1. 用分支定界法求解下面整数规划问题。

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14$$
$$x_1 + 0.5x_2 \le 4.5$$
$$x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$

s.t. $2x_1 + 3x_2 \le 14$ ①

$x_1 + 0.5x_2 \le 4.5$ ②

$x_1, x_2 \ge 0$ 且为整数

1° 先求松弛问题最优解:

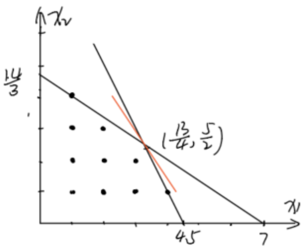
①$\times\frac{1}{4}$ + ②$\times\frac{5}{2}$:

$3x_1 + 2x_2 \le 14\times\frac{1}{4} + 4.5\times\frac{5}{2} = \frac{59}{4}$

$\therefore X^* = (\frac{13}{4}, \frac{5}{2})^T,\ z^* = \frac{59}{4}$

2° 按$x_1$分枝:

$$\begin{cases} \max\ z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad x_1 \le 3 \\ \text{最优解 } X^* = (3, \frac{8}{3})^T,\ z^* = \frac{43}{3} \end{cases}$$



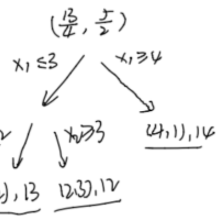

$$\begin{cases} \max\ z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad x_1 \ge 4 \\ \text{最优解 } X^* = (4, 1)^T,\ z^* = 14 \end{cases}$$

3° $x_1 \le 3$时,按$x_2$分枝:

$$\begin{cases} \max\ z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad x_1 \le 3,\ x_2 \le 2 \\ \text{最优解 } X^* = (3, 2)^T,\ z^* = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\ z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad x_1 \le 3,\ x_2 \ge 3 \\ \text{最优解 } X^* = (2, 3)^T,\ z^* = 12 \end{cases}$$

由分枝结果:




该问题最优解 $X^* = (4, 1)^T$, 最优值 $z^* = 14$

2. 某大学运筹学专业硕士生要求课程计划中必须选修两门数学类，两门运筹学类和两门计算机类课程。该专业所有可选课程及其归类如下表所示：

**注：**凡归属两类的课程选修后可认为两类中各选修了一门课程。

| | 课程名称 | 所属归类 |
|---|---|---|
| 1 | 微积分 | 数学类 |
| 2 | 计算机程序设计 | 计算机类 |
| 3 | 运筹学 | 数学类，运筹学类 |
| 4 | 数据结构 | 数学类，计算机类 |
| 5 | 管理统计 | 数学类，运筹学类 |
| 6 | 计算机模拟 | 计算机类，运筹学类 |
| 7 | 预测 | 数学类，运筹学类 |

此外，有些课程必须学习了先修课程才能选修，如修计算机模拟必须先学习计算机程序设计。所有要求先修课程的选修课及其对应的先修课程如下表所示：

| 课程名称 | 对应先修课程 |
|---|---|
| 计算机模拟 | 计算机程序设计 |
| 数据结构 | 计算机程序设计 |
| 管理统计 | 微积分 |
| 预测 | 管理统计 |

现在希望知道一个硕士生最少应选修几门课程（及其对应的课程名称）才能满足上述要求。请列出求解该问题的整数线性规划模型。

$x_i=1$ 表示选修第i门课程，$x_i=0$ 表示不选.

目标为： $\min z = \sum_{i=1}^{7} x_i$

约束为： $x_1+x_3+x_4+x_5+x_7 \geq 2$

$x_3+x_5+x_6+x_7 \geq 2$

$x_2+x_4+x_6 \geq 2$

$x_6 \leq x_2$

$x_4 \leq x_2$

$x_5 \leq x_1$

$x_7 \leq x_5$

综上，该问题的线性规划模型为：

$\min z = \sum_{i=1}^{7} x_i$

s.t. $x_1+x_3+x_4+x_5+x_7 \geq 2$

$x_3+x_5+x_6+x_7 \geq 2$

$x_2+x_4+x_6 \geq 2$

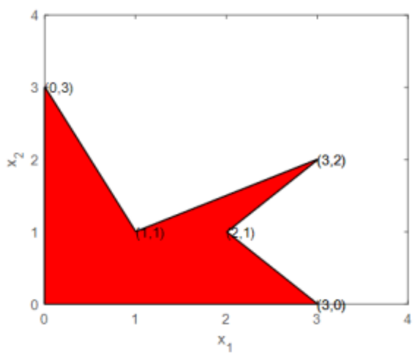
$x_2 - x_6 \geq 0$

$x_2 - x_4 \geq 0$

$x_1 - x_5 \geq 0$

$x_5 - x_7 \geq 0$

3. 将 $\max\limits_{x\in\Omega} x_1 + x_2$ 表示成混合整数线性规划，其中集合 $\Omega$ 为下图红色所示区域。




引入0-1变量 $y_1, y_2, y_3, y_4$，则该问题表示为：

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 \le 3 + M_1 y_1$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 1 + M_2 y_2$$

$$x_1 + x_2 \le 3 + M_3 y_3$$

$$x_1 - x_2 \le 1 + M_4 y_4$$

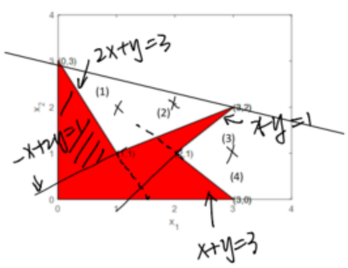
$$y_1 + y_2 \le 1$$

$$y_3 + y_4 \le 1$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$$

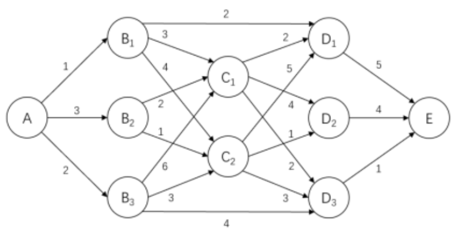
$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,3,4.$$

$M_k$, $k=1,2,3,4$ 是充分大的正数




注：用2个十字象限进行限制，各有一象限不可行即为 $\Omega$ 区域。

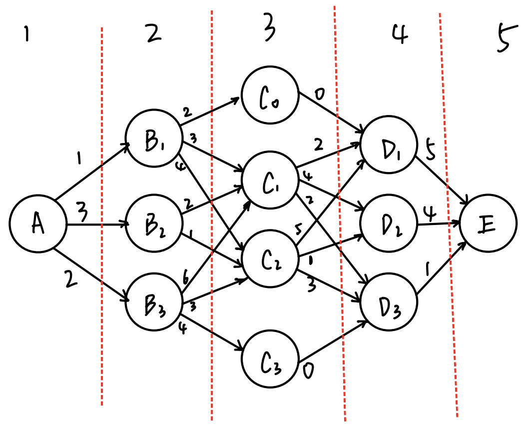
4. 求下图所示的从 A 到 E 的最短路线及其长度。




（1）将原问题表示为多阶段决策问题。

（2）分别用逆推法和顺推法求解（1）中多阶段决策问题。

(1)




状态集：$S_k=\{A\},\{B_1,B_2,B_3\},\{C_0,C_1,C_2,C_3\},\{D_1,D_2,D_3\},\{E\}$，$k=1,2,3,4,5$

决策集：$U_k(s_k)=\{B_1,B_2,B_3\},\{C_0,C_1,C_2,C_3\},\dots,\{E\}$，$\forall s_k\in S_k$，$k=1,2,3,4$

状态转移函数：$T_k(s_k,u_k)=u_k$，$\forall s_k\in S_k$，$u_k\in U_k(s_k)$，$k=1,2,3,4$.

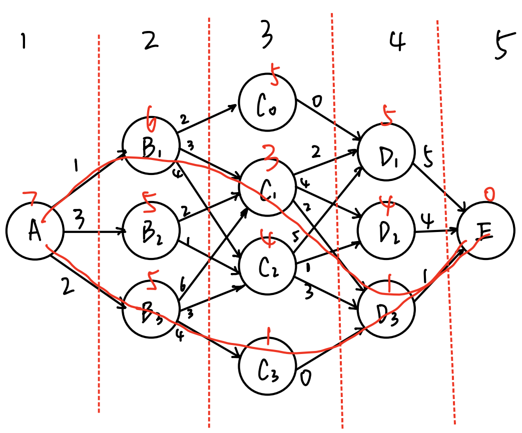
阶段指标函数：$d_k(s_k,u_k)$，$\forall s_k\in S_k$，$u_k\in U_k(s_k)$，$k=1,2,3,4$

求策略 $p=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 使下述过程指标函数达到最小。

$$d_1(s_1,u_1)+\sum_{k=2}^{4} d_k(T_{k-1}(s_{k-1},u_{k-1}),u_k)$$

(2)

逆

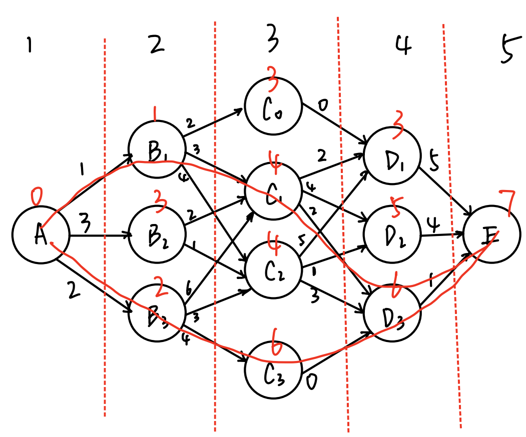



A - $B_1$ - $C_1$ - $D_3$ - E

A - $B_3$ - $C_3$ - $D_3$ - E

长度为7

顺：




A - $B_1$ - $C_1$ - $D_3$ - E

A - $B_3$ - $C_3$ - $D_3$ - E

长度为7.