4.4 解：(1) $y=\arctan x-x$

$y'=\frac{1}{1+x^2}-1$　$y'=0\Rightarrow x=0$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	<0	0	<0
y	$\downarrow$	非极值	$\downarrow$

∴ y 在 $\mathbb{R}$ 上单调减

无极值

(3) $y=x^n e^{-x}$, $x\geq 0$

$y'=nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x}$

$=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$

$y'=0\Rightarrow x=n$

x	$[0,n)$	n	$(n,+\infty)$
y'	>0	0	<0
y	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	$\searrow$

∴ y 在 $[0,n)$ 上单调增

在 $(n,+\infty)$ 上单调减

在 $x=n$ 处有极大值 $\left(\frac{n}{e}\right)^n$

(5). $y=\frac{2x^3+3x^2-x-4}{x^2-1}$

定义域 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

$y=\frac{2x^2+5x+4}{x+1}$

$y'=\frac{(4x+5)(x+1)-(2x^2+5x+4)}{(x+1)^2}$

$=\frac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2}$

$y'=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$

x	$(-\infty,\frac{-2-\sqrt{2}}{2})$	$\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{-2-\sqrt{2}}{2},\frac{-2+\sqrt{2}}{2})$	$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{-2+\sqrt{2}}{2},+\infty)$
y'	>0	0	<0	0	>0
y	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

~~∴ y 在 $(-\infty,\frac{-2-\sqrt{2}}{2})$ 上单调增. 在 $(\frac{-2-\sqrt{2}}{2},\frac{-2+\sqrt{2}}{2})$ 上单调减. 在 $(\frac{-2+\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上单调增. 在 $x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ 处有极大值~~

∴ y 在 $(-\infty,\frac{-2-\sqrt{2}}{2})$ 上单调增. 在 $(\frac{-2-\sqrt{2}}{2},-1)$, $(-1,\frac{-2+\sqrt{2}}{2})$ 上单调减.

在 $(\frac{-2+\sqrt{2}}{2},1)$ 与 $(1,+\infty)$ 上单调增

在 $x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ 处取到极大值 $1-2\sqrt{2}$.

在 $x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$ 处取到极小值 $1+2\sqrt{2}$

(7) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$

$y'=3\sin^2 x\cdot\cos x+3\cos^2 x\cdot(-\sin x)$

$=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$

$y'=0\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$ 或 $\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

y 在 $(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4})$ 上单调减. 在 $(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 上单调增

在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi)$ 上单调减. 在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{5\pi}{4})$ 上单调增

在 $(2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 上单调减. 在 $(2k\pi+\frac{3\pi}{2},(2k+1)\pi)$ 上单调增

极值: $x=2k\pi$ 处有极大值 1. 在 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ 处有极小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

在 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 处有极大值 1. 在 $x=2k\pi+\pi$ 处有极小值 -1

在 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$ 处有极大值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

在 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 处有极小值 -1

以上 $k\in\mathbb{Z}$.

(9) $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$

∴ $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $\frac{2}{5}$　当 $x=0$ 时. $f'(x)$ 不存在.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	>0	×	<0	0	>0
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\uparrow$

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调增. 在 $(0,\frac{2}{5})$ 上单调减. 在 $(\frac{2}{5},+\infty)$ 上单调增

在 $x=0$ 处有极大值 0. 在 $x=\frac{2}{5}$ 处有极小值 $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}}-\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

5. (1) ~~令 $f(x)=e^{-x^2}-\frac{1}{1+x^2}$ $f(0)=0$.~~

~~当 $x>0$ 时, $f'(x)=-2xe^{-x^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}=2x\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}-e^{-x^2}\right)$~~

原不等式 $\Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1+x^2 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$.

令 $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$. $f(0)=0$.

$f'(x)=2xe^{x}-2x=2x(e^{x}-1)>0$. $\therefore f(x)$ 在 $x>0$ $\uparrow$

$\therefore f(x)\geq f(0)=0$ $\therefore e^{-x^2}\leq\frac{1}{1+x^2}$

(3) 令 $f(x)=\sin x+\cos x-1-x+x^2$ $f(0)=0$.

$f'(x)=\cos x-\sin x-1+2x$ $f'(0)=0$

$f''(x)=2-\sin x-\cos x=2-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})>0$

$\therefore f'(x)>0$ $(x>0)$ $\therefore f(x)\geq 0$

$\therefore \sin x+\cos x\geq 1+x-x^2$

(5) 原不等式 $\Leftrightarrow \ln(1+x)\cdot(1+x)>\arctan x$.

令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$. $f(0)=0$.

$f'(x)=\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}$

$f'(0)=0$. $f''(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}>0$ $\therefore f'(x)>f'(0)=0$

$\therefore f(x)>f(0)=0$ $\therefore \ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$ $(x>0)$

(7) 设$f(x)=\ln(x+1)-x+\frac{1}{2}x^2$ $(x>0)$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x+1}-1+x$ 由于$x+1+\frac{1}{x+1}\geq 2$ $\therefore x+\frac{1}{x+1}-1\geq 0$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调増 $\therefore f(x)>f(0)=0$

即$\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$

设$g(x)=x-\ln(1+x)$

$g'(x)=1-\frac{1}{x+1}>0$ $\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调増

$\therefore g(x)>g(0)=0$ $\therefore \ln(1+x)<x$ 综上.证毕

$)<0$

6.(1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $x\in[-1,2]$

$y'=5x^4-20x^3+15x^2$

$=5x^2(x-1)(x-3)$

令$y'=0$. $\therefore x=1$或3或0.

当$x=-1$时 $y=-10$ 当$x=0$时 $y=1$

当$x=1$时 $y=2$ 当$x=2$时 $y=-7$

$\therefore$最大值为2.最小值为-10

(3) $y=\sqrt{x}\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}$ 令$y'=0$ $\therefore \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}=0$

$\therefore \ln x=-2$ $\therefore x=e^{-2}$

当$x=e^{-2}$时. $y=-\frac{2}{e}$

当$x\in(0,e^{-2})$时 $y'<0$ 当$x>e^{-2}$时$y'>0$

$\therefore$最小值为$-\frac{2}{e}$.无最大值

7. 证明:

(1) 设$f(x)=x^3-3x+c$.

$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

当$x\in[0,1]$时. $f(x)\leq 0$ $\therefore f(x)$在$[0,1]$上单调减

$\therefore f(x)=0$在$[0,1]$上至多1个实根

9. 解:设矩形在第一象限内的顶点$A(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$

则$S_{矩形}=4a\cos\alpha\, b\sin\alpha=2ab\sin 2\alpha$.

当$\alpha=\frac{\pi}{4}$时. $\sin 2\alpha$有最大值1.

此时面积取到最大值$2ab$

2. 解: $y'=3ax^2+2bx \quad y''=6ax+2b$

若$(1,3)$为拐点, 则当 $x=1$ 时 $y=3$, $y''=0$

$\therefore \begin{cases} a+b=3 \\ 6a+2b=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=\frac{9}{2} \end{cases}$ 此时当 $x>1$ 时 $y''<0$ 当 $x<1$ 时 $y''>0$ $\therefore$ 成立

4. 解 $\begin{cases} x=3\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$ $(0\leq t\leq \pi)$ $\therefore x\in[-3,3]$

$x'(t)=-9\cos^2 t\sin t$

$y'(t)=9\sin^2 t\cos t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\tan t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{-9\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{9\sin t\cos^4 t}\geq 0$$

$(t\neq\pi$, 且 $0<t<\pi)$

$\therefore$ 该函数在 $(0,\frac{\pi}{2})$ $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上分别下凸

5. 证明: (1) $a>0$. 设 $f(x)=a^x$

$\therefore f'(x)=a^x\ln a \quad f''(x)=a^x(\ln a)^2\geq 0$

$\therefore f(x)$ 为下凸函数. $\therefore f(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2)\leq \frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$

即 $a^{\frac{x_1+x_2}{2}}\leq \frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2})$

(2) 设 $f(x)=x^p$ $(p\geq 1)$

则 $f'(x)=px^{p-1} \quad f''(x)=p(p-1)x^{p-2}$

当 $x\geq 0$ 时 $f''(x)\geq 0$ $\therefore f(x)$ 下凸

$\therefore f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leq \frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$

即 $\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p\leq \frac{1}{n}(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)$

(3) ~~将~~ 不妨设 $0\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$

设 $k\in N$. 当 $i\leq k$ 时 $x_i=0$. 当 $i>k$ 时 $x_i>0$

若 $k\geq 1$ 则 $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}=0\leq \sum_{i=1}^n a_i x_i$, 成立

若 $k=0$ 即不存在 $x_i=0$. $\therefore 0<x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_k$

设 $f(x)=\ln x \quad f'(x)=\frac{1}{x} \quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

$\therefore f(x)$ 上凸. $\therefore f(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\geq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$

$\therefore \ln(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\geq \sum_{i=1}^n a_i\ln x_i$ (两边做exp操作)

$\therefore a_1x_1+\cdots+a_nx_n\geq \sum_{i=1}^n x_i^{a_i}$

9. 证明: 必要性证明:

由定理4.5.2. 由于 f 在 $[a,b]$ 上可微且下凸

① 若 $x>x_0$ $\forall x_1<x_0$, $x_1\geq a$.

有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\geq\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$

而 $f'(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-t)}{x_0-(x_0-t)}$

$\therefore \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq f'(x_0)$

$\therefore f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

② 若 $x<x_0$. $\forall x_1>x_0$. $x_1\leq b$

有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

而 $f'(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{x_0+t-x_0}$

$\therefore \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq f'(x_0)$

$\because x-x_0<0$ $\therefore f(x)-f(x_0)\geq f'(x_0)(x-x_0)$

即 $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

③ 若 $x=x_0$. 显然. 综上 证毕

充分性证明:

$\forall x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$.

有 $f(x_2)\geq f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$

$f(x_1)\geq f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)$

$\therefore f'(x_1)\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_2)$ $\therefore f'(x_1)<f'(x_2)$

$\therefore f'(x)$ 在 (a,b) 上单调增

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上下凸

4.6

1. 解：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}\cdot\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}\cdot}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x\right)=-\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $y=x+\frac{1}{2}$. $y=-x-\frac{1}{2}$ 为渐近线

又 $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}\right)=\infty$ $\therefore$ $x=1$ 也为渐近线

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)-1=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}\right)=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x}\right)=-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x-1+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-1=-1$

$\therefore$ 渐近线为 $y=-1$ 与 $y=-2x-1$

(3) $\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}\end{cases}$

$\therefore \dfrac{y}{x}=t$ $\therefore$ $x=\dfrac{3\cdot\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}\Rightarrow x^3+y^3=3xy$

设 $\frac{y}{x}$ 为 k 则 $x^3+(kx)^3=3kx^2$

$\therefore \dfrac{k^3+1}{k}=\dfrac{3}{x}$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{k^3+1}{k}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}=0$ $\therefore \lim\limits_{x\to\infty}k=-1$

$\lim\limits_{x\to\infty}(y+x)=\lim\limits_{x\to\infty}(k+1)x=\lim\limits_{x\to\infty}(k+1)\cdot\dfrac{3k}{k^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3k}{k^2-k+1}$

$=\lim\limits_{k\to-1}\dfrac{3k}{k^2-k+1}=-1$ $\therefore$ 渐近线 $y=-x-1$

2. 解

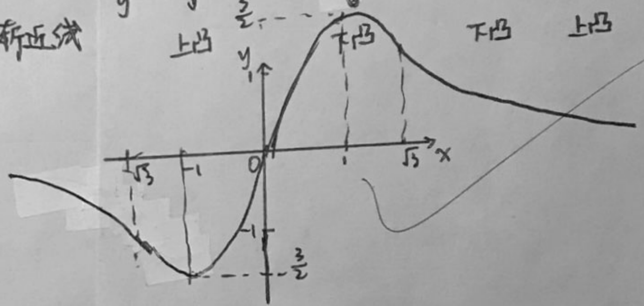
(2) $y=\dfrac{3x}{1+x^2}$

定义域 $\mathbb{R}$ 为奇函数

$y'=\dfrac{3(1+x^2)-6x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$

$y''=\dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$ $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘ 上凸		↘ 下凸		↗ 下凸		↗ 上凸		↘ 上凸		↘ 下凸

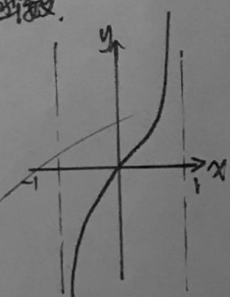


(3) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 定义域 $(-1,1)$

$\lim\limits_{x\to1^-}y=+\infty$. $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=-\infty$ 有竖直渐近线 $x=\pm1$.

$y'=\dfrac{2}{1-x^2}$ $y''=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$ y 为奇函数.

x	$(-1,0)$	0	$(0,1)$
y''	$-$	0	$+$
y'	$+$	$+$	$+$
y	↗ 上凸	零点 拐点	↗ 下凸



(8) $y=\sin^4x+\cos^4x=\dfrac{\cos4x+3}{4}$

定义域 R. 为偶函数. 周期函数. 周期 $T=\frac{\pi}{2}$

$y'=-\sin4x$ $y''=-4\cos4x$

x	$(0,\frac{\pi}{8})$	$\frac{\pi}{8}$	$(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8})$	$\frac{3\pi}{8}$	$(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
y	↘ 上凸		↘ 下凸		↑ 下凸		↑ 上凸