第4章 导数应用

学习材料(6)-2

1 求最大、最小值

定义1（极值、极值点） 设函数f在x_0的某个邻域$N(x_0)$上有定义。

1. 若$\forall x \in N(x_0)$，有$f(x) \le f(x_0)$，则称函数f在点x_0取得<u>极大值</u>，称点x_0为f的<u>极大值点</u>，(画图)；特别，若$\forall x \in N^*(x_0)$，有$f(x) < f(x_0)$，则称函数f在点x_0取得<u>严格极大值</u>，称点x_0为f的<u>严格极大值点</u>，(画图)。

2. 若$\forall x \in N(x_0)$，有$f(x) \ge f(x_0)$，则称函数f在点x_0取得<u>极小值</u>，称点x_0为f的<u>极小值点</u>，(画图)；特别，若$\forall x \in N^*(x_0)$，有$f(x) > f(x_0)$，则称函数f在点x_0取得<u>严格极小值</u>，称点x_0为f的<u>严格极小值点</u>，(画图)。

3. 极大值、极小值统称<u>极值</u>，极大值点、极小值点统称<u>极值点</u>。

定理1（Fermat） 设函数f在点x_0取得极值。若$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0.$

证：不妨函数f在点x_0取得极小值，则

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0, \quad \forall x \in N(x_0)\bigcap(x_0,+\infty),$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0, \quad \forall x \in N(x_0)\bigcap(-\infty,x_0).$$

由于$f'(x_0)$存在，有

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0,$$

所以$f'(x_0)=0.$

注1 对于可导函数而言，导数为零只是极值点的必要条件，但不是充分条件，例如$f(x)=(x-1)^3$，则$f'(1)=0$，但1不是f的极点，（画图）。

定义2（驻点） 设函数f在x_0的某个邻域$N(x_0)$上有定义。若$f'(x_0)$存在，且$f'(x_0)=0$，则称点x_0为f的<u>驻点（临界点）</u>。

我们知道，有界闭区间上的连续函数必达到最大值和最小值。如何求最值？
第一步：求出所有可能取得最值的点，包括端点、使得f'不存在的点、f的驻点。
第二步：计算所求各点的函数值，比较其大小。

例1 求函数$f(x)=x^3+x^2+|x-1|+10$在$[-3,4]$上的最大值和最小值。

解：因f是$[-3,4]$上的连续函数，故其必有最大值和最小值。

易知f在$(-3,4)$中的不可导点为1. 而

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2-x+9, & 当x\in(-3,1),\\ x^3+x^2+x+9, & 当x\in(1,4),\end{cases}$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1), & 当x\in(-3,1),\\ 3x^2+2x+1, & 当x\in(1,4),\end{cases}$$

故f在$(-3,4)$中的驻点为-1, $\frac{1}{3}$.

计算f在端点-3, 4，不可导点为1和驻点$-1, \frac{1}{3}$的值，得

$$f(-3)=-4,\ f(4)=93,\ f(1)=12,\ f(-1)=12,\ f\left(\frac{1}{3}\right)=10\frac{22}{27}.$$

故函数f在4处取得最大值93，在-3处取得最小值-4.

定理2 设函数$f:[a,b]\to R$可导。
(1). 若$f'_+(a)<0$, $f'_-(b)>0$，则f在$[a,b]$的最小值在(a,b)的某个点ξ取到；
(2). 若$f'_+(a)>0$, $f'_-(b)<0$，则f在$[a,b]$的最大值在(a,b)的某个点ξ取到。
特别$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

证：只证（1）. (画图)。因$f\in C[a,b]$，故由最值定理知，f在$[a,b]$上的某点ξ取到最小值。由于

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)<0,$$

故当$0<x-a<<1$时，

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,$$

即

$$f(x)<f(a),$$

于是$f(\xi)\le f(x)<f(a)$，所以$\xi\ne a$. 又由于

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'_-(b)>0,$$

故当$0<b-x<<1$时，

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$

即

$$f(x)<f(b),$$

于是$f(\xi) \le f(x) < f(b)$，所以$\xi \ne b$. 因此$\xi \in (a,b)$. 故f在$[a,b]$的最小值在(a,b)的某个点ξ取到，从而由Fermat定理知$f'(\xi)=0$.

例2

一束光线由空气中A点经过水面折射后到达水中B点（画图）。已知光在空气中和水中传播的速度分别为v_1和v_2，光线在介质中总是沿着耗时最少的路径传播。试确定光线传播的路径。

解：设A点到水面的距离为$AO=h_1$，B点到水面的距离为$BQ=h_2$，x轴沿水面过点O和Q，OQ的长度为l.

由于光线总是沿着耗时最少的路径传播，因此光线在同一均匀介质中必沿着直线传播。设光线的传播路径与x轴的交点为P，$OP=x$，则光线从A到B的传播路径必为折线APB，其所需要的传播时间为

$$T(x)=\frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}{v_2},\quad x\in[0,l].$$

因此$T\in C([0,l])$，故T在$[0,l]$有最小值。

又$\forall x\in[0,l]$,

$$T'(x) \quad = \quad \tfrac{x}{v_1\sqrt{h_1^2+x^2}}+\tfrac{x-l}{v_2\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}},$$

于是$T'(0)<0,\ T'(l)>0$，故T在$[0,l]$最小值在$(0,l)$中某点x_0取到，因此由Fermat定理知$T'(x_0)=0$，即

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{h_1^2+x_0^2}}+\frac{x_0-l}{v_2\sqrt{h_2^2+(l-x_0)^2}}=0.$$

记

$$\frac{x_0}{\sqrt{h_1^2+x_0^2}}=\sin\theta_1,\quad \frac{l-x_0}{\sqrt{h_2^2+(l-x_0)^2}}=\sin\theta_2,$$

就得到

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_1}{v_1}.$$

这就是说，当P点满足上述条件时，APB就是光线的传播路径。上式就是光学中著名的折射定律。

推论1（导数介值定理）

设I是开区间，f是定义在I上的可导函数，$a,b\in I$，使得$a<b$且$f'(a)\ne f'(b)$. 则对于介于$f'(a)$和$f'(b)$之间的任意一个实数μ，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\mu$.

证：考察函数$g(x)=f(x)-\mu x$. 则g是定义在I上的可导函数，$a,b\in I$，使得$a<b$且$g'(a)g'(b)<0$. 于是根据导数零值定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$g'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=\mu$.

注2

导函数虽然有介值性质，但导函数不一定连续，例如

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & 当x\ne 0,\\ 0, & 当x=0.\end{cases}$$

则

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & 当x\ne 0,\\ 0, & 当x=0,\end{cases}$$

但极限$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$不存在，所以0是$f'$的第二类间断点。

2 Lagrange微分中值定理及应用

定理1（Rolle） 设函数$f:[a,b]\to R$满足
(1). $f\in C[a,b]$;
(2). $f(a)=f(b)$;
(3). f在(a,b)可导。
则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

证：（画图）。
情况1. 若$f\equiv c$.
　则$f'(x)=0$，因此ξ可取(a,b)中任意点。

情况2. 若$\exists x\in(a,b)$，使得$f(x)>f(a)$.
　由条件（1）和最值定理知，f在$[a,b]$取到最大值。由条件(2)和$f(x)>f(a)$知，f在$[a,b]$的最大值在(a,b)的某个点ξ取到，所以ξ是f的极点。由条件（3）和Fermat定理知，$f'(\xi)=0$.

情况3. 若$\exists x\in(a,b)$，使得$f(x)<f(a)$.
　由条件（1）和最值定理知，f在$[a,b]$取到最小值。由条件(2)和$f(x)<f(a)$知，f在$[a,b]$的最小值在(a,b)的某个点ξ取到，所以ξ是f的极点。由条件（3）和Fermat定理知，$f'(\xi)=0$.

例1 求证$f(x)=x^3+x-1$有唯一的零点。

证：先证零点的存在性。因$f\in C[0,1]$，$f(0)=-1$，$f(1)=1$，故由连续函数零值定理知，$\exists x_0\in(0,1)$，使得
$$f(x_0)=0.$$
故f的零点是存在的。
　再证零点的唯一性。假若又有$x_1(\neq x_0)$，使得$f(x_1)=0$. 不妨$x_1>x_0$，则$f\in C[x_0,x_1]$、$f(x_0)=f(x_1)$、f可导，故由Roll定理知，$\exists\xi\in(x_0,x_1)$，使得
$$f'(\xi)=0,$$
即
$$3\xi^2+1=0,$$
但这不可能。所以f的零点是唯一的。

例2 设λ是个实数，函数$f:[a,b]\to R$满足
(1). $f\in C[a,b]$;
(2). $f(a)=f(b)=0$;
(3). f在(a,b)可导。
则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证：令$F(x)=e^{\lambda x}f(x)$，则$F\in C[a,b]$、$F(a)=F(b)=0$、F在(a,b)可导，故由Roll定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使得
$$F'(\xi)=0,$$
即
$$\lambda e^{\lambda x}f(x)+e^{\lambda x}f'(x)=0,$$
也即
$$\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

定理2（Lagrange） 设函数$f:[a,b]\to R$满足
(1). $f\in C[a,b]$;
(2). f在(a,b)可导。
则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证：

$$\left\lceil \text{画图，曲线上的点}(x,f(x))\text{到直线}ax+by+c=0\text{的距离}\frac{ax+bf(x)+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\rceil$$

令$F(x)=\frac{f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}{\sqrt{1+\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2}}$，则$F\in C[a,b]$、$F(a)=f(a)=F(b)$、$F$在$(a,b)$可导，故由Roll定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=0,$$

即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

也即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注1 Lagrange微分中值公式也写成

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),$$

其中θ是介于0和1的某个数。

例3 设函数$f:(a,b)\to R$可导，则导函数$f':(a,b)\to R$没有第一类间断点。

证：只证明$f':(a,b)\to R$跳跃间断点。反证法，若不然，设x_0为f'的跳跃间断点。记

$$f'(x_0-0)=:\lim_{x\to x_0^-}f'(x),\quad f'(x_0+0)=:\lim_{x\to x_0^+}f'(x),$$

则

$$f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0),$$

因此$f'(x_0-0)$ $f'(x_0+0)$至少有一个不等于$f'(x_0)$，不妨设

$$f'(x_0+0)\neq f'(x_0).$$

由$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0+0)$，$\exists\delta_1>0$，使得当$x\in(x_0,x_0+\delta_1)$时，有

$$|f'(x)-f'(x_0+0)|<\frac{|f'(x_0+0)-f'(x_0)|}{2}.$$

再由$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$，$\exists\delta_2>0$，使得当$x\in(x_0,x_0+\delta_2)$时，有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\frac{|f'(x_0+0)-f'(x_0)|}{2}.$$

于是当$x\in(x_0,x_0+\min\{\delta_1,\delta_2\})$时，有

$$\begin{aligned}
|f'(x_0+0)-f'(x_0)| &= \left|f'(x_0+0)-\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right| \\
&\le \left|f'(x_0+0)-\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|+\left|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right| \\
&= |f'(\xi)-f'(x_0+0)|+\left|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right| \quad (\text{Lagrange 微分中值定理，}\exists\xi\in(x_0,x)) \\
&< \tfrac{|f'(x_0+0)-f'(x_0)|}{2}+\tfrac{|f'(x_0+0)-f'(x_0)|}{2} \quad (\xi\in(x_0,x)\subset(x_0,x_0+\delta_1)\text{，}x\in(x_0,x_0+\delta_2)) \\
&= |f'(x_0+0)-f'(x_0)|,
\end{aligned}$$

故得矛盾

$$|f'(x_0+0)-f'(x_0)|<|f'(x_0+0)-f'(x_0)|.$$

该矛盾说明原假设不对，所以f'没有跳跃间断点。

2.1 应用1-单调性判别

命题1 设函数$f:(a,b)\to R$可导，则

(1). $f'\ge 0 \Longleftarrow\!=\!=\!\Longrightarrow f$单调不减；

(2). $f'\le 0 \Longleftarrow\!=\!=\!\Longrightarrow f$单调不增；

(3). $f'>0 =\!=\!\Longrightarrow f$严格增；

(4). $f'<0 =\!=\!\Longrightarrow f$严格减。

证：只证（1）.

充分性（“$\Longleftarrow\!=\!=$”）. $\forall x_0\in(a,b)$，

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0.$$

必要性（“$=\!=\!\Longrightarrow$”）. $\forall x_1,\ x_2\in(a,b)$，若$x_1<x_2$，则由Lagrange微分中值公式得

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(\eta)(x_2-x_1)\ge f(x_1),$$

其中$\eta\in(x_1,x_2)$.

例4 证明不等式

$$\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x},\ \forall x\ge 1,$$

特别

$$\frac{1}{1+n}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\ \forall n\in Z_+.$$

并证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$存在。

证：令$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$ $(x\geq 1)$. 则

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{x(1+x)}+\frac{1}{(1+x)^2}<0,\quad \forall x\geq 1.$$

因此f在$[1,+\infty)$是单调减函数。又注意到$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，便得到

$$f(x)>0,\ \forall x\geq 1,$$

即

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x},\ \forall x\geq 1.$$

令$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$ $(x\geq 1)$. 则

$$g'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x(1+x)}+\frac{1}{x^2}>0,\quad \forall x\geq 1.$$

因此f在$[1,+\infty)$是单调增函数。又注意到$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，便得到

$$g(x)<0,\ \forall x\geq 1,$$

即

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x},\ \forall x\geq 1.$$

令$a_n=:\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$. 则

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n &= \tfrac{1}{1+n}-\ln(1+n)+\ln n\\ &= \tfrac{1}{1+n}-\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\\ &< 0,\end{aligned}$$

所以$\{a_n\}$是单调减数列。

另一方面，

$$\begin{aligned}a_n &= 1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}-\left[\ln\left(\tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdots\tfrac{n}{n-1}\right)\right]\\ &= 1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}-\left[\ln\left(\tfrac{2}{1}\right)+\ln\left(\tfrac{3}{2}\right)+\cdots+\ln\left(\tfrac{n}{n-1}\right)\right]\\ &= 1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}-\left[\ln\left(1+\tfrac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)\right]\\ &= \left[1-\ln\left(1+\tfrac{1}{1}\right)\right]+\left[\tfrac{1}{2}-\ln\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\right]+\cdots+\left[\tfrac{1}{n-1}-\ln\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)\right]+\tfrac{1}{n}\\ &> 0,\end{aligned}$$

所以$\{a_n\}$是有下界数列。于是由单调收敛定理知，极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在。

注2 称极限值$c=:\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$为Euler数，它的近似值为$c\approx 0.577.$

例5 设函数$f:[a,b]\to R$二阶可导，且满足$f(a)=f(b)=0$ 及

$$f''(x)+\lambda f'(x)+\mu f(x)\equiv 0,$$

其中λ,μ是常数，$\mu<0$. 证明$f(x)\equiv 0$.

证：反证法。若不然，则$\exists x_0\in(a,b)$使得$f(x_0)\neq 0$, 不妨$f(x_0)>0$。于是f在$[a,b]$上的最大值在(a,b)取得，记$x_M\in(a,b)$为f在$[a,b]$上的最大值点。故$f(x_M)>0$且$f'(x_M)=0$ (Fermat定理), 从而

$$f''(x_M)=-\lambda f'(x_M)-\mu f(x_M)=-\mu f(x_M)>0.$$

由于

$$\lim_{x\to x_M}\frac{f'(x)}{x-x_M}=\lim_{x\to x_M}\frac{f'(x)-f'(x_M)}{x-x_M}=f''(x_M)>0,$$

故当$0<|x-x_M|<<1$时，

$$\frac{f'(x)}{x-x_M}>0,$$

于是

$$f'(x)>0, \text{当} 0<x-x_M<<1.$$

故由命题1知，f在x_0右侧小邻域上是严格增（画图），但这与x_M是最大值点矛盾。该矛盾说明原反证法假设不对，所以$f(x)\equiv 0$.

2.2 应用2-极值判别

命题2 设函数$f:(a,b)\to R$在x_0处存在二阶导数。

(1). 若$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$，则x_0是f的极小点；

(2). 若$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$，则x_0是f的极大点。

证：只证（1）. 由于

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)>0,$$

故当$0<|x-x_0|<<1$时，

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,$$

即

$$f'(x)>0, \quad \text{当} 0<x-x_0<<1,$$

$$f'(x)<0, \quad \text{当} 0<x_0-x<<1.$$

故由命题1知，f在x_0右侧小邻域上是严格增，f在x_0左侧小邻域上是严格减，（画图），所以x_0是f的极小点。

问题1：

(1). 若$f'(x_0)\neq 0$，则由Fermat定理知，x_0不是f的极点；

(2). 若$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$，则由命题2知，x_0是f的极点；

(3). 若$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$，问x_0是否为f的极点？

(4). 若$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)=0$, $f^{(4)}(x_0)\neq 0$，问x_0是否为f的极点？

2.3 应用3–凸性判别

命题3

(1). 设函数$f:(a,b)\to R$可导，则f是凸函数$\Longleftrightarrow f'$单调不减；

(2). 设函数$f:(a,b)\to R$二阶可导，则f是凸函数$\Longleftrightarrow f''\geq 0$.

(3) 设函数$f:(a,b)\to R$可导，则f是凸函数$\Longleftrightarrow \forall x_0,\ x\in(a,b)$，有

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\leq f(x).$$

注3

（3）的几何意义？f是凸函数$\Longleftrightarrow$曲线$y=f(x)$总在其切线的上方。

证：证（1）.
充分性（“$\Longleftarrow$”）. $\forall x_1,\xi,x_2\in I$, $x_1<\xi<x_2$，则由Lagrange微分中值公式得

$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1}=f'(\eta_1),\quad \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}=f'(\eta_2),$$

其中$\eta_1\in(x_1,\xi)$, $\eta_2\in(\xi,x_2)$. 于是由$f'(\eta_1)\leq f'(\eta_2)$得，

$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi},$$

故由凸函数等价陈述2知，f是凸函数。

必要性（“$\Longrightarrow$”）. $\forall x_1,\ x_2\in(a,b)$，若$x_1<x_2$，则$\forall h\in\left(0,\frac{x_2-x_1}{2}\right)$，由凸函数等价陈述2得，

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\leq\frac{f(x_2)-f(x_2-h)}{h}=\frac{f(x_2-h)-f(x_2)}{-h}.$$

故

$$f'(x_1)=f'_+(x_1)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\leq\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_2-h)-f(x_2)}{-h}=f'_-(x_2)=f'(x_2),$$

所以

$$f'(x_1)\leq f'(x_2).$$

证(2). 由(1)知，f是凸函数$\Longleftrightarrow f'$单调不减；再由命题1知，f'单调不减$\Longleftrightarrow f''\geq 0$.

证(3).
充分性（“$\Longleftarrow$”）. $\forall x_1,\xi,x_2\in I$, $x_1<\xi<x_2$，则

$$f(\xi)+f'(\xi)(x_1-\xi)\leq f(x_1),\quad f(\xi)+f'(\xi)(x_2-\xi)\leq f(x_2),$$

即

$$\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \le f'(\xi), \quad f'(\xi) \le \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi},$$

于是

$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi},$$

故由凸函数等价陈述2知，f是凸函数。

<u>必要性</u>（“$\Longrightarrow$”）. $\forall x_0,\ x \in (a,b)$，若$x > x_0$，则由Lagrange微分中值公式得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi),$$

其中$\xi \in (x_0, x)$. 而由命题3.（1）知，$f'(x_0) \le f'(\xi)$，即有

$$f'(x_0) \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

所以

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \le f(x);$$

若$x < x_0$，则由Lagrange微分中值公式得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi),$$

其中$\xi \in (x, x_0)$. 而由命题3.（1）知，$f'(\xi) \le f'(x_0)$，即有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le f'(x_0),$$

所以

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \le f(x).$$

综上，$\forall x_0,\ x \in (a,b)$，有$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \le f(x)$.

例7

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是正数，$\mu_1, \mu_1, \cdots, \mu_n$是满足$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = 1$的非负实数，证明

$$x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n} \le \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_n x_n,$$

特别

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

证：令$f(x) = -\ln x \quad x \in (0, +\infty)$，则

$$f'(x) = -\frac{1}{x},\ f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0,$$

所以f是凸函数，故

$$f(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_n x_n) \le \mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) + \cdots + \mu_n f(x_n),$$

即

$$-\ln[\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_n x_n] \le \mu_1(-\ln x_1) + \mu_2(-\ln x_2) + \cdots + \mu_n(-\ln x_n),$$

也即

$$\mu_1 \ln x_1 + \mu_2 \ln x_2 + \cdots + \mu_n \ln x_n \le \ln[\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_n x_n],$$

所以

$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}\le \mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_nx_n.$$

定义1（拐点） 设函数f在点x_0的两侧有不同的凸性，即一侧是凸（下凸），一侧是凹（上凸），则称点$M=:(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的<u>拐点</u>。

例9 设$f(x)=x^3$，则

$$f'(x)=3x^2,\ f''(x)=6x,$$

所以由命题3知，f在$(0,+\infty)$是凸（下凸）的，在$(-\infty,0)$是凹的（上凸）。故$(0,0)$是曲线$y=x^3$ 的拐点。

注4 新闻、经济学中所说的拐点，如房价出现了“拐点”是什么含义？经济增长出现了“拐点”是什么含义？

2.4 画图

定义2（渐近线）

(1). 若$\lim\limits_{x\to x_0^+(x_0^-,x_0)} f(x)=\infty$，则称$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的<u>垂直渐近线</u>；

(2). 若$\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty,\infty)} f(x)=b$，则称$y=b$为曲线$y=f(x)$的<u>水平渐近线</u>；

(3). 若$\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty,\infty)}[f(x)-(ax+b)]=0$，其中$a\ne0$，则称$y=ax+b$为曲线$y=f(x)$的<u>斜渐近线</u>。

命题4 设函数$f:[c,+\infty)$上有定义，则曲线$y=f(x)$以直线$y=ax+b$为斜渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b.$$

证：<u>充分性</u>（“$\Longleftarrow\!\!==$”）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] &=== \lim_{x\to+\infty}[(f(x)-ax)-b]\\ &=== b-b\\ &=== 0.\end{aligned}$$

必要性（“$\Longrightarrow$”）.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &=\!=\!= \lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{x}\left[f(x)-(ax+b)\right]+a+\frac{b}{x}\right\}\\
&=\!=\!= a,\\
\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] &=\!=\!= \lim_{x\to+\infty}\{[f(x)-(ax+b)]+b\}\\
&=\!=\!= b.
\end{aligned}$$

例10 已知$y=y(x)$是由方程

$$y^3-x^3+2xy=0$$

所确定的隐函数。设曲线$y=y(x)$有斜渐近线$y=ax+b$，求a,b.

解：因为曲线$y=y(x)$有斜渐近线$y=ax+b$，故由命题知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=a,\quad \lim_{x\to+\infty}[y(x)-ax]=b.$$

而当$x\neq 0$时，

$$\left(\frac{y(x)}{x}\right)^3-1+2\frac{y(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}=0,$$

所以令$x\to+\infty$知，

$$a^3-1+2a\cdot 0=0,$$

于是

$$a=1,$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=1.$$

又因

$$[y(x)-x]\cdot\left[y^2(x)+xy(x)+x^2\right]+2xy(x)=0,$$

故当$x>>1$时，

$$[y(x)-x]\cdot\left[\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2+1+\frac{x}{y(x)}\right]+2=0,$$

所以令$x\to+\infty$知，

$$b\cdot[1+1+1]+2=0,$$

于是

$$b=-\frac{2}{3}.$$

函数画图要领: 1.定义域；2.对称性（奇、偶性，周期性等）；3.与坐标轴的交点；4.渐近线；5.单调区间，极点；6.凸凹区间，拐点。

例11 设$f(x)=\frac{(x-1)^2}{2x-1}$，画出曲线$y=f(x)$的图像。

解：
1. f的定义域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2. $f(0)=-1$，$f(1)=0$；

3.
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\infty,$$
故曲线$y=f(x)$有垂直渐近线$x=\frac{1}{2}$.而
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=-\frac{3}{4}.$$
故曲线$y=f(x)$有斜渐近线$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$.

4. $f'(x)=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$. 令$f'(x)=0$，得$x=0$, $x=1$.

5. $f''(x)=\frac{2}{(2x-1)^3}$.

$$\begin{bmatrix} x & (-\infty,0) & 0 & \left(0,\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2},1\right) & 1 & (1,+\infty) \\ f': & + & 0 & - & - & 0 & + \\ f'': & - & - & - & + & + & + \\ f: & \uparrow,\frown & \text{极大点} & \downarrow,\frown & \downarrow,\smile & \text{极小点} & \uparrow,\smile \end{bmatrix}$$