期末样题参考解答

一、填空题（15 空 45 分，答案直接填写在横线上）

1．积分 $\int_0^3 dx\int_0^x f(xy)dy$ 在极坐标下的累次积分为____________________________。

答案：$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{3}{\cos\theta}} f(r^2\cos\theta\sin\theta)rdr$

2．设平面闭域 $D=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$，则积分

$\iint_D \left(1+x\sin(yx^2)\right)dxdy=$____________________________。 答案：$=\iint_D dxdy=2$

3．已知函数 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ 上具有连续偏导数，且

$f(x,1)=2\cos x$，$\iint_D f(x,y)dxdy=1$，则 $\iint_D y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dxdy=$_______________。

答案：$2\sin 1-1$

4．计算积分值 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} \dfrac{\ln(1-x)}{x}dx=$___________________________。

答案：$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} \dfrac{\ln(1-x)}{x}dy=\int_0^1 (1-x)\ln(1-x)dx=-\dfrac{1}{4}$

5．设 $\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\}$，则 $\iiint_\Omega (x+y+z)dxdydz=$____________。

答案：$=\iiint_\Omega zdxdydz=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 dz\int_0^z zrdr=2\pi\int_0^2 \dfrac{z^3}{2}dz=4\pi$

6．设 L 是 xy 平面上以 $A(1,1), B(-1,1), C(1,-1)$ 为顶点的三角形周边构成的曲线，

则第一型曲线积分 $\int_L (x^2-y^2)ds=$____________________。 答案：0

7．设 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，则第一型曲面积分

$\iint_S (x+y+z)dS=$__________。 答案：$=\iint_S zdS=\iint_{x^2+y^2\le R^2} z\dfrac{R}{z}dxdy=\pi R^3$

8．设 L 为 xy 平面上的曲线 $y=e^{x^2}, 0\le x\le 1$，起点为 $(0,1)$，终点为 $(1,e)$，

则第二型曲线积分 $\int_L xdx+ydy=$____________。

答案：$= \int_{(0,1)}^{(1,e)} d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \frac{x^2+y^2}{2}\Big|_{(0,1)}^{(1,e)} = \frac{e^2}{2}$

9．设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，则在 $x=y=z=1$ 点 $\mathrm{div}[\mathrm{grad} f(x,y,z)]=$_____。 答案：8

10．设参数曲面 $S: x=(a+b\sin\theta)\cos\varphi,\ \ y=(a+b\sin\theta)\sin\varphi,\ \ z=b\cos\theta$，

$0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi$，其中 $a>b>0$，则 S 的单位法向量 $\mathbf{n}=\pm$____________；

面积微元 $dS=$________________。

答案：$\mathbf{n}=\pm(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$，$dS=b(a+b\sin\theta)d\theta d\varphi$

11．设 S 为 $\mathbf{R}^3$ 中的平面圆盘：$z=0$，$x^2+y^2\le 2$，正法向向下，则第二型曲面积分

$\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dxdy=$____________________。 答案：-2π

12．设 S 为单位球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$，外法向为正，则第二型曲面积分

$\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=$____________________。 答案：4π

13．设向量场 $\mathbf{F}=(xyz, xz+y, x(y-z))$，记 $\Omega=\{(x,y,z): 0\le z\le 2, 0\le x^2+y^2\le 1\}$，记 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位法向，指向外侧，则向量场 $\mathbf{F}$ 通过 Ω 边界向外的发散通量

$\oiint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=$______________。 答案：$=\iiint\limits_\Omega (yz+1-x)dV=\iiint\limits_\Omega dV=2\pi$

14．设 S 为圆柱面 $\{(x,y,z): x^2+y^2=1, 0\le z\le 2\}$，法向指向外侧，则第二型曲面积分

$\iint\limits_S (y+z)dydz+(z+x)dzdx+e^{z^2}dxdy=$________________。 答案：0

二、计算题（4 题 38 分，列出计算过程和必要的根据）

1.（9 分）计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_S x^2ydydz-xy^2dzdx+3zdxdy$，其中定向曲面 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 在平面 $z=1$ 下方的部分，法向朝下。

解：依照题意 S 为下半球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1, z\le 1$ 的外侧，

再取平面圆盘 $\Sigma: z=1, x^2+y^2\le 1$，法向朝上，

令 Ω 为 S 和 Σ 包围的半球区域，则 $\partial\Omega=S+\Sigma$； ………… 3 分

应用 Gauss 公式可得

$$\oiint\limits_{\partial\Omega} x^2ydydz-xy^2dzdx+3zdxdy=\iiint\limits_\Omega 3dxdydz=2\pi,\qquad \text{………… 4 分}$$

而 $\iint\limits_{\Sigma} x^2ydydz - xy^2dzdx + 3zdxdy = 3\iint\limits_{\Sigma} dxdy = 3\pi$， ………… 2 分

所以 $I = \iint\limits_{S} = \oiint\limits_{\partial\Omega} - \iint\limits_{\Sigma} = 2\pi - 3\pi = -\pi$ 。

2.（9 分）设 S 为空间区域 $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$ 的边界构成的封闭曲面，求第一型曲面积分

$$I = \iint\limits_{S} (x^2+y^2+z^2)dS 。$$

解：由题意 S 为有限锥体的表面，由两部分构成：

有限锥面 $S_1 : z = \sqrt{x^2+y^2}$， $x^2+y^2 \le 1$，其面积微元 $dS = \sqrt{2}dxdy$，

$$\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2+z^2)dS = 2\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr = \sqrt{2}\pi \text{，……5 分}$$

平面圆盘 $S_2 : z = 1$， $x^2+y^2 \le 1$，其面积微元 $dS = dxdy$；

$$\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2+z^2)dS = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2+1)dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2+1)rdr = \frac{3\pi}{2} \text{，……3 分}$$

综上得到 $I = (\sqrt{2}+\frac{3}{2})\pi$ 。 …… 1 分

3.（10 分）已知 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2 = 2ax$（$a > 0$）截下的部分，

设 S 质量均匀，求其重心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 。

解：将 S 投影到 xy 平面上区域 $D : (x-a)^2 + y^2 \le a^2$，锥面上 $dS = \sqrt{2}dxdy$ …… 2 分

不妨令 S 的密度为 1，则总质量、静力矩依次为

$$M = \iint\limits_{S} dS = \sqrt{2}\iint\limits_{D} dxdy = \sqrt{2}\pi a^2 \text{，…… 2 分}$$

$$M_{yz} = \iint\limits_{S} xdS = \sqrt{2}\iint\limits_{D} xdxdy = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\cos\theta dr = \sqrt{2}\pi a^3 \text{，…… 2 分}$$

$$M_{xz} = \iint\limits_{S} ydS = \sqrt{2}\iint\limits_{D} ydxdy = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\sin\theta dr = 0 \text{，…… 1 分}$$

$$M_{xy} = \iint\limits_{S} zdS = \sqrt{2}\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr = \frac{32}{9}\sqrt{2}a^3 \text{，…2 分}$$

所以 $\bar{x} = a$， $\bar{y} = 0$， $\bar{z} = \frac{32}{9\pi}a$ 。

4.（10 分）利用 Stokes 公式计算曲线积分 $I = \oint_L z^2dx + xydy + yzdz$，其中有向曲线 L 为上半球面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与柱面 $x^2+y^2 = ay$ 的交线，从 z 轴正向看过去逆时针方

向为 L 的正向。

解：令 S 为上半球面被柱面截下的部分，外侧为正向，则 $\partial S = L$，应用 Stokes 公式

$$I = \oint_{\partial S} = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & xy & yz \\ dydz & dzdx & dxdy \end{vmatrix} = \iint_S zdydz + 2zdzdx + ydxdy, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 5 \text{分}$$

记 $\mathbf{F} = (z, 2z, y)$，已知 S 的单位正法向 $\mathbf{n} = \dfrac{(x, y, z)}{a}$，因此有

$$I = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_S \frac{xz + 3yz}{a} dS = \iint_S (x + 3y)\frac{z}{a} dS, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 3 \text{分}$$

注意到 $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，$x^2 + y^2 \le ay$，$dS = \dfrac{a}{z}dxdy$，

$$I = \iint_{x^2+y^2\le ay} (x + 3y)dxdy = 3\iint_{x^2+y^2\le ay} ydxdy = \cdots = \frac{3}{8}\pi a^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 2 \text{分}$$

三、证明题（2 题 17 分，写出详细论证过程）

1. （9 分）令 $a > 0$，求证：对于 xy 平面上任何绕原点的分段连续可微的简单（不自交）闭曲线 C，曲线积分 $\displaystyle\oint_C \frac{xdy - ydx}{a^2x^2 + a^{-2}y^2} = 2\pi$，其中 C 取逆时针方向为正向。

证明：首先取 C_1 为曲线 $a^2x^2 + a^{-2}y^2 = \varepsilon^2$（$\varepsilon > 0$），逆时针方向为正向，则

$$\oint_{C_1} \frac{xdy - ydx}{a^2x^2 + a^{-2}y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_1} xdy - ydx = \frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{a^2x^2+a^{-2}y^2\le\varepsilon^2} dxdy = 2\pi。\quad \cdots\cdots\cdots\ 3 \text{分}$$

对于任意绕原点逆时针为正向的分段连续可微的简单闭曲线 C，

令 C_1 同上，且与 C 不相交（$\varepsilon > 0$ 充分小），

记二曲线之间包围的区域为 D，则 $\partial D = C - C_1$，所以

$$\oint_C = \oint_{\partial D} + \oint_{C_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 3 \text{分}$$

注意 $(0,0) \notin D$，因此在 D 中有，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{a^2x^2 + a^{-2}y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{a^2x^2 + a^{-2}y^2}\right) = \frac{a^{-2}y^2 - a^2x^2}{(a^2x^2 + a^{-2}y^2)^2},$$

应用 Green 公式便知，

$$\oint_{\partial D} \frac{xdy - ydx}{a^2x^2 + a^{-2}y^2} = \iint_D 0dxdy = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 3 \text{分}$$

所以 $\displaystyle\oint_C \frac{xdy - ydx}{a^2x^2 + a^{-2}y^2} = \oint_{C_1} \frac{xdy - ydx}{a^2x^2 + a^{-2}y^2} = 2\pi$。

2.（8 分）设 $f(u)=\int_0^{2\pi} e^{u\cos x}\cos(u\sin x)dx$，

（1）验证 $f^{(n)}(u)=\int_0^{2\pi} e^{u\cos x}\cos(nx+u\sin x)dx$；

（2）进一步证明 $f(u)\equiv$ 常数（考虑在 $u=0$ 点的 Taylor 级数展开）。

解：（1）利用归纳推导，已知 n=0 时等式成立（或验证 n=1 时成立），　………… 1 分

假设 $f^{(n)}(u)=\int_0^{2\pi} e^{u\cos x}\cos(nx+u\sin x)dx$，

则 $f^{(n+1)}(u)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial u}[e^{u\cos x}\cos(nx+u\sin x)]dx$

$=\int_0^{2\pi} e^{u\cos x}[\cos x\cos(nx+u\sin x)-\sin x\sin(nx+u\sin x)]dx$

$=\int_0^{2\pi} e^{u\cos x}\cos((n+1)x+u\sin x)dx$，归纳完成。　………… 4 分

（2）由（1）可得 $f^{(n)}(0)=\int_0^{2\pi}\cos(nx)dx=0$，$n=1,2,\cdots$，　………… 1 分

且任取 $M>0$，$|u|\le M$ 时，对于所有 $n=1,2,\cdots$

$|f^{(n)}(u)|\le\int_0^{2\pi} e^{u\cos x}dx\le\int_0^{2\pi} e^{u}dx=2\pi e^{u}\le 2\pi e^{M}$，

因此 $|u|\le M$ 时成立 Taylor 级数展开

$$f(u)=f(0)+f'(0)u+\frac{1}{2!}f''(0)u^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)u^n+\cdots$$

$=f(0)=\int_0^{2\pi}1dx=2\pi$。　………… 2 分