1. 用两阶段方法求解下述线性规划问题，并完成后附讨论。

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \\ s.t.\ & x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

讨论：

在应用两阶段方法时可能遇到原问题有可行解，但系数矩阵不是行满秩矩阵的情况，如下面的例子所示，此时会出现什么情况？应该如何处理？

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \\ s.t.\ & x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 \\ & x_i \geqslant 0, i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

第一阶段：

$$\begin{aligned} \max\ & -x_5 - x_6 \\ s.t.\ & x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 = 1 \\ & x_1, x_2, \cdots, x_6 \geqslant 0 \end{aligned}$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_5	1	4	-2	8	1	0	2
x_6	-1	2	3	4	0	1	1
	0	0	0	0	-1	-1	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_5	1	4	-2	8	1	0	2
x_6	-1	2	3	4	0	1	1
	0	6	1	12	0	0	z+3.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$1/8$	0	$\frac{1}{4}$
x_6	$-\frac{3}{2}$	0	4	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
	$-\frac{3}{2}$	0	4	0	$-\frac{3}{2}$	0	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
x_3	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
	0	0	0	0	-1	-1	z

第二阶段：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_4	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$
x_3	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0
	$\frac{65}{16}$	-1	0	0	$z+\frac{3}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	16	0	32	8
x_3	0	6	1	12	3
	0	-66	0	-130	-31

故. $x_1=8$ $x_2=0$ $x_3=3$ $x_4=0$ 时.

RHS 取最大为 31

讨论：

例如：$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 2 & ① \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 & ② \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 & ③ \end{cases}$

③ = ① − ②　故 ③ 可删去后两阶段求解.

系数矩阵若非行满秩，在第二阶段可能出现某行全为0，无法继续进行.

此时可用线性组合关系消去冗余行，使系数阵行满秩.

2. 对于线性规划问题

$$\begin{aligned} \max\ & 6x_1 - 2x_2 + 10x_3 \\ s.t.\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \le b_i, i = 1,2 \\ & x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{aligned}$$

其中 $b_i \ge 0, \forall i$，引入松弛变量 x_4, x_5 获得初始顶点，然后进行一步单纯型迭代得到下面的线性规划问题，

$$\begin{aligned} \max\ & \gamma_1 x_1 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 + 20 \\ s.t.\ & \beta_{11}x_1 + x_2 + 2x_3 + \beta_{14}x_4 = 5 \\ & \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \beta_{24}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \eta \\ & x_j \ge 0, \forall j \end{aligned}$$

1）请指出上述迭代的进出基变量（说明理由）；
2）请确定上述两个模型的参数值。

(1)

问题化为：

$$\begin{aligned} \max\ & 6x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ s.t\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + x_5 = b_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	b_1
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	b_2
	6	-2	10	0	0	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	β_{11}	1	2	β_{14}	0	5
	β_{21}	β_{22}	$\frac{1}{3}$	β_{24}	$\frac{1}{3}$	b_2'
	σ_1	0	σ_3	σ_4	σ_5	z-20

由于 $\frac{1}{3} \ne 1$，$1 \ne 0$，$2 \ne 0$

故出基变量 x_5，进基变量 x_1

x_2，x_3 仍为非基变量，x_4 为基变量。

(2)

由(1) $\beta_{11}=0$ $\beta_{21}=1$ $\beta_{14}=1$ $\beta_{24}=0$

因此 $k_1(a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ 0\ 1\ b_2) = (\beta_{21}\ \beta_{22}\ \frac{1}{3}\ 0\ \frac{1}{3}\ b_2')$

故 $k_1 = \frac{1}{3}$ $a_{21} = 3$ $a_{23} = 1$ $a_{22} = 3\beta_{22}$ $b_2 = 3b_2'$

而 $(6\ -2\ 10\ 0\ 0\ 0) - k_2(3\ a_{22}\ 1\ 0\ 1\ b_2) = (0\ 0\ \sigma_3\ 0\ \sigma_5\ -20)$

故 $k_2=2$ $b_2=10$ $a_{22}=-1$ $\sigma_3=8$ $\sigma_5=-2$ $\eta=\frac{10}{3}$ $\beta_{22}=-\frac{1}{3}$

同理：$k_3=0$ $a_{11}=0$ $a_{12}=1$ $a_{13}=2$ $b_1=5$

故模型①：

$$\begin{aligned} \max\ & 6x_1 - 2x_2 + 10x_3 \\ s.t.\ & x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \le 10 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1,2,3 \end{aligned}$$

模型②：

$$\begin{aligned} \max\ & 8x_3 - 2x_5 + 20 \\ s.t.\ & x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{10}{3} \\ & x_i \ge 0\quad i = 1, 2, \cdots, 5 \end{aligned}$$

3. 对于线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

1) 请指出该可行域是否有顶点；

2) 请将其转换为标准形式，再指出标准形式下的可行域是否有顶点，并与 1) 中的结论进行比较；

1)

无顶点、

2)

标准形式：

$$\min\ x_1 + x_2^+ - x_2^-$$

$$\text{s.t. } x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0$$

易知 $(0,0,0)$ 是一个顶点、

原问题的 $(0,0)$ 对应新问题中无数个点、

原问题和标准形式并不是同一问题.

4. 写出下面线性规划的对偶规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 2 \\
& 2x_1 + \ \ x_2 + 6x_3 = 3 \\
& x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

标准形式：

$$
\begin{aligned}
-\max\ & -x_1 - 2x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + 3x_2 + 4(x_3^+ - x_3^-) - x_4 = 2 \\
& 2x_1 + x_2 + 6(x_3^+ - x_3^-) = 3 \\
& x_1 + 3x_2 + 5(x_3^+ - x_3^-) + x_5 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

得到标准形式下的对偶问题：

$$
\begin{aligned}
-\min\ & 2\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_2 + 5\tilde{y}_3 \\
\text{s.t.}\ & 2\tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \geq -1 \\
& 3\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + 3\tilde{y}_3 \geq -2 \\
& 4\tilde{y}_1 + 6\tilde{y}_2 + 5\tilde{y}_3 \geq -4 \\
& -4\tilde{y}_1 - 6\tilde{y}_2 - 5\tilde{y}_3 \geq 4 \\
& -\tilde{y}_1 \geq 0 \\
& \tilde{y}_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

故对偶问题为：

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2y_1 + 3y_2 - 5y_3 \\
\text{s.t.}\ & 2y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 1 \\
& 3y_1 + y_2 - 3y_3 \leq 2 \\
& 4y_1 + 6y_2 - 5y_3 = 4 \\
& y_1, y_3 \geq 0 \quad y_2 \in R.
\end{aligned}
$$