习题 3.5 作业参考解答

《高等微积分教程（下）》

1. 求下列曲面的面积.

(1) 柱面 $x^2+z^2=a^2$ 在柱面 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分.

解： 所求面积为 $z \geq 0$ 部分的两倍.

当 $z \geq 0$ 时，令 $x=a\cos\theta, z=a\sin\theta$，此时 $\theta \in [0,\pi], y \in [-a\sin\theta, a\sin\theta]$，且

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,y)}=\begin{pmatrix}-a\sin\theta & 0\\ 0 & 1\\ a\cos\theta & 0\end{pmatrix}.$$

故 $E=a^2, F=1, G=0$.

从而所求面积为

$$\begin{aligned}&2\int_0^{\pi}d\theta\int_{-a\sin\theta}^{a\sin\theta}\sqrt{EF-G^2}dy\\ =&2\int_0^{\pi}d\theta\int_{-a\sin\theta}^{a\sin\theta}ady\\ =&2\int_0^{\pi}2a^2\sin\theta d\theta\\ =&8a^2.\end{aligned}$$

(3) 由曲面 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所包围的空间几何体的

表面积.

解：两曲面相交处 $z=a, x^2+y^2=a^2$.

当 $z\in[0,a]$ 时，$z=\dfrac{x^2+y^2}{a}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{a}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{a}$.

当 $z\in[a,2a]$ 时，$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

在 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le a^2\}$ 内令 $x=r\cos\theta, z=r\sin\theta$.

从而所求面积为

$$\iint_D \sqrt{1+(\frac{2x}{a})^2+(\frac{2y}{a})^2}dxdy+\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(\sqrt{1+\frac{4r^2}{a^2}}+\sqrt{2})rdr$$
$$=(\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+\sqrt{2})\pi a^2.$$

9. 半径为 R，质量为 M 的均匀球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对点 $P(0,0,a)(a>R)$ 处质量为 m 的质点的引力.

解：见课件 3-5 最后一个例题.