Review

第一型曲面积分的计算

- $S: x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D,$

$$(A, B, C) = \mathrm{r}'_u \times \mathrm{r}'_v$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS$$

$$= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv,$$

- $S: z = f(x,y), (x,y) \in D,$

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy.$$

§5. 第二型曲面积分

1.有向曲面

Def.设S为逐片光滑曲面.任取S上一点(x_0, y_0, z_0),任取S在该点的两个单位法向量之一,如$\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$,若不论点(x, y, z)在曲面S上如何运动,当它回到点(x_0, y_0, z_0)时,$\vec{n}(x, y, z)$总与$\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$重合,而不会与$-\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$重合,则称S为双侧曲面.所谓有向曲面S,就是在S的两个侧面中指定一侧为正,或在S的两个单位法向量中指定一个为正.

Remark: 不是双侧曲面的例子:*Möbius*带.

2.第二型曲面积分的物理背景及定义

设区域$\Omega\subset\mathbb{R}^3$中分布着流体,其密度均匀(设为1),流速为$\vec{v}(x,y,z)$.$S$为$\Omega$内一光滑曲面.求单位时间内自$S$的$A$侧穿过$S$流向$B$侧的流量.

将S分割成n小片$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$,在$\Delta S_i$上取点$P_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,将ΔS_i近似看成平面,其单位法向量为S在点P_i指向B侧的单位法向量$\vec{n}(P_i)$.于是,单位时间内自A侧穿过S流向B侧的流量近似为

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{v}(P_i)\cdot\vec{n}(P_i)\Delta S_i.$$

当各个小片曲面的最大直径趋于0时,这个和式的极限就是单位时间内自A侧穿过S流向B侧的流量.

Def. 设$\vec{v}(x,y,z)$为$\Omega\subset\mathbb{R}^3$中的连续向量场, S为Ω中光滑有向曲面, $\vec{n}(x,y,z)$为S的正单位法向量,则函数$\vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)$在$S$上连续,从而(第一型)曲面积分

$$\iint_S \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)dS=\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

存在,称之为向量场$\vec{v}(x,y,z)$在有向曲面S上的第二型曲面积分.□

记

$$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

其中α,β,γ分别为$\vec{n}$与x,y,z正半轴的夹角, 称$\cos\alpha$, $\cos\beta,\cos\gamma$为方向余弦.

有向面积微元$\vec{n}dS$, 在oyz, ozx和oxy平面的有向投影面积为

$$(1,0,0)\cdot\vec{n}dS=\cos\alpha dS\triangleq dy\wedge dz,$$

$$(0,1,0)\cdot\vec{n}dS=\cos\beta dS\triangleq dz\wedge dx,$$

$$(0,0,1)\cdot\vec{n}dS=\cos\gamma dS\triangleq dx\wedge dy.$$

Remark:有向面积微元$dx\wedge dy, dy\wedge dz, dz\wedge dx$

当S的正法向量与z正半轴的夹角为锐角时,dS在oxy平面的投影为正,$dx\wedge dy = dxdy$. 反之,当S的正法向量与z正半轴的夹角为钝角时, dS在oxy平面的投影为负,$dx\wedge dy = -dxdy$. 同样理解有向面积微元$dy\wedge dz$和$dz\wedge dx$.

设$\vec{v} = (P, Q, R)$,则

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{n}dS &= P\cos\alpha dS + Q\cos\beta dS + R\cos\gamma dS\\ &= Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy\end{aligned}$$

Remark: $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, 第二型曲面积分也记为

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

第二型曲面积分也称为对坐标的曲面积分.

3.第二型曲面积分的性质

(1)(可积的充分条件) 若S为有向光滑曲面,向量场 $\vec{v}(x, y, z)$在S上连续,则$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$存在.

(2)(线性性质)若$\iint_S \vec{u}\cdot d\vec{S}$与$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$都存在,则$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\iint_S (\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot d\vec{S}$也存在,且

$$\iint_S (\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot d\vec{S}, = \alpha\iint_S \vec{u}\cdot d\vec{S} + \beta\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}.$$

(3)(对曲面的可加性) S由$S_1, S_2, \cdots, S_n$拼接而成,则

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i} \vec{v}\cdot d\vec{S}.$$

(4)用S^-表示有向曲面S的另一侧,则

$$\iint_{S^-} \vec{v}\cdot d\vec{S} = -\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}.$$

4.第二型曲面积分$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS$的计算

这里S为已知有向曲面, $\vec{v}$为S上已知向量场. 因此,计算第二型曲面积分的关键是求出有向曲面S的单位法向量$\vec{n}$,然后再计算第一型曲面积分$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS$.

对形如$\iint_S Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$的第二型曲面积分,令$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$,将积分视为$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS$来计算.

例:$I=\iint_S xzdy\wedge dz+yzdz\wedge dx+z^2dx\wedge dy$,其中$S$

为半球$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,上侧为正.

解:$\vec{v}=(xz,yz,z^2),\vec{n}=(x,y,z)/R$.

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\left(R/z\right)dxdy.$$

$$I=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS=\iint_S \frac{z}{R}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} R^2dxdy=\pi R^4.\square$$

例:$I=\iint_S(2x+z)dy\wedge dz+zdx\wedge dy$,其中$S$为有向曲面

$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$,其法向量与z正半轴夹角为锐角.

解: $\vec{v}=(2x+z,0,z)$,

$$\vec{n}=(-2x,-2y,+1)\Big/\sqrt{1+4x^2+4y^2},$$

$$dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy,$$

$$I=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS=\iint_S\frac{-4x^2-2xz+z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[-4x^2-(2x-1)(x^2+y^2)\right]dxdy.$$

由对称性知$\iint_{x^2+y^2\le 1}x(x^2+y^2)dxdy=0$,于是

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(y^2-3x^2)dxdy$$

$$=\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi} r^2(\sin^2 t-3\cos^2 t)dt$$

$$=\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[1-2(1+\cos 2t)\right]dt=-\pi/2.\square$$

计算第二型曲面积分$\iint_S \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)dS$时，分别求单位正法向量$\vec{n}(x,y,z)$和面积微元$dS$，计算$\vec{n}dS$时能约分.因此计算过程可以进一步简化.

Remark:设$\vec{v}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$.

Case1.$S: x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v), (u,v)\in D.$

$$(A,B,C)=\vec{r}_u'\times\vec{r}_v',$$

$$\vec{n}(x,y,z)=\pm\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv,$$

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS=\pm\iint_D (PA+QB+RC)dudv.$$

当向量(A,B,C)与曲面S的正向单位法向量同向(反向)时,取正号(负号).

Case2. $S: z = f(x, y), (x, y) \in D.$

$$A = -f'_x, B = -f'_y, C = 1$$

$$\vec{n}(x, y, z) = \pm \frac{(f'_x, f'_y, -1)}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}},$$

$$dS = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\,dxdy.$$

于是 $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) dxdy.$

当向量$(-f'_x, -f'_y, 1)$与曲面S的正向单位法向量同向(反向)时, 取正号(负号).

例: $I=\iint_S xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$, 其中$S$为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的内侧.

解: S的参数方程$r=(a\sin\varphi\cos\theta, b\sin\varphi\sin\theta, c\cos\varphi)$,

$$\varphi\in[0,\pi], \theta\in[0,2\pi].$$

$$r'_\varphi=(a\cos\varphi\cos\theta, b\cos\varphi\sin\theta, -c\sin\varphi),$$

$$r'_\theta=(-a\sin\varphi\sin\theta, b\sin\varphi\cos\theta, 0),$$

$$\vec{r}'_\varphi\times\vec{r}'_\theta=(bc\sin^2\varphi\cos\theta, ac\sin^2\varphi\sin\theta, ab\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$I=-abc\iint_D(\sin^3\varphi\cos^2\theta+\sin^3\varphi\sin^2\theta+\sin\varphi\cos^2\varphi)d\varphi d\theta$$

$$=-abc\iint_D\sin\varphi d\varphi d\theta=-4\pi abc.\square$$

Remark: 对形如

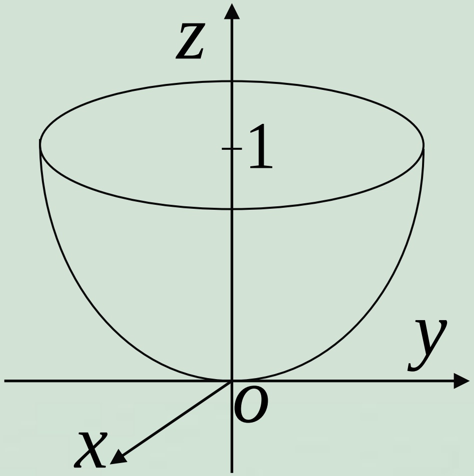
$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

的第二型曲面积分, 也可以直接化成S在坐标面上的投影区域上的二重积分计算.

对具体的例子, 这种方法一般比较麻烦. 但因为对$dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$有直观的几何解释, 所以该方法在理论分析上很有用. 将来证明$Gauss$公式时就要用到这种观点.

例: $I=\iint_S (2x+z)dy\wedge dz+zdx\wedge dy,$

S为曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$的内侧.



解: 设D_{yz},D_{xy}分别为S在oyz,oxy平面上的投影区域, 则

$$I=\iint_{S,x\ge 0}(2x+z)dy\wedge dz+\iint_{S,x\le 0}(2x+z)dy\wedge dz+\iint_S zdx\wedge dy,$$

$$=\iint_{D_{yz}}(2\sqrt{z-y^2}+z)(-dydz)+\iint_{D_{yz}}(-2\sqrt{z-y^2}+z)dydz$$

$$+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=-4\iint_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}dydz+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dydz,$$

其中 $\iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2}\,dydz = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} \sqrt{z-y^2}\,dz$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2}{3}(z-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{z=y^2}^{1} dy = \int_{-1}^{1} \frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy$$

$$= \frac{4}{3}\int_{0}^{1}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\,dydz = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} r^2 \cdot r dr = \frac{\pi}{2}.$$

于是, $I = -4 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$□

例: $I=\iint_S xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$, 其中$S$为长方体$|x|\le a,|y|\le b,|z|\le c$的外表面.

解: S由六块侧面$S_1, S_2,\cdots, S_6$拼接而成.

在$S_1: x=a,|y|\le b,|z|\le c$上, $\vec{n}=(1,0,0), x=a$, 于是

$$\iint_{S_1} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy.$$

$$=\iint_{S_1} xdS=\iint_{|y|\le b,|z|\le c} adydz=4abc.$$

同理, $\iint_{S_i} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=4abc,$

$$i=2,3,\cdots,6.$$

故$I=24abc$. □

我们将用Guass公式给出更简洁的计算.

Summary
第二型曲面积分的计算

- 方法一$:$化第二型曲面积分为第一型曲面积分

$$\iint_S Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS$$

其中$\vec{v}=(P,Q,R)$

- 方法二$:S:x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D,$

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS=\pm\iint_D (PA+QB+RC)dudv.$$

其中 $A=\det\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},B=\det\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},C=\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$

•方法三 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (-Pf_x' - Qf_y' + R) dxdy.$$

•方法四:直接化二重积分S在坐标面上的投影区域上的二重积分

$$\iint_S Pdy \wedge dz = \pm \iint_{D_{yz}} Pdydz$$

$$\iint_S Qdz \wedge dx = \pm \iint_{D_{xz}} Qdxdz$$

$$\iint_S Rdx \wedge dy = \pm \iint_{D_{xy}} Rdxdy$$

作业:习题4.5 No.3,5,7.