§2. 第二型曲线积分

1.第二型曲线积分的物理背景与定义

设L为空间有向曲线(规定了正方向的曲线),从A到B的方向为正方向. 质点在点(x, y, z)处所受力为:$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$
求单位质量的质点沿曲线L从A运动到B时力对质点所做的功.

•Step1.分划: 在曲线L上依次插入节点

$$A = M_0, M_1, \cdots, M_n = B$$

将曲线L分成n段弧$L_1, L_2, \cdots, L_n$.

$\Delta l_i : L_i$的长度,

$\vec{\tau}(M_i)$:曲线L在点M_i处的正向单位切向量.

•Step2.取点、求和: 力F所做的功

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i) \cdot \vec{\tau}(M_i) \Delta l_i.$$

•Step3.取极限: 若 $\lim\limits_{\max\{\Delta l_i\} \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i) \cdot \vec{\tau}(M_i) \Delta l_i$

存在,则该极限为$\int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl$,即$F$所做的功.

Def.Ω为R^3中区域，设

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

为Ω中向量场，L是Ω中一条逐段光滑的有向曲线(由有限条光滑曲线连接而成)，$\vec{\tau}$是L的正向单位切向量.如果第一型曲线积分$\int_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl$存在，则称这个积分为向量场$\vec{v}$在有向曲线$L$上的第二型曲线积分，记作

$$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}=\int_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl.$$

2.第二型曲线积分$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}$的计算

设$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t)(\alpha \le t \le \beta)$,且参数$t$增加的方向与$L$的正向一致.则$L$在点$M(x, y, z)$处的单位切向量为

$$\vec{\tau}(x, y, z) = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}},$$

弧长微元为

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

设$\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$,则

$$\vec{v}\cdot d\vec{l} = \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl$$
$$= (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})\cdot(x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k})dt$$
$$= (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))dt$$

$$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl = \int_\alpha^\beta \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]dt$$

Remark:若参数t增加的方向与L的正向相反, 则

$$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l} = -\int_\alpha^\beta \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]dt$$
$$= \int_\beta^\alpha \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]dt$$

积分下限对应于曲线的起点, 上限对应于终点.

Remark: L^-与L反向, 则$\int_{L^-}\vec{v}\cdot d\vec{l} = -\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}$.

Remark:

$$\vec{v}\cdot d\vec{l} = \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl$$

$$= (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))dt$$

$$= Pdx + Qdy + Rdz$$

因此, 也将$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$沿曲线$L$的第二型曲线积分记为

$$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

3. 第二型曲线积分的性质

第二型曲线积分$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}$可以化为第一型曲线积分$\int_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl$来计算,因而具有以下性质:

(1)(积分存在的充分条件)当L逐段光滑且$\vec{v}$的分量函数P,Q,R在L上连续时,$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}$存在.

(2)(对积分曲线的可加性)设曲线L由曲线$L_1,L_2,\cdots,L_k$连接而成,则

$$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{v}\cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{v}\cdot d\vec{l} + \cdots + \int_{L_k} \vec{v}\cdot d\vec{l}.$$

(3)(线性性质）设$\int_L \vec{u}\cdot d\vec{l}$和$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}$存在,则∀实数$\alpha,\beta$,积分$\int_L (\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot d\vec{l}$存在,且

$$\int_L (\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot d\vec{l} = \alpha\int_L \vec{u}\cdot d\vec{l} + \beta\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}.$$

特别地,

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_L Pdx+\int_L Qdy+\int_L Rdz.\square$$

例: $I_k = \oint_{L_k} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, L_k逆时针方向.

$$L_1: x^2 + y^2 = R^2; \qquad L_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$L_3: x^2 + xy + y^2 = R^2.$$

解: L_1: $x = R\cos t, y = R\sin t, t \in [0, 2\pi]$, 参数增加与曲线正向一致.

$$I_1 = \oint_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

$$L_2:\ x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, 2\pi]$$

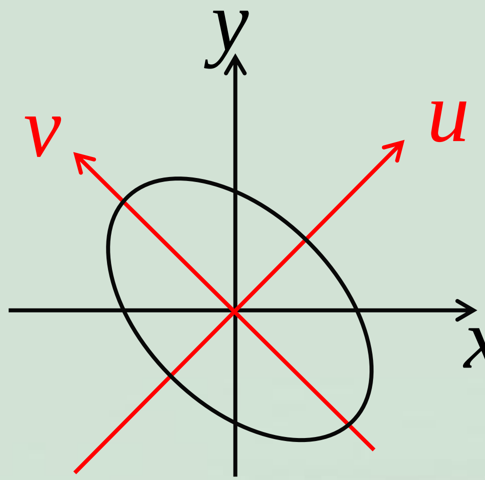
$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 t}{a^2 + b^2\tan^2 t}\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t}{a^2 + b^2\tan^2 t}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\left(\dfrac{b}{a}\tan t\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{b}{a}\tan t\right)$$

$$= 4\arctan\left(\frac{b}{a}\tan t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

$L_3: x^2+xy+y^2=R^2$(逆时针)



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$L_3: 3u^2+v^2=2R^2$(逆时针)

$u=\sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t, v=\sqrt{2}R\sin t, t\in[0,2\pi], t\uparrow$ 与正向一致.

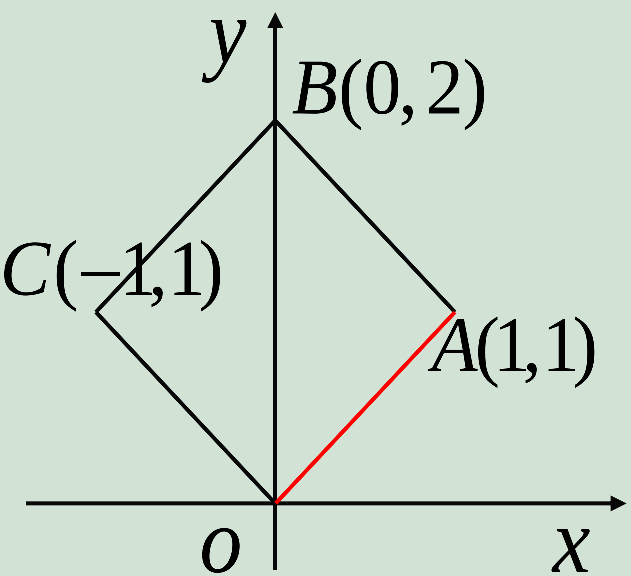
$$I_3=\oint_{L_3}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{u(t)v'(t)-v(t)u'(t)}{u(t)^2+v(t)^2}dt$$

$$=\oint_{\substack{3u^2+v^2=R^2\\ \text{逆时针}}}\frac{udv-vdu}{u^2+v^2}=2\pi.\square$$

$\uparrow$ 利用 I_2

例: $I=\oint_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中$L$是由$O(0,0),A(1,1),B(0,2),C(-1,1)$为顶点的正方形的逆时针方向边界.

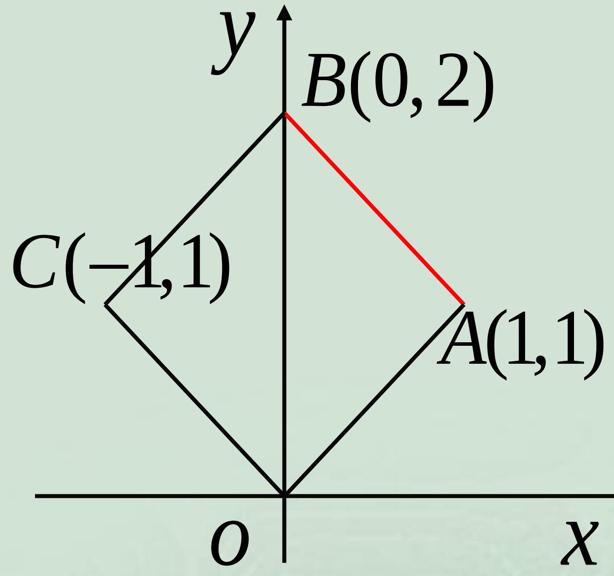
解: $I=\left(\int_{\overrightarrow{OA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}+\int_{\overrightarrow{BC}}+\int_{\overrightarrow{CO}}\right)(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy.$



$\overrightarrow{OA}:\begin{cases}x=x,\\ y=x,\end{cases}(0\le x\le 1)$，参数增加的方向与曲线的正向一致.于是

$$\int_{\overrightarrow{OA}}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$
$$=\int_0^1 2x^2dx=2/3.$$

$$\overrightarrow{AB}: \begin{cases} x = x, \\ y = 2 - x, \end{cases} (0 \le x \le 1),$$ 参数增加的方向与曲线的反向一致.于是



$$\int_{\overrightarrow{AB}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$$

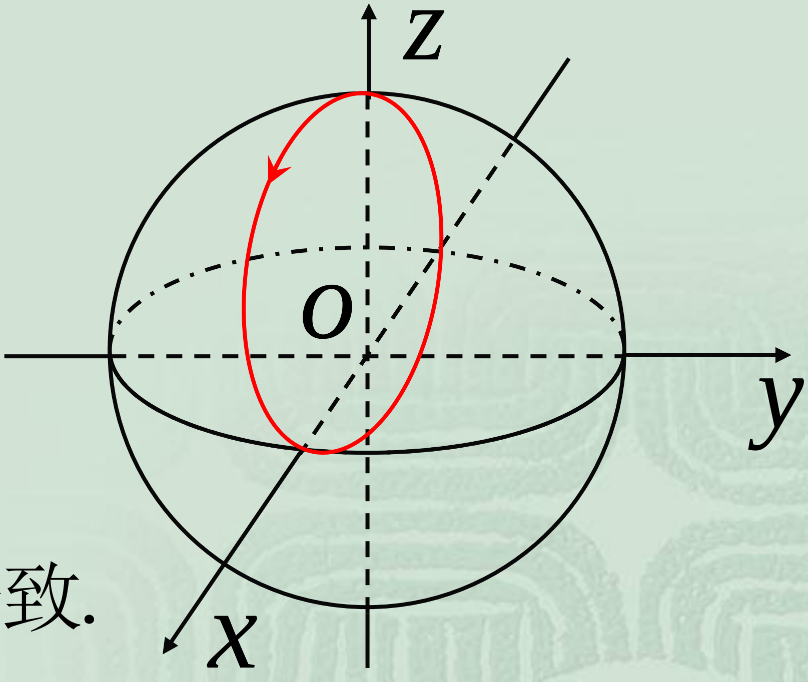
$$= \int_1^0 \left\{ \left[x^2 + (2 - x)^2 \right] - \left[x^2 - (2 - x)^2 \right] \right\} dx = -14/3,$$

同理 $\int_{\overrightarrow{BC}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = -2/3,$

$$\int_{\overrightarrow{CO}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = 2/3,$$

于是$I = 2/3 + \left(-14/3\right) + \left(-2/3\right) + 2/3 = -4.$ □

例. $I=\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, 其中$L$是柱面$x^2+y^2=ax(a>0)$与球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z>0)$的交线(从$x>a$看$L$取逆时针方向).



解: L的参数方程为

$$x=\frac{a}{2}(1+\cos t),\ y=\frac{a}{2}\sin t,$$

$$z=a\sin\frac{t}{2},\quad t\in[0,2\pi],$$

t增加的方向与曲线的正向一致.

$$I=\frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}\left[(\sin t-2\sin\frac{t}{2})\cdot(-\sin t)+(2\sin\frac{t}{2}-1-\cos t)\cdot\cos t\right.$$

$$\left.+(1+\cos t-\sin t)\cdot\cos\frac{t}{2}\right]dt=-\frac{a^2}{6}(3\pi+8).$$

例. $I=\oint_L ydx+zdy+xdz$, 其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线,从 x 轴正半轴看去为逆时针方向.

解: 将 $z=-x-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 有

$$x^2+xy+y^2=R^2/2,\ 即\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2=\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

L 的参数方程为:

$$x=\frac{\sqrt{6}}{3}R\cos t,\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}R\sin t-\frac{\sqrt{6}}{6}R\cos t,$$

$$z=-\frac{\sqrt{2}}{2}R\sin t-\frac{\sqrt{6}}{6}R\cos t,\quad t\in[0,2\pi],$$

t 增加与曲线正向一致. 于是

$$I = R^2\int_0^{2\pi}\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{6}}{6}\cos t)\cdot(-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin t)\right.$$

$$+(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{6}}{6}\cos t)\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{6}}{6}\sin t)$$

$$\left.+\frac{\sqrt{6}}{3}\cos t\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{6}}{6}\sin t)\right\}dt$$

$$=-\sqrt{3}\pi R^2.\square$$

例. 设L为曲线$x^2+y^2=4$,逆时针方向为正, 则L上点(x,y)处的(正)单位切向量$\vec{\tau}$为__________,

$$\oint_L \frac{dx}{y}-\frac{dy}{x}=\_\_\_\_\_\_\_\_,\oint_L ydx-xdy=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

解: $\vec{\tau}=\frac{1}{2}(-y,x)$, 记$\vec{v}=(\frac{1}{y},-\frac{1}{x})$, $\vec{u}=(y,-x)$, 则

$$\oint_L \frac{dx}{y}-\frac{dy}{x}=\oint_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl=-\oint_L dl=-4\pi.$$

$$\oint_L ydx-xdy=\oint_L \vec{u}\cdot\vec{\tau}dl=-\oint_L \frac{x^2+y^2}{2}dl$$

$$=-\oint_L 2dl=-8\pi.\square$$

作业：习题4.4 No.2,4