《微积分A2》第十八讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年04月20日

Theorem

定理: 设 $f(x,y,z)$ 是空间域 Ω 上的连续函数, 设 $S \subset \Omega$ 是域 Ω 内的一个曲面, 有正则的参数表示 $r = r(u,v)$, $(u,v) \in D$, 其中 D 为平面有界闭域, 则函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上的第一型面积分存在, 且

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(r(u,v))|r_u \times r_v|dudv.$$

注: 第一型线积分计算公式 $\int_a^b f(r(t))|r'(t)|dt$ 与上述第一型面积分计算公式具有相似性!

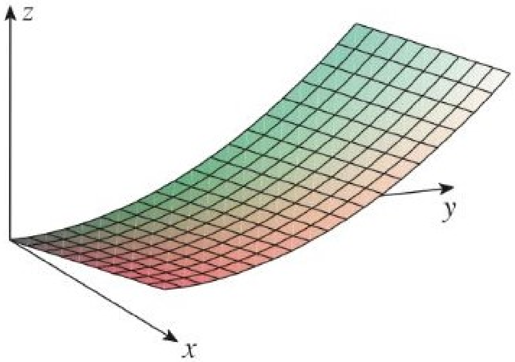
显式曲面情形的计算公式

当曲面 S 为显式曲面，即为某二元函数 $z = z(x, y)$，$(x, y) \in D$ 的图像时，第一型曲面积分有如下计算公式

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy.$$

因为显式曲面可写作 $(x, y) \mapsto r(x, y) = (x, y, z(x, y))$，$(x, y) \in D$，即显式曲面也是参数曲面. 又 $r_x = (1, 0, z_x)$，$r_y = (0, 1, z_y)$，$r_x \times r_y = (-z_x, -z_y, 1)$，故 $|r_x \times r_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$.

例: 计算第一型面积分 $\iint_S y\,dS$, 其中 S 为曲面 $z = x + y^2$ 的一部分, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$. 如图所示.



例子续

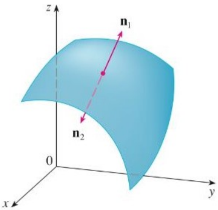
解: 简单计算得 $z_x = 1$, $z_y = 2y$. 于是根据显式曲面情形的计算公式得

$$\iint_S y dS = \iint_{0\le x\le 1, 0\le y\le 2} y\sqrt{1+1^2+(2y)^2} dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 \sqrt{2+4y^2} y dy = \frac{13\sqrt{2}}{3}.$$

解答完毕.

定义: 一个光滑曲面 S 在其上的每个点有两个方向相反的单位法向量. (i) 称 S 称为可定向的 (orientable), 如果在其上(边界点除外)可以定义连续变化的单位法向量; (ii) 如果取定可定向曲面 S 的一个连续变化的法向量为正向, 则称 S 为定向曲面 (an oriented surface). 此时定向曲面有时记作 S^+. 如图所示.



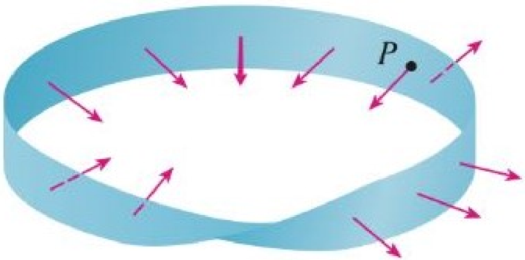
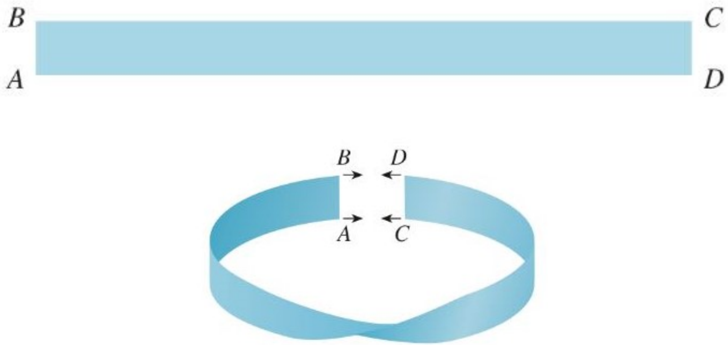


FIGURE 4
A Möbius strip

Möbius 带构造

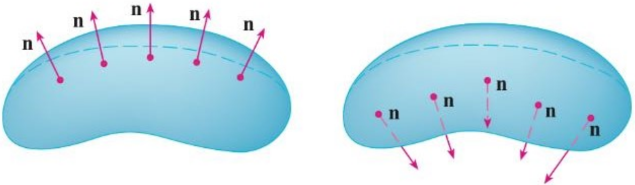


显式曲面可定向

设 S 为显式曲面，即函数 $z = z(x, y)$ 的图像，其中 $z(x, y)$ 连续可微，则 S 有如下连续变化的单位法向量

$$\vec{n} = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

这个法向量与 z 的正向成锐角．通常我们定义这个向量 $\vec{n}$ 为显式曲面 S 的正法向．简言之其正法向朝上．



设曲面 S 有正则参数表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, 则向量

$$\vec{n}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

为曲面 S 上连续变化的单位法向量. 因此 S 可定向, 且称法向量 $\vec{n}(\mathbf{r})$ 为 S 关于这个参数表示的正法向.

回忆曲面 S 的参数表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ 称为是正则的 (regular), 意指 $\mathbf{r}(u, v)$ 连续可微, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$, $\forall (u, v) \in D$, 且 $\mathbf{r} : D \to S$ 是一一对应, 这里 D 为平面有界闭域.

例子，球面的单位法向量

熟知球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 有参数表示

$$r(\phi,\theta)=\big(a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi\big).$$

其两个偏导数为

$$r_\phi=\big(a\cos\phi\cos\theta, a\cos\phi\sin\theta, -a\sin\phi\big),$$
$$r_\theta=\big(-a\sin\phi\sin\theta, a\sin\phi\cos\theta, 0\big).$$

于是 $r_\phi\times r_\theta=\big(a^2\sin^2\phi\cos\theta, a^2\sin^2\phi\sin\theta, a^2\sin\phi\cos\phi\big)$. 由此知 $|r_\phi\times r_\theta|=a^2\sin\phi$. 于是关于这个参数表示的正法向为

$$\vec{n}=\frac{r_\phi\times r_\theta}{|r_\phi\times r_\theta|}=\big(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi\big)=\frac{1}{a}r(\phi,\theta).$$

球面上的单位法向量，图示

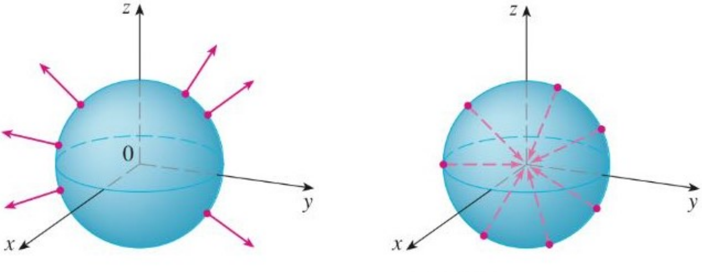


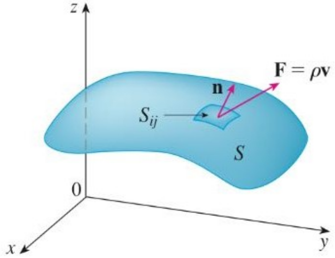
FIGURE 8
Positive orientation

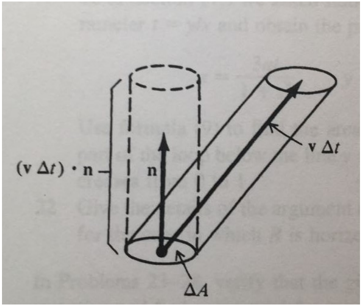
FIGURE 9
Negative orientation

<u>注</u>：对于封闭曲面如球面，通常取外法向为正法向.

设 $\mathbf{S}$ 为定向曲面，单位正法向记作 $\mathbf{n}$. 设流体以速度 $\mathbf{v}(x,y,z)$ 通过曲面 $\mathbf{S}$ (想象流体为水，$\mathbf{S}$ 为鱼网). 考虑单位时间内流体通过曲面 $\mathbf{S}$ 的流量. 设流体密度为 $\rho(x,y,z)$. 为简单计可设 $\rho \equiv 1$. 现对曲面 $\mathbf{S}$ 作割 $\mathbf{S} = \cup_{ij}\mathbf{S}_{ij}$. 当分割足够细密时，$\mathbf{S}_{ij}$ 接近平面，于是单位时间里通过 $\mathbf{S}_{ij}$ 的流量为 $(\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})_{p_{ij}}|\mathbf{S}_{ij}|$，其中 $p_{ij} \in \mathbf{S}_{ij}$，称为取样点.

单位时间内通过小曲面块的流量，图示





流量可表为第一型曲面积分

于是在单位时间里通过整个定向曲面 S (由负法向侧流向正法向侧) 的流量近似为

$$\sum_{i,j}(\rho v\cdot n)_{p_{ij}}|S_{ij}|.$$

假设当 $\|\pi\|\triangleq \max_{i,j}\operatorname{diam}(S_{ij})\to 0$ 时，上述和式的极限存在，则极限就是 $\rho v\cdot n$ 在曲面 S 上的第一型面积分. 因此单位时间内流体通过曲面 S 的流量可定义为

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i,j}(\rho v\cdot n)|S_{ij}|=\iint_S \rho(x,y,z)v(x,y,z)\cdot n(x,y,z)dS.$$

Definition

定义: 设 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 为定向曲面 S^+ 上的连续向量场，称积分

$$\iint_{S^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \triangleq \iint_{S} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS$$

为向量场 $\mathbf{F}$ 在定向曲面 S^+ 上的(第二型)曲面积分，其中 $\mathbf{n}$ 为定向曲面 S^+ 的单位正法向.

设 S 为显式曲面 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D\subset \mathbb{R}^2$, 正法向朝上, 即 S 的正法向为 $n=(-z_x,-z_y,1)/\triangle$, 其中 $\triangle=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$, 则连续向量场 $F=(P,Q,R)$ 在 S 的第二型面积分可表为

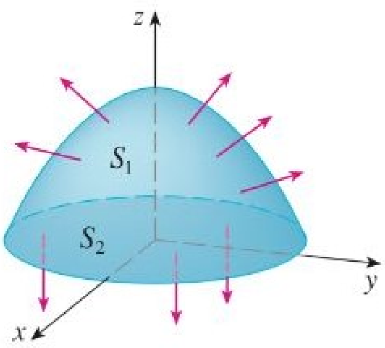
$$\iint_{S^+} F\cdot dS=\iint_S (F\cdot n)dS=\iint_S(-Pz_x-Qz_y+R)\frac{1}{\triangle}dS$$

$$=\iint_D(-Pz_x-Qz_y+R)\frac{\triangle}{\triangle}dxdy=\iint_D(-Pz_x-Qz_y+R)dxdy.$$

注: 上述最后二重积分中的被积函数 $(-Pz_x-Qz_y+R)$ 里, 变量 z 应以 $z=z(x,y)$ 代入.

例子

例: 计算第二型面积分 $\iint_{S^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, 其中 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$, 定向曲面 S^+ 由抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 和平面 $z = 0$ 所围立体的边界, 正法向朝外. 如图所示.



例子续一

<u>解</u>: 曲面 S 由抛物面 S_1 和平面 S_2 构成. 向量场 $F = (y, x, z)$, 抛物面 S_1: $z = 1 - x^2 - y^2$ 的外法向量为 $(-z_x, -z_y, 1) = (2x, 2y, 1)$, 定义域 $D : x^2 + y^2 \le 1$. 于是

$$\iint_{S_1^+} F \cdot dS = \iint_D (y, x, z) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy$$

$$= \iint_D [y \cdot 2x + x \cdot 2y + (1 - x^2 - y^2)] dxdy$$

$$= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2) dxdy.$$

对上述二重积分作极坐标变换 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ 得

$$\iint_{S_1^+} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + 4r^2\cos\theta\sin\theta - r^2) r dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{\pi}{2}.$$

再考虑曲面 S_2 上的积分. 注意 S_2 的正法向为 $n = (0, 0, -1)$.

故 $$\iint_{S_2^+} F \cdot dS = \iint_{S_2} [(y, x, z) \cdot (0, 0, -1)] dS$$

$$= \iint_{S_2} (-z)dS = \iint_{D} (-0)dS = 0.$$

因此

$$\iint_{S^+} F \cdot dS = \iint_{S_1^+} F \cdot dS + \iint_{S_2^+} F \cdot dS = \frac{\pi}{2}.$$

解答完毕.

Theorem

定理：设定向曲面 $\mathbf{S}$ 为正则参数曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$, 其中 D 为平面有界闭域，其正法向为 $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$，则对曲面 $\mathbf{S}$ 上的任意连续向量场 $\mathbf{F}$ 成立

$$\iint_{S^+}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)dudv.$$

Proof.

证明: 由假设定向曲面 S^+ 的单位正法向为 $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$, 故

$$\iint_{S^+} F \cdot dS = \iint_{S^+} (F \cdot n) dS = \iint_{S} F \cdot \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} dS$$

$$= \iint_{D} F \cdot \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} |r_u \times r_v| dudv = \iint_{D} F \cdot (r_u \times r_v) dudv.$$

□

设定向曲面 S 的正单位法向量 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，曲面 S 上的连续向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$，则场 F 在 S 上的积分可写作

$$\iint_{S^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$$

$$= \iint_S \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right] dS.$$

若记

$$\begin{aligned} dydz &= \cos\alpha dS, \\ dzdx &= \cos\beta dS, \\ dxdy &= \cos\gamma dS, \end{aligned} \qquad \text{或} \qquad \begin{aligned} dy \wedge dz &= \cos\alpha dS, \\ dz \wedge dx &= \cos\beta dS, \\ dx \wedge dy &= \cos\gamma dS, \end{aligned}$$

则第二型面积分 $\iint_{S^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 可写作如下两个形式

$$\iint_{S^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S^+} \Big[P dydz + Q dzdx + R dxdy\Big]$$

或

$$\iint_{S^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S^+} \Big[P dy\wedge dz + Q dz\wedge dx + R dx\wedge dy\Big].$$

Theorem

定理: 考虑积分 $J = \iint_{S^+} R(x, y, z)dxdy$, S^+ 为函数 $z = z(x, y)$ 所确定的显式曲面，其中 $(x, y) \in D$, 其正法向向上，则

$$\iint_{S^+} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

注: 上式左边是第二型面积分，右边是二重积分.

证: 由假设曲面的正法向朝上, 故显式曲面 $z = z(x, y)$ 的单位法向量为 $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (-z_x, -z_y, 1)/\triangle$, 其中 $\triangle = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$. 依照定义知

$$\iint_{S^+} R(x, y, z)dxdy = \iint_S R(x, y, z)\cos\gamma dS,$$

$$= \iint_S R(x, y, z)\frac{1}{\triangle}dS = \iint_D R(x, y, z(x, y))\frac{1}{\triangle} \cdot \triangle dxdy$$

$$= \iint_D R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

定理得证. □

例一: 设 D 为 x,y 坐标平面上的单位圆盘 $x^2+y^2\leq 1$, 正法向朝下, 则对任何 D 上的连续函数 $R(x,y)$, 我们有

$$\iint_{D^+} R(x,y)dxdy = -\iint_D R(x,y)dxdy.$$

这是因为 D^+ 的正法向为 $n=(0,0,-1)$, 即 $\cos\gamma=-1$. 于是

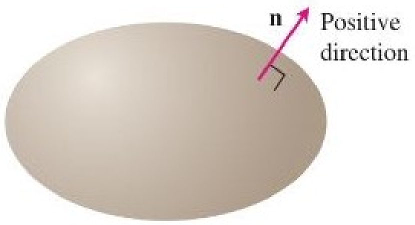
$$\iint_{D^+} R(x,y)dxdy = \iint_D R(x,y)\cos\gamma dS = -\iint_D R(x,y)dxdy.$$

命题得证.

例二: 计算第二型面积分

$$J = \iint_{S^+} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy,$$

其中 S^+ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$, 正法向朝外.



例二续一

<u>解</u>: 若对椭球面 S 作尺度变换, 即 $x \to ax$, $y \to by$, $z \to cz$, 则椭球面变为单位球面, 而单位球面可由经度它的 θ 和纬度 ϕ 参数化. 由此可得椭球面 S 的参数方程如下

$$x = a\sin\phi\cos\theta, \quad y = b\sin\phi\sin\theta, \quad z = c\cos\phi,$$

其中 $(\phi, \theta) \in D \triangleq [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. 以下来求曲面 S 关于上述参数表示的单位法向量. 为此先计算两个偏导数

$$\mathbf{r}_\phi = \big(a\cos\phi\cos\theta, b\cos\phi\sin\theta, -c\sin\phi\big),$$

$$\mathbf{r}_\theta = \big(-a\sin\phi\sin\theta, b\sin\phi\cos\theta, 0\big).$$

它们的叉积为

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \big(bc\sin^2\phi\cos\theta, ac\sin^2\phi\sin\theta, ab\cos\phi\sin\phi\big).$$

问题: 这个叉积是否为正法向(朝外)? 为此考察 $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$ 在某点处的取值, 例如点 $(a, 0, 0)$, 对应的参数值为 $(\phi, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$. 经计算知 $(\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\big|_{(\frac{\pi}{2},0)} = (bc, 0, 0)$.

例二续三

由此可见，这个叉积在点 $(a,0,0)$ 处的法向朝外，即叉积是正法向. 记向量场 $F(x,y,z)=(x,y,z)$，则所求积分为

$$J=\iint_{S^+}F\cdot dS=\iint_D F(r(\phi,\theta))\cdot(r_\phi\times r_\theta)d\phi d\theta$$

$$=\iint_D[(a\sin\phi\cos\theta,b\sin\phi\sin\theta,c\cos\phi)$$

$$\cdot\left(bc\sin^2\phi\cos\theta,ac\sin^2\phi\sin\theta,ab\cos\phi\sin\phi\right)]d\phi d\theta$$

$$=abc\iint_D\sin\phi d\phi d\theta=abc\int_0^\pi\sin\phi d\phi\int_0^{2\pi}d\theta=4\pi abc.$$

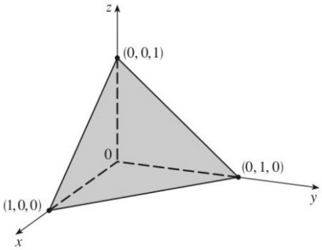
解答完毕.

注：后面我们将用 Gauss 定理计算这个积分，更简单

课本第200页例4.5.4：计算第二型曲面积分

$$J=\iint_{S^+}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S},$$

其中向量场 $F=(x^2,y^2,z^2)$，曲面 S 是立体 V 的边界曲面，正法向朝外，V 表示由三个坐标平面，即 $x=0$, $y=0$, $z=0$，以及平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体. 如图所示.



例三续一

解: 显然有向曲面 S^+ 由四个有向平面构成, 即 S_1^+ $(x=0)$, S_2^+ $(y=0)$, S_3^+ $(z=0)$, S_4^+ $(x+y+z=1)$. 于是

$$J=\iint_{S^+} F\cdot dS=\sum_{k=1}^{4}\iint_{S_k^+} F\cdot dS.$$

以下分别考虑这个四个平面三角域上的积分. 平面 S_1^+ 上单位正法向为 $n=(-1,0,0)$. 因此

$$\iint_{S_1^+} F\cdot dS=\iint_{S_1}(x^2,y^2,z^2)\cdot(-1,0,0)dS$$

$$=-\iint_{S_1} x^2 dS=0. \quad (\text{因为在 } S_1 \text{ 上 } x=0).$$

例三续二

同理可证

$$\iint_{S_2^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_3^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0.$$

考虑曲面 S_4^+ 上的积分. 其单位正法向为 $\mathbf{n} = (1,1,1)/\sqrt{3}$. 故

$$\iint_{S_4^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S_4} (x^2,y^2,z^2)\cdot(1,1,1)dS$$

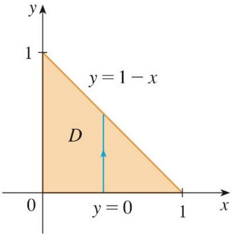
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S_4} (x^2+y^2+z^2)dS.$$

注意在平面 S_4 上, $x+y+z=1$, 且 $x,y,z\geq 0$. 三个变量

x,y,z 具有对称性. 因此

$$\iint_{S_4} x^2 dS = \iint_{S_4} y^2 dS = \iint_{S_4} z^2 dS.$$

于是
$$\iint_{S_4^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{S_4} z^2 dS = \sqrt{3}\iint_{S_4} z^2 dS.$$
为计算上式右边的曲面积分，将 S_4 表为函数 $z = 1 - x - y$ 的图像，其中 $(x, y) \in D : x + y \leq 1$ 且 $x, y \geq 0$. 如图所示.



于是

$$\iint_{S_4} z^2 dS = \iint_D (1-x-y)^2 \sqrt{1+1^2+1^2} dxdy$$

$$= \sqrt{3} \iint_D (1-x-y)^2 dxdy = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

综上得

$$\iint_{S^+} F \cdot dS = \iint_{S_4^+} F \cdot dS = \sqrt{3} \iint_{S_4} z^2 dS = \frac{1}{4}.$$

解答完毕.

Theorem

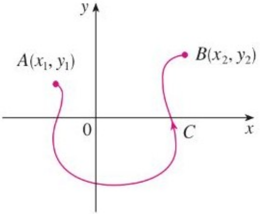
<u>定理</u>: 若平面或空间向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 是域 Ω 上的梯度场，即存在 Ω 上连续可微函数 $f(\mathbf{r})$，使得 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$，其中 $\mathbf{r} = (x, y)$ 或 $\mathbf{r} = (x, y, z)$，$\mathbf{r} \in \Omega$，则对 Ω 内的任一定向曲线 C^+，它有正则的参数表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$，$a \le t \le b$，且定向协调，成立

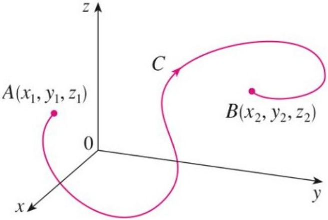
$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C^+} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

<u>比较</u>: 微积分学基本定理

$$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a).$$

意义：当向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 是梯度场时，即 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$，则向量场 $\mathbf{F} = \nabla f$ 的线积分值只与起点和终点有关，与积分路径无关.





Proof.

证：根据线积分计算公式，以及 Newton-Leibniz 公式得

$$\int_{C^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\right] dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

□

例子

<u>例</u>: 万有引力(向量)场

$$\vec{F} = -\frac{GMm\vec{r}}{|r|^3} = -\frac{GMm(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

是梯度场, 因为 $\vec{F}$ 可表示为 $\vec{F}(r) = \nabla f(r)$ (直接验证), 其中

$$f(x, y, z) = \frac{GMm}{|r|} = \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

此时函数 f 称为场 F 的势函数(potential functions), 或原函数 (primitive functions). 这里 M 和 m 分别为地球和质点的质量.

例子续

由线积分基本定理可知，引力场 $\vec{F}$ 关于质点从起点 $(3,4,12)$ 到终点 $(2,2,0)$，沿任何路径 C^+ 运动所作的功为

$$\int_{C^+} F\cdot dr = f(2,2,0) - f(3,4,12)$$

$$= GMm\left[\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}} - \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}\right]$$

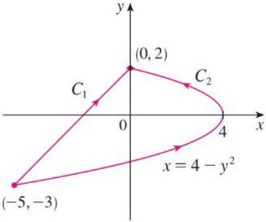
$$= GMm\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right].$$

解答完毕.

给定起点和终点，有无穷条有向曲线(常称作路径) 连接它们.

一般向量场沿着这样两条不同的路径的积分值通常是不同的.

如图所示的两条路径 C_1 和 C_2 有相同的起点 $(-5,-3)$ 和终点 $(0,2)$. 不难验证，向量场 $F(x,y)=(y^2,x)$ 沿着这两条路径的积分值不同，即 $\int_{C_1} F\cdot dr \neq \int_{C_2} F\cdot dr$. 见 Apr15讲义第17-19页.



Definition

定义: 区域 D 上的连续向量场(平面或空间的) F(r) 称为保守场(conservative fields), 如果向量场 F 在开域 D 上积分与路径无关.

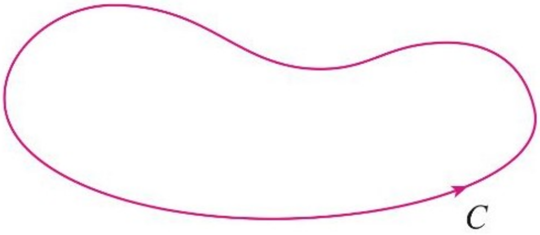
用上述术语，线积分基本定理可表述如下

Theorem

定理: 梯度场是保守场，即梯度场积分与路径无关.

Definition

<u>定义</u>: 一条路径(分段光滑曲线) C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, 称为闭路径, 如果 $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, 即起点和终点相同. 如图.



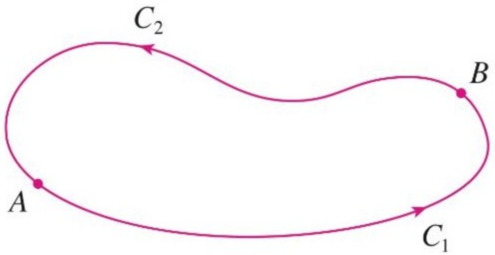
积分与路径无关⇔ 任意闭路径积分为零

Theorem

定理: 设 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 是域 D 上的连续向量场, 则场 $\mathbf{F}$ 积分与路径无关, 当且仅当对每个闭路径 $C \subset D$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$.

定理证明

证: $\Rightarrow$: 设场 F 积分与路径无关, 那么对于任意一条闭路径 C, 在其上取两个不同的点 $A, B \in C$, 则得到两条路径 C_1, 由 A 到 B, 和路径 C_2, 由 B 到 A. 记 $-C_2$ 为路径 C_2 反向路径, 则两条路径 $C_1, -C_2$ 有相同的起点和终点.



证明续一

于是$\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{-C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. 由此得

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$=\int_{-C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0.$$

这表明场 $\mathbf{F}$ 关于任何闭路径的积分均为零.

$\Leftarrow$: 设场 $\mathbf{F}$ 关于任何闭路径的积分均为零. 设 C_1 和 C_2 为任意两条路径, 有相同的起点和终点, 则路径 $C = C_1 \cup \{-C_2\}$ 是一条闭路径. 于是 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. 由此得

$$0 = \int_{C_1 \cup \{-C_2\}} = \int_{C_1} + \int_{-C_2} = \int_{C_1} - \int_{C_2}.$$

即 $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. 这表明场 $\mathbf{F}$ 积分与路径无关. 证毕. $\square$

Theorem

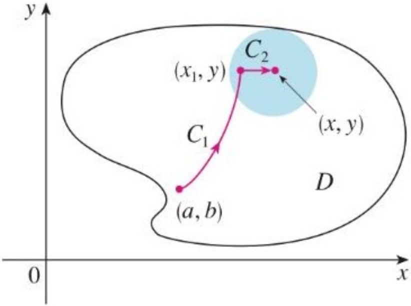
定理: 设 $\mathbf{F}$ 是区域 $\mathbf{D}$ 上的连续向量场, 则场 $\mathbf{F}$ 积分与路径无关, 当且仅当 $\mathbf{F}$ 是梯度场.

证: $\Leftarrow$: 根据线积分基本定理可知, 当 $\mathbf{F}$ 是梯度场时, $\mathbf{F}$ 积分与路径无关. 充分性得证.

$\Rightarrow$: 设场 $\mathbf{F}$ 线积分与路径无关. 要证 $\mathbf{F}$ 是梯度场. 我们只考虑平面情形. 空间情形类似处理. 任意固定一点 $(a,b)\in D$, 由于场 $\mathbf{F}$ 积分与路径无关, 故可如下定义函数

$$f(x,y)\triangleq\int_{(a,b)}^{(x,y)}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\quad \forall (x,y)\in D.$$

以下证 $\nabla f = F$. 设点 $(x_1, y), (x, y) \in D$, (任)取路径 C_1, 起点为 (a, b), 终点为 (x_1, y), 取路径 C_2 为水平线段, 起点为 (x_1, y), 终点为 (x, y), 如图所示.



于是

$$f(x,y)=\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=f(x_1,y)+\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

记 $\mathbf{F}=(P,Q)$，则 $\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_2}Pdx+Qdy$，由于 C_2 为水平线段，故 $dy=0$. 因此

$$\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{x_1}^{x}P(t,y)dt.$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x}P(t,y)dt=P(x,y).$$

类似可证

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=Q(x,y),\quad \forall(x,y)\in D.$$

这就证明了

$$\nabla f=(f_x,f_y)=(P,Q)=F.$$

即 F 是梯度场. 证毕. $\square$

Theorem

定理: 若 $\mathbf{F} = (P, Q)$ 是 C^1 平面梯度场, 则 $P_y = Q_x$.

证: 当 $\mathbf{F}$ 梯度场时, 则存在连续可微函数 $f(x, y)$, 使得 $\nabla f = \mathbf{F}$, 即 $f_x = P$, $f_y = Q$. 由于 P, Q 连续可微, 故函数 $f(x, y)$ 二阶连续可微. 于是

$$P_y = [f_x]_y = f_{xy} = f_{yx} = [f_y]_x = Q_x.$$

证毕. $\square$

Definition

可微向量场 $\mathbf{F} = (P, Q)$ 的旋度定义为 $\mathrm{rot}(P, Q) \triangleq Q_x - P_y$. 如果 $\mathrm{rot}(P, Q) = 0$ 即 $P_y = Q_x$, 则称场 $\mathbf{F} = (P, Q)$ 为无旋场.

故上述定理可表述为: 梯度场必为无旋场.

作业

习题4.3 (page 186-187): 10, 11(选作).

注一: 题11将在习题课里作详细讨论. 大家可提前作一番思考. 另外关于题目作一个更正: 曲面 S 为单位球面, 即 $a = 1$.

注二: 题10提示: (i) 椭球面有参数表示: $x = a\sin\phi\cos\theta$, $y = b\sin\phi\sin\theta$, $z = c\cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. (ii) 根据点到平面的距离公式可得

$$L(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

习题4.4 (page 191-193): 3(1)(3), 4, 5.

习题4.5 (page 201-202): 1, 2, 3(1)(3), 4, 5, 7.