引言

学习材料（1）

微积分所关心的问题——变化与运动；其核心问题——极限。

在系统学习之前，我们首先浏览一下微积分中两个基本问题，从而建立一个宏观的感觉是极其有益的。

0.1 面积问题

如何求以x轴、曲线$y = x^2$及直线$x = x_0$所围曲边梯形A的面积S？

2500年前的古希腊人用"切分"的方法计算区域的面积。如图，将$[0, x_0]$进行n等分，然后在A内做出相应的小矩形，则这些小矩形的面积和为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_0}{n} \left(\frac{x_0}{n} i\right)^2 = \frac{x_0^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

设

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = an^3 + bn^2 + cn + d,$$

其中a, b, c, d为待定常数，并令$n = 1, 2, 3, 4$解方程组得$a = 1/3, b = 1/2, c = 1/6, d = 0$. 用数学归纳法可证

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

于是这些小矩形的面积和为

$$\frac{x_0^3}{n^3} \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right).$$

当n越来越大时，这些小矩形的面积和越来越接近数值$\frac{x_0^3}{3}$，我们称此值$\frac{x_0^3}{3}$为A的面积，记作

$$\frac{x_0^3}{3} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_0}{n} \left(\frac{x_0}{n} i\right)^2$$

面积问题引出了微积分中一个分支——积分学。

0.2 切线问题

考虑方程为$y = \frac{x^3}{3}$的曲线。求它在点$P\left(x_0, \frac{x_0^3}{3}\right)$处的切线$T$ 满足的方程（关于切线确切的定义将在以后给出，目前你将它暂时理解为在P点接触曲线的直线，如图。）由于切线经过曲线上的点P，所以要写出直线T的方程，只要知道它的斜率m即可。如何求m?

我们首先在曲线上取P附近一个点$Q\left(x, \frac{x^3}{3}\right)$，计算割线$PQ$的斜率$m_{PQ}$，由图可见

$$m_{PQ} = \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}}{x - x_0} = \frac{1}{3}\left(x^2 + xx_0 + x_0^2\right)$$

想象点Q沿着曲线向点P运动（如图所示），则割线PQ的斜率m_{PQ}越来越接近于x_0^2，故切线T的斜率x_0^2，即

$$x_0^2 = \lim_{Q\to P} m_{PQ}$$

由于Q趋于P点时，有x趋于x_0，于是

$$x_0^2 = \lim_{x\to x_0 a} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}}{x - x_0}$$

切线问题引出了微积分中一个分支——微分学，但这比积分学的发明晚了2000年。微积分的思想主要归功于法国数学家Fermat(1601-1665)，并由英国数学家Newton(1642-1727)、德国数学家Leibniz(1646-1716)发展起来的。

微积分中的两个分支（积分学与微分学）极其基本问题（面积与切线）表面上相去甚远，然而它们是密切相关的。正如以后将指出的，面积问题与切线问题在一定意义上互为逆问题。通过路程与速度的关系，可以理解这一点: 求路程的“切线问题”就是求速度；求速度的“面积问题”就是求路程。

Newton发明微积分是为了解释行星围绕太阳的运动，今天微积分被广泛用于计算卫星和航天器的轨道，预测人口规模的变化，计算物价的涨落，预报天气、计算人寿保险的贴率等等。

第1章 实数与数列的极限

R 表示实数集合;
$\forall$ 表示“任取”或“任意给定”——<u>A</u>ny;
$\exists$ 表示“存在”或“能够找到”——<u>E</u>xist;
=: 表示“定义”或“规定”。

1 实数集的界与确界

设A是实数集的一个非空子集。
如果$\exists b\in R$，使得$\forall x\in A$，都要$x\le b$，则称b是A的一个<u>上界</u>，此时称集合A<u>有上界</u>;
如果$\exists a\in R$，使得$\forall x\in A$，都要$x\ge a$，则称a是A的一个<u>下界</u>，此时称集合A<u>有下界</u>;
如果$\exists M>0$，使得$\forall x\in A$，都要$|x|\le M$，则称M是A的一个<u>界</u>.

注1 设A是实数集的一个非空子集，则A有界的充分必要条件是A既有上界又有下界。事实上，若M是A的一个界，则$\forall x\in A$，都有

$$-M\le x\le M,$$

从而$-M$是A的一个下界、M是A的一个上界；若a是A的一个下界、b是A的一个上界，则$\forall x\in A$，都有

$$\begin{aligned} |x| &= |a+x-a| \\ &\le |a|+|x-a| \\ &= |a|+x-a \quad (\text{因}a\text{是}A\text{的下界}) \\ &\le |a|+b-a \quad (\text{因}b\text{是}A\text{的上界}), \end{aligned}$$

从而$|a|+b-a$是A的一个界。

易知，如果b是A的一个上界，$b+1, b+2, \cdots$都是A的上界。

问题: 非空有上界集合A是否总有一个“最小的上界”？（“最小的上界”通常称为上确界）

定义（上确界） 设$A \subset R$，$A \neq \emptyset$. 如果$\exists \xi \in R$，使得
(i)ξ是E的一个上界，即$\forall x \in A$，都有$x \leq \xi$；
(ii)ξ是A的最小的上界，即$\forall \tilde{\xi} < \xi$，则$\tilde{\xi}$不再是$A$的上界，也即$\forall \tilde{\xi} < \xi$，$\exists \tilde{x} \in A$，使得$\tilde{x} > \tilde{\xi}$.
则称ξ是A的上确界。

注2 上确界定义中（ii）等价于说：若$\hat{\xi}$ 是A的一个上界，则$\hat{\xi} \geq \xi$.

注3 若$\bar{\xi}$也是A的上确界，则由注2知

$$\bar{\xi} \geq \xi, \quad \xi \geq \bar{\xi},$$

因此$\bar{\xi} = \xi$. 故知，集合A的上确界如果存在，就必定唯一。记这个唯一的上确界为$\sup A$. (supremum)

类似地可定义下确界。

定义（下确界） 设$E \subset R$，$A \neq \emptyset$. 如果$\exists \eta \in R$，使得
(i)η是A的一个下界，即$\forall x \in A$，都有$x \geq \eta$；
(ii)η是A的最大的下界，即$\forall \tilde{\eta} > \eta$，则$\tilde{\eta}$不再是$A$的下界，也即$\forall \tilde{\eta} > \eta$，$\exists \tilde{x} \in A$，使得$\tilde{x} < \tilde{\eta}$.
则称η是A的下确界。

注4 下确界定义中（ii）等价于说：若$\hat{\eta}$ 是A的一个下界，则$\hat{\eta} \leq \eta$.

注5 集合A的下确界如果存在，就必定唯一。记这个唯一的下确界为$\inf A$. (infimum)

定理（确界的存在性）
(1)若$A \subset R$，$A \neq \emptyset$，且A有上界，则A有上确界；
(2)若$A \subset R$，$A \neq \emptyset$，且A有下界，则A有下确界。

上述定理涉及到实数理论，在此略去证明。

例1 设$A = \{x \in R | 0 < x,\ x^2 < 2\}$，则$\sup A = \sqrt{2}, \inf A = 0$.

例2 设A是R中非空有界集合，证明
(1) 集合$\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\}$有界；
(2)

$$\sup A - \inf A = \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\}.$$

证：(2)对$\forall x_1, x_2 \in A$，不妨设$x_1 \geq x_2$，则

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= x_1 - x_2 \\ &\leq \sup A - \inf A \end{aligned}$$

于是由$x_1, x_2 \in A$的任意性，得

$$\sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\} \le \sup A - \inf A.$$

下证

$$\sup A - \inf A = \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\}.$$

若不然，则由上得

$$\sup A - \inf A > \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\}.$$

因此，记

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{2}\left[\sup A - \inf A - \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\}\right],$$

则$\varepsilon_0 > 0$，故$\sup A - \varepsilon_0$不是A的上界，而$\inf A + \varepsilon_0$不是A的下界，所以$\exists x_1', x_2' \in A$，使得

$$\sup A - \varepsilon_0 < x_1', \quad x_2' < \inf A + \varepsilon_0,$$

从而

$$\begin{aligned}\sup A - \inf A - 2\varepsilon_0 &< x_1' - x_2' \\ &\le |x_1' - x_2'| \\ &\le \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\},\end{aligned}$$

于是

$$\sup A - \inf A - 2\varepsilon_0 < \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\},$$

即

$$\sup A - \inf A - [\sup A - \inf A - \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\}] < \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\},$$

也即

$$\sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\} < \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\},$$

但这是一个矛盾。该矛盾说明原假设不对，所以

$$\sup A - \inf A = \sup\{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in A\},$$

证毕。

2 数列极限概念

按确定的顺序排列的一列数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

称为<u>数列</u>，简记该数列为$\{a_n\}$，其中a_n称为数列的<u>通项</u>。

现有数列$\{a_n\}$，其中$a_n = 2^{\frac{n+1}{n}}$. 易知当n越来越大并趋于无穷时，$a_n = 2^{\frac{n+1}{n}}$越来越接近2.

问题： “n多大时，才能使$a_n = 2^{\frac{n+1}{n}}$与2之间的差小于0.1？”

解：我们的问题是找正的自然数N，使得当$n > N$时，有$|a_n - 2| < 0.1$，
即$|2\frac{n+1}{n} - 2| < 0.1$，也即$\frac{2}{n} < 0.1$.

于是当$n > N =: \frac{2}{0.1} = 20$时，

$$|a_n - 2| = \left|2\frac{n+1}{n} - 2\right| = \frac{2}{n} < 0.1.$$

若我们将问题中的数字改为更小的0.01，那么通过同样的方法，我们发现，当$n > N =: \frac{2}{0.01} = 200$时，

$$|a_n - 2| = \frac{2}{n} < 0.01;$$

类似地，如果$n > N =: \frac{2}{0.001} = 2000$时，

$$|a_n - 2| = \frac{2}{n} < 0.001;$$

$\forall \varepsilon > 0$，如果$n > N =: \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$时，

$$|a_n - 2| = \frac{2}{n} < \varepsilon, \quad （因为n > N > \tfrac{2}{\varepsilon}）.$$

定义1 设$\{a_n\}$是一个数列，A为一常数。

(1). 如果$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_\varepsilon \in N_+$，当$n > N_\varepsilon$时，有

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad 即 \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

则称$n \to +\infty$时，$\{a_n\}$的<u>极限</u>为A，记作$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$，简称$\{a_n\}$的收敛于$A$.（几何解释？）；

特别地当$A = 0$时，称$n \to +\infty$时，$\{a_n\}$是一个<u>无穷小量</u>。

(2). 如果$\{a_n\}$不存在极限，即任何实数A都不是数列$\{a_n\}$的极限，则称$\{a_n\}$<u>发散</u>。

(3). 如果$\forall M > 0$，$\exists N_M \in N$，当$n > N_M$时，有

$$|a_n| > M,$$

则称$n \to +\infty$时，$\{a_n\}$是一个<u>无穷大量</u>，记作$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$.

问题： 如何叙述

A不是$\{a_n\}$的极限；　$\{a_n\}$不是一个无穷小量；　$\{a_n\}$发散；　$\{a_n\}$不是一个无穷大量。

例1 证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 + 1} = 1.$$

证明：

$$\left[\left|\frac{n^2-4}{n^2+1}-1\right|=\frac{5}{n^2+1}<\frac{5}{n}<?\varepsilon\right]$$

$\forall\varepsilon>0$，取$N_\varepsilon=\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N_\varepsilon$时，有

$$\left|\frac{n^2-4}{n^2+1}-1\right|=\frac{5}{n^2+1}<\frac{5}{n}<\varepsilon,\quad （因为n>N_\varepsilon>\tfrac{5}{\varepsilon}）$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-4}{n^2+1}=1.$$

例2设$a>1$，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

证明（一）：

$$\left[\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\sqrt[n]{a}-1<?\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\log_a(1+\varepsilon)\right]$$

$\forall\varepsilon>0$，取$N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}\right]+1$，当$n>N_\varepsilon$时，有

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\sqrt[n]{a}-1 &= a^{\frac{1}{n}}-1\\ &< a^{\log_a(1+\varepsilon)}-1\quad （因为n>N_\varepsilon>\tfrac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}）\\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

证明（二）：设$\sqrt[n]{a}=1+h_n$，即$h_n=\sqrt[n]{a}-1$. 则$h_n>0$，

$$a=(1+h_n)^n=C_n^0+C_n^1h_n+C_n^2h_n^2+\cdots+C_n^nh_n^n\geq nh_n,$$

从而

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=h_n\leq\frac{a}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$，取$N_\varepsilon=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N_\varepsilon$时，有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=h_n\leq\frac{a}{n}<\varepsilon,\quad （因为n>N_\varepsilon>\tfrac{a}{\varepsilon}）$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

例3 证明

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

证明：令$h_n = \sqrt[n]{n} - 1$. 则$h_n \geq 0$，

$$\begin{aligned} n &= (1+h_n)^n = C_n^0 + C_n^1 h_n + C_n^2 h_n^2 + \cdots + C_n^n h_n^n \\ &\geq \tfrac{n(n-1)}{2} h_n^2, \quad \text{当} n \geq 2 \text{时}, \end{aligned}$$

于是

$$h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad \text{当} n \geq 2 \text{时}.$$

$$\left[\sqrt{\frac{2}{n-1}} <?\varepsilon \Leftarrow \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 <?n \right]$$

$\forall \varepsilon > 0$，取$N_\varepsilon = \max\left\{2, \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 1\right\}$，当$n > N_\varepsilon$时，有

$$\begin{aligned} |\sqrt[n]{n} - 1| &= h_n \\ &\leq \sqrt{\tfrac{2}{n-1}} \quad （\text{因为} n > N_\varepsilon \geq 2） \\ &< \varepsilon \quad （\text{因为} n > N_\varepsilon \geq \left[\tfrac{2}{\varepsilon^2}\right] + 1\text{，故} n > \tfrac{2}{\varepsilon^2} + 1）, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

例4 设$a > 1$，证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

证明：设$h = a - 1$. 则$h > 0$，

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n \\ &= C_n^0 + C_n^1 h + C_n^2 h^2 + \cdots + C_n^n h^n \\ &\geq \tfrac{n(n-1)}{2} h^2, \quad \text{当} n \geq 2 \text{时}, \end{aligned}$$

于是当$n \geq 2$时，

$$\frac{n}{a^n} \leq \frac{2}{(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)(a-1)^2}$$

$$\left[\frac{2}{(n-1)(a-1)^2} <?\varepsilon \Leftarrow \frac{2}{\varepsilon(a-1)^2} + 1 <?n \right]$$

$\forall\varepsilon>0$，取$N_\varepsilon=\max\left\{2,\left[\frac{2}{\varepsilon(a-1)^2}\right]+1\right\}$，当$n>N_\varepsilon$时，有

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{n}{a^n}-0\right| &= \tfrac{n}{a^n}\\ &\le \tfrac{2}{(n-1)(a-1)^2} \quad （因为n>N_\varepsilon\ge 2）\\ &< \varepsilon \quad （因为n>N_\varepsilon\ge\left[\tfrac{2}{\varepsilon(a-1)^2}\right]+1，故n>\tfrac{2}{\varepsilon(a-1)^2}+1），\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0.$$

例5设$a>1$, $k\in N$，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

证明：因$a>1$, $k\in N$，故$\sqrt[k]{a}>1$. 由例4知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}=0,$$

因此$\forall\varepsilon>0$，（对$\sqrt[k]{\varepsilon}>0$），$\exists N_\varepsilon$，当$n>N_\varepsilon$时，有

$$\left|\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}-0\right|<\sqrt[k]{\varepsilon},$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{n^k}{a^n}-0\right|=\left|\tfrac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}-0\right|^k &< (\sqrt[k]{\varepsilon})^k\\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

例6设$\{a_n\}$是一个数列。若其子列$\{a_{2k-1}\}$和子列$\{a_{2k-1}\}$都收敛于A，则数列$\{a_n\}$收敛于A.

证：$\forall\varepsilon>0$，由

$$\lim_{k\to+\infty}a_{2k-1}=A,$$

$\exists N_1\in Z_+$，当$k>N_1$时，有

$$|a_{2k-1}-A|<\varepsilon;$$

再由

$$\lim_{k\to+\infty}a_{2k}=A,$$

$\exists N_2\in Z_+$，当$k>N_2$时，有

$$|a_{2k}-A|<\varepsilon.$$

取$N_\varepsilon =: 2N_1+2N_2$，则$N_\varepsilon \in Z_+$，当$n > N_\varepsilon$时，
(1)若n为奇数，$n=2k-1$，则由$2k-1>N_\varepsilon>2N_1$得$k>N_1$，于是

$$|a_n - A| = |a_{2k-1} - A| < \varepsilon;$$

(2)若n为偶数，$n=2k$，则由$2k>N_\varepsilon>2N_2$得$k>N_2$，于是

$$|a_n - A| = |a_{2k} - A| < \varepsilon.$$

综上，总有

$$\underline{|a_n - A| < \varepsilon},$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A.$$

例7（Stolz） 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足

(1)

$$0 < b_1 < b_2 < \cdots, \quad \text{且} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty,$$

(2)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A,$$

则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

证明：$\forall \varepsilon > 0$，由

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A,$$

$\exists N_1 \in N$，当$n > N_1$时，有

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - A < \frac{\varepsilon}{2},$$

也即

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < A + \frac{\varepsilon}{2},$$

再由$b_1 < b_2 < \cdots$，得

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < \left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n),$$

由此

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N_1+2}-b_{N_1+1}) < a_{N_1+2}-a_{N_1+1} < \left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N_1+2}-b_{N_1+1}),$$
$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N_1+3}-b_{N_1+2}) < a_{N_1+3}-a_{N_1+2} < \left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N_1+3}-b_{N_1+2}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < \left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n);$$

相加，得

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_{N_1+1})<a_{n+1}-a_{N_1+1}<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_{N_1+1}),$$

再由$0<b_n\ (n=1,2,\cdots)$，得

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_{n+1}}\right)<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\frac{a_{N_1+1}}{b_{n+1}}<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_{n+1}}\right),$$

即

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_{n+1}}\right)+\frac{a_{N_1+1}}{b_{n+1}}-A<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-A<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_{n+1}}\right)+\frac{a_{N_1+1}}{b_{n+1}}-A,$$

也即

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{b_{N_1+1}}{b_{n+1}}+\frac{a_{N_1+1}}{b_{n+1}}<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-A<\frac{\varepsilon}{2}-\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{b_{N_1+1}}{b_{n+1}}+\frac{a_{N_1+1}}{b_{n+1}},$$

故

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left(|A|+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{b_{N_1+1}}{b_{n+1}}+\frac{|a_{N_1+1}|}{b_{n+1}}.$$

$$\left[\left(|A|+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{b_{N_1+1}}{b_{n+1}}+\frac{|a_{N_1+1}|}{b_{n+1}}<?\frac{\varepsilon}{2}\Leftarrow(2|A|+\varepsilon)\frac{b_{N_1+1}}{\varepsilon}+\frac{2|a_{N_1+1}|}{\varepsilon}<?b_{n+1}\right]$$

再由

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=+\infty,$$

$\exists N_2\in N$，当$n>N_2$时，就有

$$(2|A|+\varepsilon)\frac{b_{N_1+1}}{\varepsilon}+\frac{2|a_{N_1+1}|}{\varepsilon}<b_{n+1}.$$

令$N_\varepsilon=\max\{N_1,N_2\}$「$\varepsilon\to N_1,N_2\to N_\varepsilon$」，当$n>N_\varepsilon$时，有

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-A\right| &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\left(|A|+\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\tfrac{b_{N_1+1}}{b_{n+1}}+\tfrac{|a_{N_1+1}|}{b_{n+1}} \quad（\text{因为}n>N_\varepsilon\ge N_1）\\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2} \quad（\text{因为}n>N_\varepsilon\ge N_2）\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.$$

例8设

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=A,$$

证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A.$$

证明：利用Stolz命题，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \tfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} &= (\Leftarrow) \quad \lim_{n\to+\infty} \tfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n+1-n} \qquad \text{（Stolz命题）} \\ &= \quad \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} \\ &= \quad A. \end{aligned}$$

3　数列极限的性质

性质1（唯一性） 若$\{a_n\}$收敛，则其极限值是唯一的。

证：设$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$，又设$\lim_{n\to+\infty} a_n = B$. 下证$A = B$.

反证法。若$A \neq B$，不妨设$A < B$. （画图）

对$\frac{B-A}{2}(> 0)$，由$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$，故$N_1 \in N_+$，当$n > N_1$时，有

$$|a_n - A| < \frac{B-A}{2},$$

从而

$$a_n < A + \frac{B-A}{2},$$

即

$$a_n < \frac{A+B}{2}.$$

再由$\lim_{n\to+\infty} a_n = B$，故$N_2 \in N_+$，当$n > N_2$时，有

$$|a_n - B| < \frac{B-A}{2},$$

从而

$$B - \frac{B-A}{2} < a_n,$$

即

$$\frac{A+B}{2} < a_n.$$

则当$n > N_1 + N_2$时，有

$$a_n < \frac{A+B}{2}, \quad \text{和} \quad \frac{A+B}{2} < a_n.$$

但这是个矛盾。该矛盾说明原假设不对，故$A = B$，所以$\{a_n\}$的极限值是唯一的。

性质2（有界性） 若$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$有界，即$\exists M > 0$，使得

$$|a_n| \leq M, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证：设$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon\in N_+$，当$n>N_\varepsilon$时，

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

特别地，取$\varepsilon=1$，$\exists N\in N_+$，当$n>N$时，

$$|a_n - A| < 1,$$

故

$$|a_n| = |a_n - A + A| \le |a_n - A| + |A| < 1 + |A|, \quad n = N+1, N+2, \cdots .$$

取$M=\max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1+|A|\}$，有

$$|a_n| < M, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

所以M是$\{a_n\}$的界。

性质3（保号性）

设$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$.

(1). 若$A>0$，则$\exists N\in N_+$，当$n>N$时，

$$a_n > 0.$$

(2). 若$A<0$，则$\exists N\in N_+$，当$n>N$时，

$$a_n < 0.$$

(3). 若$\exists N\in N_+$，使得当$n>N$时，$a_n\le 0$，则

$$A \le 0.$$

(4). 若$\exists N\in N_+$，使得当$n>N$时，$a_n\ge 0$，则

$$A \ge 0.$$

证：(1). 对$\varepsilon=A(>0)$，由$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$，$\exists N\in N_+$，当$n>N$时，

$$|a_n - A| < A, \text{ 即 } 0 < a_n < 2A,$$

所以当$n>N$时，

$$a_n > 0.$$

(3). 反证法，假定$A>0$，则由结论(1)知，$\exists N\in N_+$，当$n>N$时，

$$a_n > 0,$$

但这与条件(3)矛盾。

性质4（夹挤原理）

设$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$满足

$$a_n \le b_n \le c_n, \quad n = N+1, N+2, \cdots .$$

若

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = A,$$

则

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = A.$$

证：$\forall\varepsilon > 0$，由$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$，$\exists N_1 \in N_+$，当$n > N_1$时，

$$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon;$$

由$\lim_{n\to+\infty} c_n = A$，$\exists N_2 \in N_+$，当$n > N_2$时，

$$A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon.$$

取$N_\varepsilon = N_1 + N_2$，当$n > N_\varepsilon$时，

$$A-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A+\varepsilon,$$

所以

$$|b_n - A| < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = A.$$

例1 求

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}).$$

解：$\forall n \in N_+$,

$$0 < \sqrt{n+3}-\sqrt{n-1} = \frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} < \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

由于$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}} = 0$，所以由夹挤原理知

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}) = 0.$$

例2 设$a_1, a_2, \cdots, a_m$为正数，求证

$$\lim_{n\to+\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

解：不妨$a_1 = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，则

$$a_1 \le (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \le (ma_1^n)^{\frac{1}{n}} = a_1 m^{\frac{1}{n}}.$$

而$\lim_{n\to+\infty} a_1 m^{\frac{1}{n}} = a_1$，所以由夹挤原理知

$$\lim_{n\to+\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1.$$

性质5（四则运算） 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛，则

(1).
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n+\lim_{n\to+\infty}b_n.$$
(2).
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n-\lim_{n\to+\infty}b_n.$$
(3).
$$\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n\lim_{n\to+\infty}b_n.$$
(4) 若$\lim_{n\to+\infty}b_n\neq 0$，
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to+\infty}a_n}{\lim_{n\to+\infty}b_n}.$$

证：只证(3)、(4).

证(3). 因为$\{a_n\}$收敛，所以$\{a_n\}$有界，即$\exists M>0$，使得$|a_n|\leq M,\quad n=1,2,\cdots$. 记$A=:\lim_{n\to+\infty}a_n,\quad B=:\lim_{n\to+\infty}b_n$，于是
$$\begin{aligned}|a_nb_n-AB| &= |(a_nb_n-a_nB)+(a_nB-AB)|\\ &\leq |(a_n||b_n-B|+|a_n-A||B|\\ &\leq M|b_n-B|+|B||a_n-A|.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，由$\lim_{n\to+\infty}a_n=A$，$\exists N_1\in N_+$，当$n>N_1$时，
$$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2[|B|+1]};$$
由$\lim_{n\to+\infty}b_n=B$，$\exists N_2\in N_+$，当$n>N_2$时，
$$|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$
取$N_\varepsilon=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N_\varepsilon$时，
$$\begin{aligned}|a_nb_n-AB| &\leq M|b_n-B|+|B||a_n-A|\\ &< M\tfrac{\varepsilon}{2M}+|B|\tfrac{\varepsilon}{2[|B|+1]}\\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}\qquad \text{（因为}n>N_\varepsilon\geq N_1\text{；}n>N_\varepsilon\geq N_2\text{）}\\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$
所以
$$\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n)=AB.$$

证(4). 因
$$\frac{a_n}{b_n}=a_n\ \frac{1}{b_n},$$

故由结论(3)，我们只需证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{B}$$

即可。

不妨$B>0$. 由$\{b_n\}$收敛于B，则$\exists N_1\in N_+$，当$n>N_1$时，

$$|b_n-B|<\frac{B}{2},\quad \text{即}\quad \frac{B}{2}<b_n<\frac{3B}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{1}{b_n}-\tfrac{1}{B}\right| &= \left|\tfrac{B-b_n}{Bb_n}\right|\\ &= \tfrac{1}{Bb_n}|b_n-B|\\ &\le \tfrac{2}{B^2}|b_n-B|,\quad n=N_1+1,N_1+2,\cdots.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，再由$\lim_{n\to+\infty}b_n=B$，$\exists N_2\in N_+$，当$n>N_2$时，

$$|b_n-B|<\frac{B^2\varepsilon}{2}.$$

取$N_\varepsilon=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N_\varepsilon$时，

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{1}{b_n}-\tfrac{1}{B}\right| &\le \tfrac{2}{B^2}|b_n-B| \quad （\text{因为}n>N_\varepsilon\ge N_1）\\ &< \varepsilon \quad （\text{因为}n>N_\varepsilon\ge N_2）\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{B}.$$

例3 求

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}.$$

解：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\tfrac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2} &= \lim_{n\to+\infty}\tfrac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}\\ &= \tfrac{\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}\\ &= \tfrac{1-0+0}{2+0-0}\\ &= \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$