分方程的初值问题:
$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' = 0, \\ y(0) = c_1, \ y'(0) = c_2. \end{cases}$$

解：令$p=p(x)=y'$，则$y''=p'$，原初值问题化为

$$\begin{cases} (1-x^2)p'-xp=0, \\ p(0)=c_2. \end{cases}$$

此初值问题的解为

$$\begin{aligned} p(x) &= c_2 e^{-\int_0^x \frac{-t}{1-t^2}dt} = c_2 e^{\int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt} \\ &= c_2 e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} \ \ (\text{在}x=0\text{附近}) \\ &= \tfrac{c_2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

于是

$$y(x)=y(0)+\int_0^x p(t)dt=c_1+\int_0^x \frac{c_2}{\sqrt{1-t^2}}dt=c_1+c_2\arcsin x.$$

问题 求解微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} (1-x^2)y''-xy'=0, \\ y(2)=c_1,\ y'(2)=c_2. \end{cases}$$

解：令$p=p(x)=y'$，则$y''=p'$，原初值问题化为

$$\begin{cases} (1-x^2)p'-xp=0, \\ p(2)=c_2. \end{cases}$$

此初值问题的解为

$$\begin{aligned} p(x) &= c_2 e^{-\int_2^x \frac{-t}{1-t^2}dt} = c_2 e^{\int_2^x \frac{t}{1-t^2}dt} \\ &= c_2 e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+\frac{1}{2}\ln 3} \ \ (\text{在}x=2\text{附近}) \\ &= \tfrac{\sqrt{3}c_2}{\sqrt{x^2-1}}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} y(x) &= y(2)+\textstyle\int_2^x p(t)dt \\ &= c_1+\textstyle\int_2^x \frac{\sqrt{3}c_2}{\sqrt{t^2-1}}dt \\ &= c_1+\sqrt{3}c_2\ln\left(\tfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{2+\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

类型2. $F(y,y',y'')=0$，右边不显含x. 求解方法：若$y=\varphi(x)$，记$x=\varphi^{-1}(y)$，并令

$$p=p(y):=\varphi'(\varphi^{-1}(y)),\quad \text{简记}p=p(y)=y',$$

则

$$
\begin{aligned}
p\tfrac{dp}{dy} &= \varphi'(\varphi^{-1}(y))\tfrac{d}{dy}[\varphi'(\varphi^{-1}(y))] \\
&= \varphi'(\varphi^{-1}(y))\varphi''(\varphi^{-1}(y))\tfrac{d}{dy}[\varphi^{-1}(y)] \\
&= \varphi'(\varphi^{-1}(y))\varphi''(\varphi^{-1}(y))\tfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} \quad \text{(反函数求导公式)} \\
&= \varphi''(\underline{\varphi^{-1}(y)}),
\end{aligned}
$$

故原方程化为$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$，或

$$
\begin{aligned}
p\tfrac{dp}{dy} &= y'\underline{\underline{\tfrac{dy'}{dy}?}} \\
&= y'\underline{\underline{\tfrac{dy'}{dx}\tfrac{dx}{dy}}} \\
&= y'\underline{\underline{y''\tfrac{1}{\frac{dy}{dx}}}} \quad \text{(反函数求导公式)} \\
&= y'',
\end{aligned}
$$

故原方程化为$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$.

例6 求解微分方程通解

$$y'' = \frac{1 + (y')^2}{2y}.$$

解：令$p = p(y) = y'$，则$y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$，原方程化为

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1 + p^2}{2y}.$$

此方程的通解为

$$\ln(1 + p^2) = \ln|y| + c_1,$$

即

$$1 + p^2 = C_1 y,\ \text{其中} C_1 = \pm e^{c_1}.$$

于是

$$y' = p = \pm\sqrt{C_1 y - 1},$$

故

$$\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2,$$

$$\frac{4}{C_1^2}(C_1 y - 1) = (x + C_2)^2.$$

这就是微分方程的通解.