清华大学2021春季学期

电路原理C

第14讲

正弦稳态电路的功率

内容

本讲重难点

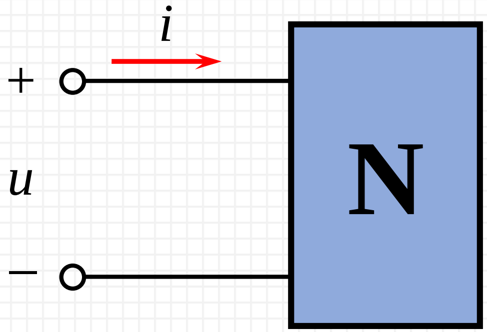
- 有功功率/无功功率/复数功率/视在功率的定义式
- 功率因数补偿
- 有功表的接法和读数计算

1、瞬时功率 (instantaneous power)

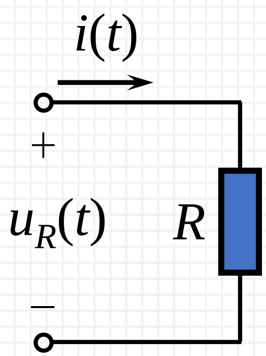
定义

$$p_{吸} \overset{\text{def}}{=} ui$$

单位：W（瓦）

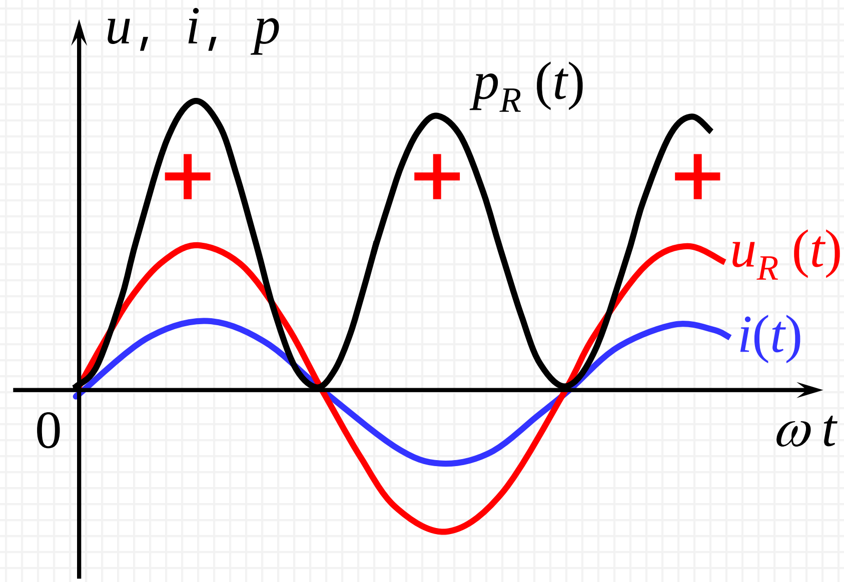


(1) 电阻元件的瞬时功率



$$u_R(t) = \sqrt{2}U_R \sin \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin \omega t$$



吸收的瞬时功率

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

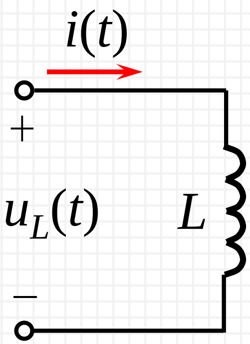
$$p_R(t) = u_R(t)i(t) = \sqrt{2}U_R \sin \omega t \sqrt{2}I \sin \omega t = U_R I(1 - \cos 2\omega t)$$

- 瞬时功率的角频率为2ω
- $p_R \geq 0$

→ 电阻总是吸收功率的

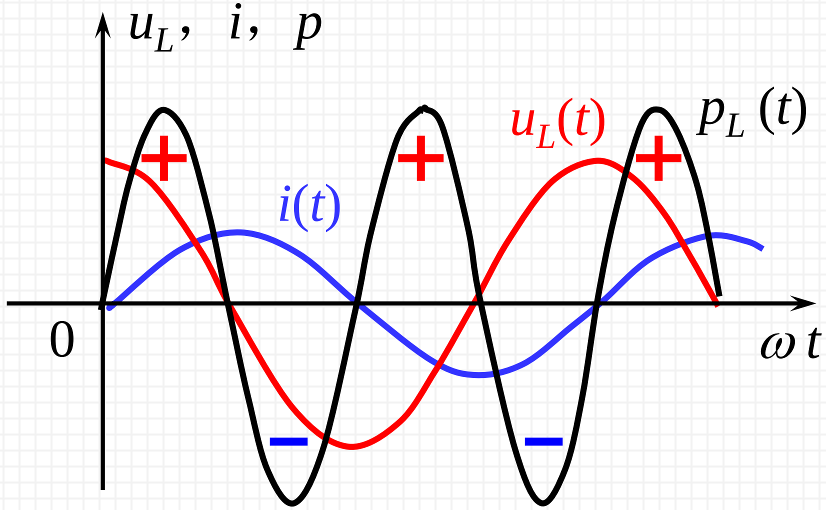
(2) 电感元件的瞬时功率

交替吸收和发出等量的功率



$$i(t)=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

$$u_L(t)=\sqrt{2}U_L\sin\left(\omega t+90^\circ\right)$$



瞬时功率

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

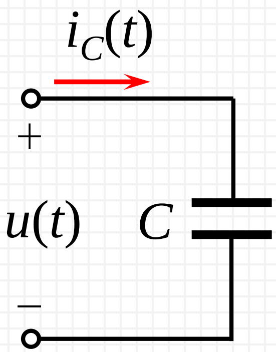
$$p_L(t)=u_L(t)i(t)=\sqrt{2}U_L\sin(\omega t+90^\circ)\sqrt{2}I\sin\omega t$$

$$=-U_LI\cos(2\omega t+90^\circ)=U_LI\sin(2\omega t)$$

◆ 瞬时功率的角频率为2ω。

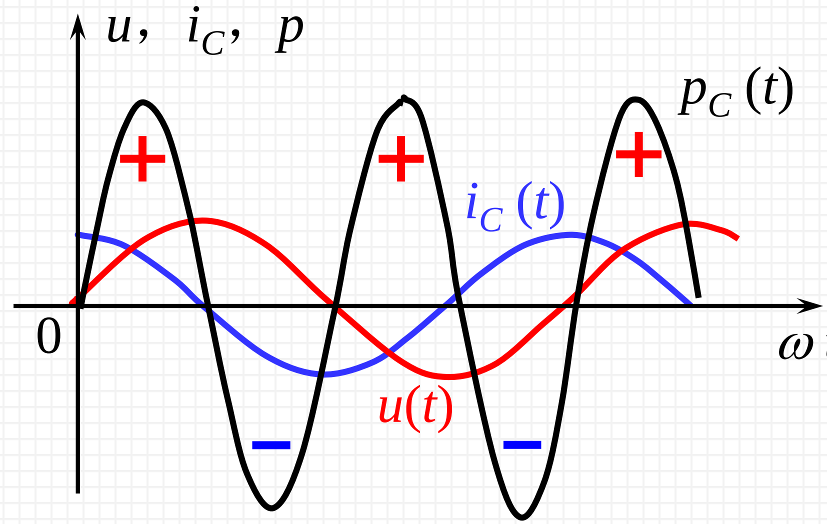
(3) 电容元件的瞬时功率

交替吸收和发出等量的功率



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t)$$

$$i_C(t)=\sqrt{2}I_C\sin(\omega t+90^\circ)$$



瞬时功率

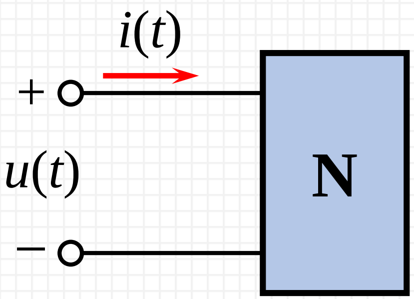
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$p_C(t)=u(t)i_C(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t)\sqrt{2}I_C\sin(\omega t+90^\circ)$$

$$=-UI_C\cos(2\omega t+90^\circ)=UI_C\sin(2\omega t)$$

◆ 瞬时功率的角频率为2ω。

(4) 任意一端口网络吸收的瞬时功率



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\left(\sin\omega t\cos\varphi-\cos\omega t\sin\varphi\right)$$

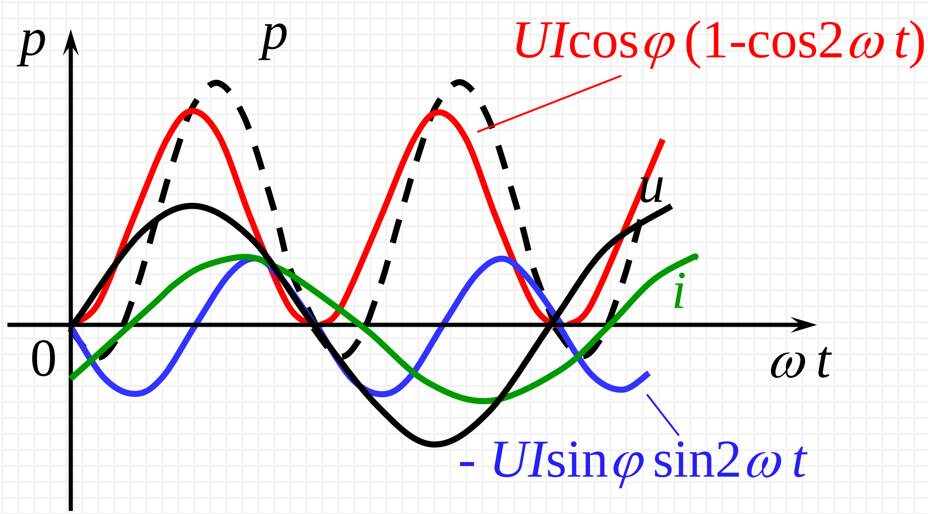
$$=2UI\sin^2\omega t\cos\varphi-2UI\sin\omega t\cos\omega t\sin\varphi$$

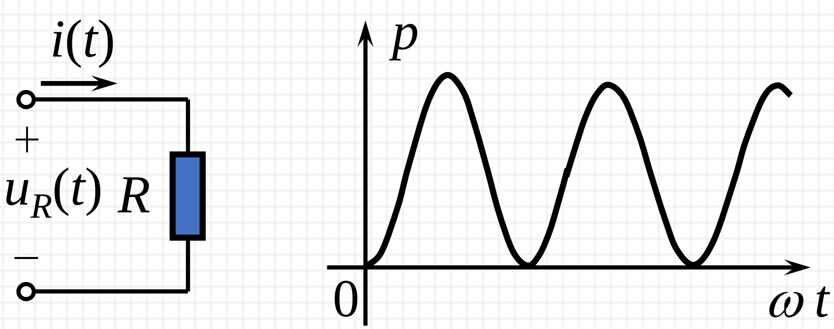
$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

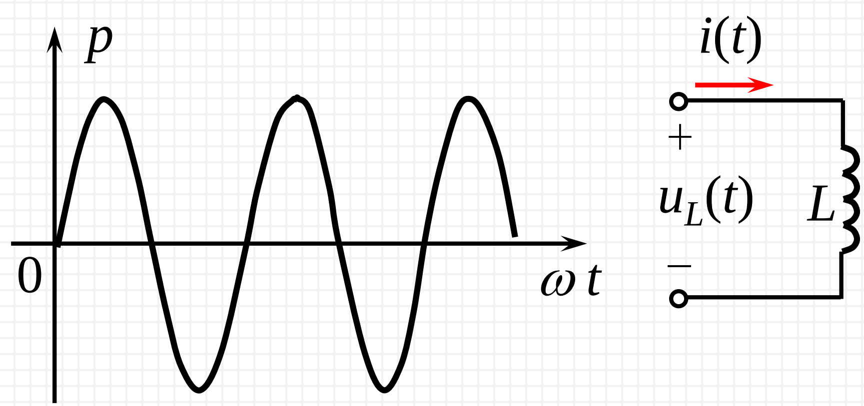
$$p(t) = UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t) - UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

不可逆部分
(类似 ***R*** 的瞬时功率)

可逆部分
(类似***L***/***C***的瞬时功率)







2、平均功率

(1) 平均功率 (average power)

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

定义： 瞬时功率的平均值。

常以符号 ***P*** 来表示。

$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

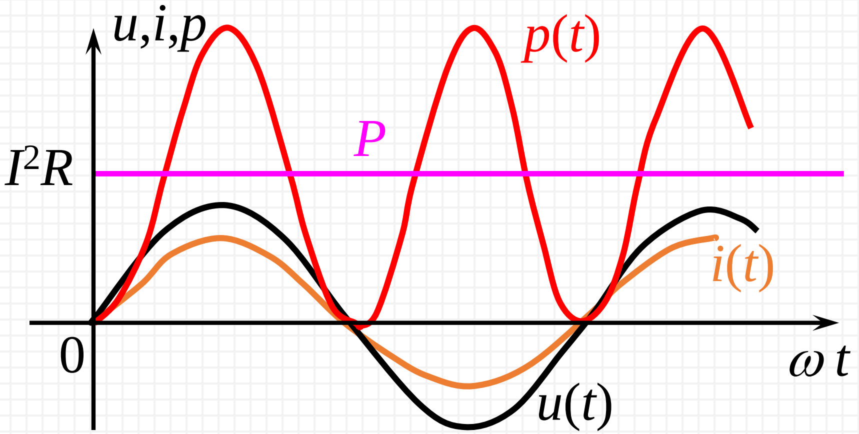
$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t\ =UI\cos\phi$$

平均功率 ***P*** 的单位也是 **W**（**瓦**）

平均功率守恒：电路中所有元件吸收的平均功率的代数和为零。

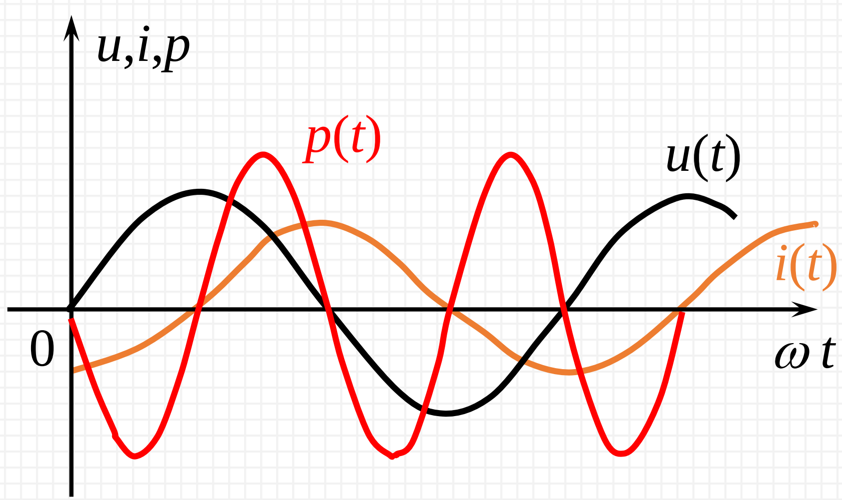
纯电阻(电阻元件或等效**纯阻性**网络) 条件下， $\varphi = 0°$



$$P = UI\cos\phi = UI = I^2R = U^2/R$$

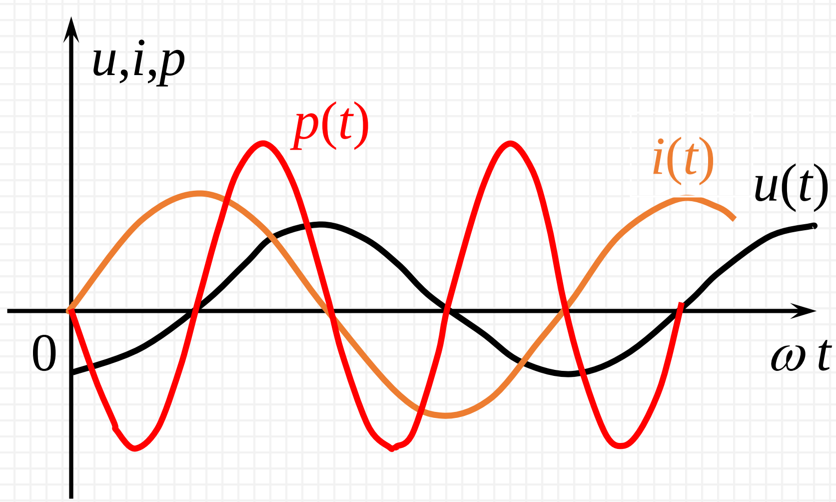
纯电感 (电感元件或等效**纯感性**网络) 条件下， $\varphi = 90°$

$P = UI\cos 90^{o} = 0$



纯电容(电容元件或等效**纯容性**网络) 条件下， $\varphi = -90°$

$P = UI\cos(-90^{o}) = 0$



$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t \quad = UI\cos\phi$$

$\cos\varphi$ 称为**功率因数**；　$\varphi = \psi_u - \psi_i$，称作**功率因数角**。

对于无独立源网络，　φ 即为其等效阻抗的阻抗角。

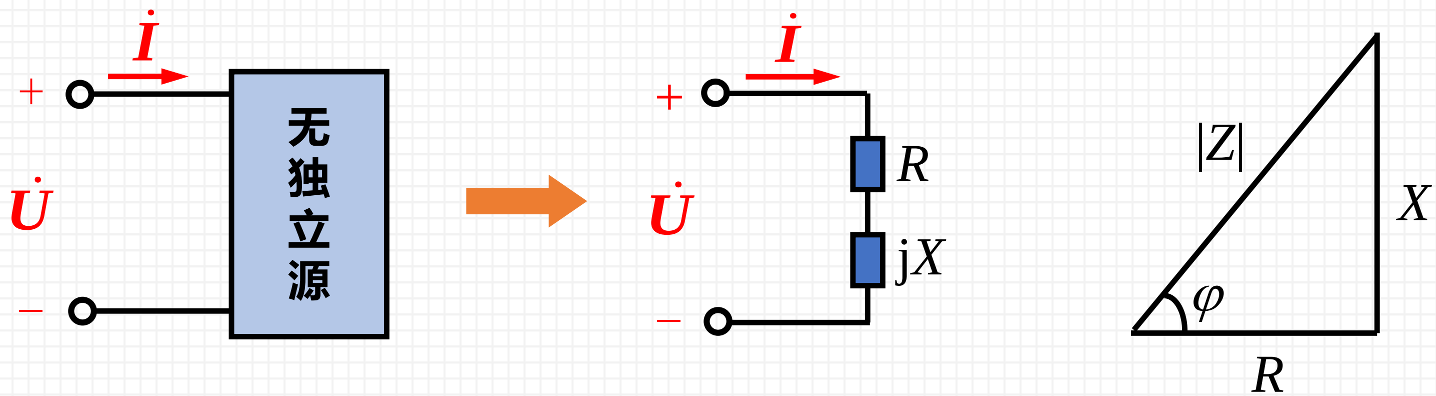
功率因数　　$\cos\varphi \begin{cases} 1, & \textbf{纯电阻} \\ 0, & \textbf{纯电抗} \end{cases}$

一般地，　$0 \le \cos\varphi \le 1$

$X > 0$，$\varphi > 0$　　**感性**，　(电流)**滞后**(电压)的功率因数

$X < 0$，$\varphi < 0$　　**容性**，　(电流)**超前**(电压)的功率因数

例　$\cos\varphi = 0.5$ (滞后)，　则 $\varphi = 60^{\circ}$



$$P = UI\cos\varphi = |Z|\,I\,I\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2R$$

平均功率就是

消耗在电阻上的功率。

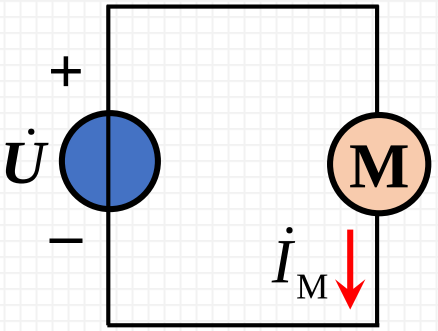
↓

有功功率(active power)

有功功率反映了阻抗中实部消耗的功率

电动机如图，求其电流 $\dot{I}_{\mathrm{M}}$

U=220V，电动机 P_{M}=1000W，$\cos\varphi_{\mathrm{M}}$=0.8（滞后）



设 $\dot{U} = 220\angle 0^{\circ}\,\mathrm{V}$

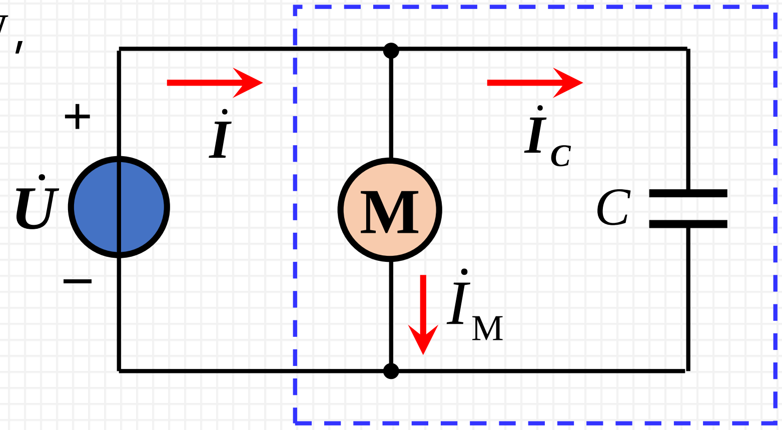
$$I_{\mathrm{M}} = \frac{P}{U\cos\varphi_{\mathrm{M}}} = \frac{1000}{220\times 0.8} = 5.68\mathrm{A}$$

$\cos\varphi_{\mathrm{M}} = 0.8$ （滞后） 即：电动机的电流滞后电机电压

$\varphi_{\mathrm{M}} = 36.9^{\circ}$

$$\boxed{\dot{I}_{\mathrm{M}} = 5.68\angle -36.9^{\circ}\ \mathrm{A}}$$

例： 已知： U=220V，f =50Hz，电动机 P_M=1000W，$\cos\varphi_M$=0.8（滞后），C =30μF。求虚线框中负载电路的功率因数



解 设 $\dot{U} = 220\angle 0^\circ$ V

$$I_M = \frac{P}{U\cos\varphi_M} = \frac{1000}{220 \times 0.8} = 5.68\text{A}$$

$\cos\varphi_M = 0.8$ （滞后） 即：电动机的电流滞后电机电压

$\varphi_M = 36.9^\circ$ → $\dot{I}_M = 5.68\angle -36.9^\circ$ A

$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega C 220\angle 0^\circ = \mathrm{j}2.08\text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_M + \dot{I}_C = 4.54 - \mathrm{j}1.33 = 4.73\angle -16.3^\circ\ \text{A}$$

$\cos\varphi = \cos[0^\circ - (-16.3^\circ)] = 0.96$ **（滞后）**

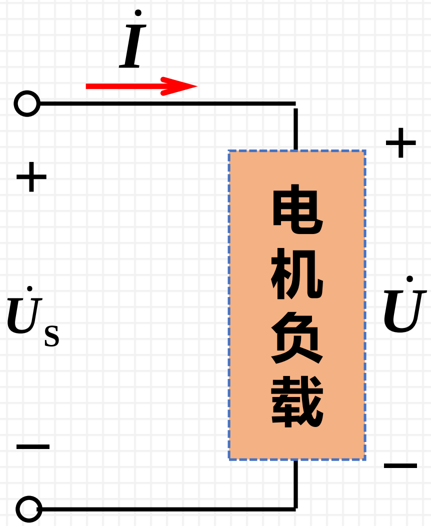
在并入电容前后，从电源看入，虚线框所示负载的功率因数有什么变化？

(2) 功率因数的提高

以异步电机为例：空载 $\cos\varphi = 0.2 \sim 0.3$

满载 $\cos\varphi = 0.7 \sim 0.85$

需要提高功率因数！



设：电源电压有效值 $U_S = 10\text{V}$，

负荷吸收的有功功率 $P = 10\text{W}$（恒定）。

- $\cos\varphi=1$ $\quad$ $I=1\text{A}$
- $\cos\varphi=0.5$ $\quad$ $I=2\text{A}$
- $\cos\varphi=0.1$ $\quad$ $I=10\text{A}$

$$P = UI\cos\phi$$

功率因数低带来的问题：

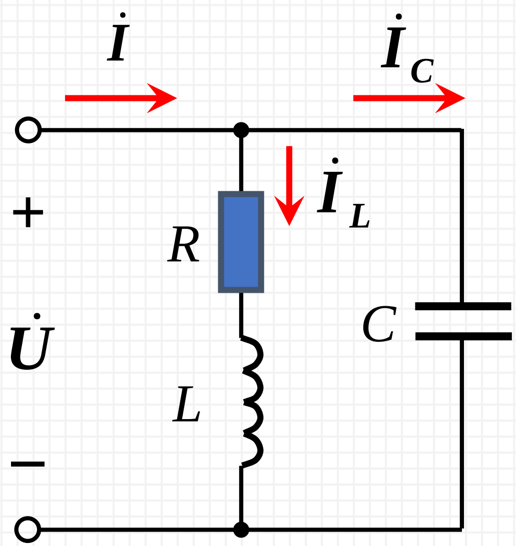
负载吸收相同有功功率时，(1)对电源有更高的要求(输出电流更大)；

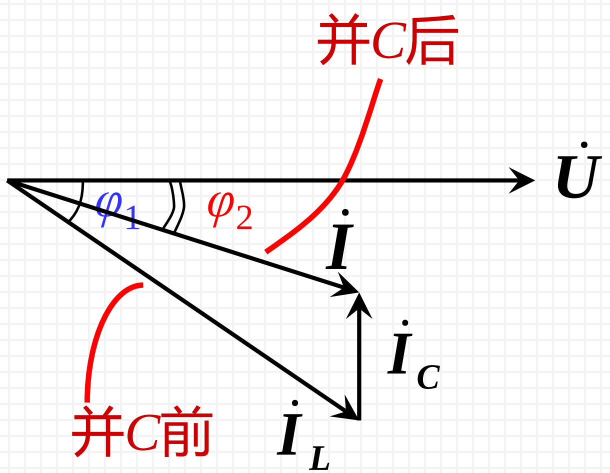
(2) 线路上的损耗随之增大。

功率因数低的用电户尤其是用电大户，必须**提高功率因数**。

解决办法： 在用户端**并联电容器**；改造用电设备。

原理分析
(并电容)





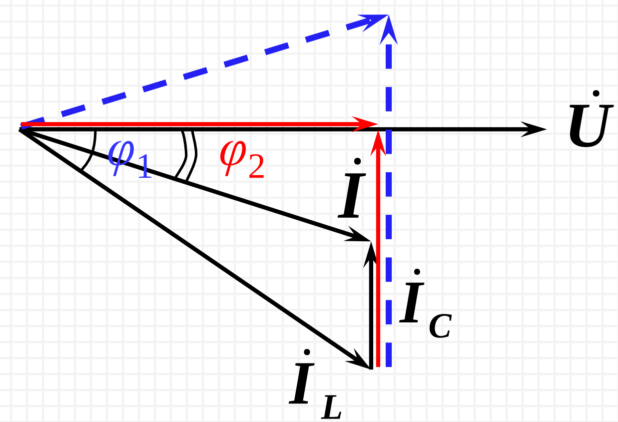
提高了功率因数

一端口吸收的有功功率变了吗?

补偿容量的确定

$$I_C = I_L \sin\phi_1 - I \sin\phi_2$$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P}{U\cos\phi_2} \\ I_L &= \frac{P}{U\cos\phi_1} \end{aligned}\right\} \text{代入上式}$$



$$I_C = \frac{P}{U}(\mathrm{tg}\phi_1 - \mathrm{tg}\phi_2)$$

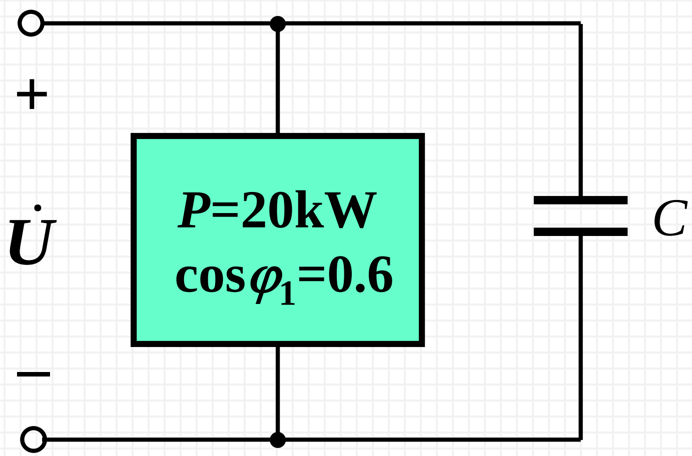
$$\therefore \quad C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\phi_1 - \mathrm{tg}\phi_2)$$

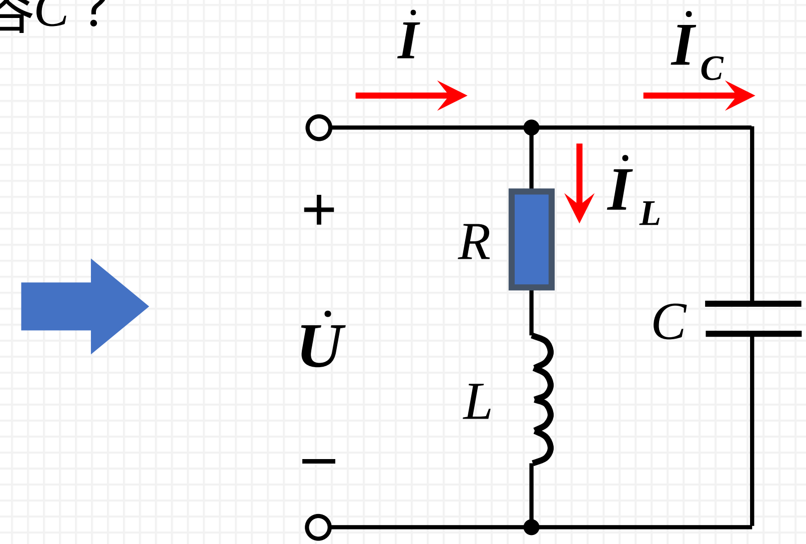
补偿容量不同 $\begin{cases} \text{欠补偿} \\ \text{全补偿} \\ \text{过补偿} \end{cases}$

实际实施 $\begin{cases} \text{性能} \\ \text{成本} \end{cases}$

一般补偿到 λ=0.95 (滞后)

例 已知 f=50Hz，U=380V，P=20kW，$\cos\varphi_1$=0.6(滞后)。问：要使功率因数提高到0.9，需并联多大的电容C？





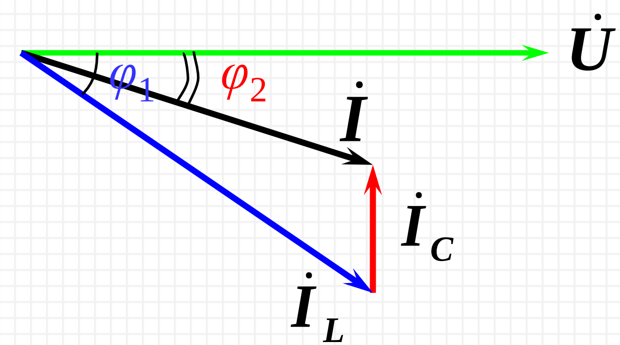
解 由 $\cos\varphi_1 = 0.6$ 得 $\varphi_1 = 53.13^\circ$

由 $\cos\varphi_2 = 0.9$ 得 $\varphi_2 = 25.84^\circ$

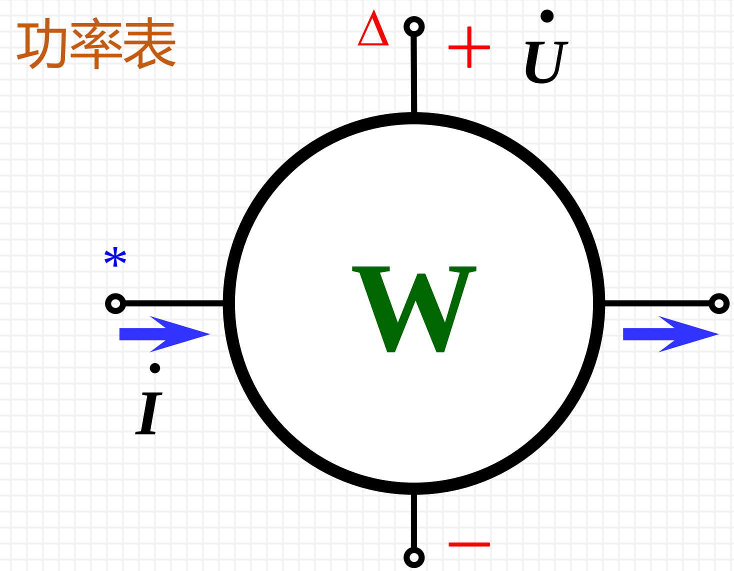
$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$= \frac{20\times 10^3}{314\times 380^2}(\mathrm{tg}53.13^\circ - \mathrm{tg}25.84^\circ)$$

$$= 375\ \mu\mathrm{F}$$



(3) 有功功率的测量

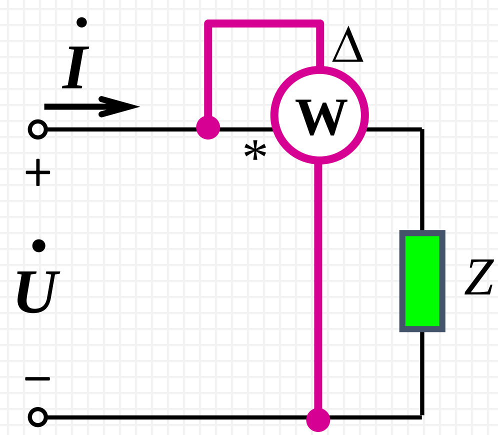


$$P_{吸} = UI\cos\varphi$$

难点：要**3个数值**才能得到有功功率

1) **功率表接线**：如果接线方式是使得电流从"*"端流入；电压线圈的"Δ"端接负载电压的正端 →

则功率表的示值反映的即为 $UI\cos(\psi_u-\psi_i)$

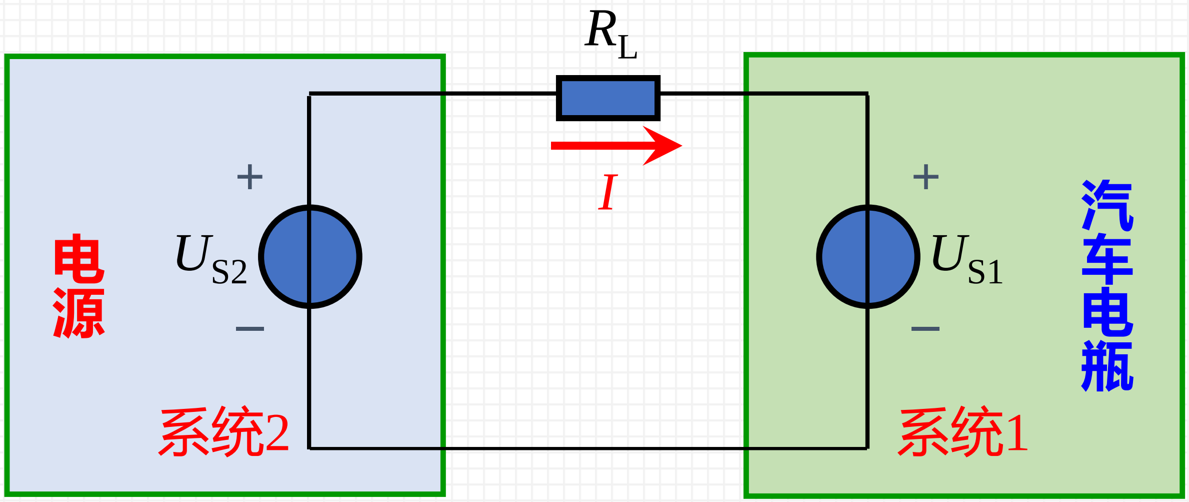


2) **功率表量程**：测量有功功率时，P、U、I 均不能超量程。

(4) 电力系统中有功功率的传输

直流系统

$$I=\frac{U_{S2}-U_{S1}}{R_L}$$



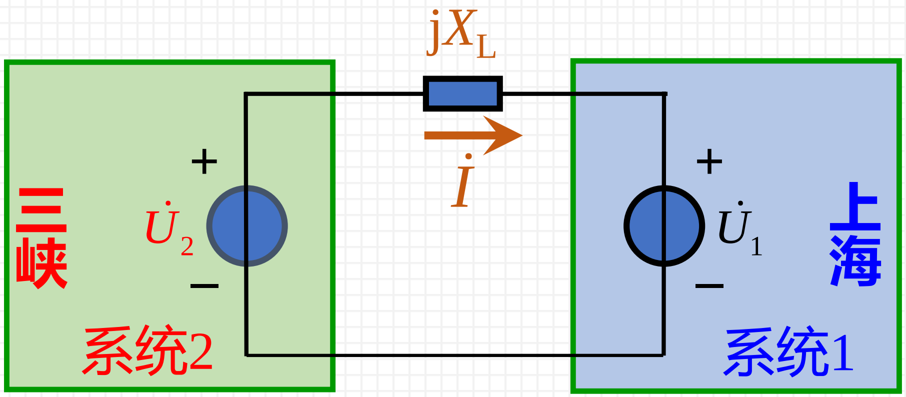
系统1（蓄电池）吸收的功率

$$P=U_{S1}\frac{U_{S2}-U_{S1}}{R_L}$$

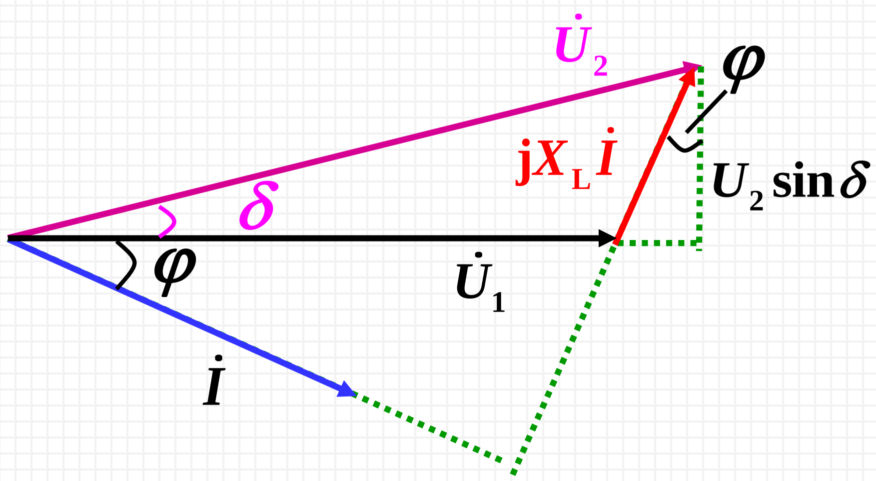
系统2向系统1输出的有功功率取决于：

- **电压U_{S1}，U_{S2} （以及二者之差）**
- **线路电阻R_L**

交流系统



$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 + \mathrm{j}X_\mathrm{L}\dot{I}$$



系统1吸收的有功功率

$$P = U_1 I \cos\varphi$$

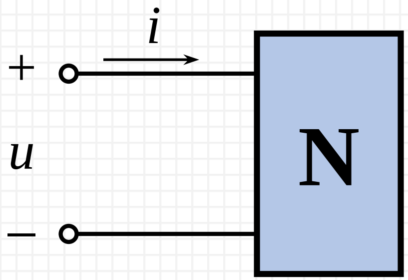
$$= U_1 \frac{X_\mathrm{L} I \cos\varphi}{X_\mathrm{L}}$$

$$P = \frac{U_1 U_2 \sin\delta}{X_\mathrm{L}}$$

系统2向系统1输出的有功功率取决于：

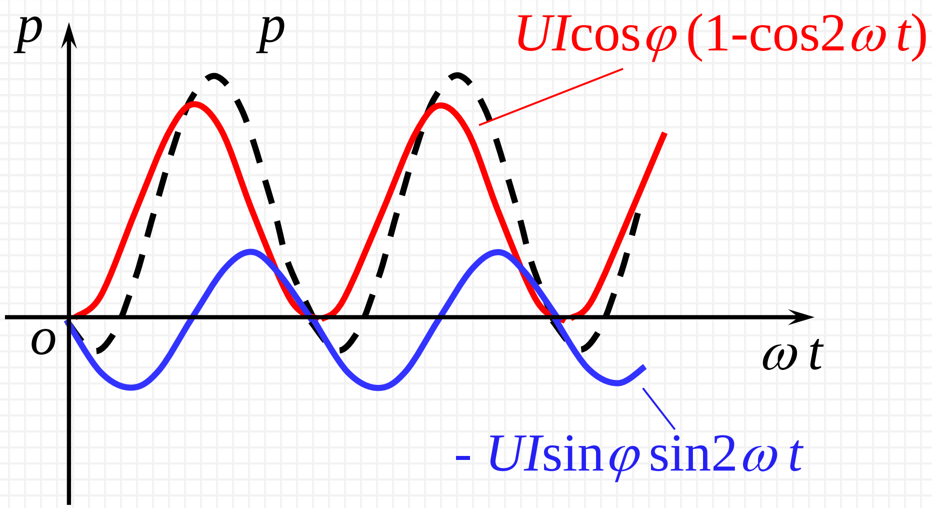
- 电压U_1，U_2
- 相角差δ
- 线路电抗X_L

3、无功功率



$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$



不可逆部分
(类似 ***R*** 消耗瞬时功率)

可逆部分
(类似 ***L/C*** 瞬时功率)

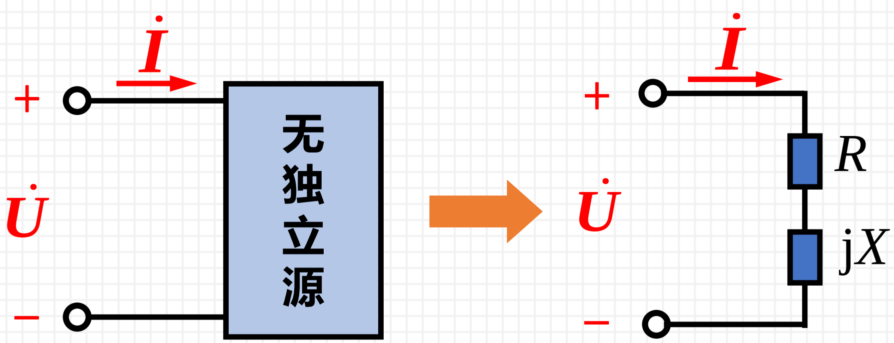
(1) 无功功率 (reactive power) Q

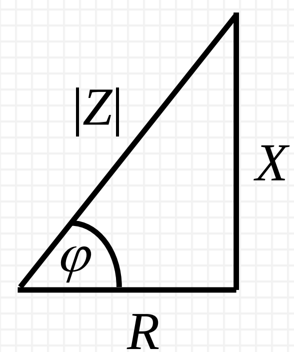
a) 定义

$$p(t) = UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t) - UI\sin\varphi \sin 2\omega t$$

$$Q \overset{\text{def}}{=} UI\sin\phi \qquad \text{单位}: \text{var}\ (\text{乏})$$

$$= |Z|\, I\, I\sin\phi = I^2 |Z| \sin\phi = I^2 X$$



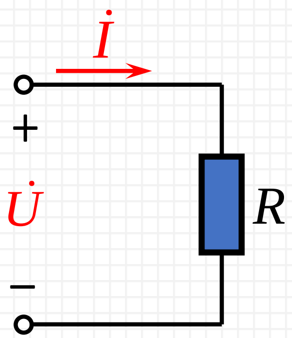


无功功率反映阻抗中**虚部**消耗的功率

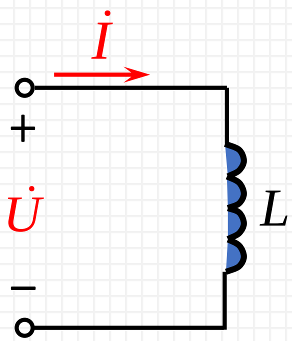
$\varphi = \psi_u - \psi_i$ 功率因数角

无功功率守恒：电路中所有元件吸收无功功率的代数和为零。

b） *R*、*L*、*C* 元件吸收的无功功率

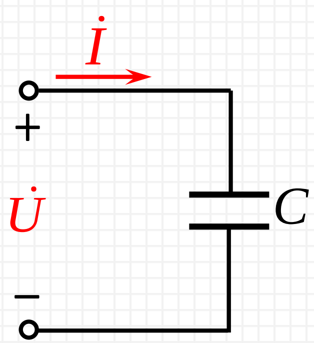


$$Q_R = UI\sin\varphi = UI\sin 0° = 0$$



$$Q_L = UI\sin\varphi = UI\sin 90° = UI = U^2/X_L = I^2X_L > 0$$

L 永远吸收无功功率



$$Q_C = UI\sin\varphi = UI\sin(-90°)$$

$$= -UI = -U^2/|X_C| = -I^2|X_C| < 0$$

C 永远发出无功功率

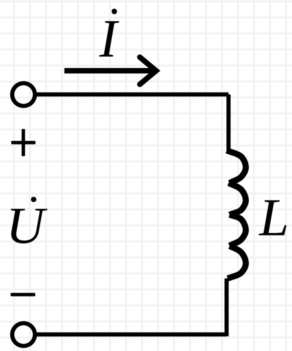
（2）无功功率的物理意义

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$p(t)=UI\cos\varphi(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

对于电感而言 $\varphi=90°$



$$p_L(t)=-UI\sin 2\omega t$$

$$=-Q_L\sin 2\omega t$$

$Q_L=UI$

$$p(t)=\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}$$

电感储能变化率的最大值

功率是能量的时间变化率

对**电容**可以得到相同的结论

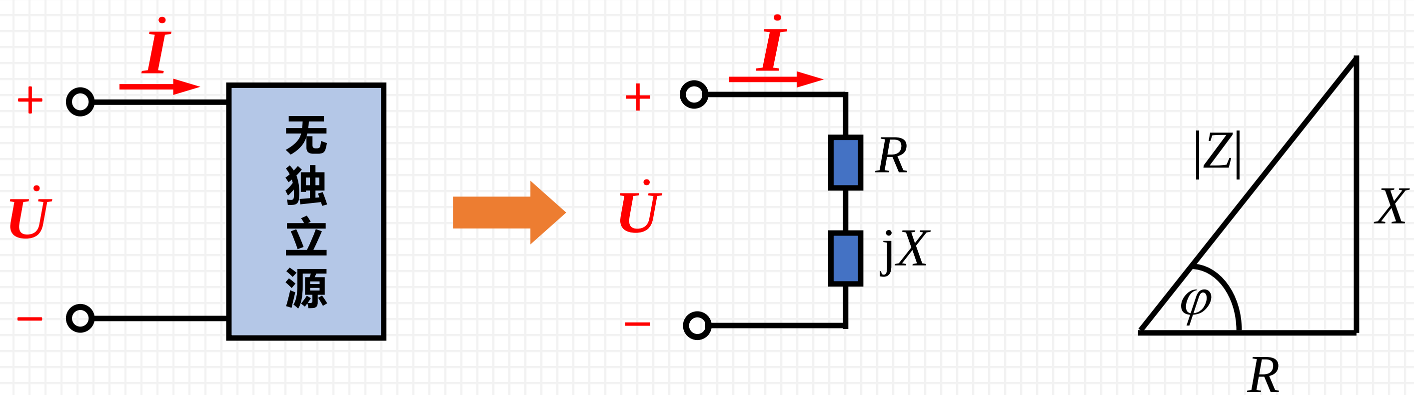
储能元件的无功功率反映其能量变化的最大速率

统一讨论负载吸收的无功功率和有功功率

$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos2\omega t)-UI\sin\varphi\sin2\omega t$$

不可逆部分 (类似 R 的瞬时功率)	可逆部分 (类似L/C的瞬时功率)



有功功率反映负载吸收功率的平均值(都消耗在阻抗的电阻部分)

无功功率反映阻抗中电抗部分能量交换的最大速率

再论负载吸收的无功功率和有功功率

$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

不可逆部分 （类似 R 的瞬时功率）	可逆部分 （类似L/C的瞬时功率）

有功功率就是“**有用**”的功率

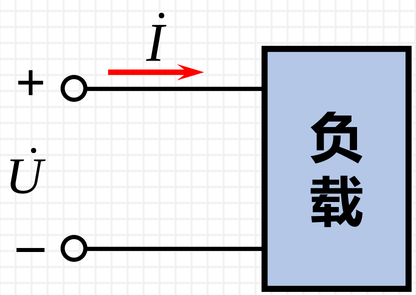
无功功率就是“**没用**”的功率吗？真是“**乏**”吗？

不少能量处理元件必须要同时处理无功功率和有功功率

有功功率：人的**智商**

无功功率：人的**情商**　　鸣谢：清华电机系**夏清**教授

4、复(数)功率(complex power)



$$\dot{U} = U\angle\psi_u \;,\qquad \dot{I} = I\angle\psi_i$$

$$P = UI\cos\left(\psi_u - \psi_i\right) = UI\cos\varphi$$

$$Q = UI\sin\left(\psi_u - \psi_i\right) = UI\sin\varphi$$

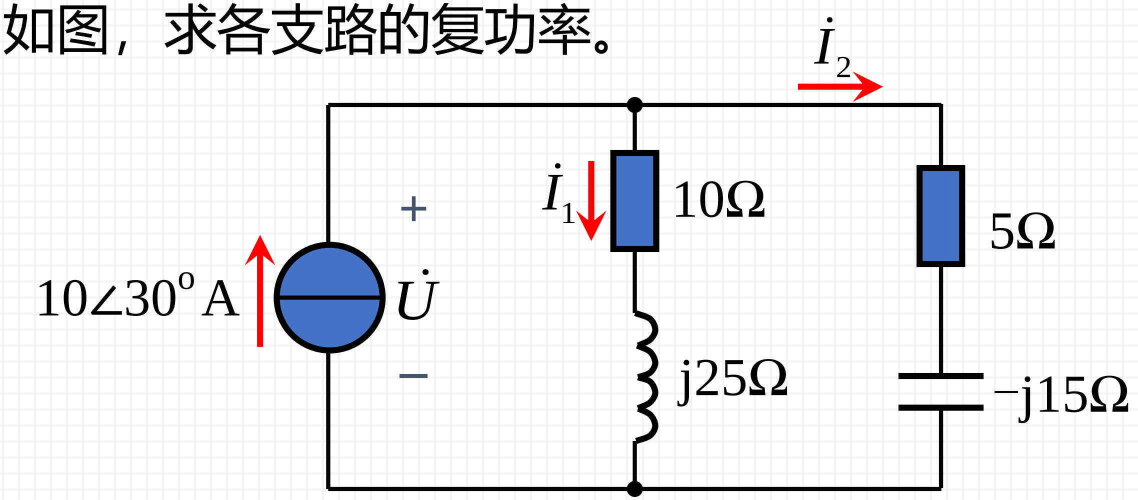
$$\dot{U}\dot{I}^* = U\angle\psi_u \times I\angle-\psi_i = UI\angle\psi_u - \psi_i$$

$$= UI\cos\varphi + \mathrm{j}UI\sin\varphi = P + \mathrm{j}Q$$

记：$\overline{S} = \dot{U}\dot{I}^*$ 称为复功率，单位: **VA[伏安]**

复功率守恒 $\displaystyle\sum_{k=1}^{b}\overline{S}_k = \sum_{k=1}^{b}\dot{U}_k\dot{I}_k^* = 0$

例 已知如图，求各支路的复功率。



解

$$\dot{I}_1 = 10\angle 30^{\circ} \times \frac{5-\mathrm{j}15}{10+\mathrm{j}25+5-\mathrm{j}15} = 8.77\angle(-75.3^{\circ}) \quad \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_S - \dot{I}_1 = 14.94\angle 64.5^{\circ} \quad \mathrm{A}$$

$$\dot{U} = 10\angle 30^{\circ} \times [(10+\mathrm{j}25)//(5-\mathrm{j}15)] = 236\angle(-7.1^{\circ}) \quad \mathrm{V}$$

电流源 $\bar{S}_{发} = 236\angle(-7.1^{\circ}) \times 10\angle(-30^{\circ}) = 1882-\mathrm{j}1424 \ \ \mathrm{VA}$

支路1 $\bar{S}_{1吸} = 236\angle(-7.1^{\circ}) \times 8.77\angle(75.3^{\circ}) = 769+\mathrm{j}1923 \quad \mathrm{VA}$

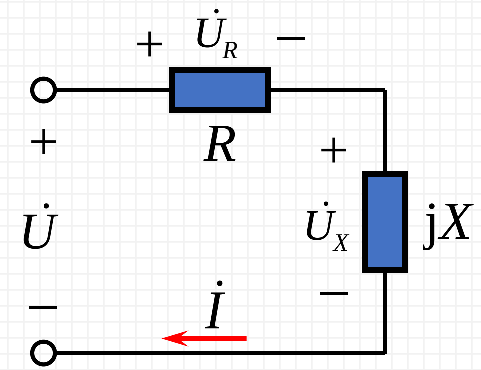
支路2 $\bar{S}_{2吸} = 236\angle(-7.1^{\circ}) \times 14.94\angle(-64.5^{\circ}) = 1116-\mathrm{j}3348 \quad \mathrm{VA}$

5、视在功率

定义: $S \overset{\text{def}}{=} UI$ 单位: **VA（伏安）**

表征电气设备的容量

(例如发电机的发电容量)

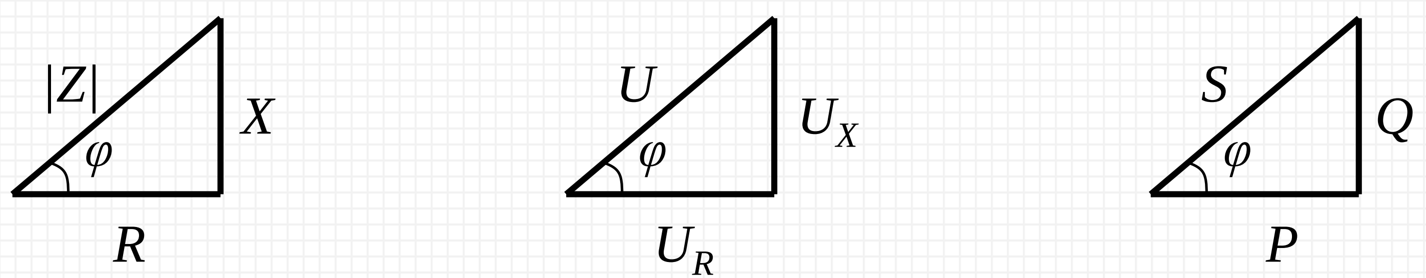


有功功率、无功功率与视在功率的关系

有功功率: $P=UI\cos\varphi$ 单位: W

无功功率: $Q=UI\sin\varphi$ 单位: var

视在功率: $S=UI$ 单位: VA



阻抗三角形 电压三角形 功率三角形