一. 关于复合函数求导

1. 考虑偏微分方程

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} = 0, \tag{1}$$

其中 A, B, C 均为实常数. 假设 $B^2 - AC > 0$ 且 $C \neq 0$. 记 α, β 为一元二次方程 $Ct^2 + 2Bt + A = 0$ 的两个互异的实根, 证明

(i) 方程 (1) 在可逆线性变换 $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ 下可化为等价的微分方程

$$w_{uv} = 0. \tag{2}$$

等价的意思是, 若 $z(x, y)$ 是方程 (1) 的解, 则 $w(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$ 是方程 (2) 的解, 这里 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 是线性变换 $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ 的逆变换; 反之, 若 $w = w(u, v)$ 是方程 (2) 的解, 则 $z(x, y) = w(x + \alpha y, x + \beta y)$ 是方程 (1) 的解.

(ii) 方程(1)的一般解为

$$z(x, y) = f(x + \alpha y) + g(x + \beta y), \tag{3}$$

其中 $f(t)$ 和 $g(t)$ 均为 $\mathbb{R}^1$ 上的任意二次连续可微函数.

<u>证</u>: 由假设 $B^2 - AC > 0$ 且 $C \neq 0$ 可知, 一元二次方程 $A + 2Bt + Ct^2 = 0$ 有两个互异的实根, 记之为 α 和 β. 此时线性变换 $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ 可逆. 其逆变换为 $x = \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta u - \alpha v)$, $y = \frac{1}{\beta - \alpha}(v - u)$.

证(i). 将函数 $z(x, y)$ 看作函数 $w(u, v)$ 和映射 $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ 的复合. 根据复合函数求导的链法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = \left[\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right]w.$$

类似有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \alpha\frac{\partial w}{\partial u} + \beta\frac{\partial w}{\partial v} = \left[\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}\right]w.$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=\left[\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right]^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

同理有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}=\left[\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right]^2 w=\alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

以及

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\left[\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right]\left[\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right]w=\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

将上述三个二阶导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入方程 (1), 并加以整理就得到

$$0=(A+2B\alpha+C\alpha^2)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2(A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+(A+2B\beta+C\beta^2)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \quad (4)$$

注意到 α,β 为一元二次方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 的两个不同的实根, 故上述方程中 w_{uu} 和 w_{vv} 的系数均为零, 而二阶混合导数的系数

$$2(A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta)=4(AC-B^2)/C\neq 0.$$

方程 (4) 就变成方程 (2). 因此若 $z(x,y)$ 是方程 (1) 的解时, $w(u,v)$ 是方程 (2) 的解. 假设 $w(u,v)$ 是方程 (2) 的解, 即 $w_{uv}=0$. 显然 $w(u,v)$ 可表为 $w(u,v)=f(u)+g(v)$, 其中 $f(t)$ 和 $g(t)$ 均为 $\mathbb{R}^1$ 上的任意二次连续可微函数. 不难证明 $z(x,y)=w(u(x,y),v(x,y))=f(x+\alpha y)+g(x+\beta y)$ 是方程 (1) 的解. 故方程 (1) 和方程 (2) 等价.

证(ii) 显然方程 $w_{uv}=0$ 的一般解为 $w(u,v)=f(u)+g(v)$, 其中 $f(u)$ 和 $g(v)$ 均为 $\mathbb{R}^1$ 上的任意二次连续可微函数. 由此可见原微分方程 (1) 的一般解由式 (3) 给出. 证毕. ∎

2. 设函数 $f(x,y)$ 在平面开区域 Ω 上有连续的偏导数, Ω 包含单位圆周 Γ: $x^2+y^2=1$. 证明在单位圆 Γ 上存在两个点 $P_i\in\Gamma$, 使得

$$(yf_x-xf_y)\Big|_{P_i}=0,\quad i=1,2. \quad (5)$$

证明： 令 $\phi(t)=f(\cos t,\sin t)$, 则函数 $g(t)$ 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上连续, 在开区间 $(0,2\pi)$ 上连续可微. 根据连续函数的最值性可知 $g(t)$ 在某两个点 $t_1,t_2\in[0,2\pi]$ 分别取得最大值

和最小值. 设 $t_1 \neq t_2$. 由极值的必要条件值 $g'(t_1) = 0 = g'(t_2)$. 由复合函数求导

$$g'(t) = f_x(\cdots)(-\sin t) + f_y(\cdots)\cos t = 0, \quad t = t_1, t_2.$$

记 $P_i := (\cos t_i, \sin t_i) \in \Gamma$, 则上式即为所要证明的结论 (5). 若 $t_1 = t_2$, 则函数 $f(x,y)$ 在单位圆上为常数, 从而 $g'(t) \equiv 0$. 这表明式 (5) 对单位圆所有的点都成立. 结论得证. 证毕. ∎

二. 关于 Taylor 展式

1. 写出函数 $z = \cos(x^2+y^2)$ 在原点 $(0,0)$ 处的 Taylor 展式, 带 Peano 余项 $o(\rho^2)$, 以及带二阶 Lagrange 余项, 其中 $\rho^2 = x^2+y^2$. (课本第81-82页, 习题1.8题1(1))

解: 由一元函数 $\cos t$ 在 $t=0$ 处的 Taylor 展式知 $\cos t = 1 + O(t^2)$. 由此立刻得到函数 $z = \cos(x^2+y^2)$ 在原点 $(0,0)$ 处, 带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式为 $\cos(x^2+y^2) = 1 + o(\rho^2)$, 实际上 $\cos(x^2+y^2) = 1 + O(\rho^4)$.
以下我们来求带 Lagrange 二阶余项的 Taylor 展式. 为此我们需要计算函数的 Hesse 矩阵. 简单计算得

$$\begin{aligned} z_x &= -2x\sin(x^2+y^2), \\ z_y &= -2y\sin(x^2+y^2), \end{aligned}$$

由此可见函数 $z = \cos(x^2+y^2)$ 在原点处的梯度为零, 即 $\nabla z(0,0) = 0$. 进一步

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -2\sin(x^2+y^2) - 4x^2\cos(x^2+y^2), \\ z_{yy} &= -2\sin(x^2+y^2) - 4y^2\cos(x^2+y^2), \\ z_{xy} &= -4xy\cos(x^2+y^2). \end{aligned}$$

于是函数 $z = \cos(x^2+y^2)$ 的 Hesse 矩阵为

$$H(x,y) = -2\sin(x^2+y^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 4\cos(x^2+y^2)\begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix}.$$

将上式中的第二个矩阵可写成更为方便的形式

$$H(x,y) = -2\sin(x^2+y^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 4\cos(x^2+y^2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}[x,y].$$

于是由带二阶 Lagrange 余项的 Taylor 展式得

$$z(x,y) = z(0,0) + \nabla z(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x,y]H(\xi,\eta)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

其中 $(\xi,\eta) = \theta(x,y)$, $\theta \in (0,1)$. 注意到上式中 $\nabla z(0,0) = 0$, 于是

$$\begin{aligned}\cos(x^2+y^2) &= 1 + \frac{1}{2}[x,y]\left\{-2\sin(\xi^2+\eta^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 4\cos(\xi^2+\eta^2)\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}[\xi,\eta]\right\}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= 1 - \Big\{\sin(\xi^2+\eta^2)\Big\}(x^2+y^2) - 2\Big\{\cos(\xi^2+\eta^2)\Big\}(\xi x+\eta y)^2 \\ &= 1 - \Big\{\sin[\theta^2(x^2+y^2)]\Big\}(x^2+y^2) - 2\Big\{\cos[\theta^2(x^2+y^2)]\Big\}\theta^2(x^2+y^2)^2.\end{aligned}$$

解答完毕.

2． 求函数 $\ln(1+x+y+z)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的两个 Taylor 展开式, 一个带 Peano 余项 $o(\rho^2)$, 其中 $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$, 一个带二阶 Lagrange 余项. (课本第81-82页, 习题1.8题1(3))

解： 将函数 $\ln(1+x+y+z)$ 看做复合函数 $\ln(1+u)$, $u = x+y+z$. 对一元函数 $\ln(1+u)$ 在 $u=0$ 处作二阶 Taylor展开, 并带 Peano 余项得

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2).$$

将 $u = x+y+z$ 代入到上式即得

$$\ln(1+x+y+z) = x+y+z - \frac{1}{2}(x+y+z)^2 + o(\rho^2),$$

其中 $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$. 上式即为所求的带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式. 为了求带 Lagrange 余项的 Taylor 展式，我们需要求函数的 Hesse 矩阵. 我们将梯度向量看做列

向量, 则

$$\nabla \ln(1+x+y+z) = \frac{1}{1+u}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由此得 Hesse 矩阵为

$$H(x,y,z) = \frac{-1}{(1+u)^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[1,1,1].$$

于是所求的带 Lagrange 余项的二阶 Taylor 展式为

$$\ln(1+x+y+z) = (x+y+z) + \frac{1}{2}(x,y,z)H(\theta x, \theta y, \theta z)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= (x+y+z) - \frac{1}{2}\frac{(x+y+z)^2}{[1+\theta(x+y+z)]^2},$$

这里 $\theta \in (0,1)$. 解答完毕.

3．由隐函数定理可知, 方程 $x+y+z+xyz^3=0$ 在原点 $(0,0,0)$ 附近确定了一个隐函数 $z=z(x,y)$． 求函数 $z(x,y)$ 在原点处带 Peano 余项 $o(\rho^2)$ 的二阶 Taylor 展式．

解：我们可以按常规方法, 求出隐函数 $z(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的一阶和二阶偏导数的值. 由此即可求出所求的 Taylor 展式．但用如下方式更加简便.

由方程 $x+y+z+xyz^3=0$ 可知 $z(0,0)=0$. 由 IFT 知因此 xyz^3 至少是四阶项, 因为

$$|xyz^3| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)[-x-y+o(\rho^2)]^3 = O(\rho^5),$$

其中 $\rho^2 = x^2+y^2$. 因此隐函数 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式为 $z=-x-y+o(\rho^2)$. 解答完毕.

三. 关于极值问题

1．求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 位于第一卦限(即 $x,y,z>0$) 上的最大值. 并由此证明对任意正实数 a, b, c, 下述不等式成立：

$$ab^2c^3 \le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

解：作函数 $L(x,y,z,\lambda)=\ln(xy^2z^3)-\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2)$, 其定义域为 $x>0$, $y>0$, $z>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. 解方程组 $L_x=L_y=L_z=0$ 得

$$x^2=\frac{1}{2\lambda},\quad y^2=\frac{2}{2\lambda},\quad z^2=\frac{3}{2\lambda}.$$

将它们代入球面方程 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 得 $\lambda=1/(2r^2)$. 于是函数 L 在区域 $x>0$, $y>0$, $z>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ 上有唯一一个驻点 $(x,y,z,\lambda)=(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r,1/(2r^2))$. 可以证明函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 位于第一卦限部分上可以取得最大值. (可根据条件极值的充分条件严格证明, 但有点麻烦, 已超出要求, 故略去.) 所以函数 u 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值为 $u=\ln r+2\ln r+3\ln r+\ln 2+(3/2)\ln 3=6\ln r+\ln 2+(3/2)\ln 3$.

我们将 $\ln 2+(3/2)\ln 3$ 写作 $\ln 2+(3/2)\ln 3=\ln\sqrt{108}$. 根据上述关于函数 u 的最大值结论，我们得到

$$\ln(xy^2z^3)\le 6\ln r+\ln\sqrt{108}=\ln\sqrt{108}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3.$$

此即

$$xy^2z^3\le\sqrt{108}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3.$$

于上式两边平方得

$$x^2y^4z^6\le 108\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^6.$$

所以对任意正数 $a>0$, $b>0$, $c>0$, 于上式中取 $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$, 我们就得到

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

证毕.

2．求函数 $z = xy(4-x-y)$ 在由三条直线 $x=1$, $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围有界闭区域上的最大值．

解：记由三条直线 $x=1$, $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围有界开区域为 D, 其闭包为 $\overline{D}$.
I) 求函数在开区域 D 内的极值．令

$$\begin{cases} z_x = 4y - 2xy - y^2 = 0, \\ z_y = 4x - 2xy - x^2 = 0. \end{cases}$$

容易求解这个方程组，得四组解 $(x,y) = (0,0)$, $(4,0)$, $(0,4)$, $(4/3,4/3)$. 由此可知函数在开区域 D 内有且仅有一个驻点 $(4/3,4/3)$. 计算得 $z(4/3,4/3) = 64/27$.
(II) 求函数在边界上的极值. 区域 D 的边界由三个直线段构成。 这对应着三个条件极值问题如下：

$$\max \quad xy(4-x-y), \quad s.t. \quad x=1, \tag{6}$$

$$\max \quad xy(4-x-y), \quad s.t. \quad y=0, \tag{7}$$

$$\max \quad xy(4-x-y), \quad s.t. \quad x+y=6. \tag{8}$$

容易解极值问题 (6) 得驻点 $(1,3/2)$. 对于问题 (7), 函数 $z(x,y)$ 在边界 $y=0$ 上恒为零, 不可能在这个边界上取得最大值. 我们来解极值问题 (8). 我们可以用 Lagrange 乘子法来求解. 不过对于这个问题而言, 下述解法更简单. 显然问题等价于 $\max -2xy$, s.t. $x+y=6$ 或 $\max 2x(x-6)$. 容易解这个问题由唯一一个驻点 $x=3$. 由此的极值问题 (8) 有驻点 $(x,y)=(3,3)$, 函数值为 $z(3,3) = -18$
综上可知，闭区域 $\overline{D}$ 上连续函数 $z(x,y)$ 只可能在驻点 $(4/3,4/3)$, $(1,3/2)$ 和 $(3,3)$, 以及三个角点 $(1,0)$, $(6,0)$ 和 $(1,5)$ 上取得最大值. 计算函数 $z(x,y)$ 在六个点上的值可知, 函数 $z(x,y)$ 在点 $(4/3,4/3)$ 处取得最大值, 最大值为 $z(4/3,4/3) = 64/27$．解答完毕.

3. 求函数 $z(x,y)$ 的极值, 其中 $z(x,y)$ 为方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的隐函数. (这是课本第93页习题1.9题2).

解：一般说来, 隐式曲面(等值面) $F(x,y,z)=0$ 上可以确定多个隐函数 $z=z(x,y)$, 只要在所考察点处满足 $F_z \neq 0$ 即可. 这些隐函数是否有驻点, 以及这些驻点是否为极值点,

需要做进一步的考察. 以下我们来考虑上述所给的问题. 为方便我们记

$$F(x,y,z) := 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8.$$

由于 $F(x,y,z)$ 关于 z 是二次的, 所以我们可以解方程 $F=0$ 得到出两个显式函数 $z=z(x,y)$. 然后按照通常求极值的方法求解。 不过我们还是用下述更一般的方法求解. 我们先求出函数 $F(x,y,z)$ 的三个偏导函数, 以及它的Hesse矩阵, 以备后用.

$$\nabla F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+8z \\ 4y \\ 2z+8x-1 \end{bmatrix}, \quad H_F = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

假设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数, 它有极值点 (x,y,z), $z=z(x,y)$, 则根据极值的必要条件可知在极值点处有 $(z_x,z_y)=(0,0)$. 根据IFT知隐函数的偏导数应该满足

$$(z_x,z_y) = -(F_x,F_y)/F_z, \quad F_z \neq 0.$$

由此得隐函数 $z(x,y)$ 的驻点方程组为

$$\begin{aligned} x+2z &= 0, \\ y &= 0, \\ F(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

不难求解这个方程组得两组解 $(x_1,y_1,z_1)=(-2,0,1)$, $(x_2,y_2,z_2)=(16/7,0,-8/7)$. 并且不难验证, 在这两个点处 $F_z \neq 0$. 因此由IFT知方程 $F(x,y,z)=0$ 在这两点处分别确定了两个隐函数, 记作 $z=z_1(x,y)$, $z=z_2(x,y)$. 并且点 (x_1,y_1) 和点 (x_2,y_2) 分别是这两个隐函数的驻点。 往下我们来考察这两个点是否为极值点. 为此我们需要计算隐函数的Hesse矩阵. 在课堂上以及作业里, 我们推导过如下隐函数 $z=z(x,y)$ 的二阶偏导数的计算公式

$$z_{xx} = \frac{1}{F_z^3}\Big(2F_xF_zF_{xz} - F_z^2F_{xx} - F_x^2F_{zz}\Big)$$

$$z_{yy} = \frac{1}{F_z^3}\Big(2F_yF_zF_{yz} - F_z^2F_{yy} - F_y^2F_{zz}\Big)$$

$$z_{xy}=\frac{1}{F_z^3}\Big(F_z^2F_{xy}+F_xF_yF_{xy}-F_yF_zF_{xz}-F_xF_zF_{yz}\Big)$$

注意到在驻点处, $F_x=0$, $F_y=0$, 不难求得两个隐函数在各自驻点处的Hesse矩阵分别为

$$H_1=\begin{bmatrix}\frac{4}{15} & 0\\ 0 & \frac{4}{15}\end{bmatrix},\quad H_2=\begin{bmatrix}-\frac{4}{15} & 0\\ 0 & -\frac{4}{15}\end{bmatrix}.$$

显然 H_1 正定, H_2 负定. 因此我们得到结论:

(i)在点 $(x_1,y_1,z_1)=(-2,0,1)$ 附近, 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了唯一一个隐函数 $z=z_1(x,y)$. 这个隐函数在点 $(x,y)=(-2,0)$ 处取极小值 1;

(ii) 在点 $(x_2,y_2,z_2)=(16/7,0,-8/7)$ 附近, 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定唯一一个隐函数 $z=z_2(x,y)$. 这个隐函数在点 $(x,y)=(\frac{16}{7},0)$ 处取极大值 $\frac{-8}{7}$;

(iii) 除上述两个隐函数之外, 其余由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数均无极值. 解答完毕.