

# 第5章 Riemann积分

学习材料 (8)

## 1 Riemann积分概念及Riemann积分存在条件

**例1** 设有非负函数 $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . 求以 $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ 为边的曲边梯形 $D$ 的面积 $A$ .

解: 画图。

1. 分割区间 $[a, b]$ . 在区间 $[a, b]$ 中以任意方式插入一组点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

将区间 $[a, b]$ 分割为若干个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ). 此时直线 $x = x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ )将曲边梯形 $D$ 分成 $n$ 个细条 $D_i$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ).

2. 局部近似. 在子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i$ , 则细条 $D_i$ 的面积 $A_i$ 近似等于以 $f(\xi_i)$ 为高、以 $x_i - x_{i-1}$ 为底的矩形面积, 即

$$A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

从而曲边梯形 $D$ 的面积 $A$ 近似地表示为

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

3. 取极限. 当 $\max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$ 越来越小时,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 越来越接近于 $A$ .

**例2** 设物体作变速直线运动, 其速度 $v$ 是时间 $t$ 的函数

$$v = f(t).$$

我们来计算这物体从时刻 $a$ 到时刻 $b$ 经过的路程。

解:

1. 分割区间 $[a, b]$ . 在区间 $[a, b]$ 中以任意方式插入一组点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

将区间 $[a, b]$ 分割为若干个子区间 $[t_{i-1}, t_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ).

2. 局部近似. 在第 $i$ 段时间中物体通过的路程可以认为近似等于

$$f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

这里 $\xi_i$ 是 $[t_{i-1}, t_i]$ 中任意时刻。于是, 从时刻 $a$ 到时刻 $b$ 物体经过的路程近似等于

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

3. 取极限. 当  $\max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}$  越来越小时,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$  越来越接近于物体从时刻  $a$  到时刻  $b$  经过的路程。

**例3** 设物体受到一个沿  $OX$  轴方向的力  $F$  的作用, 它沿这轴从  $a$  点运动到  $b$  点。如果力  $F$  随  $x$  而改变, 即

$$F = f(x).$$

我们来求  $F$  对这物体所做的功。

解:

1. 分割区间  $[a, b]$ . 在区间  $[a, b]$  中以任意方式插入一组点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

将区间  $[a, b]$  分割为若干个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ).

2. 局部近似. 设  $\xi_i$  是  $[x_{i-1}, x_i]$  上任意一点, 在路程  $[x_{i-1}, x_i]$  上把力  $F = f(x)$  近似地看成常力  $f(\xi_i)$ , 则在这段上力  $F$  所做的功近似地等于

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

于是, 变力  $F = f(x)$  在整段路程  $[a, b]$  所做的功近似地等于

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

3. 取极限. 当  $\max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$  越来越小时,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$  越来越接近于变力  $F = f(x)$  在整段路程  $[a, b]$  所做的功。

**定义1 (分割)** 若区间  $[a, b]$  中有限个点集  $T = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$  满足

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

则称  $T$  为区间  $[a, b]$  的一个分割, 简记

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$$

每个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 称为分割  $T$  的子区间; 称

$$|T| =: \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

为分割  $T$  的最大长度。

**定义2 (定积分)** 设  $f$  是定义在区间  $[a, b]$  上的函数,  $A$  是一个实数。若  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当区间  $[a, b]$  的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足  $|T| < \delta$  时, 对  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon,$$

则称函数 $f$ 在区间 $[a, b]$ 上是Riemann可积，记作 $f \in R[a, b]$ ，称 $A$ 为函数 $f$ 在区间 $[a, b]$ 上的Riemann积分。

**注1** 若 $f \in R[a, b]$ ，则其积分值唯一，因而记其积分值为 $\int_a^b f(x)dx$ ，称 $f(x)$ 为被积函数，称 $x$ 为积分变量，称 $a$ 与 $b$ 为积分下限与积分上限。因积分值仅与函数被积函数 $f(x)$ 和积分区间 $[a, b]$ 有关，而与积分变量 $x$ 无关，即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

**定理1(有界性)** 若函数 $f$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $f$ 在 $[a, b]$ 有界。

证：设 $f$  Riemann 可积，记 $A = \int_a^b f(x)dx$ ，则 $\exists \delta_0 > 0$ ，当区间 $[a, b]$ 的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足 $|T| < \delta_0$ 时，对 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ )都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < 1.$$

取 $N_0 \in \mathbb{Z}_+$ ，使得 $\frac{b-a}{N_0} < \delta_0$ ，并取区间 $[a, b]$ 的 $N_0$ 等分分割 $T_0$ ，

$$T_0: a = x_0^* < x_1^* < \cdots < x_{n-1}^* < x_n^* = b,$$

则对 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}^*, x_i^*]$  ( $i = 1, 2, \cdots, N_0$ )都有

$$\left| \sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i) \frac{b-a}{N_0} - A \right| < 1.$$

于是对 $\forall \xi_i^1, \xi_i^2 \in [x_{i-1}^*, x_i^*]$  ( $i = 1, 2, \cdots, N_0$ )都有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i^1) \frac{b-a}{N_0} - \sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i^2) \frac{b-a}{N_0} \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i^1) \frac{b-a}{N_0} - A \right| + \left| A - \sum_{i=1}^{N_0} f(\xi_i^2) \frac{b-a}{N_0} \right| \\ &< 2, \end{aligned}$$

故

$$\left| f(\xi_k^1) \frac{b-a}{N_0} - f(x_k^*) \frac{b-a}{N_0} \right| < 2, \quad \forall \xi_k^1 \in [x_{k-1}^*, x_k^*] \quad (k = 1, 2, \cdots, N_0),$$

因此

$$|f(\xi_k^1)| < |f(x_k^*)| + \frac{2N_0}{b-a}, \quad \forall \xi_k^1 \in [x_{k-1}^*, x_k^*] \quad (k = 1, 2, \cdots, N_0),$$

所以 $\forall x \in [a, b]$ ，有

$$|f(x)| < \max_{1 \leq k \leq N_0} |f(x_k^*)| + \frac{2N_0}{b-a}.$$

证毕。

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 记它在 $[a, b]$ 的上确界为 $M$ , 下确界为 $m$ . 对 $[a, b]$ 的一个分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 又分别记 $M_i$ 与 $m_i$ 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的上、下确界,  $i = 1, 2, \cdots, n$ . 令

$$U(f, T) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1});$$

$$L(f, T) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1});$$

$$\sigma(f, T; \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

分别称 $U(f, T)$ ,  $L(f, T)$ 与 $\sigma(f, T; \xi_i)$ 为函数 $f$  (在 $[a, b]$ ) 关于分割 $T$ 的大和、小和与Riemann和。

显然

$$m(b-a) \leq L(f, T) \leq \sigma(f, T; \xi_i) \leq U(f, T) \leq M(b-a).$$

**命题1** 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 且分别以 $M, m$ 为上、下确界,  $T$ 为 $[a, b]$ 任一分割,  $T_k$ 是在 $T$ 的分点组中再加入 $k$ 个新分点所得到的 $[a, b]$ 分割, 则

$$0 \leq U(f, T) - U(f, T_k) \leq k|T|(M-m);$$

$$0 \leq L(f, T_k) - L(f, T) \leq k|T|(M-m).$$

证: 仅证第一式。对于 $k = 1$ , 即 $T_1$ 的分点组是在 $T$ 的分点组 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$  中加入一个新分点 $t: x_{i-1} < t < x_i$ , 于是

$$\begin{aligned} U(f, T) - U(f, T_1) &= M_i(x_i - x_{i-1}) - \sup_{x \in [x_{i-1}, t]} f(x)(t - x_{i-1}) - \sup_{x \in [t, x_i]} f(x)(x_i - t) \\ &= \left( M_i - \sup_{x \in [x_{i-1}, t]} f(x) \right) (t - x_{i-1}) + \left( M_i - \sup_{x \in [t, x_i]} f(x) \right) (x_i - t) \\ &\geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(f, T) - U(f, T_1) &\leq M(x_i - x_{i-1}) - m(x_i - x_{i-1}) = (M - m)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq (M - m)|T|. \end{aligned}$$

对于 $k > 1$ 的情形, 将 $T$ 加入一个新分点记为 $T_1$ ,  $T_1$ 加入一个新分点记为 $T_2$ ,  $\cdots$ ,  $T_{k-1}$ 加入一个新分点

记为 $T_k$ . 注意到 $|T| \geq |T_1| \geq |T_2| \geq \cdots \geq |T_{k-1}| \geq |T_k|$ , 由 $k=1$ 的结论即得

$$\begin{aligned} U(f, T) - U(f, T_k) &= [U(f, T) - U(f, T_1)] + [U(f, T_1) - U(f, T_2)] + \cdots + [U(f, T_{k-1}) - U(f, T_k)] \\ &\geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(f, T) - U(f, T_k) &= [U(f, T) - U(f, T_1)] + [U(f, T_1) - U(f, T_2)] + \cdots + [U(f, T_{k-1}) - U(f, T_k)] \\ &\leq (M - m)|T| + (M - m)|T_1| + \cdots + (M - m)|T_{k-1}| \\ &\leq k(M - m)|T|. \end{aligned}$$

**命题2** 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界,  $T_1, T_2$ 为 $[a, b]$ 任意两个分割, 则

$$L(f, T_1) \leq U(f, T_2).$$

证: 将 $T$ 于 $T_2$ 的分点合并得到一个新的分割 $T$ , 则由命题1,

$$L(f, T_1) \leq L(f, T) \leq U(f, T) \leq U(f, T_2).$$

**定义3** 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上有界函数, 分别称

$$\int_a^b f(x)dx = \inf\{ U(f, T) \mid T \text{ 为 } [a, b] \text{ 的分割} \},$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{ L(f, T) \mid T \text{ 为 } [a, b] \text{ 的分割} \}$$

为 $f$ 在 $[a, b]$ 上的上积分与下积分。

由命题2不难证得: 对于 $[a, b]$ 的任一分割 $T$ ,

$$L(f, T) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f, T).$$

**定理2.** 设 $f$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 则下陈述等价:

(1).  $f \in R[a, b]$ ;

(2).  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当区间 $[a, b]$ 的分割 $T$  满足 $|T| < \delta$ 时, 就有

$$U(f, T) - L(f, T) < \varepsilon;$$

(3) $\forall \varepsilon > 0$ , 存在 $[a, b]$  的分割 $T$ , 使得

$$U(f, T) - L(f, T) < \varepsilon;$$

(3).

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx.$$

证: (1)  $\Rightarrow$  (2) 设  $f \in R[a, b]$ , 记  $I = \int_a^b f(x)dx$ , 则由定义知,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当区间  $[a, b]$  的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足

$$|T| < \delta$$

时, 对  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

特殊地, 取  $\xi_i^1, \xi_i^2 \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 满足

$$\sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(\xi_i^1), \quad f(\xi_i^2) < \inf_{\eta \in [x_{i-1}, x_i]} f(\eta) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

于是

$$\begin{aligned} U(f, T) - L(f, T) &= \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) - \inf_{\eta \in [x_{i-1}, x_i]} f(\eta) \right] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[ f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i^1)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(\xi_i^2)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i^1)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + \left| I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i^2)(x_i - x_{i-1}) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) 显然。

(3)  $\Rightarrow$  (4) 由(3),  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$0 \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \leq U(f, T) - L(f, T) < \varepsilon.$$

所以 (4) 成立。

$$\begin{aligned} \underline{(4) \Rightarrow (1)} \quad & \text{记 } I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \text{ 由上积分定义, } \forall \varepsilon > 0, \text{ 存在 } [a, b] \text{ 分割} \\ & T_0 : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b, \end{aligned}$$

使得

$$0 \leq U(f, T_0) - I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取  $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2k(M-m)}$ , 其中  $M$  与  $m$  分别为  $f$  在  $[a, b]$  上的上确界与下确界。对于  $[a, b]$  的任一满足  $|T| < \delta_1$  的分割  $T$ , 将  $T$  与  $T_0$  的分点合并而得到的  $[a, b]$  的分割记为  $T'$ , 由命题1可得

$$U(f, T) - I \leq U(f, T') + k|T|(M-m) - I \leq U(f, T_0) - I + k|T|(M-m) < \varepsilon.$$

同理,  $\exists \delta_2 > 0$ , 对于  $[a, b]$  的任一满足  $|T| < \delta_2$  的分割  $T$ ,

$$I - L(f, T) < \varepsilon.$$

于是, 对于  $[a, b]$  的任一满足  $|T| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  的分割  $T$ ,

$$I - \varepsilon < L(f, T) \leq \sigma(f, T; \xi_i) \leq U(f, T) < I + \varepsilon,$$

故

$$|\sigma(f, T; \xi_i) - I| < \varepsilon,$$

所以  $f \in R[a, b]$ , 且  $\int_a^b f(x)dx = I$ .

**注2** 设  $f : D \rightarrow R$  是有界函数, 则

$$\sup_{\xi \in D} f(\xi) - \inf_{\eta \in D} f(\eta) = \sup_{\xi, \eta \in D} |f(\xi) - f(\eta)|,$$

故

$$U(f, T) - L(f, T) = \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\xi) - f(\eta)|(x_i - x_{i-1}).$$

其几何意义?

**例4** 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap Q, \\ 0, & x \in [0, 1] \cap (R \setminus Q), \end{cases}$$

则函数  $f$  不是 Riemann 可积。因为对区间  $[0, 1]$  的任一分割  $T$ , 则

$$U(f, T) - L(f, T) = 1 - 0 = 1.$$

### 定理3.

1. 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f \in R[a, b]$ .

2. 设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的单调函数, 则  $f \in R[a, b]$ .

3. 设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的有界且只存在有限个间断点函数, 则  $f \in R[a, b]$ .

证明:

1.  $\forall \varepsilon > 0$ , 因为函数  $f$  在  $[a, b]$  连续, 故  $f$  在  $[a, b]$  一致连续, 于是  $\exists \delta > 0$ , 当  $u, v \in [a, b]$  且  $|u - v| < \delta$  时, 就有

$$|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b - a + 1}.$$

因此, 当区间  $[a, b]$  的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足  $|T| < \delta$  时, 便有

$$\begin{aligned} U(f, T) - L(f, T) &= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\xi) - f(\eta)| (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b - a + 1} (x_i - x_{i-1}) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

由定理2的充分性知  $f \in R[a, b]$ .

2. 不妨设  $f$  在  $[a, b]$  上单调不减.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$ , 当区间  $[a, b]$  的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足  $|T| < \delta$  时, 便有

$$\begin{aligned} U(f, T) - L(f, T) &= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\xi) - f(\eta)| (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} [f(b) - f(a)] \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

由定理2的充分性知  $f \in R[a, b]$ .

3. 不妨设  $f$  在  $[a, b]$  上只有一个间断点  $b$ . 有题设,  $f$  在  $[a, b]$  有界:  $|f(x)| \leq M$  ( $a \leq x \leq b$ ).  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $c \in (a, b)$  使得  $b - c < \frac{\varepsilon}{4M + 1}$ . 而  $f \in C[a, c]$ , 根据定理3第一个结论知  $f \in R[a, c]$ , 因此由定理2 的必要性知, 存在区间  $[a, c]$  的分割

$$T_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = c$$



使得

$$U(f, T_1) - L(f, T_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在考虑区间 $[a, b]$ 的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = c < b.$$

则

$$\begin{aligned} 0 \leq U(f, T) - L(f, T) &= U(f, T_1) - L(f, T_1) + \sup_{x \in [c, b]} f(x)(b - c) - \inf_{x \in [c, b]} f(x)(b - c) \\ &\leq U(f, T_1) - L(f, T_1) + 2M(b - c) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{\varepsilon}{4M + 1} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

由定理2的充分性知 $f \in R[a, b]$ ，证毕。

## 2 Riemann积分的性质

**性质1（线性性）** 若 $f, g \in R[a, b]$ ， $\alpha, \beta$ 为常数，则 $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ ，且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

证： $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta_1 > 0$ ，当区间 $[a, b]$ 的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足 $|T| < \delta_1$ 时，对 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ )都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha| + 1};$$

$\exists \delta_2 > 0$ ，当区间 $[a, b]$ 的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足 $|T| < \delta_2$ 时，对 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ )都有

$$\left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2|\beta| + 1}.$$

当区间 $[a, b]$ 的一个分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足 $|T| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时, 对 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )都有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) - \left[ \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \right] \right| \\ &= \left| \alpha \left[ \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \right] + \beta \left[ \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g(x)dx \right] \right| \\ &\leq |\alpha| \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| + |\beta| \left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g(x)dx \right| \\ &\leq \frac{|\alpha|\varepsilon}{2|\alpha|+1} + \frac{|\beta|\varepsilon}{2|\beta|+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

于是由定义知,  $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ , 且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

**性质2 (区域可加性)** 设 $c \in (a, b)$ , 则 $f \in R[a, b]$ 充分必要条件 $f \in R[a, c]$ ,  $f \in R[c, b]$ , 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

证: 充分性.  $\forall \varepsilon > 0$ , 由 $f \in R[a, c]$ ,  $f \in R[c, b]$ 和定理2的必要性质知, 存在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 的分割 $T_1$ 与 $T_2$ 使得

$$U(f, T_1) - L(f, T_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(f, T_2) - L(f, T_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $T^*$ 是将 $T_1$ 与 $T_2$ 分点合并构成区间 $[a, b]$ 的分割, 则

$$U(f, T^*) - L(f, T^*) = U(f, T_1) - L(f, T_1) + U(f, T_2) - L(f, T_2) < \varepsilon,$$

故由定理2的充分性知 $f \in R[a, b]$ .

必要性.  $\forall \varepsilon > 0$ , 由 $f \in R[a, b]$ 和定理2的必要性质知,  $\exists \delta > 0$ , 当区间 $[a, b]$ 的分割 $T$ 满足 $|T| < \delta$ 时, 就有

$$U(f, T) - L(f, T) < \varepsilon.$$

若 $T_1$ 和 $T_2$ 分别是区间 $[a, c]$ 和区间 $[c, b]$ 的分割满足 $|T_1| < \delta$ ,  $|T_2| < \delta$ , 令 $T^*$ 是将 $T_1$ 与 $T_2$ 分点合并构成区间 $[a, b]$ 的分割, 则 $|T^*| < \delta$ , 于是

$$U(f, T^*) - L(f, T^*) < \varepsilon,$$

即

$$U(f, T_1) - L(f, T_1) + U(f, T_2) - L(f, T_2) < \varepsilon,$$

故由定理2的充分性知 $f \in R[a, c]$ ,  $f \in R[c, b]$ .

利用定积分的定义容易证明

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

性质3（保序性） 若  $f, g \in R[a, b]$ , 且  $f(x) \leq g(x) (\forall x \in [a, b])$ , 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

特别

1. 若  $f \in R[a, b]$ , 且  $f(x) \geq 0 (\forall x \in [a, b])$ , 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

2. 若  $f \in R[a, b]$ , 且  $m \leq f(x) \leq M (\forall x \in [a, b])$ , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

3. 若  $f \in R[a, b]$ , 则  $|f| \in R[a, b]$  且

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

证:  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$ , 当区间  $[a, b]$  的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足  $|T| < \delta_1$  时, 对  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$  都有

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon < \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \int_a^b f(x)dx + \varepsilon;$$

$\exists \delta_2 > 0$ , 当区间  $[a, b]$  的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足  $|T| < \delta_2$  时, 对  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$  都有

$$\int_a^b g(x)dx - \varepsilon < \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \int_a^b g(x)dx + \varepsilon.$$

任取区间  $[a, b]$  的一个分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

满足  $|T| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$ , 则

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon < \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \int_a^b g(x)dx + \varepsilon,$$

于是得

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon < \int_a^b g(x)dx + \varepsilon,$$

由  $\varepsilon > 0$  的任意性知,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

对区间 $[a, b]$ 的任一分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

有

$$\begin{aligned} U(|f|, T) - L(|f|, T) &= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} ||f(\xi)| - |f(\eta)|| (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\xi) - f(\eta)| (x_i - x_{i-1}) \\ &= U(f, T) - L(f, T), \end{aligned}$$

故由 $f \in R[a, b]$ 及定理2知 $|f| \in R[a, b]$ .

## 性质4（积分中值公式） 设 $f, g \in R[a, b]$ , 且

$$m \leq f(x) \leq M, \quad g(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [a, b]),$$

则 $\exists \mu \in [m, M]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

特别当 $f \in C[a, b]$ 时, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

证:  $\forall x \in [a, b]$ , 则

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

故由定积分的保序性得

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

若 $\int_a^b g(x)dx = 0$ , 则由上式知 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , 从而对 $\forall \mu \in [m, M]$ , 都有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx;$$

若 $\int_a^b g(x)dx > 0$ , 则

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M,$$

取 $\mu := \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ , 即知 $\mu \in [m, M]$ , 且 $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ .

## 性质5

若 $f, g \in R[a, b]$ , 则 $f \cdot g, \sqrt{f^2 + g^2} \in R[a, b]$ ; 且当 $|g(x)| \geq M > 0 \quad (\forall x \in [a, b])$ 时, 则 $\frac{1}{g} \in R[a, b]$ .

证:  
记

$$M^* =: \sup_{\xi \in [a, b]} |f(\xi)| + \sup_{\eta \in [a, b]} |g(\eta)|.$$

对区间 $[a, b]$ 的任一分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

则

$$\begin{aligned} U(fg, T) - L(fg, T) &= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\xi)g(\xi) - f(\eta)g(\eta)| (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} [|f(\xi)| \cdot |g(\xi) - g(\eta)| + |f(\xi) - f(\eta)| \cdot |g(\eta)|] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq M^* \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |g(\xi) - g(\eta)| + \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\xi) - f(\eta)| \right] (x_i - x_{i-1}) \\ &= M^* \cdot [U(g, T) - L(g, T) + U(f, T) - L(f, T)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(\sqrt{f^2 + g^2}, T) - L(\sqrt{f^2 + g^2}, T) &= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} \left| \sqrt{f^2(\xi) + g^2(\xi)} - \sqrt{f^2(\eta) + g^2(\eta)} \right| (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} \sqrt{[f(\xi) - f(\eta)]^2 + [g(\xi) - g(\eta)]^2} (x_i - x_{i-1}) \quad (|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} - \vec{b}|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} [|f(\xi) - f(\eta)| + |g(\xi) - g(\eta)|] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\xi) - f(\eta)| + \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |g(\xi) - g(\eta)| \right] (x_i - x_{i-1}) \\ &= U(g, T) - L(g, T) + U(f, T) - L(f, T), \\ U\left(\frac{1}{g}, T\right) - L\left(\frac{1}{g}, T\right) &= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} \left| \frac{1}{g(\xi)} - \frac{1}{g(\eta)} \right| (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} \left| \frac{g(\xi) - g(\eta)}{g(\xi) \cdot g(\eta)} \right| (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]} |g(\xi) - g(\eta)| (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{M^2} \cdot [U(g, T) - L(g, T)], \end{aligned}$$

故由定理2的充分性知 $f \cdot g, \sqrt{f^2 + g^2}, \frac{1}{g} \in R[a, b]$ .

**定义1** 设 $I$ 是个区间,  $f$ 是定义在 $I$ 上的函数. 若有函数 $F: I \rightarrow R$ 使得

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I,$$

则称在区间 $I$ 上 $F$ 是 $f$ 的一个原函数。

**例1** 设 $f(x) = [x]$ ，问 $f$ 有原函数吗？

解： $f$ 没有原函数。反证法，若 $F$ 是 $f$ 的一个原函数，则

$$F'(x) = f(x) = [x],$$

因此 $F'$ 有第一类间断点，但这与“导函数既无可去间断点，也无第一类间断点”的结论矛盾。因此 $f$ 没有原函数。

## 定理3（Newton-Leibnitz公式、微积分基本公式）

设 $f \in R[a, b]$ ，且存在 $[a, b]$ 上函数 $F$ 满足 $F'(x) = f(x)$ （称 $F$ 是 $f$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数），则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

证：对区间 $[a, b]$ 的任一分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ )都有

$$\begin{aligned} |\sigma(f, T; \xi_i) - [F(b) - F(a)]| &==== \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right| \\ &==== \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(\xi_i^*)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &==== \left| \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - f(\xi_i^*)](x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq U(f, T) - L(f, T), \end{aligned}$$

由 $f \in R[a, b]$ 及定理2知由定义知

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

证毕。

**例2** 求1.  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ ; 2.  $\int_a^b e^x dx$ ; 3.  $\int_0^\pi \sin x dx$ .

解：

1.  $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0, 1]$ 连续，且 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0, 1]$ 有原函数 $\arctan x$ ，所以由Newton-Leibnitz 公式得

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2.

$$\int_a^b e^x dx = e^x|_a^b = e^b - e^a.$$

3.

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2.$$

例3 求  $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[ \sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right]$

解:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \cos \frac{i\pi}{n}} \frac{1}{n} \quad ([0, 1] n \text{ 等分, } \xi_i \text{ 取为区间的右端点}) \\ &\Leftarrow \int_0^1 \sqrt{1 + \cos \pi x} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2} \cos \frac{\pi x}{2} dx \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \end{aligned}$$

例4 设  $f(x) = \max\{1, x^2\}$ , 求  $\int_0^2 f(x) dx$ .

解:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

故  $f \in C[0, 2]$ , 从而由定理3知  $f \in R[0, 2]$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &===== \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \quad (\text{积分的区域可加性}) \\ &===== \int_0^1 dx + \int_1^2 x^2 dx \\ &===== x \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{10}{3} \quad (\text{Newton-Leibnitz公式}). \end{aligned}$$

例5 设  $f \in C[a, b]$ , 且  $f(x) \geq 0$  ( $\forall x \in [a, b]$ ),  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则  $f(x) \equiv 0$ .

解: 反证法. 若  $\exists x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) > 0$ , 则由连续函数的局部保号性,  $\exists \delta_0 > 0$ , 使得

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad (\forall x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]),$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta_0} f(x)dx + \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)dx + \int_{x_0+\delta_0}^b f(x)dx \quad (\text{积分的区域可加性}) \\ &\geq \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \frac{f(x_0)}{2} dx \quad (\text{积分的保序性}) = f(x_0)\delta_0 > 0,\end{aligned}$$

但这与  $\int_a^b f(x)dx = 0$  矛盾。所以  $f(x) \equiv 0$ 。

例6 求证

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx = 0.$$

证:  $\forall \varepsilon \in (0, \pi)$ , 当  $p > \frac{\ln \left[ \frac{\varepsilon}{\pi - \varepsilon} \right]}{\ln \cos \frac{\varepsilon}{2}}$  时,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} \sin^p x dx + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx \quad (\text{积分的区域可加性}) \\ &\leq \frac{\left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]^p \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2}}{2} \quad (\text{积分的保序性}) \\ &= \frac{\pi - \varepsilon}{2} \cos^p \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

故

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx = 0.$$

例7 设  $f \in R[0, 1]$ , 且  $f$  在 0 处连续, 求证

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

证: 因

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(0) dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(0) \arctan \frac{x}{h} \Big|_{x=0}^{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(0) \arctan \frac{1}{h} = \frac{\pi}{2} f(0),$$

故只需证

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} [f(x) - f(0)] dx = 0.$$

$\forall \varepsilon > 0$ , 由  $f$  在 0 处连续知,  $\exists \delta > 0$ , 使得

$$|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{\pi} \quad (\forall x \in [0, \delta]).$$



于是当  $0 < h < \frac{\varepsilon \delta^2}{2 \int_0^1 |f(x) - f(0)| dx + 1}$  时, 则

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} [f(x) - f(0)] dx \right| &\leq \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} |f(x) - f(0)| dx, \\
 &= \int_0^\delta \frac{h}{h^2 + x^2} |f(x) - f(0)| dx + \int_\delta^1 \frac{h}{h^2 + x^2} |f(x) - f(0)| dx, \\
 &\leq \int_0^\delta \frac{h}{h^2 + x^2} \frac{\varepsilon}{\pi} dx + \int_\delta^1 \frac{h}{\delta^2} |f(x) - f(0)| dx, \\
 &= \frac{\varepsilon}{\pi} \arctan \frac{\delta}{h} + \frac{h}{\delta^2} \int_\delta^1 |f(x) - f(0)| dx, \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

故

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} [f(x) - f(0)] dx = 0.$$