1. 标准模型：

$$\max \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 10$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 20$$

$$x_i \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

单纯型表：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	3	1	1	1	0	0	40
x_5	1	-1	1	0	1	0	10
x_6	1	1	-1	0	0	1	20
	2	1	-1	0	0	0	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	4	-5	1	-3	0	10
x_1	1	-1	2	0	1	0	10
x_6	0	2	-3	0	-1	1	10
	0	3	-5	0	-2	0	$z-20$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_2	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{2}$
x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{25}{2}$
x_6	0	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	5
	0	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$z-\frac{55}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_2	0	1	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	10
x_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	10
x_5	0	0	-1	-1	1	2	10
	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$z-30$

因而当 $x_1=10$, $x_2=10$ $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=10$ $x_6=0$ 时，

RHS最大为 30

2. 单纯型表：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	-2	1	0	0	4	$\frac{3}{2}$	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	-3	0	0	0	4	$\frac{7}{2}$	-33	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	-12	8	0	1	0	8	-84	0
x_5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	-1	-1	0	0	0	2	-18	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$	0
x_5	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$	0
x_3	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$	1
	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	0	-2	0	-1	24	1	-6	0
x_1	1	-2	0	$-\frac{3}{4}$	16	0	3	0
x_3	0	2	1	1	-24	0	6	1
	0	1	0	$\frac{5}{4}$	-32	0	-3	0

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	0	1	$\frac{1}{4}$	-8	0	9	1
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-12	0	3	$\frac{1}{2}$
	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-20	0	-6	$-\frac{1}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{5}{4}$

因此，$x_1=\frac{3}{4}$，$x_2=0$ $x_3=0$ $x_4=1$ $x_5=0$ $x_6=1$ $x_7=0$ 时

RHS 最大为 $\frac{5}{4}$

3. 第一阶段：

$$\max \quad -x_5-x_6$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+4x_2-2x_3+8x_4+x_5=2$$

$$-x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_6=1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_5	1	4	-2	8	1	0	2
x_6	-1	2	3	4	0	1	1
	0	0	0	0	1	-1	Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_5	1	$\underline{4}$	-2	8	1	0	2
x_6	-1	2	3	4	0	1	1
	0	$\underline{6}$	1	12	0	0	Z+3

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_2	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
x_6	$-\frac{3}{2}$	0	$\underline{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
	$-\frac{3}{2}$	0	$\underline{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_2	$\frac{1}{16}$	1	0	2	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

x_3	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
	0	0	0	0	-1	-1	z

第二阶段

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_2	$\frac{1}{16}$	1	0	2	$\frac{1}{2}$
x_3	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0
	2	-4	5	-6	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_2	$\frac{1}{16}$	1	0	2	$\frac{1}{2}$
x_3	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0
	$\frac{33}{8}$	0	0	2	$z+2$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	16	0	32	8
x_3	0	6	1	12	3
	0	-66	0	-130	$z-31$

因此，当 $x_1=8$. $x_2=0$. $x_3=3$. $x_4=0$时 RHS最大为31

讨论：下例

$$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3+8x_4=2 & ① \\ -x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 & ② \\ 2x_1+2x_2-5x_3+4x_4=1 & ③ \end{cases}$$

由于 ③=①-②. 故③式可以删去后按两阶段方法求解.

当系数矩阵非行满秩时，在第二阶段可能出现某行全为0. 无法继续

进行，此时可利用线性组合关系，消去冗余行，使系数阵行满秩。

4. $\max \quad 6x_1-2x_2+10x_3+0x_4+0x_5$

s.t. $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+x_4=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+x_5=b_2 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0 \end{cases}$

(1).

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	b_1
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	b_2
	6	-2	10	0	0	z

↓

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	β_{11}	1	2	β_{14}	0	5
	β_{21}	β_{22}	$\frac{1}{3}$	β_{24}	$\frac{1}{3}$	b_2'
	σ_1	0	σ_3	σ_4	σ_5	$z-20$

由于 $\frac{1}{3}\neq 1$，$1\neq 0$，$2\neq 0$

故 出基变量 x_5，进基变量 x_1。

x_2，x_3 仍为非基变量，x_4 为基变量。

即：出基变量为 x_5，进基变量为 x_1

(2). 由(1)知，$\beta_{11}=0$，$\beta_{21}=1$，$\beta_{14}=1$ $\beta_{24}=0$

因此 $k_1(a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad 0 \quad 1 \quad b_2)=(\beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad b_2')$

故 $k_1=\frac{1}{3}$ $\quad a_{21}=3 \quad a_{23}=1 \quad a_{22}=3\beta_{22} \quad b_2=3b_2'$

而 $(6 \quad -2 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0)-k_2(3 \quad a_{22} \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad b_2)$

$=(0 \quad 0 \quad \sigma_3 \quad 0 \quad \sigma_5 \; -20)$

故 $k_2=2$，$b_2=10 \quad a_{22}=-1$，$\sigma_3=8 \quad \sigma_5=-2 \quad \eta=\frac{10}{3} \quad \beta_{22}=-\frac{1}{3}$

而 $(a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad 1 \quad 0 \quad b_1] - k_3(3 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 10)$

$= (0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 5)$

故 $k_3 = 0$. $a_{11} = 0$ $a_{12} = 1$ $a_{13} = 2$ $b_1 = 5$

原问题

$\max \ 6x_1 - 2x_2 + 10x_3$

$$
s.t. \begin{cases} x_2 + 2x_3 \le 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}
$$