

清华大学2021春季学期

电路原理C

第9讲

非线性电阻电路的小信号分析方法

非线性电阻电路的小信号分析方法

1 非线性电阻电路的小信号分析法

2 电路元件的小信号模型

重点

3 MOSFET小信号放大器电路分析

重点



复 习

非线性电阻电路的特点

① 齐次性和叠加性不适用于非线性电路。

② 非线性电阻能产生与输入信号不同的频率（变频作用）。

- **解析法**

- 能求精确解→?
- 方程的列写和求解麻烦

- **分段线性法**

- 线性电路求解容易
- 精度差，线性电路数量多

- **图形解法**

- 简单，物理意义明确
- 对含1个非线性电阻电路的求解比较方便，精度差

非线性电阻 $u = f(i) = 50i + 0.5i^3$

$i = 2.01\text{A}$

$$\begin{aligned}
 u &= 50 \times (2+0.01) + 0.5 \times (2+0.01)^3 \longrightarrow \cancel{2^3 + 3 \times 2^2 \times 0.01 + 3 \times 2 \times 0.01^2 + 0.01^3} \\
 &\approx [50 \times 2 + 0.5 \times 2^3] + [50 \times 0.01 + 0.5 \times 3 \times 2^2 \times 0.01] \\
 &= f(2) + 56 \times 0.01 \quad (50 + 0.5 \times 3 \times 2^2) \times 0.01
 \end{aligned}$$

在 $i=2$ 点附近进行泰勒展开并忽略高阶项

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

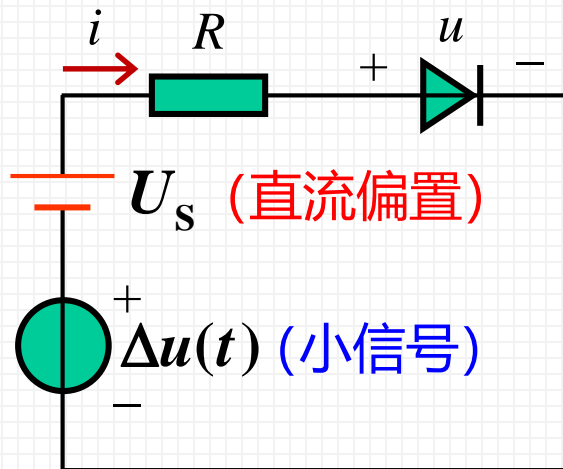
$$\begin{aligned}
 50i + 0.5i^3 &\xrightarrow{i=2.01\text{A}} \left\{ \begin{array}{l} \text{一个非线性电阻作用效果} \\ + \\ \text{一个线性电阻作用效果} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 50 \times 2 + 0.5 \times 2^3 \\ 56 \times 0.01 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d(50i + 0.5i^3)}{di} \right|_{i=I_0=2} = 50 + 0.5 \times 3 \times I_0^2 = 56$$

非线性电阻电路特点：③ 非线性电阻激励的工作范围充分小时，在工作点处，可看做线性电阻

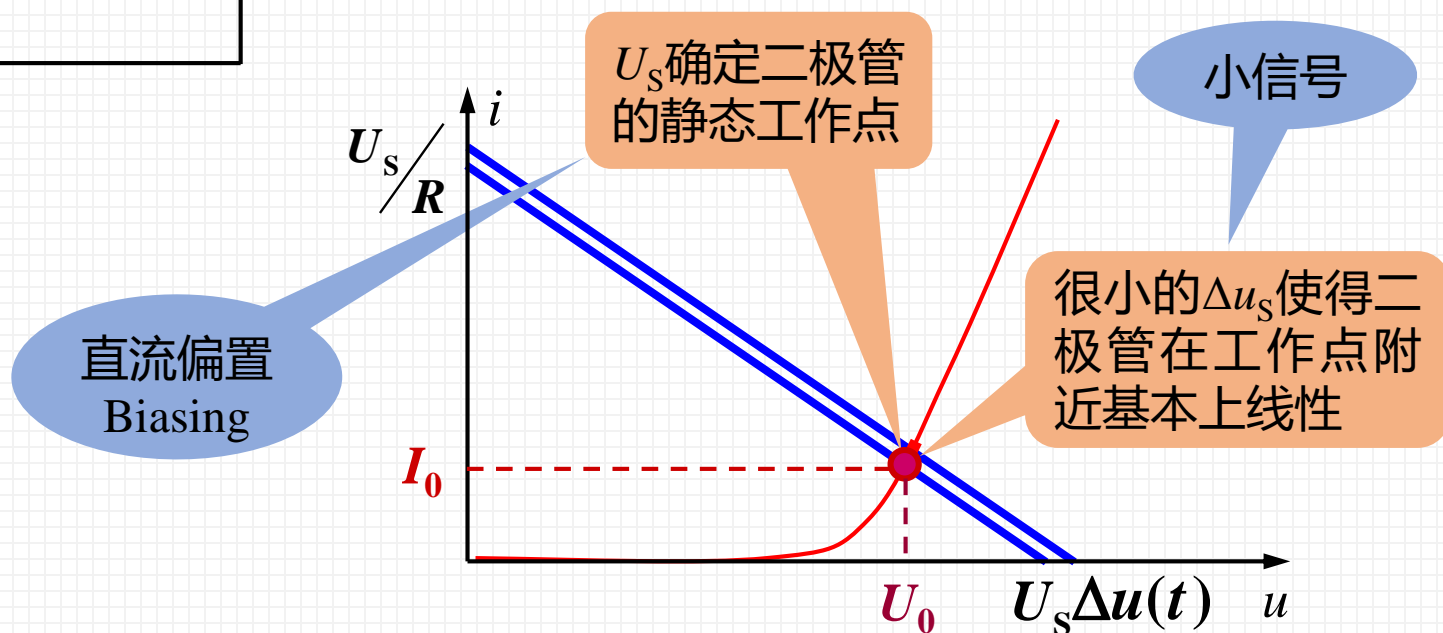


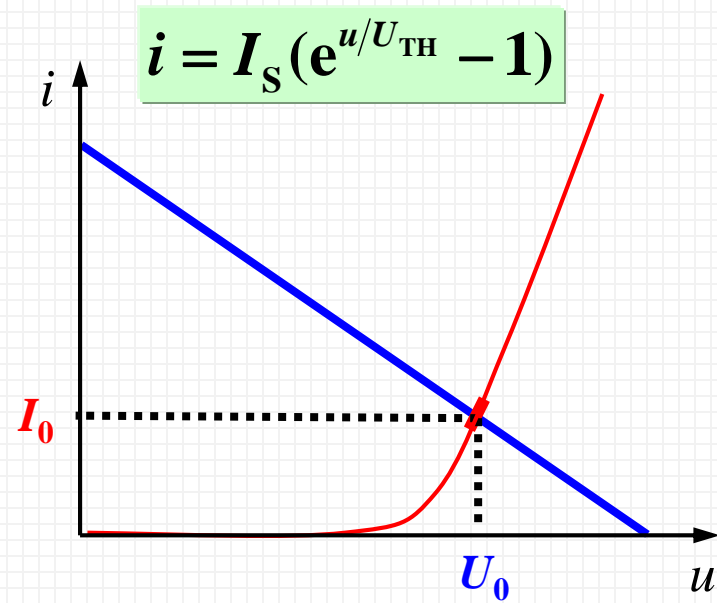
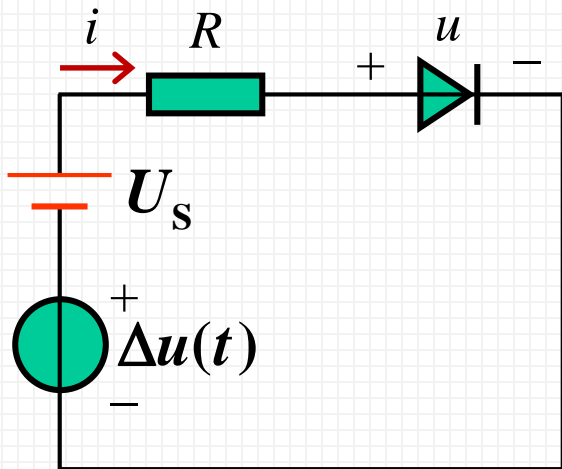
1、非线性电阻电路的小信号分析法



U_s 作用在二极管电路中

出现了小扰动 $\Delta u(t)$





$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$i(t) = I_s \left(e^{U_0 + \Delta u(t) / U_{TH}} - 1 \right)$$

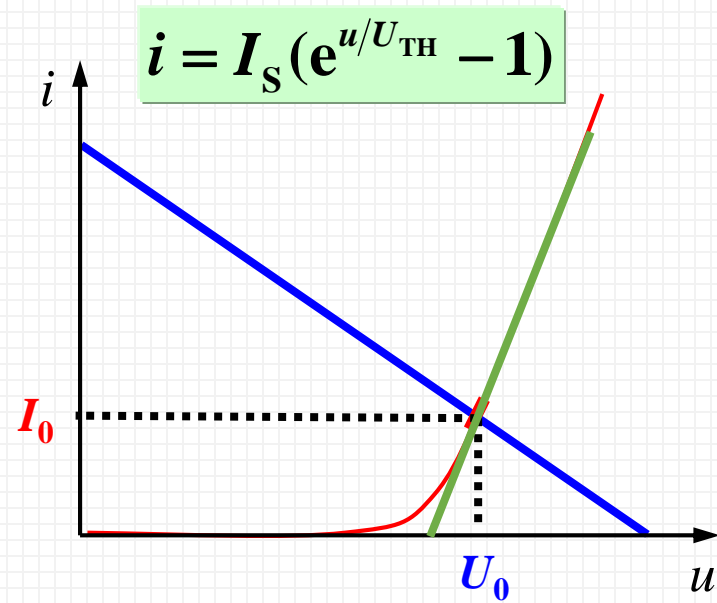
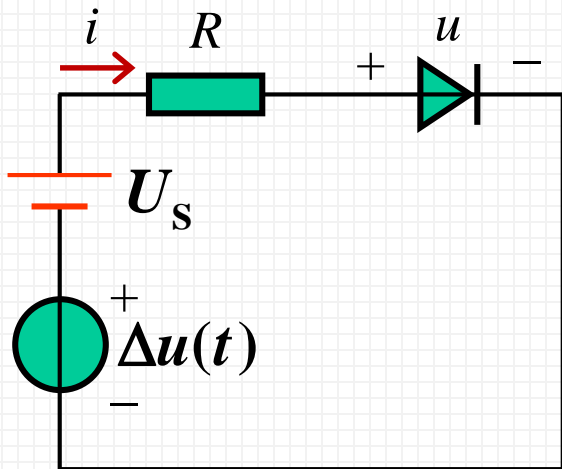
仅考虑 U_0 的
非线性关系

$$\approx I_s \left(e^{U_0 / U_{TH}} - 1 \right) + \left. \frac{di}{du} \right|_{U_0} \Delta u(t)$$

I_0

在 U_0 点展开的
线性小信号关系

$$\Delta i(t)$$



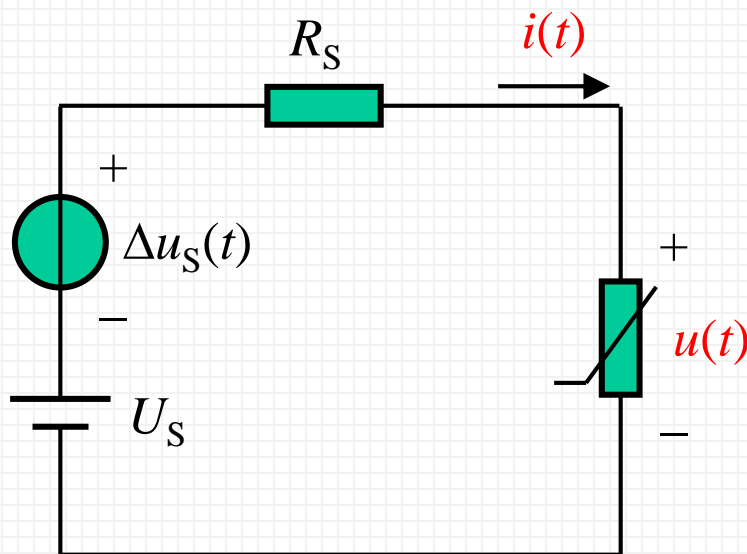
$$i(t) = I_S \left(e^{(U_0 + \Delta u(t))/U_{TH}} - 1 \right)$$
$$\approx I_S \left(e^{U_0/U_{TH}} - 1 \right) + \left. \frac{di}{du} \right|_{U_0} \Delta u(t)$$

已知 $U_{TH}=0.025\text{V}$, $I_S=10^{-12}\text{A}$, $U_0=0.7\text{V}$,
则在二极管直流偏置附近:

$$i(t) \approx 1.446 + 57.85\Delta u(t)$$



考虑更一般的情况，求图示电路中的支路量 $u(t)$ 和 $i(t)$ 。



列方程：

$$\begin{cases} U_S + \Delta u_S(t) = R_S i(t) + u(t) \\ i(t) = g(u(t)) \end{cases}$$

该方程并不好求解！

在扰动比较小(且 g 函数性质比较好)的时候，存在简单且误差可接受的分析方法——小信号法。

U_S

为直流电源

$\Delta u_S(t)$

为交流小信号

任何时刻 $U_S \gg |\Delta u_S(t)|$

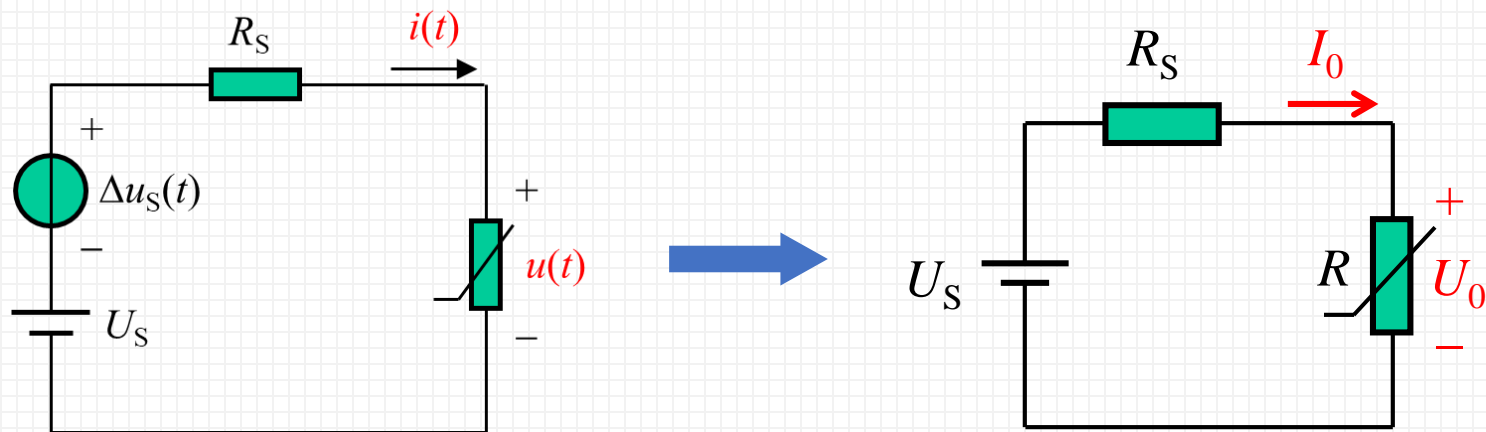
R_S

为线性电阻

非线性电阻 $i(t) = g(u(t))$



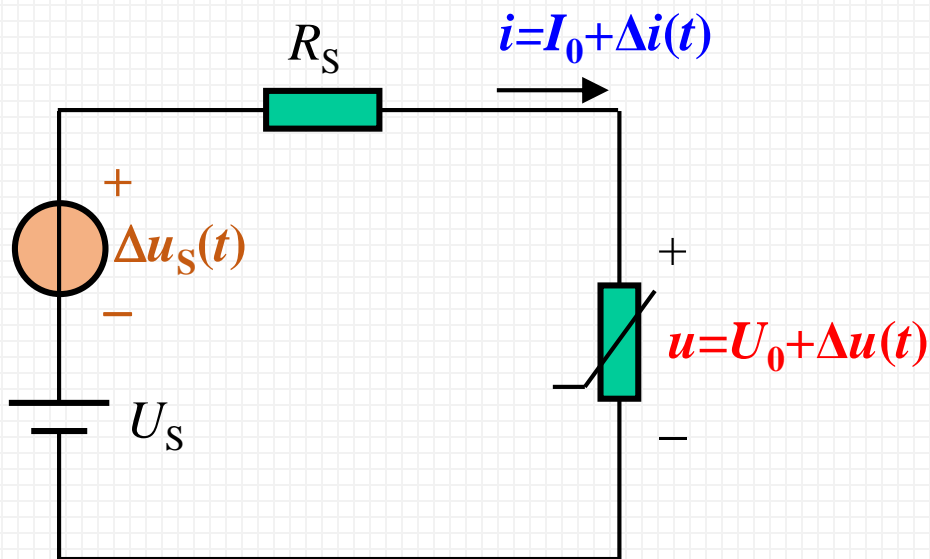
第1步：不考虑 $\Delta u_S(t)$ 即 $\Delta u_S(t)=0$ 。求直流工作点：电压 (U_0) 、电流 (I_0) 。



$$\left\{ \begin{array}{l} U_S = R_S I_0 + U_0 \\ I_0 = g(U_0) \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} U_0 \\ I_0 \end{array} \right.$$

解析法、分段线性法、图形法

第2步：考虑扰动 $\Delta u_S(t) \neq 0$ 的影响



由于源出现 $\Delta u_S(t)$ ，使得非线性元件控制量 $u(t)$ 在工作点 U_0 上出现扰动 $\Delta u(t)$ ，

导致其被控量也在工作点 I_0 上出现扰动 $\Delta i(t)$ 。

如果保留1次项，误差可忽略，

$$\Delta i(t) \propto \Delta u(t)$$

将 $g(u)$ 在 U_0 点展开
(只保留1次项)

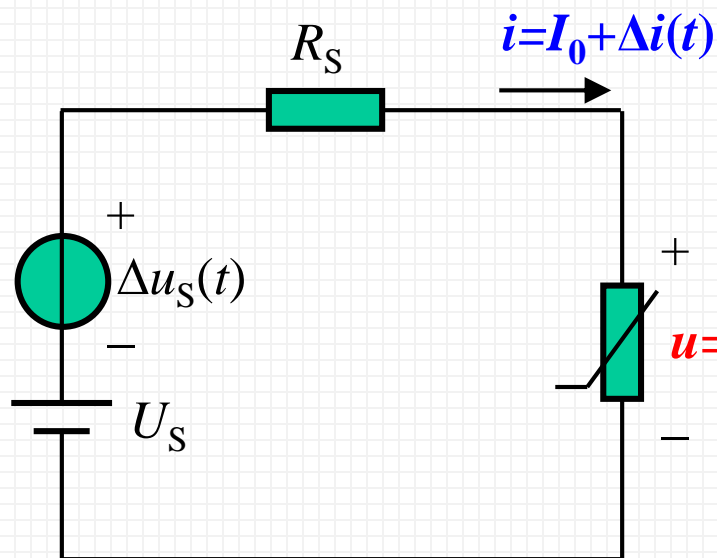
$$i = g(u) = g(U_0 + \Delta u(t))$$

$$\approx g(U_0) + g'(U_0)\Delta u(t)$$

已知 $I_0 = g(U_0)$

$$= I_0 + g'(U_0)\Delta u(t)$$

$$\Delta i(t)$$



$$U_S + \Delta u_S(t) = R_S i + u$$

$$U_S + \Delta u_S(t) = R_S [I_0 + \Delta i(t)] + U_0 + \Delta u(t)$$

$$U_S = R_S I_0 + U_0$$

$$\begin{cases} \Delta u_S(t) = R_S \Delta i(t) + \Delta u(t) \\ \Delta i(t) = G_d|_{U_0} \Delta u(t) \end{cases}$$



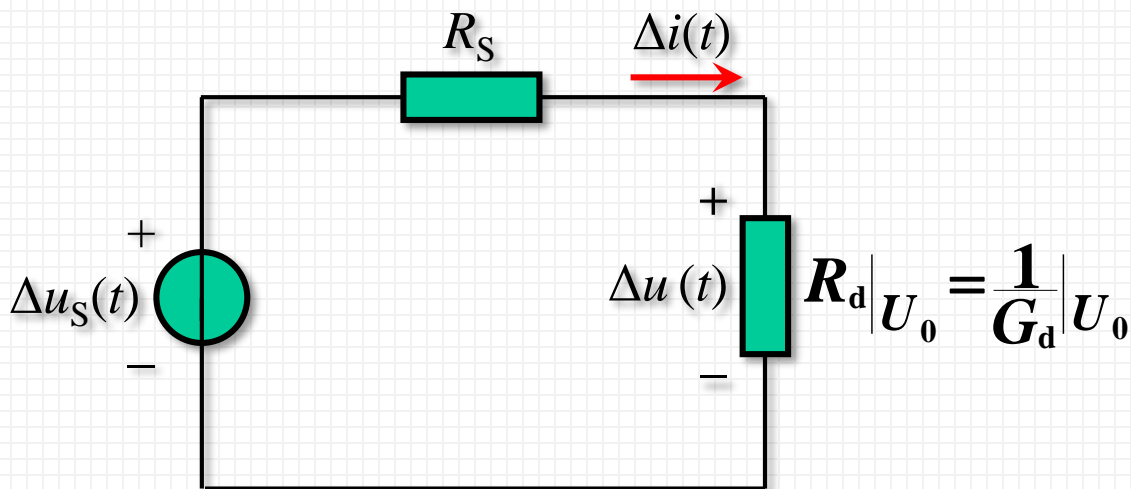
$$\begin{cases} \Delta u(t) \\ \Delta i(t) \end{cases}$$



$$\Delta u_S(t) = R_S \Delta i(t) + \Delta u(t)$$

$$\Delta i(t) = G_d \big|_{U_0} \Delta u(t)$$

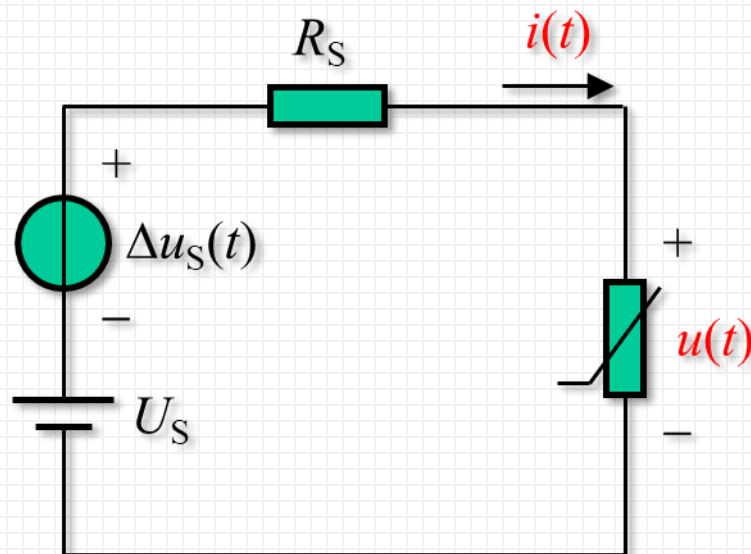
对应什么电路？



线性的小信号等效电路

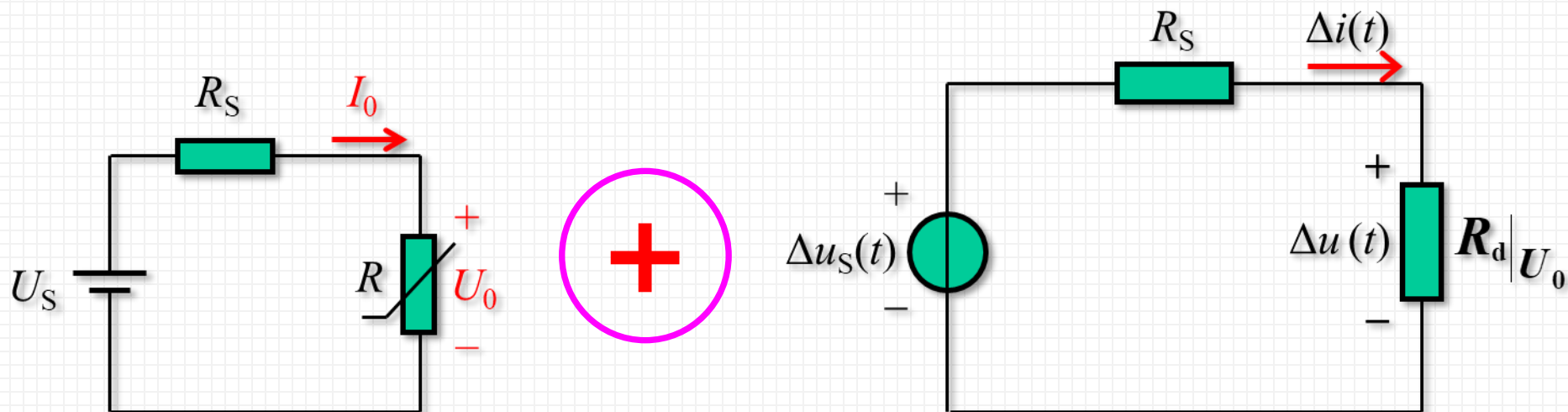


第3步：合并



$$u(t) = U_0 + \Delta u(t)$$

$$i(t) = I_0 + \Delta i(t)$$



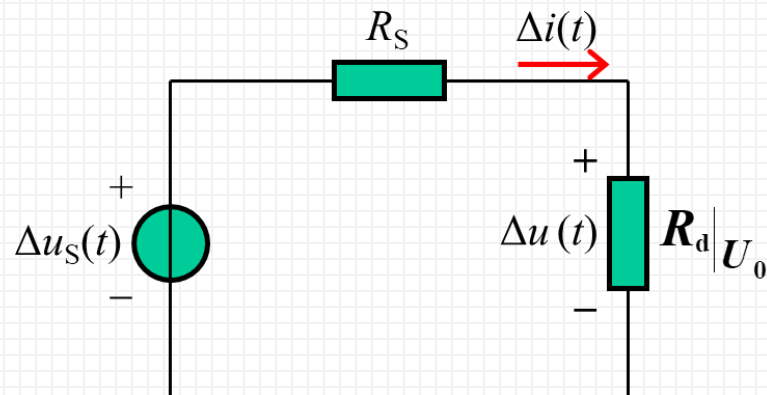
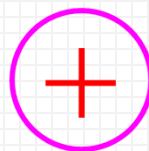
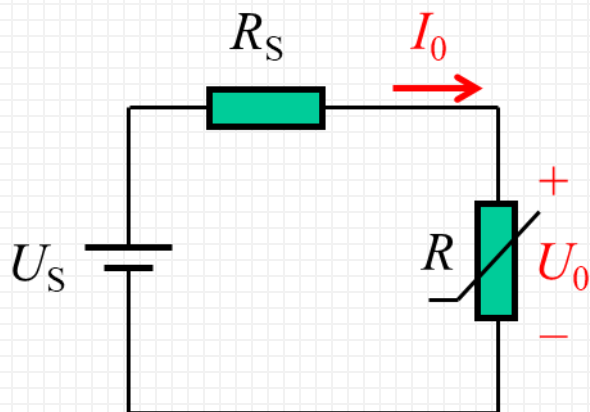
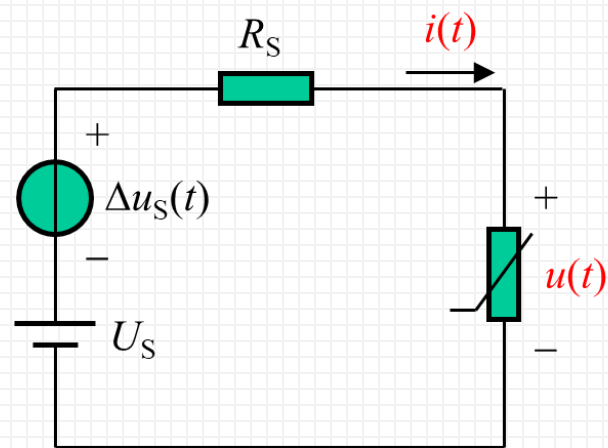


讨论:

是应用叠加定理吗?

$$u(t) = U_0 + \Delta u(t)$$

$$i(t) = I_0 + \Delta i(t)$$

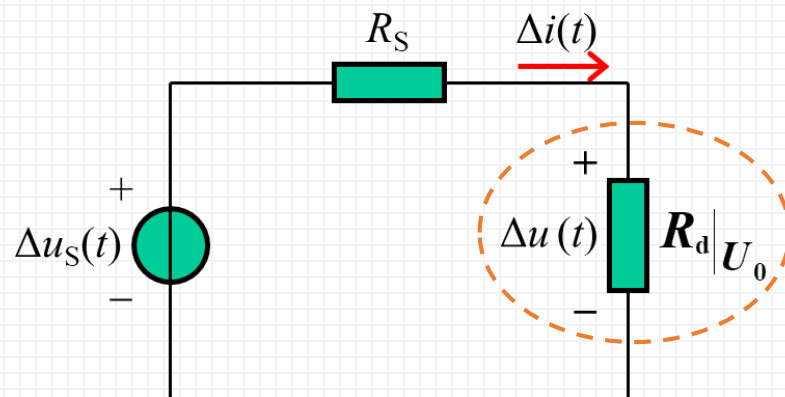
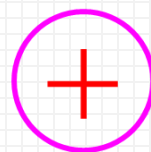
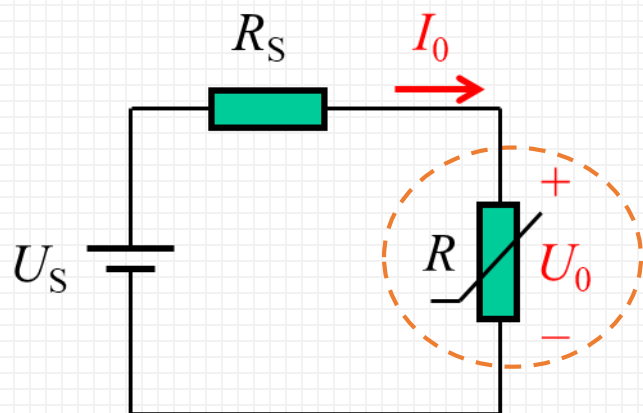
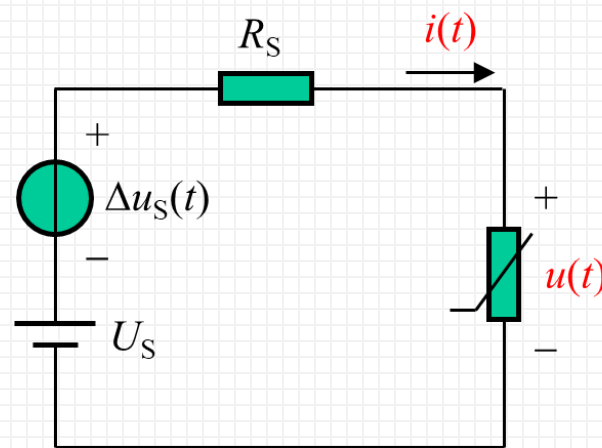


讨论:

是应用叠加定理吗? ❌

$$u(t) = U_0 + \Delta u(t)$$

$$i(t) = I_0 + \Delta i(t)$$



叠加 ① $\Delta u_S(t) = 0$, $U_S \neq 0$

② $\Delta u_S(t) \neq 0$, $U_S = 0$

小信号 ① $\Delta u_S(t) = 0$, 求工作点

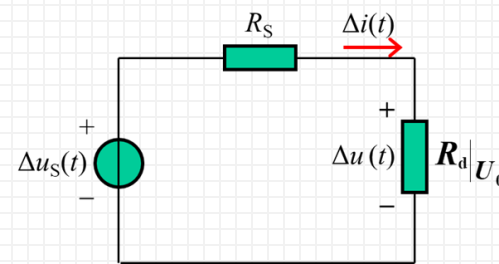
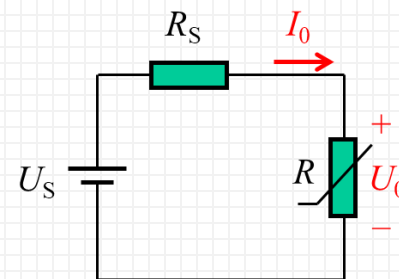
② $\Delta u_S(t) \neq 0$, 求小信号响应

两种情况下, 非线性元件的参数不同



用小信号法求解非线性电阻电路

1. 求解直流偏置激励作用下的**非线性**电阻电路
(求**工作点**)。
2. 画**线性小信号电路**，求解得到小信号响应。
拓扑结构相同，元件换为小信号模型（小信号下的线性电压电流关系）
3. 将两部分激励作用下电路的响应**合成**为电路的全响应。



$$u(t) = U_0 + \Delta u(t)$$

$$i(t) = I_0 + \Delta i(t)$$



支路量表示方法小结

U, I { 恒定直流量
小信号分析中的工作点

$\Delta u, \Delta i$ → 小信号

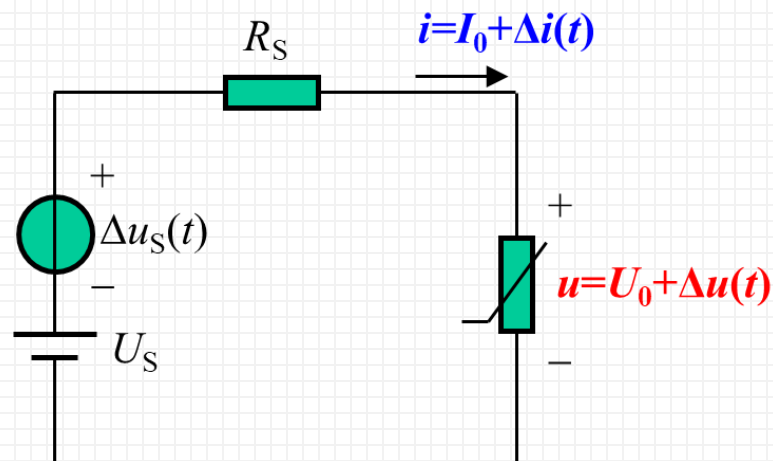
u, i → 可能随时间而变化的量

以后还会讨论 \dot{U}, \dot{I}



刚才讨论的是**电源** / **线性** / **非线性电阻** / **扰动**各**1**个

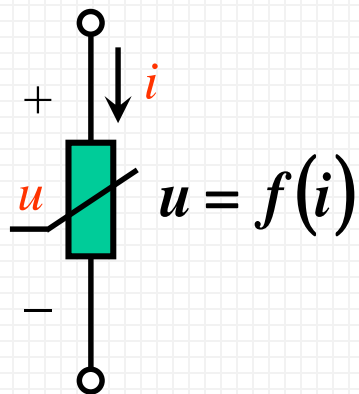
- 多个非线性电阻怎么办？
- 多个直流电源怎么办？
 - 电源的作用效果能叠加吗？
- 多个扰动怎么办？
 - 电源和扰动效果的合成不是叠加。
 - 多个扰动的作用效果能叠加吗？



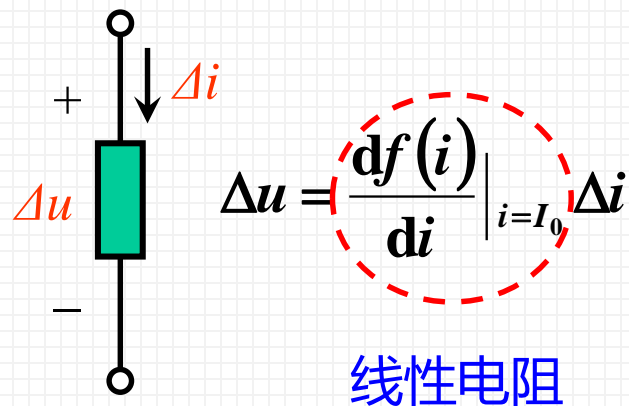
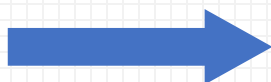


2、电路元件的小信号模型

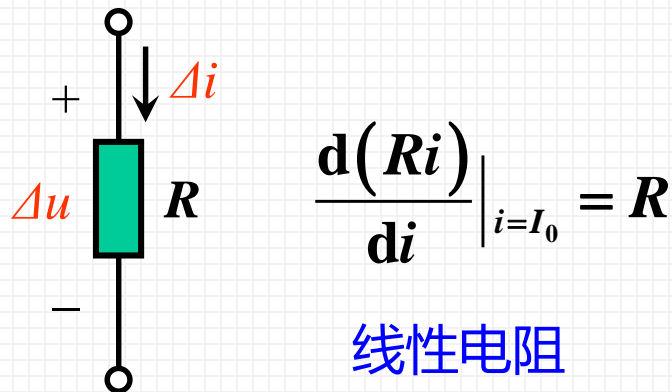
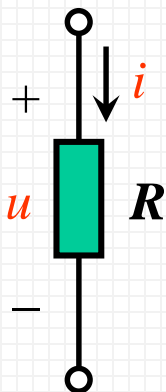
非线性电阻



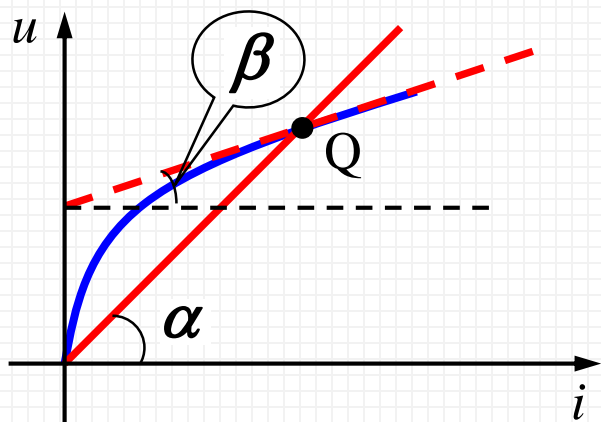
工作点处



线性电阻



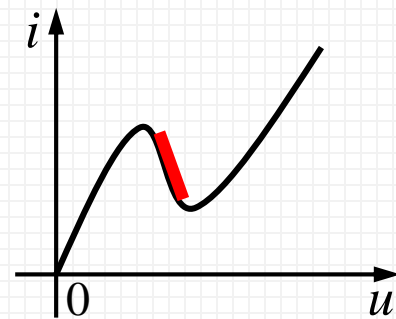
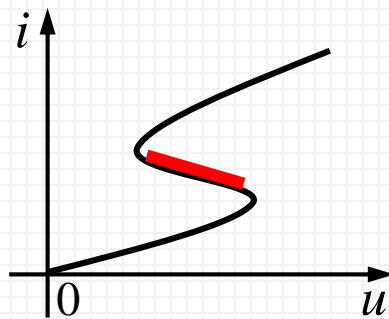
静态电阻 R_s 和动态电阻 R_d



静态电阻 $R_s = \frac{u}{i} = \operatorname{tg} \alpha$, G_s

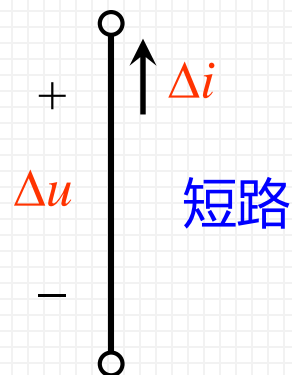
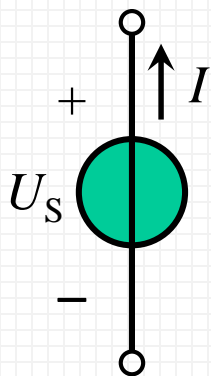
动态电阻 $R_d = \frac{du}{di} = \operatorname{tg} \beta$, G_d

- a) R_s 反映了某一点上 u 与 i 的关系, 而 R_d 反映了在某一点 u 的变化与 i 的变化的关系, 即 u 对 i 的变化率。
- b) 静态电阻与动态电阻都与工作点有关。当Q点位置不同时, R_s 与 R_d 均变化。
- c) 对“S”型、“N”型非线性电阻, 下倾段 R_d 为负, 因此, 其动态电阻具有负电阻的性质。



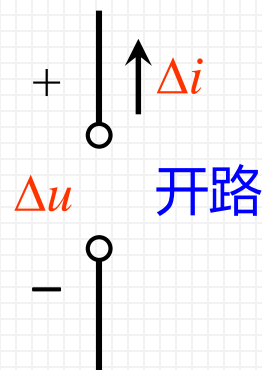
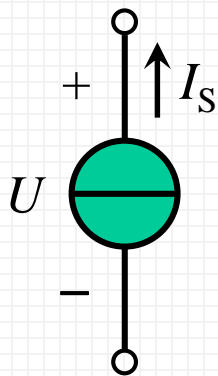


独立电压源（直流偏置）



$$R_d = \frac{du}{di} = 0$$

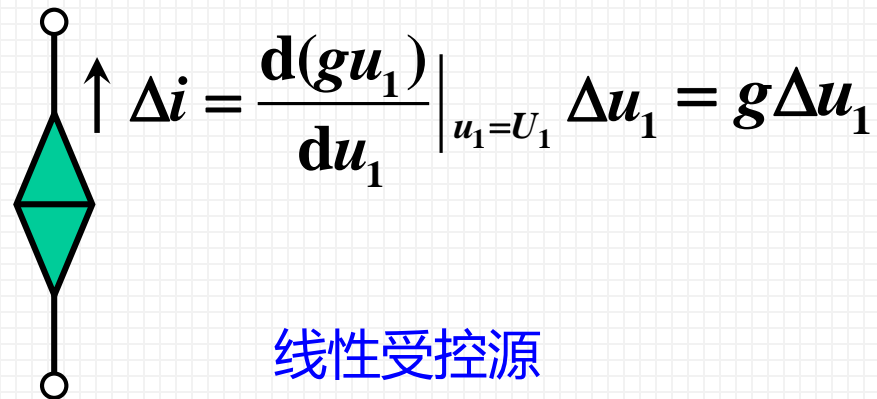
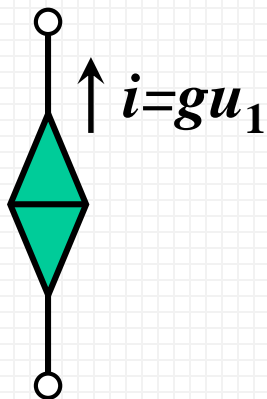
独立电流源（直流偏置）



$$G_d = \frac{di}{du} = 0$$

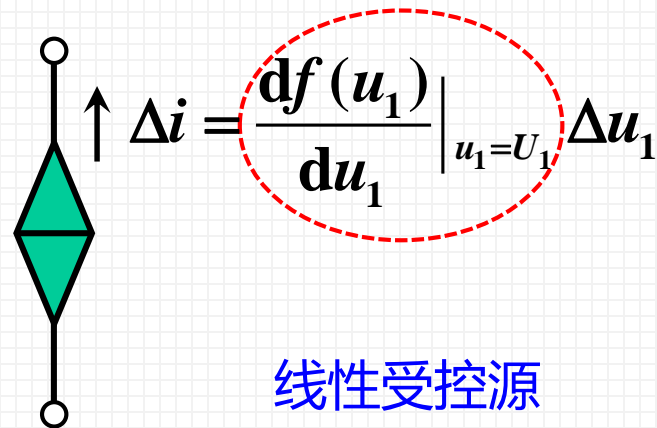
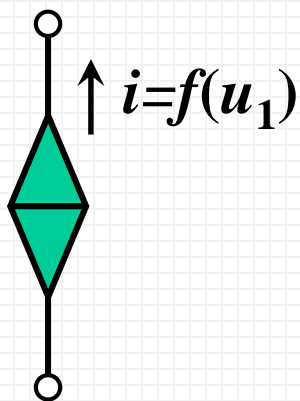


线性受控源



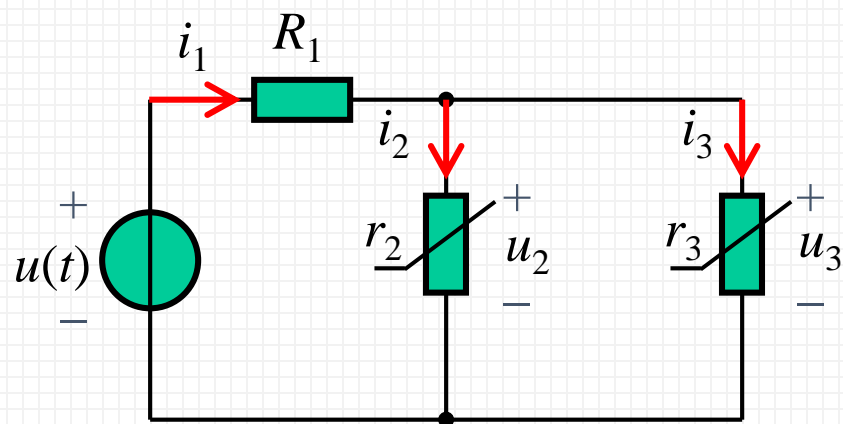
线性受控源

非线性受控源



线性受控源

例1 已知 $u(t)=7+U_m\sin\omega t$ V, $\omega=100\text{rad/s}$, $U_m\ll 7\text{V}$, $R_1=2\Omega$ 。

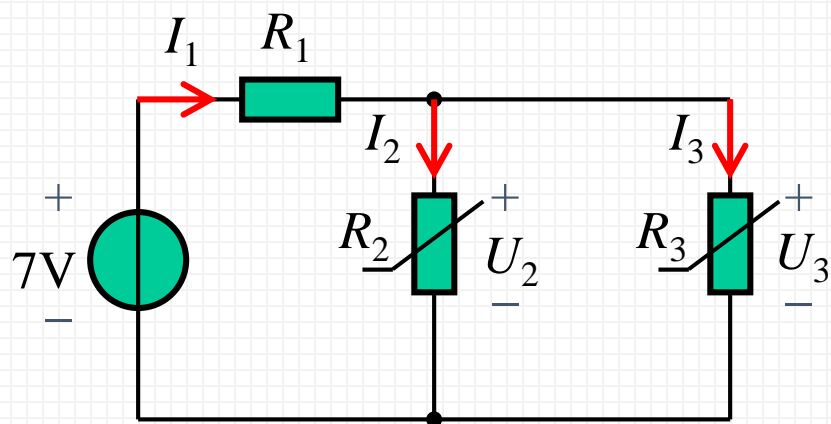


$$r_2: u_2 = i_2 + 2i_2^3$$

$$r_3: u_3 = 2i_3 + i_3^3$$

求电压 u_2 和电流 i_1 、 i_2 、 i_3 。

第1步： 直流电压单独作用，求解静态工作电压，电流。



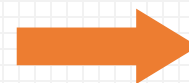
$$2I_1 + U_2 = 7$$

$$U_2 = U_3$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$U_2 = I_2 + 2I_2^3$$

$$U_3 = 2I_3 + I_3^3$$



$$I_1 = 2\text{A}$$

$$I_2 = 1\text{A}$$

$$I_3 = 1\text{A}$$

$$U_2 = 3\text{V}$$

$$U_3 = 3\text{V}$$

第2步：求两个非线性电阻的小信号模型

$$R_{2d} = \left. \frac{du_2}{di_2} \right|_{I_2=1A} = 1 + 6i_2^2 \Big|_{I_2=1A} = 7\Omega$$

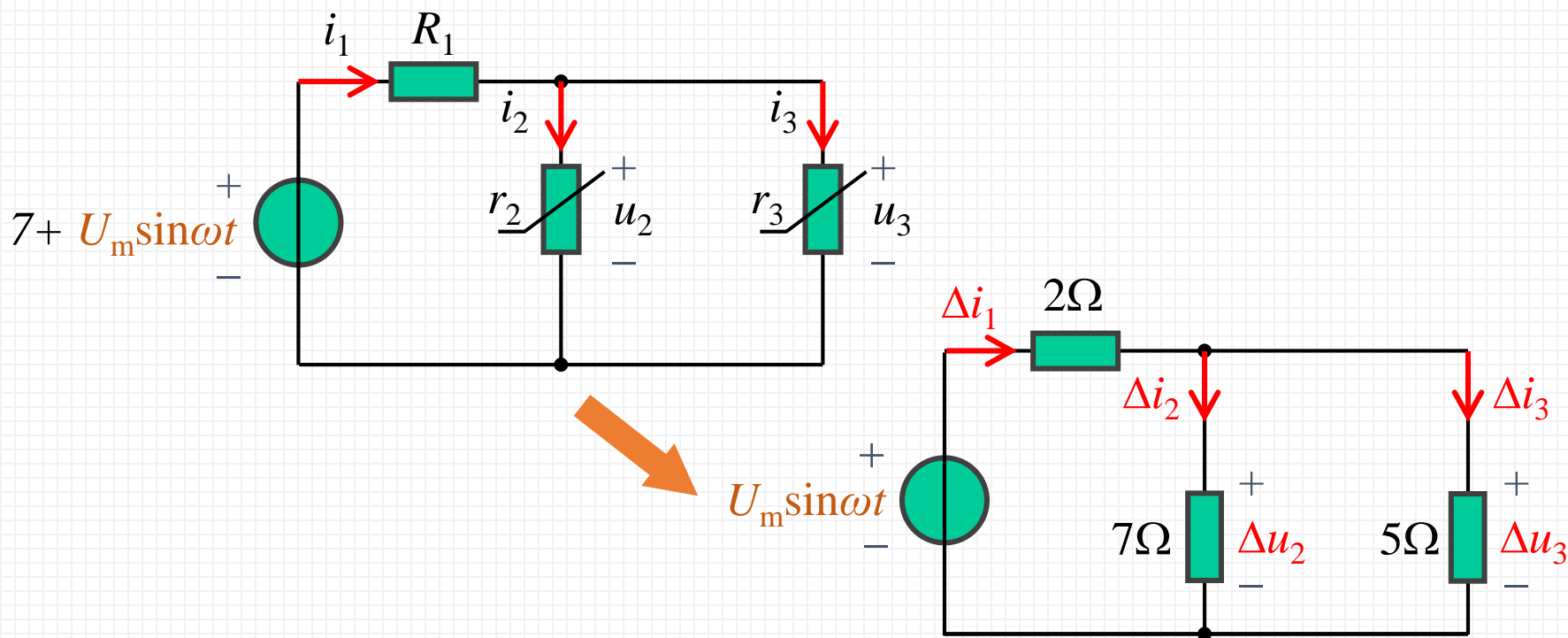
$$R_{3d} = \left. \frac{du_3}{di_3} \right|_{I_3=1A} = 2 + 3i_3^2 \Big|_{I_3=1A} = 5\Omega$$

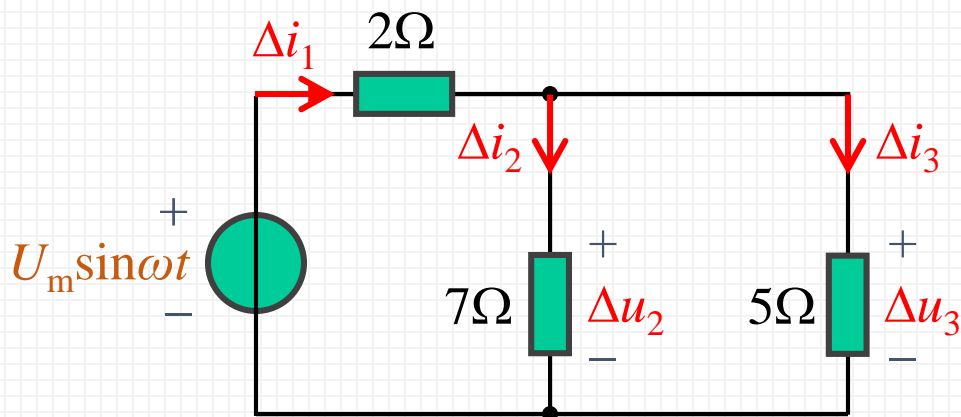
$$r_2: u_2 = i_2 + 2i_2^3$$

$$r_3: u_3 = 2i_3 + i_3^3$$

$$I_2 = I_3 = 1A \quad I_1 = 2A$$

画出小信号工作等效电路，求 Δu ， Δi 。





$$\Delta i_1 = U_m \sin \omega t / (2 + 5 // 7) = 0.2033 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta i_2 = \Delta i_1 \times 5/12 = 0.0847 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta i_3 = \Delta i_1 \times 7/12 = 0.1186 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta u_2 = 7 \times \Delta i_2 = 0.593 U_m \sin \omega t$$



直流偏置: $I_2 = I_3 = 1\text{A}$ $I_1 = 2\text{A}$

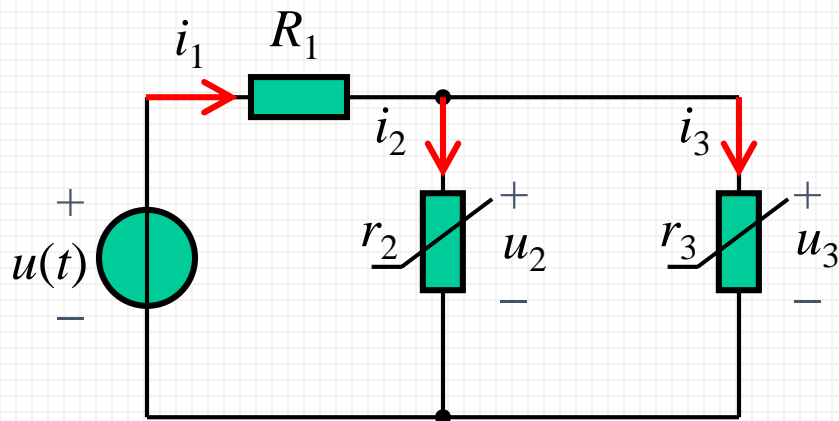
$$U_2 = U_3 = 3\text{V}$$

小信号响应: $\Delta i_1 = 0.2033 U_m \sin \omega t$

$$\Delta i_2 = 0.0847 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta i_3 = 0.1186 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta u_2 = 0.593 U_m \sin \omega t$$



第3步: 合成

$$i_1 = 2 + 0.2033 U_m \sin \omega t \text{ A}$$

$$i_2 = 1 + 0.0847 U_m \sin \omega t \text{ A}$$

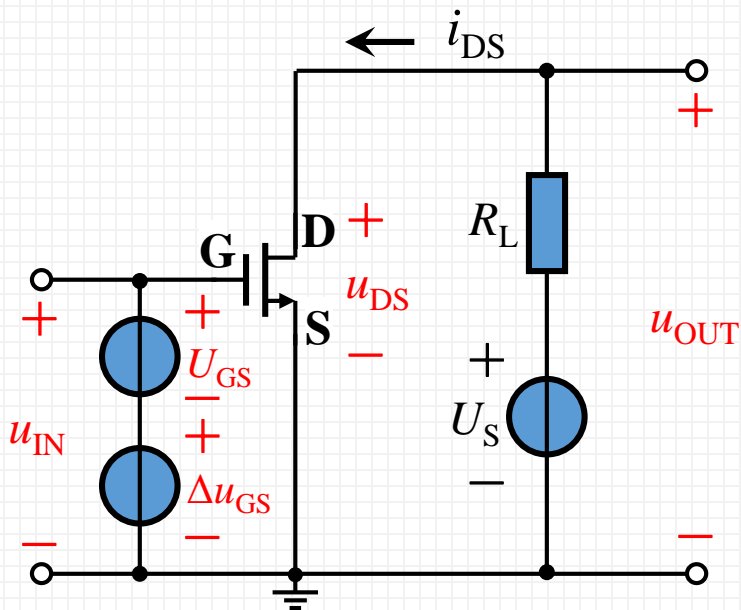
$$i_3 = 1 + 0.1186 U_m \sin \omega t \text{ A}$$

$$u_2 = 3 + 0.5932 U_m \sin \omega t \text{ V}$$



3、MOSFET小信号放大器电路分析

小扰动 \rightarrow (小) 待放大信号

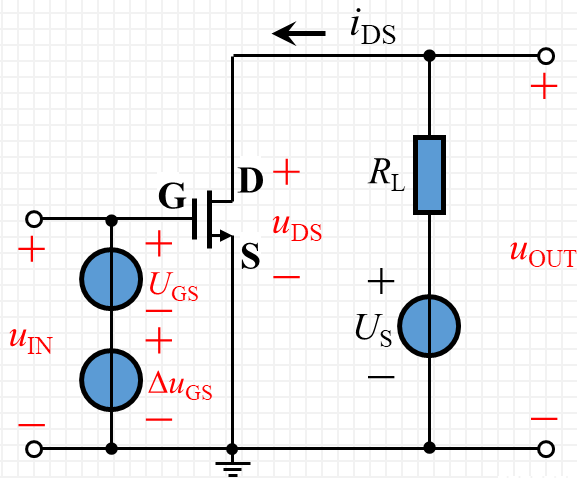


全信号 = 直流偏置 + (小)待放大信号

$$u_{\text{IN}} = u_{\text{GS}} = U_{\text{GS}} + \Delta u_{\text{GS}}$$

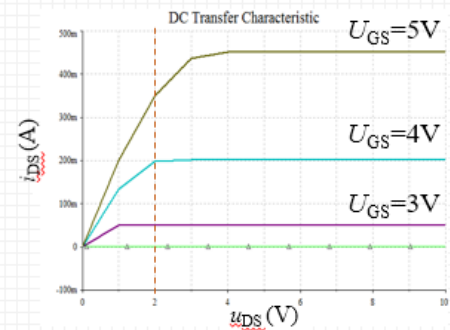
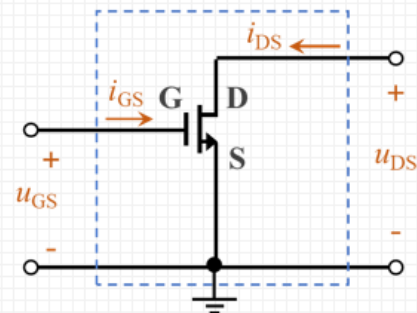
$$u_{\text{OUT}} = u_{\text{DS}} = U_{\text{DS}} + \Delta u_{\text{DS}}$$

全信号 = 直流偏置 + (小)放大后信号



N沟道增强型MOSFET，在给定的 u_{DS} 下，随 u_{GS} 的增加，该元件会从截止区逐渐过渡到____区和____区。

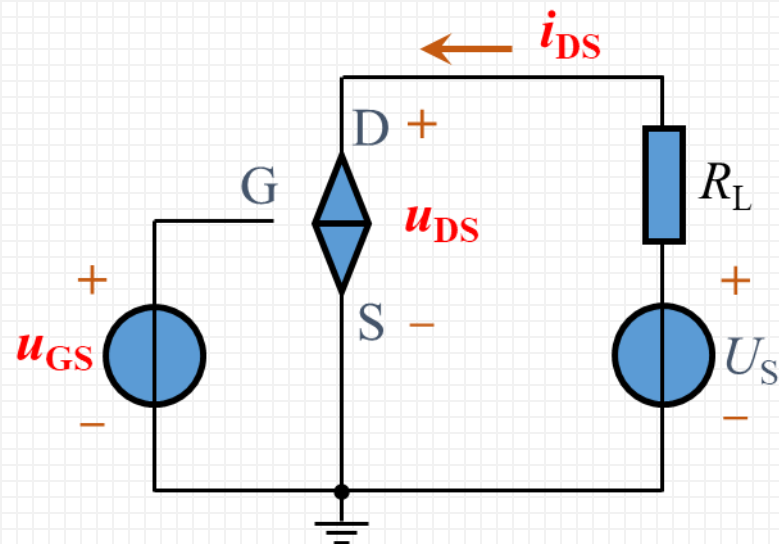
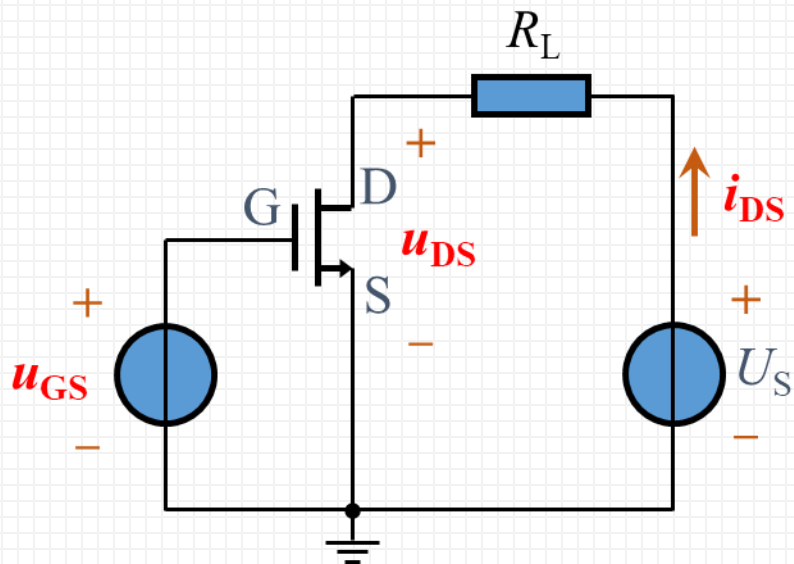
- A 电阻，电流源
- B 电流源，电阻



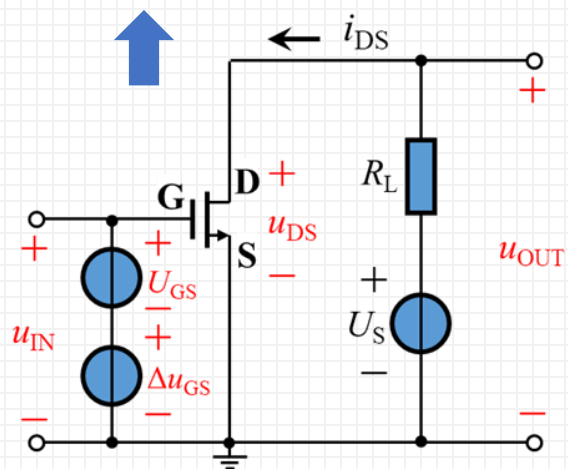


设MOSFET工作在恒流源区

确定工作区(L8)

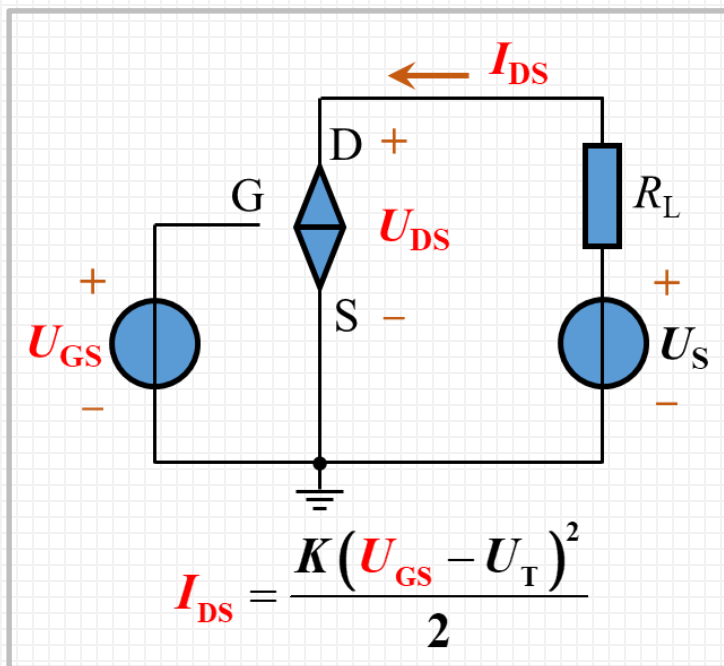


$$i_{DS} = \frac{K(u_{GS} - U_T)^2}{2}$$



前述**工作点+小扰动信号**的分析方法

可以用来分析和设计**工作点+(小)待放大信号**的电路



(1) 求直流工作点 (解析法)

$$U_{OUT} = U_{DS} = U_S - I_{DS} R_L$$

$$U_{OUT} = U_S - \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2} R_L$$

$$U_S = 10V, \quad U_{GS} = 2.5V, \quad K = 0.5mA/V^2, \quad U_T = 1V, \quad R_L = 10k\Omega$$

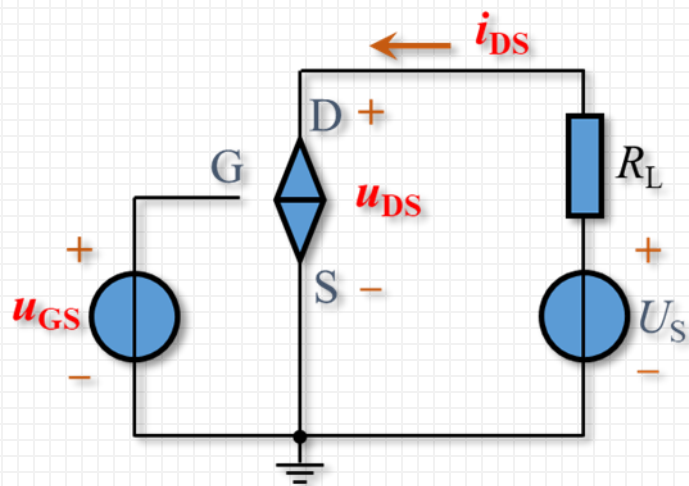
$$U_{OUT} = U_{DS} = 10 - \frac{0.5 \times (2.5 - 1)^2}{2} \times 10 = 4.375V$$

恒流区工作条件: $0 < (U_{GS} - U_T) < U_{DS}$ 满足

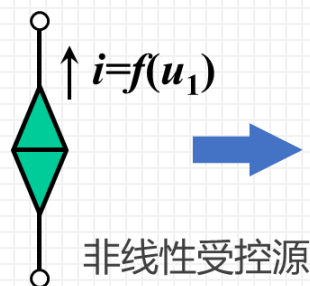
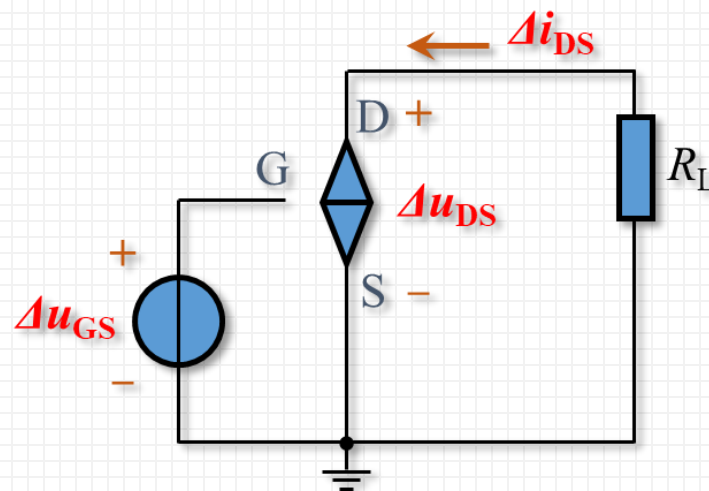
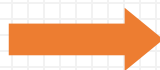
还需验证MOSFET不工作在电阻区(略)



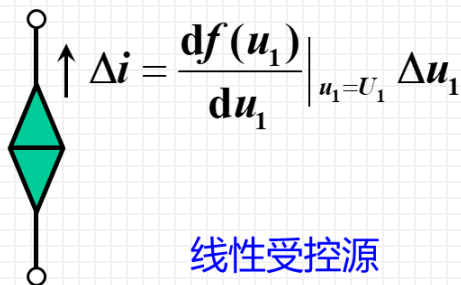
(2) 画小信号电路，求小信号解



$$i_{DS} = \frac{K(u_{GS} - U_T)^2}{2}$$



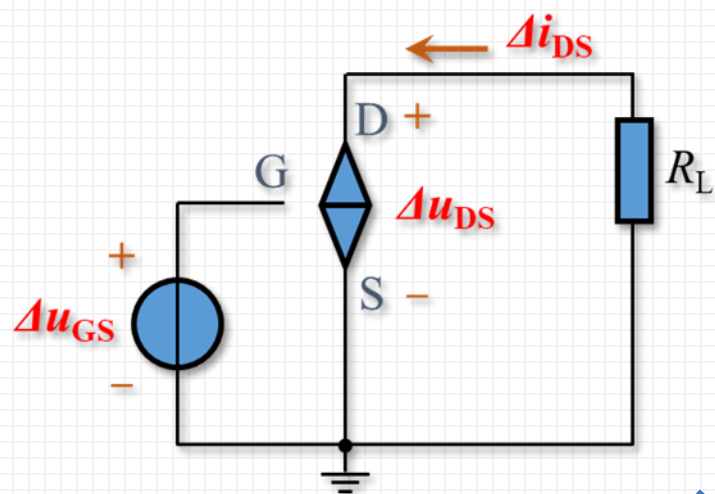
非线性受控源



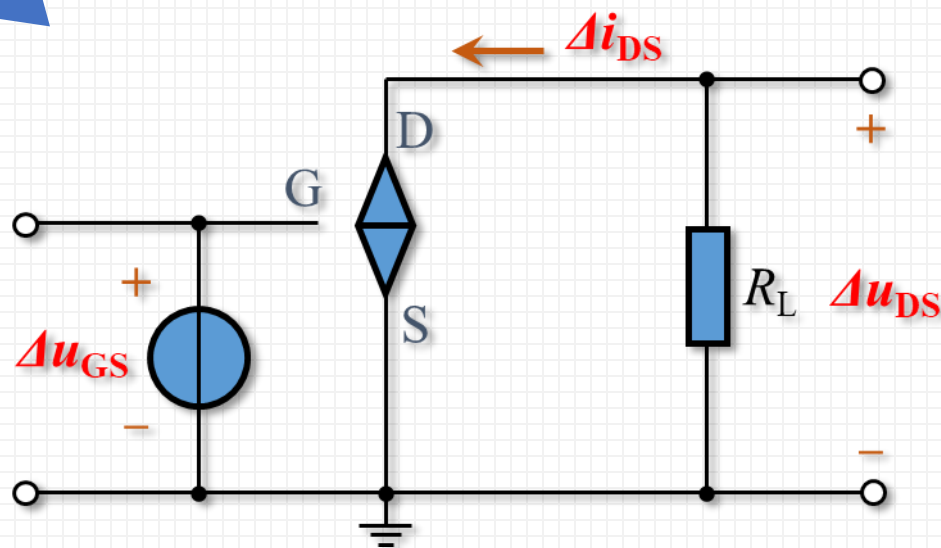
线性受控源

$$\Delta i_{DS} = \frac{d\left(\frac{K(u_{GS} - U_T)^2}{2}\right)}{du_{GS}} \bigg|_{u_{GS}=U_{GS}} \Delta u_{GS}$$

$$\Delta i_{DS} = K(U_{GS} - U_T) \Delta u_{GS}$$

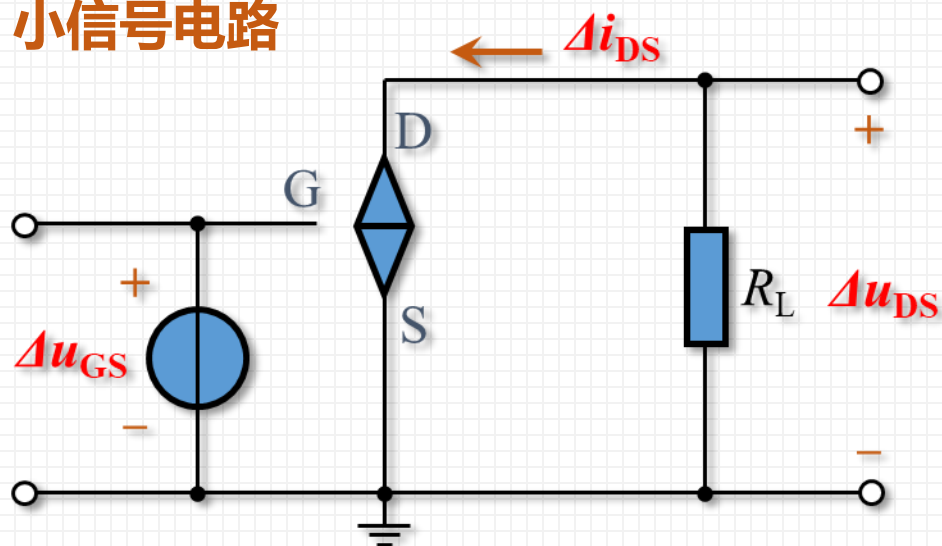


小信号电路





小信号电路

跨导, g_m

$$\Delta i_{DS} = K(U_{GS} - U_T) \Delta u_{GS}$$

$$\Delta u_{DS} = -\Delta i_{DS} R_L = -K(U_{GS} - U_T) R_L \Delta u_{GS}$$

已知: $U_{GS} = 2.5V$, $K = 0.5mA/V^2$, $U_T = 1V$, $R_L = 10k\Omega$

$$\frac{\Delta u_{OUT}}{\Delta u_{IN}} = \frac{\Delta u_{DS}}{\Delta u_{GS}} = -K(U_{GS} - U_T) R_L = -0.5 * (2.5 - 1) * 10 = -7.5$$

放大倍数 $K(U_{GS} - U_T) R_L$

小信号电压放大了7.5倍

**第3步：合成****共源极MOSFET放大器**

$$u_{\text{OUT}} = U_{\text{OUT}} + \Delta u_{\text{OUT}}$$

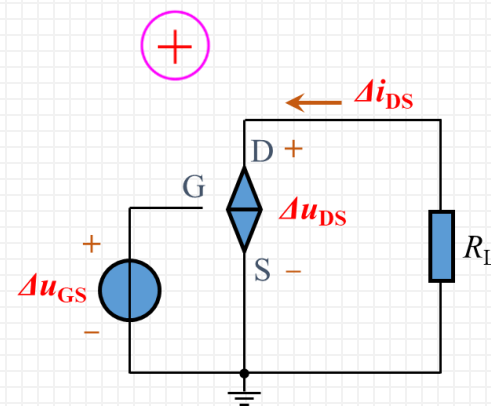
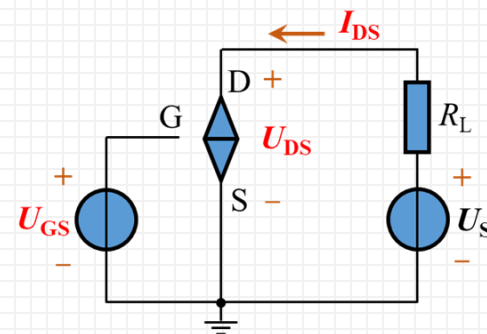
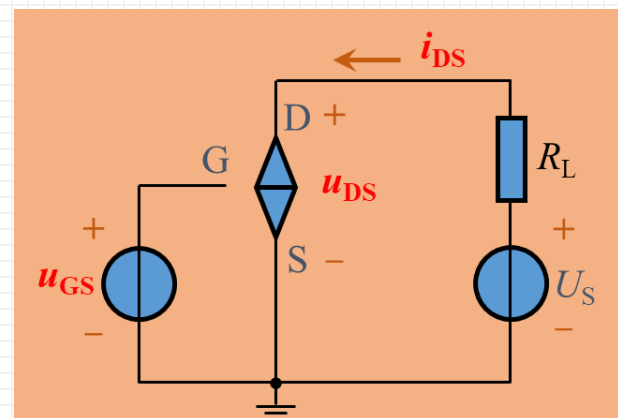
$$U_{\text{OUT}} = U_{\text{S}} - \frac{K(U_{\text{GS}} - U_{\text{T}})^2}{2} R_{\text{L}}$$

$$\Delta u_{\text{OUT}} = -K(U_{\text{GS}} - U_{\text{T}}) R_{\text{L}} \Delta u_{\text{IN}}$$

$$U_{\text{S}} = 10\text{V}, \quad U_{\text{GS}} = 2.5\text{V}, \quad K = 0.5\text{mA/V}^2,$$

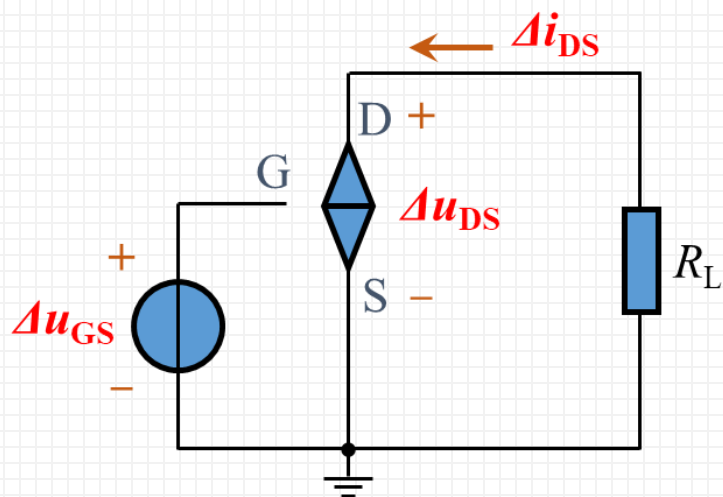
$$U_{\text{T}} = 1\text{V}, \quad R_{\text{L}} = 10\text{k}\Omega$$

$$u_{\text{OUT}} = 4.375 - 7.5\Delta u_{\text{IN}}$$





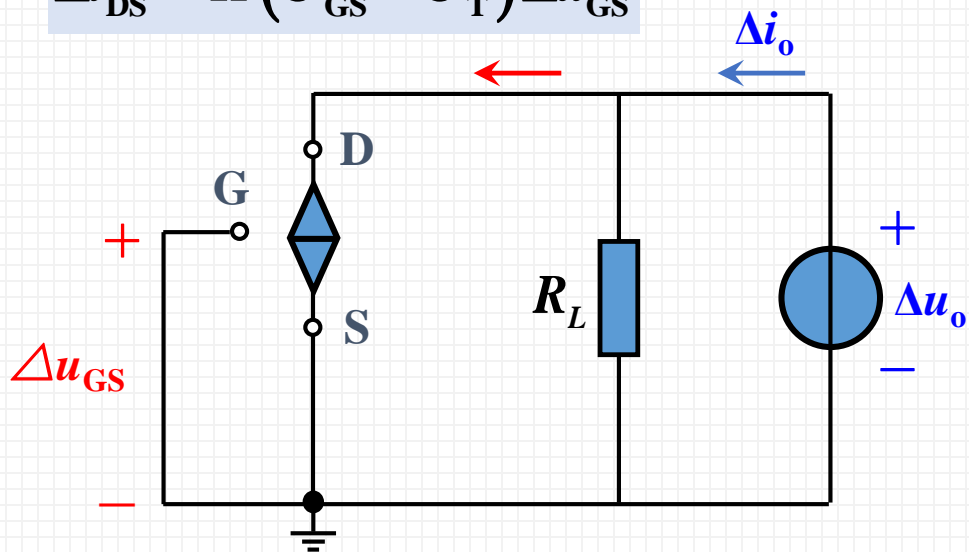
共源极MOSFET小信号放大电路的输入输出电阻



$$R_i = \infty$$

够大

$$\Delta i_{DS} = K(U_{GS} - U_T)\Delta u_{GS}$$



$$R_o = R_L = 10\text{k}\Omega$$

不够小

怎么办?