微积分A　第九周　　　　　　　　新雅93 章越闻 2019013397

4.13 习题3.5

T2.(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

解: $\bar{x}=\frac{\iiint_D x\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}$, $\bar{y}=\frac{\iiint_D y\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}$, $\bar{z}=\frac{\iiint_D z\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}$ $\cdots(*)$

其中 $D=\{(x,y,z)\mid x,y,z\geq 0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\}$.

作变换 $x=ar\sin\phi\cos\theta$, $y=br\sin\phi\sin\theta$, $z=cr\cos\phi$ (广义球坐标变换).

其Jacobian行列式为 $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}=abcr^2\sin\phi$, 积分域 $D'=\{(r,\phi,\theta)\mid 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}$.

故 $\iiint_D dxdydz=\iiint_{D'}abcr^2\sin\phi\,drd\phi d\theta$

$=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\int_0^1 r^2dr$

$=abc\cdot(\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})\cdot(-\cos\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})\cdot(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^1)=\frac{\pi}{6}abc$

$\iiint_D x\,dxdydz=\iiint_{D'}a^2bcr^3\sin^2\phi\cos\theta\,drd\phi d\theta$

$=a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\phi\,d\phi\int_0^1 r^3dr$

$=a^2bc\cdot(\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})\cdot(\frac{\phi}{2}-\frac{\sin2\phi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})\cdot(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1)=\frac{\pi}{16}a^2bc$

代入(*)式可得: $\bar{x}=\frac{3}{8}a$. 由 $\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}$ 的对称性可知, $\bar{y}=\frac{3}{8}b$, $\bar{z}=\frac{3}{8}c$

因此质心为 $(\frac{3}{8}a,\frac{3}{8}b,\frac{3}{8}c)$

(2) $x^2+y^2=2z$, $x+y=z$.

解: $\bar{x}=\frac{\iiint_D x\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}$, $\bar{y}=\frac{\iiint_D y\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}$, $\bar{z}=\frac{\iiint_D z\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}$ $\cdots(*)$

其中 $D=\{(x,y,z)\mid \frac{x^2+y^2}{2}\leq z\leq x+y\}$.

作柱坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, 积分域 $D'=\{(r,\theta,z)\mid \frac{r^2}{2}\leq z\leq r(\cos\theta+\sin\theta),\ 0\leq r\leq 2(\cos\theta+\sin\theta), -\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}\}$

故 $\iiint_D dxdydz=\iiint_{D'}r\,drd\theta dz$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{r(\cos\theta+\sin\theta)}dz$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}r\left[r(\cos\theta+\sin\theta)-\frac{r^2}{2}\right]dr$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^4d\theta=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^4(\theta+\frac{\pi}{4})\,d(\theta+\frac{\pi}{4})=\pi$

$\iiint_D x\,dxdydz=\iiint_{D'}r^2\cos\theta\,drd\theta dz$

$$\iiint_D x\,dxdydz = \iiint_{D'} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta \int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r^2\,dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{r(\cos\theta+\sin\theta)} dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta \int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r^2\left[r(\cos\theta+\sin\theta-\frac{r^2}{2}\right]dr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{4}{5}(\cos\theta+\sin\theta)^5\cos\theta\,d\theta$$

注意到 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{4}{5}(\cos\theta+\sin\theta)^5\cos\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{4}{5}(\cos\theta+\sin\theta)^5\sin\theta\,d\theta$ （作变量代换 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$ 即得）

故 $\iiint_D x\,dxdydz = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{4}{5}(\cos\theta+\sin\theta)^6 d\theta = \frac{16}{5}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^6(\theta+\frac{\pi}{4})\,d(\theta+\frac{\pi}{4}) = \pi$

代入(*)式得：$\overline{x}=1$． 由 x, y 的对称性，$\overline{y}=1$

而 $\iiint_D z\,dxdydz = \iiint_{D'} rz\,drd\theta dz$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r\,dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{r(\cos\theta+\sin\theta)} z\,dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} \frac{r}{2}\left[r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2-\frac{r^4}{4}\right]dr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^6 d\theta = \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^6(\theta+\frac{\pi}{4})\,d(\theta+\frac{\pi}{4}) = \frac{5}{3}\pi$$

代入(*)式得：$\overline{z}=\frac{5}{3}$． 综上，质心为 $(1, 1, \frac{5}{3})$

T3.(1) 物体上 $P(x,y,z)$ 的点密度为 $\rho=x+y+z$．$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x, y, z\le 1\}$，求物体的质心．

解：$M=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)\,dz$

$$= \int_0^1 dx\int_0^1 (x+y+\frac{1}{2})\,dy = \int_0^1 (x+1)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

$M_x = \iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 x(x+y+z)\,dz$

$$= \int_0^1 dx\int_0^1 (x^2+xy+\frac{x}{2})\,dy = \int_0^1 (x^2+x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}$$

故 $\overline{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{5}{9}$． 由 x, y, z 的对称性可知，$\overline{y}=\overline{z}=\overline{x}=\frac{5}{9}$．

即质心为 $(\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9})$

(2) 物体在 $P(x,y,z)$ 的点密度为 $\rho=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 2az\}$，求物体的质心

解：作球坐标变换 $x=r\sin\phi\cos\theta$，$y=r\sin\phi\sin\theta$，$z=r\cos\phi$ （由对称性不妨设 $a>0$）

则积分域 $\Omega'=\{(r,\phi,\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2a\cos\phi\}$.

故 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\phi\,drd\phi d\theta$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^{2a\cos\phi}r\sin\phi\,dr$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2a^2\cos^2\phi\sin\phi\,d\phi=-4a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\,d(\cos\phi)=-\frac{4}{3}a^2\pi\cos^3\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}a^2\pi$

$M_x=\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}r\sin\phi\cos\theta\cdot\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\phi\,drd\phi d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^{2a\cos\phi}r^2\sin^2\phi\,dr=\left(\sin\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^{2a\cos\phi}r^2\sin^2\phi\,dr=0$

故 $\bar{x}=\frac{M_x}{M}=0$. 由 x,y 的对称性可知 $\bar{y}=0$.

$M_z=\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}r\cos\phi\cdot\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\phi\,drd\phi d\theta$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^{2a\cos\phi}r^2\cos\phi\sin\phi\,dr$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}a^3\cos^4\phi\sin\phi\,d\phi=-\frac{16}{3}a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\phi\,d(\cos\phi)=-\frac{16}{15}a^3\pi\cos^5\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{15}a^3\pi$

故 $\bar{z}=\frac{M_z}{M}=\frac{4}{5}a$. 综上，物体质心为 $(0,0,\frac{4}{5}a)$

T4.(1) $z=x^2+y^2$，$x+y=\pm1$，$x-y=\pm1$，$z=0$

解：积分域 $D=\{(x,y,z)\mid -1\le x+y\le 1,-1\le x-y\le 1,\ 0\le z\le x^2+y^2\}$，设 (x,y) 所在区域为 D_1.

令 $u=x+y$，$v=x-y$，则 (x,y) 的积分区域即 $D_1'=\{(u,v)\mid -1\le u\le 1,\ -1\le v\le 1\}$

$x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{u-v}{2}$，故 $\left|\mathrm{Det}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}$，$x^2+y^2=\frac{1}{2}(u^2+v^2)$

故关于 z 轴的转动惯量 $J_z=\iiint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dxdydz=\iint\limits_{D_1}dxdy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)\,dz$

$=\iint\limits_{D_1'}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2dudv$

$=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}(u^4+2u^2v^2+v^4)\,dv$

$=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\left(u^4v+\frac{2}{3}u^2v^3+\frac{1}{5}v^5\right)\Big|_{v=-1}^{v=1}\right]du$

$=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left(2u^4+\frac{4}{3}u^2+\frac{2}{5}\right)du=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{5}u^5+\frac{4}{9}u^3+\frac{2}{5}u\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{14}{45}$

(2) $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z^2$, $z\geq 0$

解：作柱坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, 则该变换下积分域

$$D'=\{(r,\theta,z)\mid r\leq z\leq\sqrt{2-r^2},\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}.$$

故关于 z 轴的转动惯量 $J_z=\iiint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

$$=\iiint\limits_{D'} r^2\cdot r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^{\sqrt{2-r^2}} r^3\,dz$$

$$=2\pi\int_0^1 r^3(\sqrt{2-r^2}-r)\,dr \quad \cdots ①$$

令 $s=2-r^2$, 则 $ds=-2r\,dr$, 从而 $\int_0^1 r^3\sqrt{2-r^2}\,dr=-\int_1^2\frac{s-2}{2}\sqrt{s}\,ds$

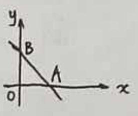
$$=\left(-\frac{1}{5}s^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2=\frac{8\sqrt{2}-7}{15}$$

而 $\int_0^1 r^4\,dr=\frac{1}{5}r^5\Big|_0^1=\frac{1}{5}$, 代入①中得：

$$J_z=2\pi\times\left(\frac{8\sqrt{2}-7}{15}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$$

习题 4.2

1.(1) $\int_L (x+y)\,dl$，其中 L 为 O(0,0)，A(1,0)，B(0,1) 为顶点的三角形的三条边。



解：如图，记 OA 为 C_1，OB 为 C_2，AB 为 C_3，则曲线 C_1、C_2、C_3 分别有正则表示：

$C_1:(x,y)=(t,0)$，$t\in[0,1]$；$C_2:(x,y)=(0,t)$，$t\in[0,1]$，$C_3:(x,y)=(t,1-t)$，$t\in[0,1]$

$$故 \int_L (x+y)\,dl = \int_0^1 t\cdot\sqrt{1^2+0^2}\,dt + \int_0^1 t\cdot\sqrt{0^2+1^2}\,dt + \int_0^1 (t+1-t)\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt$$

$$=2\int_0^1 t\,dt + \sqrt{2}\int_0^1 dt = (t^2+\sqrt{2}t)\Big|_0^1 = 1+\sqrt{2}.$$

(3) $\int_L y^2\,dl$，其中 L 为摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，$0\le t\le 2\pi$

解：记 $r(t)=(x(t),y(t))=(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))$，$t\in[0,2\pi]$.

则 $r'(t)=(a(1-\cos t),\ a\sin t)$，当 $t\in(0,2\pi)$ 时 $r'(t)\neq 0$.

$$则 \int_L y^2\,dl = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{2-2\cos t}\,dt$$

$$=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,dt = 16a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \left(令\ \frac{t}{2}=s\right)$$

$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 s\,ds = 32a^3\times\frac{4!!}{5!!} = \frac{256a^3}{15}$$

2.(1) $\int_L x\sqrt{(x^2-y^2)}\,dl$，其中 L 为双纽线右半支 $r^2=a^2\cos 2\theta$ $(-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ a>0)$.

解：此即 L 有参数表示 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，而 $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$.

故 $(x,y)=(a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta},\ a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta})$，$x\sqrt{(x^2-y^2)}=a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}\sqrt{a^2\cos 2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$

$$= a^2\cos\theta(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots ①$$

$$\nabla(x,y)=\left(-a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}-\frac{a\cos\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},\ a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}-\frac{a\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)=\left(-\frac{a\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},\ \frac{a\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)$$

$$故 \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} \quad \cdots ②$$

$$将①②代入得：\int_L x\sqrt{(x^2-y^2)}\,dl = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos\theta(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta$$

$$=a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^3}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta+\cos 3\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{a^3}{2}\left(\sin\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3.$$

(3) $\int_L xyz\,dl$，其中 L 的参数方程为 $x=t,\ y=\frac{2}{3}\sqrt{2}\,t^{\frac{3}{2}},\ z=\frac{1}{2}t^2\ (0\le t\le 1)$.

解：记 $r(t)=(x(t),y(t),z(t))=(t,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{2}t^2)$，则 $r'(t)=(1,\sqrt{2t},t)$.

故 $\|r'(t)\|=\sqrt{1+2t+t^2}=1+t$，而 $xyz=t\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^2=\frac{\sqrt{2}}{3}t^{\frac{9}{2}}$

代入得：$\int_L xyz\,dl=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{3}t^{\frac{9}{2}}(1+t)\,dt=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}+\frac{2}{13}t^{\frac{13}{2}}\right)\Big|_0^1=\frac{16\sqrt{2}}{143}$

3. (1) $x=3t,\ y=3t^2,\ z=2t^3$，从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$.

解：此即求积分 $\int_L dl$，其中 L 的参数方程为 $(x,y,z)=r(t)=(3t,3t^2,2t^3)$. 其中 $t\in[0,1]$.

故 $\|r'(t)\|=\sqrt{3^2+(6t)^2+(6t^2)^2}=3(2t^2+1)$.

代入得曲线弧长 $\int_L dl=\int_0^1\|r'(t)\|dt=\int_0^1 3(2t^2+1)dt=(2t^3+3t)\Big|_0^1=5$

(2) $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t,\ z=e^{-t},\ (0\le t<+\infty)$.

解：此即求积分 $\int_L dl$，其中 L 的参数方程为 $(x,y,z)=r(t)=(e^{-t}\cos t,e^{-t}\sin t,e^{-t})$，$t\in[0,+\infty)$

$r'(t)=(-(\cos t+\sin t)e^{-t},\ (\cos t-\sin t)e^{-t},\ -e^{-t})$

从而 $\|r'(t)\|=\sqrt{(\cos t+\sin t)^2+(\cos t-\sin t)^2+1}\,e^{-t}=\sqrt{3}e^{-t}$.

代入得曲线弧长 $\int_L dl=\int_0^{+\infty}\|r'(t)\|dt=\int_0^{+\infty}\sqrt{3}e^{-t}dt=-\sqrt{3}e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{3}$.

4. 曲线 $y=\ln x$ 的线密度 $\rho(x,y)=x^2$，求曲线在 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=\sqrt{15}$ 之间的质量.

解：记曲线为 C，则质量
$$M=\int_C\rho(x,y)ds=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x^2\sqrt{[y'(x)]^2+1}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\,d(x^2+1)=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}=\frac{56}{3}$$

5. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于曲面 $z=a+\frac{x^2}{a}$ 与 $z=0$ 之间的面积 $(a>0)$.

解: 此即求 $\int_L z\,dl$. 其中 $z=a+\frac{x^2}{a}$, 而 L 有参数表示 $(x,y)=(a\cos\theta, a\sin\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$\nabla(x,y)=(-a\sin\theta, a\cos\theta)$, $\nabla(x,y)\neq 0$, 且 $\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}=a$.

代入得所求面积 $\int_L z\,dl = \int_0^{2\pi} a(1+\cos^2\theta)\cdot a\,d\theta$

$= a^2\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta)\,d\theta = a^2(\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2$

6. 求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$, $0\le t\le\pi$ 的质心.

解: 记上述参数表示为 $(x,y)=r(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, 则 $r'(t)=(a(1-\cos t), a\sin t)$

$\|r'(t)\|=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t} = a\sqrt{2-2\cos t} = 2a\sin\frac{t}{2}$.

$M=\int_L dl = \int_0^\pi 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 4a$

$M_y=\int_L x\,dl = \int_0^\pi a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$

$= 2a^2\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt - 2a^2\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}\,dt$

$= 2a^2\int_0^\pi d(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}) - 2a^2\int_0^\pi 4\sin^2\frac{t}{2}\;d(\sin\frac{t}{2})$

$= 2a^2(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}-\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2})\Big|_0^\pi = \frac{16}{3}a^2$.

$M_x=\int_L y\,dl = \int_0^\pi a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$

$\cancel{= 2a^2\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt - 2a^2\int_0^\pi \cos t\sin\frac{t}{2}}$

$= 4a^2\int_0^\pi \sin^3\frac{t}{2}\,dt = 8a^2\int_0^\pi \sin^3\frac{t}{2}\,d(\frac{t}{2}) = 8a^2\cdot\frac{2!!}{3!!} = \frac{16}{3}a^2$.

故 $\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{4}{3}a$, $\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{4}{3}a$, 故质心为 $(\frac{4}{3}a, \frac{4}{3}a)$

7. 求螺线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{b}{2\pi}t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 绕 x 轴旋转的转动惯量(线密度为1).

解: 记 $(x,y,z)=r(t)$, 则 $r'(t)=(-a\sin t, a\cos t, \frac{b}{2\pi})$, $\|r'(t)\|=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}$, 记为 C.

转动惯量 $J_x=\iiint_L (y^2+z^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi}(a^2\sin^2 t+\frac{b^2}{4\pi^2}t^2)\cdot C\,dt$

$= C\cdot a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt + C\cdot\frac{b^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}t^2\,dt$

$= C\cdot a^2(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} + C\cdot\frac{b^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{2\pi} = (a^2\pi+\frac{2}{3}b^2\pi)C$

$= (\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{3})\sqrt{4\pi^2a^2+b^2}$

8. 圆周 $L: x^2+y^2=-2y$ 上每点的质量线密度等于 $\sqrt{x^2+y^2}$，求曲线 L 的质量与曲线 L 对 x 轴的静力矩。

解：作极坐标变换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，则 $r^2=-2r\sin\theta$，即 $r=-2\sin\theta$，故 $\theta\in[\pi,2\pi]$

此即 $(x,y)=(-2\sin\theta\cos\theta,\ -2\sin^2\theta)=(-\sin2\theta,\ \cos2\theta-1)$，$\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=-2\sin\theta$.

$\nabla(x,y)=(-2\cos2\theta,\ -2\sin2\theta)$，$\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}=2$

故曲线质量 $M=\int_L \rho(x,y)\,dl=\int_\pi^{2\pi}-4\sin\theta\,d\theta=4\cos\theta\Big|_\pi^{2\pi}=8$.

静力矩 $M_x=\iint_L y\rho(x,y)\,dl=\int_\pi^{2\pi}(-2\sin^2\theta)\cdot(-4\sin\theta)\,d\theta$

$$=-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=-16\cdot\frac{2!!}{3!!}=-\frac{32}{3}.$$

4.15 习题 4.3

1. (1) $\iint_S(x+y+z)dS$，其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq0)$.

解：该曲面即 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\leq a^2$，故 $z_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$z_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

从而 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，进而 $\iint_S(x+y+z)dS=\iint_{x^2+y^2\leq a^2}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

作极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，代入得：

$$\iint_S(x+y+z)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(r\cos\theta+r\sin\theta+\sqrt{a^2-r^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta\int_0^a\frac{ar^2}{\sqrt{a^2-r^2}}dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a ar\,dr$$

注意到 $\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta=(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi}=0$，故 $\iint_S(x+y+z)dS=2\pi\cdot\frac{1}{2}ar^2\Big|_0^a=\pi a^3$.

(3) $\iint_S\frac{dS}{(1+x+y)^2}$，其中 S 是四面体 $x+y+z\leq1$，$x\geq0,y\geq0,z\geq0$ 的边界面.

解：记四面体分别位于平面 $x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 的边界面依次为 S_1,S_2,S_3,S_4.

则 $S_1: z=1-x-y$，$z_x=z_y=-1$，$\iint_{S_1}\frac{dS_1}{(1+x+y)^2}=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{\sqrt3}{(1+x+y)^2}dy$

$$=\int_0^1\left(-\frac{\sqrt3}{1+x+y}\Big|_{y=0}^{y=1-x}\right)dx$$

$$=\sqrt3\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac12\right)dx=\sqrt3\left(\ln(1+x)-\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\sqrt3\ln2-\frac{\sqrt3}{2}.$$

S_2: $x=0$, $x_y=x_z=0$, $y+z\le 1$.

$$\iint_{S_2}\frac{dS_2}{(1+x+y)^2}=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\frac{1}{(1+y)^2}dz=\int_0^1\frac{1-y}{(1+y)^2}dy=\int_0^1\left[\frac{2}{(1+y)^2}-\frac{1}{1+y}\right]dy$$
$$=\left(-\frac{2}{1+y}-\ln(1+y)\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$$

S_3: $y=0$, $x+z\le 1$. 由对称性 $\iint_{S_3}\frac{dS_3}{(1+x+y)^2}=1-\ln 2$

S_4: $z=0$, $z_x=z_y=0$, $x+y\le 1$

$$\iint_{S_4}\frac{dS_4}{(1+x+y)^2}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=\frac{\sqrt3}{3}\iint_{S_1}\frac{dS_1}{(1+x+y)^2}=\ln 2-\frac12$$

故 $\iint_S\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\sum_{k=1}^{4}\iint_{S_k}\frac{dS_k}{(1+x+y)^2}=(\sqrt3-1)\ln 2+\frac{3-\sqrt3}{2}$

(5) $\iint_S x\,dS$，其中S是螺旋面 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$ 上 $D_{uv}=\{(u,v)\mid 0\le u\le r,\ 0\le v\le 2\pi\}$的部分.

解：记 $r(u,v)=(x,y,z)=(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$，则 $r_u=(\cos v,\sin v,0)$，
$r_v=(-u\sin v,\ u\cos v,\ a)$

从而 $|r_u\times r_v|=\left\|\begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & a\end{vmatrix}\right\|=\sqrt{(a\sin v)^2+(-a\cos v)^2+u^2}=\sqrt{a^2+u^2}$.

故 $\iint_S x\,dS=\iint_{D_{uv}}u\cos v\sqrt{a^2+u^2}\,du\,dv$
$$=\int_0^{2\pi}\cos v\,dv\int_0^r u\sqrt{a^2+u^2}\,du=\left(\sin v\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\int_0^r u\sqrt{a^2+u^2}\,du=0$$

2. 计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截部分的面积 $(a>0)$.

由对称性可知 $S=2S_上$，其中 $S_上$ 为 $z\ge 0$ 部分的面积，即

$$S_上=\int_L\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dl，其中 L: x^2+y^2=ax$$

作极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，则 $r^2=ar\cos\theta$，即 $r=a\cos\theta$，$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

从而 $\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2}=a|\sin\theta|$，$(x,y)=(a\cos^2\theta,\ a\cos\theta\sin\theta)$，$\nabla(x,y)=(-2a\cos\theta\sin\theta,\ a\cos^2\theta-a\sin^2\theta)$
$=(-a\sin 2\theta,\ a\cos 2\theta)$.

进而 $\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}=a$

故 $\int_L\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dl=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2|\sin\theta|\,d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=2a^2$

从而 $S=2S_上=2\int_L\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dl=4a^2$.

3. 求抛物面 $2z=x^2+y^2$ 在 $z\in[0,1]$ 部分的质量，其中质量的面密度为 $\sigma=z$.

解：质量 $M=\int_S z\,dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$. $z=\frac{x^2+y^2}{2}$，故 $z_x=x,\ z_y=y$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$.

作极坐标变换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，则 $M=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt2}\frac{r^3}{2}\sqrt{1+r^2}\,dr=2\pi\int_0^{\sqrt2}\frac{r^3}{2}\sqrt{1+r^2}\,dr$

令 $t=1+r^2$，则 $dt=2rdr$，从而 $\int_0^{\sqrt2}\frac{r^3}{2}\sqrt{1+r^2}\,dr=\int_1^3\frac{t-1}{4}\sqrt t\,dt=\left(\frac{t^{\frac52}}{10}-\frac{t^{\frac32}}{6}\right)\Big|_1^3=\frac{6\sqrt3+1}{15}$

故 $M=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt3+1)$.

4. 已知半径为 a 的球面上每一点质量面密度 σ 等于该点到某一直径的距离，求此球面的质量.

解：不妨以此直径为 z 轴，球心为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

于是 $\sigma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$. 该球面有参数表示 $(x,y,z)=r(\theta,\phi)=(a\sin\phi\cos\theta,\ a\sin\phi\sin\theta,\ a\cos\phi)$

故 $r_\phi=(a\cos\phi\cos\theta,\ a\cos\phi\sin\theta,\ -a\sin\phi)$，$r_\theta=(-a\sin\phi\sin\theta,\ a\sin\phi\cos\theta,\ 0)$

则 $r_\phi\times r_\theta=(a^2\sin^2\phi\cos\theta,\ a^2\sin^2\phi\sin\theta,\ a^2\sin\phi\cos\phi)$，故 $|r_\phi\times r_\theta|=a^2\sin\phi$

故 $M=\int_S\sqrt{x^2+y^2}\,dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}a\sin\phi\cdot a^2\sin\phi\,d\phi=2\pi a^3\left(\frac{\phi}{2}-\frac14\sin2\phi\right)\Big|_0^{\pi}=\pi^2a^3$

6. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一象限部分的质心以及上半球面的质心.

解：该球面有参数表示 $(x,y,z)=r(\phi,\theta)=(a\sin\phi\cos\theta,\ a\sin\phi\sin\theta,\ a\cos\phi)$

同上题可知，$|r_\phi\times r_\theta|=a^2\sin\phi$.

第一卦限：$M=\int_{S_1}dS_1=\int_0^{\frac\pi2}d\theta\int_0^{\frac\pi2}a^2\sin\phi\,d\phi=\frac{\pi a^2}{2}(-\cos\phi)\Big|_0^{\frac\pi2}=\frac12\pi a^2$.

$M_{yz}=\int_{S_1}x\,dS_1=\int_0^{\frac\pi2}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac\pi2}a^3\sin^2\phi\,d\phi$

$=\left(\sin\theta\Big|_0^{\frac\pi2}\right)\cdot a^3\left(\frac\phi2-\frac14\sin2\phi\right)\Big|_0^{\frac\pi2}=\frac\pi4a^3$

故 $\overline{x}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac a2$，由对称性可知 $\overline{y}=\overline{z}=\frac a2$. 故第一卦限质心为 $(\frac a2,\frac a2,\frac a2)$

上半球面：$M'=4M=2\pi a^2$.

$M'_{yz}=\int_{S_2}x\,dS_2=\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac\pi2}a^3\sin^2\phi\,d\phi=0$，故 $\overline{x'}=0$，由对称性 $\overline{y'}=0$.

$M'_{xy}=\int_{S_2}z\,dS_2=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac\pi2}a^3\sin\phi\cos\phi=2\pi a^3\left(-\frac14\cos2\phi\right)\Big|_0^{\frac\pi2}=\pi a^3$.

故 $\overline{z'}=\frac{M'_{xy}}{M'}=\frac a2$. 故上半球面质心为 $(0,0,\frac a2)$

8. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱面 $z^2=2x$ 内的面积.

解：作柱坐标变换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z$. 从而 $z=\sqrt{x^2+y^2}=r$.

于是锥面有参数表示 $(x,y,z)=f(r,\theta)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r)$，故 $f_r=(\cos\theta,\sin\theta,1)$,

$f_\theta=(-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$

$f_r\times f_\theta=(-r\cos\theta,-r\sin\theta,r)$， $|f_r\times f_\theta|=\sqrt{2}\,r$

其中 $z^2\leq 2x$，即 $r^2\leq 2r\cos\theta$，即 $0\leq r\leq 2\cos\theta$，$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

故面积 $S=\int_S dS=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}\,r\,dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}\cos^2\theta\,d\theta=\sqrt{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\,\pi$

9. 求双曲抛物面 $z=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 所截部分的面积.

解：$z_x=y,\ z_y=x$. 故 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$. 进一步令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

此即面积 $S=\int_S dS=\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr=2\pi\cdot\frac{1}{3}(\sqrt{1+r^2})^3\Big|_0^a=\frac{2\pi}{3}\left[(1+a^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

习题 4.4

1.(1) $\int_{L^+}\frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$，其中 L^+ 是星形线在第一象限中的弧段 $\begin{cases}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{cases}$，$0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$，正向为 $(0,R)$ 到 $(R,0)$.

解：$(x,y)=r(t)=(a\cos^3t,\ a\sin^3t)$. $r'(t)=(-3a\cos^2t\sin t,\ 3a\sin^2t\cos t)$，正向 t 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 0.

可知 $a=R$.

故 $\int_{L^+}\frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(-R^2\sin^6t,R^2\cos^6t)\cdot(-3R\cos^2t\sin t,3R\sin^2t\cos t)}{R^{\frac{5}{3}}(\sin^5t+\cos^5t)}dt$

$=-3R^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\sin^2t\,dt=-\frac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{3\pi}{16}R^{\frac{4}{3}}$

(2) $\int_{\overline{AB}}x\,dx+y\,dy+z\,dz$，其中路径是从点 $A(1,1,1)$ 到 $B(2,3,4)$ 的直线段.

解：该直线段有参数表示：$(x,y,z)=r(t)=(1+t,\ 1+2t,\ 1+3t)$，故 $r'(t)=(1,2,3)$，$t\in[0,1]$

（正向 t 从 0 到 1）

从而 $\int_{\overline{AB}}x\,dx+y\,dy+z\,dz=\int_0^1(1+t,\ 1+2t,\ 1+3t)\cdot(1,2,3)\,dt$

$=\int_0^1(6+14t)\,dt=(6t+7t^2)\Big|_0^1=13$.

(3) $\int_{L^+}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}+b\,dz$，其中 L^+ 是螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ 上由参数 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的有向弧段.

解：该曲线段有参数表示：$(x,y,z)=r(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$，$r'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$，$t\in[0,2\pi]$

故 $\int_{L^+}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}+b\,dz=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sin t}{a},\frac{\cos t}{a},b\right)\cdot(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)\,dt$

$=\int_0^{2\pi}(1+b^2)\,dt=(1+b^2)t\Big|_0^{2\pi}=2\pi(1+b^2)$

2. (1) $\int_{L^+}(x^2-y^2)\,dx$，其中L^+是抛物线$y=x^2$从点$(0,0)$到点$(2,4)$的弧段.

解：该曲线段有参数表示$(x,y)=r(x)=(x,x^2)$，$r'(x)=(1,2x)$，$x\in[0,2]$

故$\int_{L^+}(x^2-y^2)\,dx = \int_0^2 (x^2-x^4,0)\cdot(1,2x)\,dx = \int_0^2 (x^2-x^4)\,dx = \left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^2 = -\frac{56}{15}$

(3) $\oint_{L^+}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中$L^+$是以$(1,0)$，$(0,1)$，$(-1,0)$，$(0,-1)$为顶点的正方形，逆时针为正向.

解：在折线段L^+上，恒有$|x|+|y|=1$，且一、三象限$\frac{dy}{dx}=-1$，二、四象限$\frac{dy}{dx}=1$

故
$$\oint_{L^+}\frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_1^0 (1,1)\cdot(1,-1)\,dx + \int_0^{-1}(1,1)\cdot(1,1)\,dx + \int_{-1}^0 (1,1)\cdot(1,-1)\,dx + \int_0^1 (1,1)\cdot(1,1)\,dx$$
$$= \int_0^1 2\,dx + \int_{-1}^0 (-2)\,dx = 0$$

(5) $\int_{L^+} xyz\,dz$，其中L为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z=y\end{cases}$，从$z$轴正向看去是逆时针方向；

解：曲线L即$\begin{cases}x^2+2y^2=1\\ z=y\end{cases}$，故有参数表示$(x,y,z)=r(\theta)=\left(\cos\theta,\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$.

进而$r'(\theta)=\left(-\sin\theta,\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta,\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)$，$\theta\in[0,2\pi]$.

从z轴正向看为逆时针方向，此即θ从0到2π.

故
$$\int_{L^+} xyz\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{16}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi$$