微积分A2第九次习题课讨论题　　　　　　　　　　　　杨利军　May 4-9, 2020

本次习题课讨论题主要涉及以下四个方面的内容

一. 利用对称性化简第一型曲线和曲面积分的计算;

二. 计算曲线和曲面积分;

三. 利用 Green 公式证明平面区域变换的面积公式;

四. Green 公式的应用.

一. 利用对称性化简第一型曲线和曲面积分的计算.

1. 计算线积分 $\oint_\Gamma (z+2)dl$, 其中 Γ 为圆周

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ z=1. \end{cases}$$

2. 计算第一型面积分 $\oiint_\Sigma \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3. 设 L 为椭圆曲线 $x^2/4+y^2/3=1$, 其周长设为 a. 求线积分 $\displaystyle\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)dl$.

4. 求 $\oiint_S (x+y+z)^2 dS$, 其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

二. 计算曲线和曲面积分.

1. 求线积分 $\displaystyle\oint_L xydl$, 其中 L 是正方形 $|x|+|y|=a$ $(a>0)$ 的四条边.

2. 计算 $\iint_S (x^2+y^2)dS$, 其中 S 是锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界曲面.

3. 计算螺旋曲面 S 的面积, 其中 S 的参数方程为

$$(\rho,\phi)\to r=r(\rho,\phi)=(x,y,z)=(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,\rho\phi),$$

其中 $0 \le \rho \le R, 0 \le \phi \le 2\pi$.

4. 求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被抛物柱面 $z=R^2-x^2$ 和平面 $z=0$ 所截部分 S 的面积.

5. (课本第 187 页习题 4.3 题11) 设一元函数 $f(u)$ 于整个实轴上连续, S 代表单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 证明 Poisson 公式

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS = 2\pi \int_{-1}^{1} f(\rho t)dt, \tag{1}$$

这里 $\rho=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 常数 a, b, c 不全为零.

三. 利用 Green 定理证明平面面积变换公式.

回忆平面面积变换定理: 设 $T:(u,v)\to(x,y)=(f(u,v),g(u,v))$ 是平面一个开域到另一个开域的微分同胚, 即 T 是一一对应的连续可微映射, 且其逆也连续可微. 设有界闭域 D_0 属于 T 的定义域, 则闭域 D_0 在映射 T 下的象 $D_1=\phi(D_0)$ 的面积可表为

$$|D_1| = \iint_{D_0} \left|\det\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式. (注：如需要可以假设微分同胚 T 二阶连续可微.)

四. Green 公式的应用

1. 计算曲线积分

$$I=\int_{L^+}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2},$$

其中定向曲线 L^+ 为以下三种情形

(i) L^+ 是椭圆周 $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$, 正定向为顺时针.

(ii) L^+ 是曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, 正定向为顺时针.

(iii) L^+ 是从点 $(2,0)$ 到点 $(4,4)$ 的有向直线段.

2. 设 $f(x,y)$ 在开单位圆盘 D_1: $x^2+y^2<1$ 上二次连续可微, 且满足方程 $f_{xx}+f_{yy}=f/2$, 且 $f(0,0)=1$. 试求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x,y)dl,$$

这里 D_t 记开圆盘 $\{(x,y),x^2+y^2<t^2\}$, 符号 $\vec{n}$ 表示边界圆周 ∂D_t 的朝外的单位法向量.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在上半平面 $D:=\{(x,y),y>0\}$ 内具有连续偏导数, 并且是 -2 次齐次函数, 即 f 满足 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$, $\forall t>0$, $(x,y)\in D$. 证明对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L 成立

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0.$$

4. 计算线积分

$$I=\oint_{\Gamma^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2},$$

其中 Γ^+ 为 $|x|+|y|=1$, 即一个正方形的边界, 逆时针为正向.

5. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为平面有界开区域, 它的边界 ∂D 为一条逐段光滑的封闭曲线, 逆时针为其正向, 记 $\vec{n}$ 为 ∂D^+ 的向外的单位法向量. 设函数 $f(x,y)$ 在闭域 $\overline{D}$ 上连续, 在开域 D 内为调和, 即

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\quad \forall (x,y)\in D.$$

证明

(i) $\displaystyle\oint_{\partial D^+}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}dl=0$;

(ii) $\displaystyle\oint_{\partial D^+}f\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}dl=\iint_{\overline{D}}\|\nabla f\|^2dxdy$;

(iii) 若 $f(x,y)=0$, $\forall (x,y)\in\partial D$, 则 $f(x,y)\equiv 0$, $\forall (x,y)\in D$.

6. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[-1,1]$ 上处处为正的连续可微函数, D 为圆心位于原点的单位开圆

盘. 证明

$$\oint_{\partial D^+}\Big[xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\Big]=\oint_{\partial D^+}\Big[-yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy\Big]. \tag{2}$$

由此进一步证明

$$\oint_{\partial D^+}\Big[xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\Big]\geq 2\pi. \tag{3}$$

7. 设函数 $f(x)$ 在整个实轴 $\mathbb{R}$ 上二次连续可微, 满足 $f'(0)=0$, 且使得平面向量场

$$V(x,y)=\Big(f(x)+y[x-f(x)],f'(x)\Big) \tag{4}$$

为梯度场, 即存在连续可微函数 $F(x,y)$, 使得 $\nabla F=V$. 进一步假设

$$\int_{(0,0)}^{(\pi/2,\pi)}V\cdot dr=\frac{\pi^2}{8}, \tag{5}$$

求函数 $f(x)$.

注: 由于场 V 是全平面上的梯度场, 故场 V 在全平面上线积分与路径无关. 因此积分式 (5) 对于起点为 $A=(0,0)$, 终点为 $B=(\pi/2,\pi)$ 的任意路径, 积分值不变.