习题 7.1 作业参考解答

《高等微积分教程（下）》

1. 将下列函数展成指定周期的 Fourier 级数.

(1) $T=2\pi, f(x)=\begin{cases} x+\pi, & x\in[-\pi,0) \\ \pi-x, & x\in[0,\pi]. \end{cases}$.

解： 由 $f(x)$ 为偶函数知 $b_n=0, n\in\mathbb{N}$.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi.$

当 $n\in\mathbb{N}$ 时，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n).$

从而 $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n)\cos nx.$

(3) $T=2\pi, f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, x\in(-\pi,\pi).$

解： $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})dx=\frac{\pi}{2}.$

当 $n\in\mathbb{N}$ 时，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\cos nxdx=0.$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\sin nxdx=\frac{(-1)^n}{n}.$

$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$

(5) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,h] \\ 1, & x\in(h,\frac{T}{2}] \end{cases}$ 展成以 T 为周期的余弦级数.

解： 将 $f(x)$ 偶延拓到 $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$.

从而 $a_0 = \dfrac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \dfrac{4h}{T}$.

当 $n \in \mathbb{N}$ 时，$a_n = \dfrac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{\frac{T}{2}}dx = \dfrac{1}{n\pi}2\sin\dfrac{2n\pi h}{T}$.

$f(x) \sim \dfrac{2h}{T} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{2n\pi h}{T}\cos\dfrac{2n\pi x}{T}$

(7) $f(x) = x + x^2, x \in [0, 2\pi]$ 展成以 2π 为周期的 Fourier 级数.

解： $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x + x^2)dx = 2\pi + \dfrac{8}{3}\pi^2$.

当 $n \in \mathbb{N}$ 时，$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x + x^2)\cos nxdx = \dfrac{4}{n^2}$.

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x + x^2)\sin nxdx = -\dfrac{2 + 4\pi}{n}$.

$f(x) \sim \pi + \dfrac{4}{3}\pi^2 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\dfrac{4}{n}\cos nx - \dfrac{2 + 4\pi}{n}\sin nx)$.

2. 设 $f(x) = x - 1$.

(1) 将 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上展成 2π 为周期的 Fourier 级数.

解： $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x - 1)dx = 2\pi - 2$.

当 $n \in \mathbb{N}$ 时，$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x - 1)\cos nxdx = 0$.

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x - 1)\sin nxdx = -\dfrac{2}{n}$.

$f(x) \sim (\pi - 1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-\dfrac{2}{n})\sin nx$.

(2) 将 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上展成 2π 为周期的正弦级数.

备注：此处改书中周期 π 为 2π.

解： 将 $f(x)$ 奇延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-\pi, 0) \\ x - 1, & x \in (0, \pi) \end{cases}$.

当 $n \in \mathbb{N}$ 时，$b_n = 2 \cdot \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x - 1)\sin nxdx = \dfrac{2}{n\pi}(-1 + (1 - \pi)(-1)^n)$.

$f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi}(-1+(1-\pi)(-1)^n)\sin nx.$

(3) 将 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上展成 4 为周期的余弦级数；如何展开，展开法是否唯一？

解： f 的周期至少为 1，展成以 4 为周期的余弦级数有两种可能.

最小正周期为 2：将 $f(x)=x-1$ 从 $(0,1)$ 偶延拓到 $(-1,1)$.

$a_0 = 2\cdot\int_0^1 (x-1)dx = -1.$

当 $n\in\mathbb{N}$ 时，$a_n = 2\cdot\int_0^1 (x-1)\cos n\pi x dx = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1).$

$f(x)\sim -\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)\cos n\pi x.$

最小正周期为 4：将 $f(x)=x-1$ 从 $(0,2)$ 偶延拓到 $(-2,2)$.

$a_0 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 (x-1)dx = 0.$

当 $n\in\mathbb{N}$ 时，$a_n = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n-1).$

$f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)\cos\frac{n\pi x}{2}.$

3. 将 $f(x)=e^x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展成 Fourier 级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 的和.

解：将 $f(x)$ 延拓为以 2π 为周期的周期函数.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}$$

.

当 $n \in \mathbb{N}$ 时，

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx \\
=& \frac{1}{n\pi}\left(e^x \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx \right) \\
=& \frac{1}{n}(-b_n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx \\
=& \frac{1}{n\pi}\left(e^x(-\cos nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx \right) \\
=& \frac{1}{n\pi}\left((e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^{n+1} + \pi a_n \right).
\end{aligned}$$

从而有

$$a_n = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n}{(n^2+1)\pi}, b_n = \frac{n(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^{n+1}}{(n^2+1)\pi}.$$

$$f(x) \sim \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n}{(n^2+1)\pi}\cos nx + \frac{n(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^{n+1}}{(n^2+1)\pi}\sin nx\right).$$

并记 Fourier 级数的和函数为 $S(x), x \in \mathbb{R}$.

又因为 $f \in C(-\pi, \pi)$，所以由 Fourier 级数收敛的性质，有

$$S(\pi) = \frac{1}{2}(\lim_{x \to \pi^+} f(x) + \lim_{x \to \pi^-} f(x)) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{(\pi-1)e^{\pi} + (\pi+1)e^{-\pi}}{2(e^{\pi} - e^{-\pi})}.$$