清华大学2021春季学期

电路原理C

第4讲

线性电阻电路的一般分析方法

内容

熟练掌握任意复杂结构电路方程的列写方法

支路电流法（已预习） —— 基础

节点电压法

回路电流法

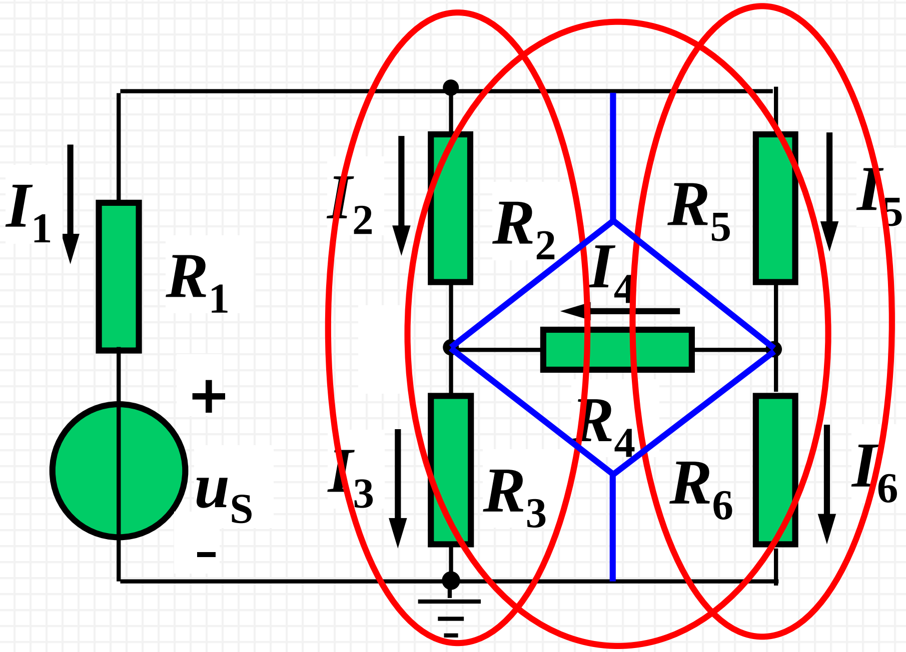
重点

对象：含独立源、受控源和电阻的任意复杂网络

基础

- **元件之间的连接关系—KCL，KVL**
  拓扑约束
- **元件特性—欧姆定律、独立源/受控源特性**
  元件约束

所有支路电压与电流采用**关联**参考方向。求电流$I_1 \sim I_6$。



支路数 $b = 6$

节点数 $n = 4$

(1) 桥平衡　　(2) Y→Δ　　(3) Δ→Y

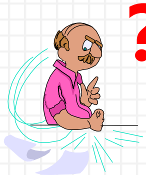
(4) 2b法：2b个支路电压/电流作变量，
b个元件约束，n-1个KCL，b-n+1个KVL

(5) 支路电流法：b个支路电流作变量，
n-1个KCL，b-n+1个KVL(需要用元件约束)

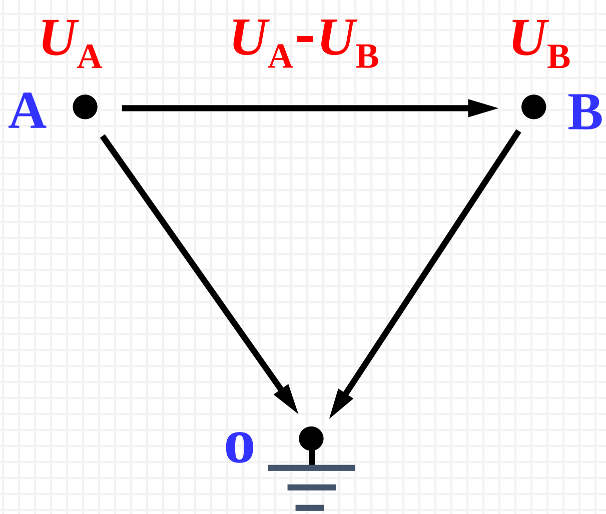
如何减少方程的数量?

支路电流法需要：$\boxed{b\text{-}n\text{+}1\text{个KVL方程}}$

n-1个KCL方程



？假定存在一组变量，使之自动满足 KVL 方程，从而减少联立方程的个数。



任意选择参考点

其他点电位定义为节点电压

如果选择节点电压作变量

1、支路电压可由节点电压求出

2、KVL自动满足

$$-U_A+(U_A-U_B)+U_B\equiv 0$$

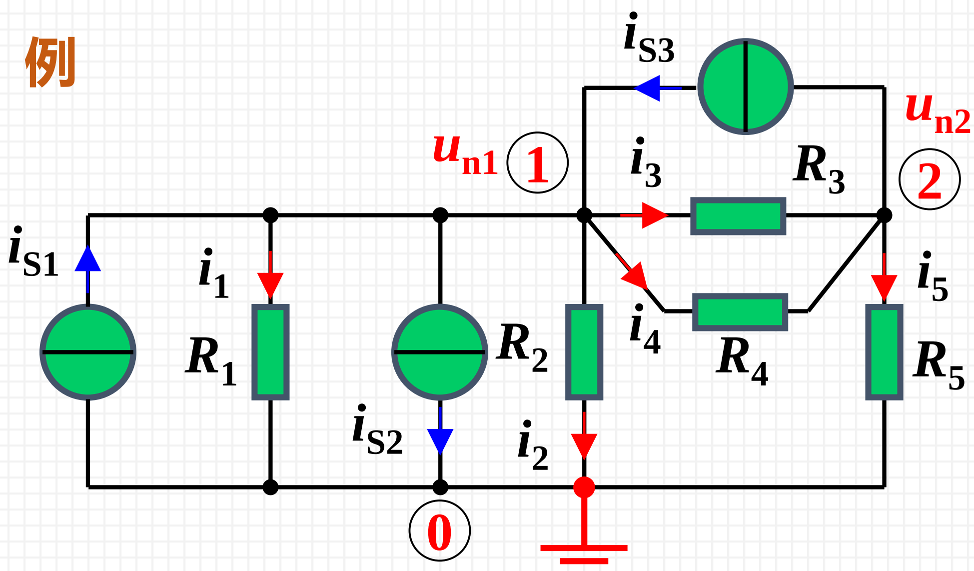
3、只需列写KCL方程即可

关键思路：求解支路量→求解节点量

1、节点电压法 (node voltage method)

节点电压法：以**节点电压为未知变量**列写电路KCL方程分析电路的方法。

例



(1) 选定**参考节点**，标明其余n-1个独立节点的电压

(2) 列**KCL**方程：

$$\Sigma\, i_{出}=\Sigma\, i_{入}$$

$$\begin{cases} i_1+i_{S2}+i_2+i_3+i_4=i_{S1}+i_{S3} \\ i_5+i_{S3}=i_3+i_4 \end{cases}$$

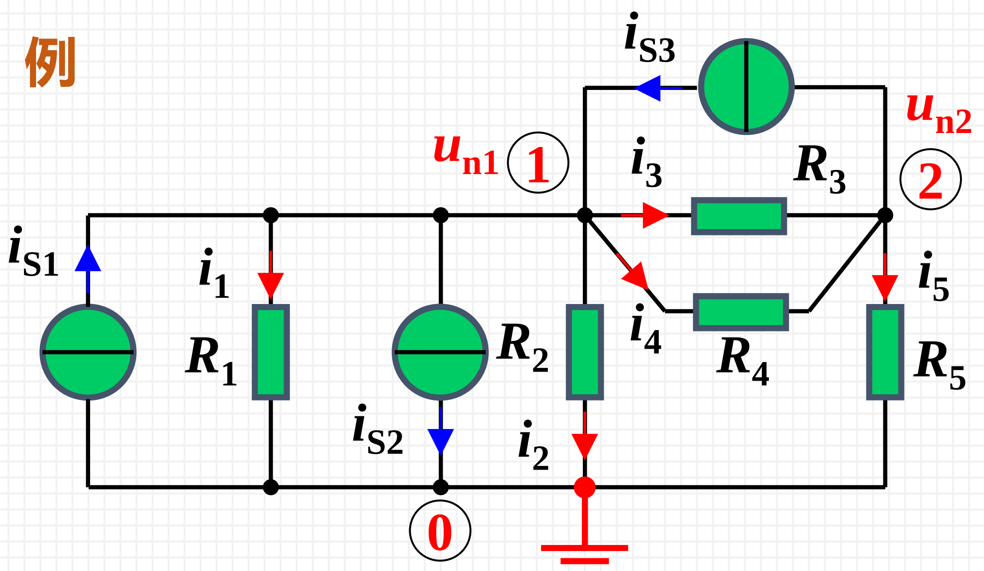
$$\begin{cases} i_1+i_2+i_3+i_4=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -i_3-i_4+i_5=-i_{S3} \end{cases}$$

方程左边的电流之和有什么物理意义(考虑正负号)?

1、节点电压法 (node voltage method)

节点电压法：以**节点电压为未知变量**列写电路KCL方程分析电路的方法。

例



(1) 选定**参考节点**，标明其余n-1个独立节点的电压

(2) 列**KCL**方程：

$$\sum i_{出}=\sum i_{入}$$

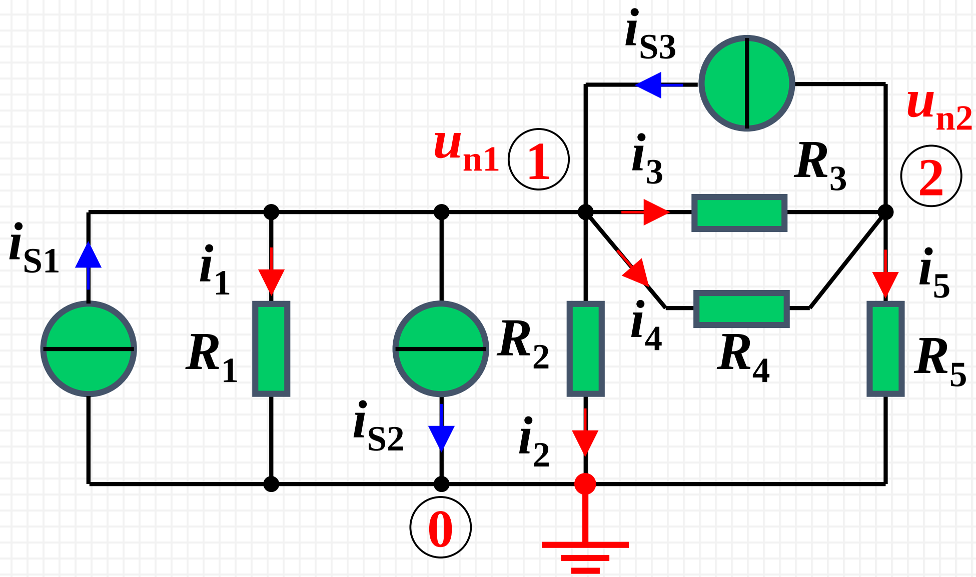
$$\begin{cases} i_1+i_{S2}+i_2+i_3+i_4=i_{S1}+i_{S3} \\ i_5+i_{S3}=i_3+i_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1+i_2+i_3+i_4=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -i_3-i_4+i_5=-i_{S3} \end{cases}$$

某节点上**从电阻流出**该节点的电流等于**从电源流入**该节点的电流

$$\sum i_{R出}=\sum i_{is入}$$

下一步：用节点电压来表示电流



$$\begin{cases} i_1+i_2+i_3+i_4=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -i_3-i_4+i_5=-i_{S3} \end{cases}$$

$$i_1=\frac{u_{n1}}{R_1} \quad i_2=\frac{u_{n1}}{R_2} \quad i_3=\frac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3} \quad i_4=\frac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4} \quad i_5=\frac{u_{n2}}{R_5}$$

$$\begin{cases} \frac{u_{n1}}{R_1}+\frac{u_{n1}}{R_2}+\frac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}+\frac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -\frac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}-\frac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}+\frac{u_{n2}}{R_5}=-i_{S3} \end{cases}$$

从电流源流入节点1电流代数和

从电阻流出节点1电流代数和

节点电压方程的初级形式

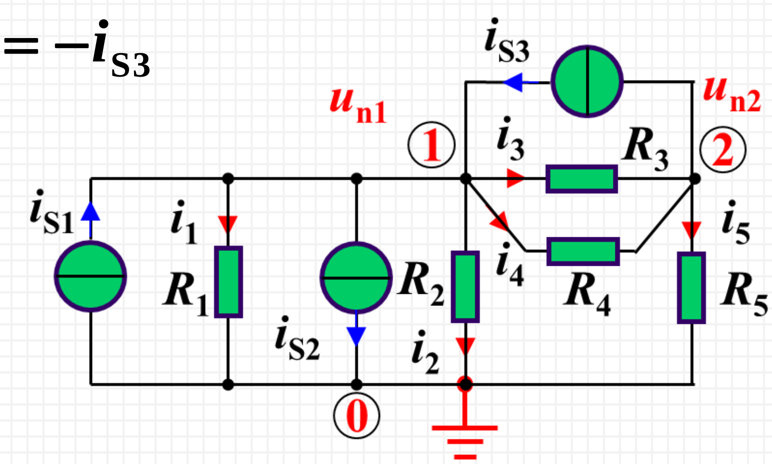
$$\begin{cases} \dfrac{u_{n1}}{R_1}+\dfrac{u_{n1}}{R_2}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}-\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}+\dfrac{u_{n2}}{R_5}=-i_{S3} \end{cases}$$

整理，得

节点电压方程的标准形式

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n1}-\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n2}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n1}+\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right)u_{n2}=-i_{S3} \end{cases}$$

u_{n1}的系数有何特点?



$$\begin{cases}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n1}-(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n2}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3}\\ -(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n1}+(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5})u_{n2}=-i_{S3}\end{cases}$$

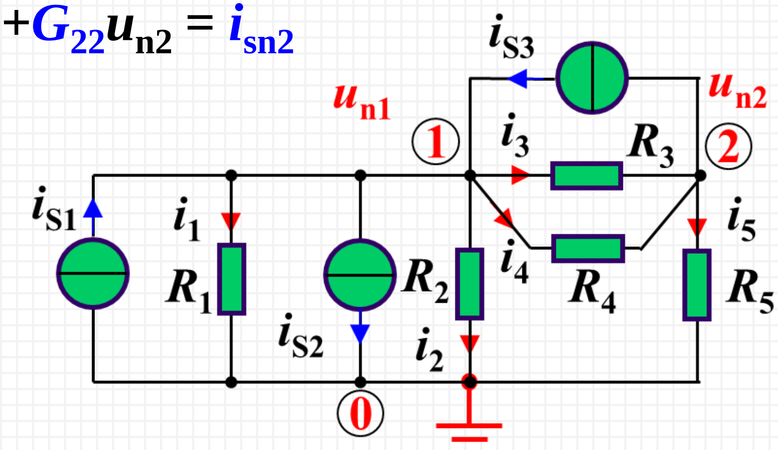
G_{11} 节点1的**自电导**，等于接在节点1上所有支路的电导之和

G_{22} 节点2的**自电导**，等于接在节点2上 所有支路的电导之和

$G_{12}=G_{21}$

节点1与节点2之间的**互电导**，等于接在节点1与节点2之间的所有支路的电导之和，并**冠以负号**

$$\begin{cases}G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}=i_{sn1}\\ G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}=i_{sn2}\end{cases}$$

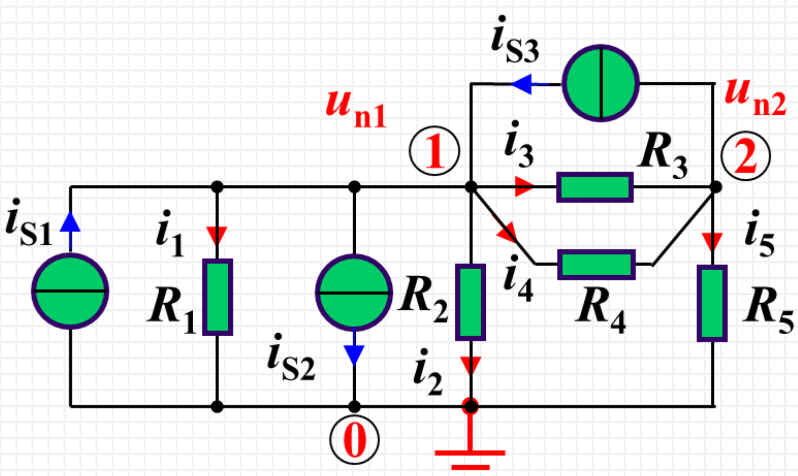


$$\begin{cases}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n1}-(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n2}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n1}+(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5})u_{n2}=-i_{S3}\end{cases}$$

i_{Sn1} 流入节点1的电流源电流的代数和

i_{Sn2} 流入节点2的电流源电流的代数和

* **流入**节点电流源电流**取正号，流出取负号。**



$$\begin{cases}G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}=i_{sn1} \\ G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}=i_{sn2}\end{cases}$$

一般情况

(n个独立节点)

$$
\begin{cases}
G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+\ldots+G_{1n}u_{nn}=i_{Sn1} \\
G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+\ldots+G_{2n}u_{nn}=i_{Sn2} \\
\quad\cdots\cdots \\
G_{n1}u_{n1}+G_{n2}u_{n2}+\ldots+G_{nn}u_{nn}=i_{Snn}
\end{cases}
$$

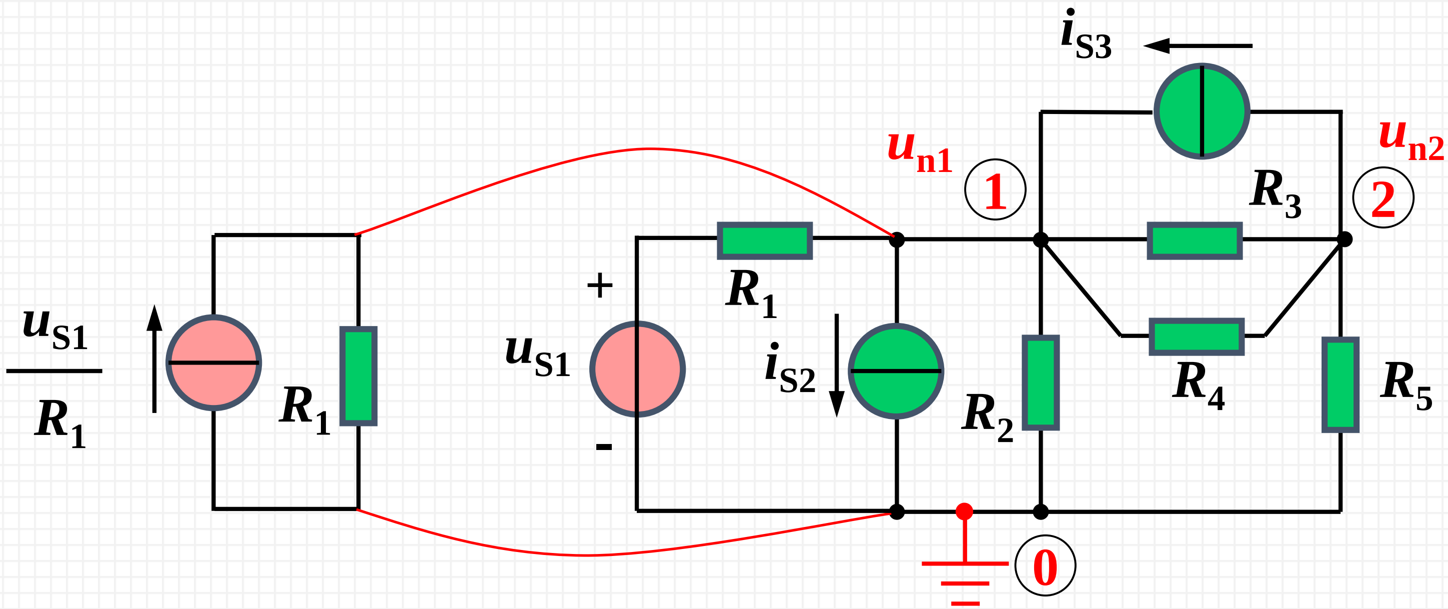
其中 G_{ii} **自电导**，等于接在节点 i 上所有支路的电导之和。自电导**总为正**。

$G_{ij}=G_{ji}$ **互电导**，等于接在节点 i 与节点 j 之间的所有支路的电导之和，并**冠以负号。**互电导**总为负**。如果 i-j 之间**无电导**相连，则**为零**。

i_{Sni} **流入**节点 i 的所有电流源电流的代数和。

*** 当电路不含受控源时，系数矩阵一般为对称阵。**

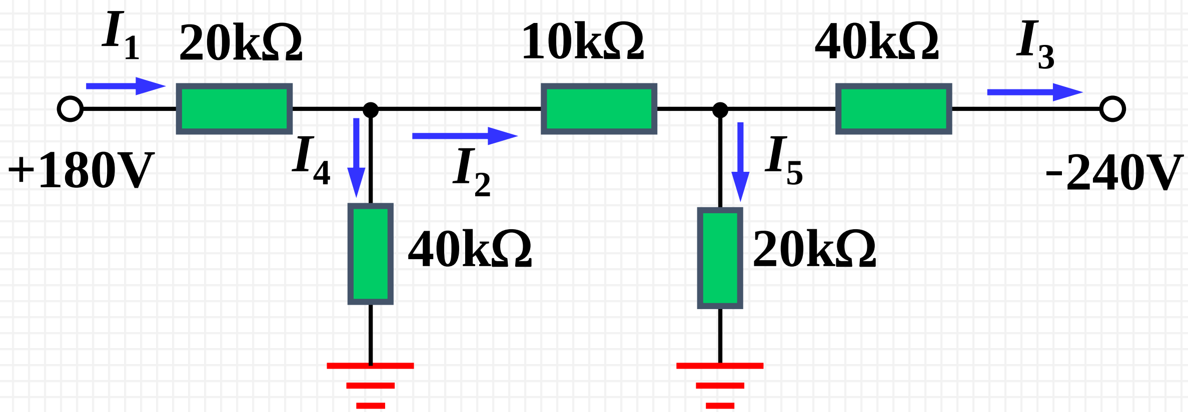
特殊情况1：电路中含电压源与电阻串联的支路。

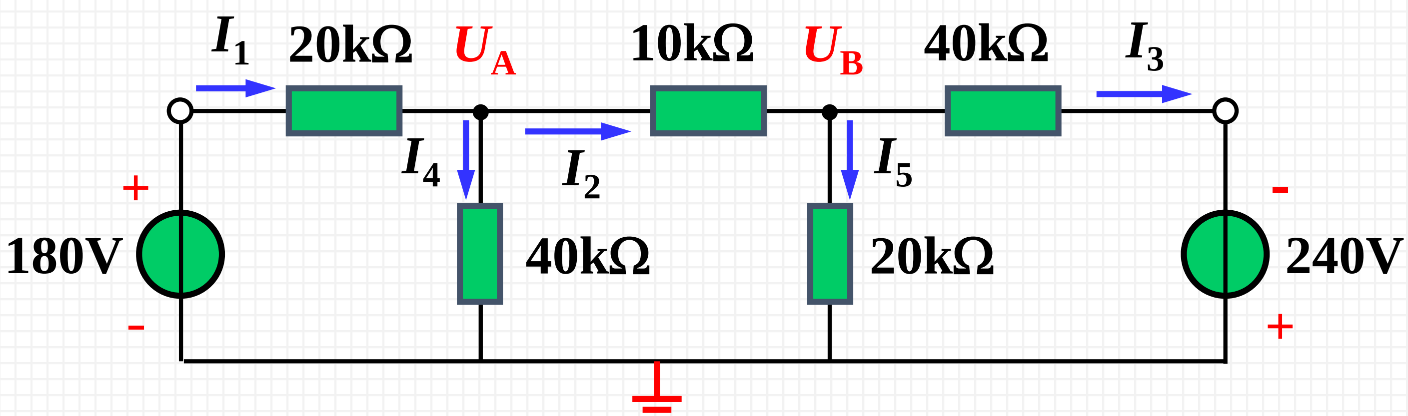


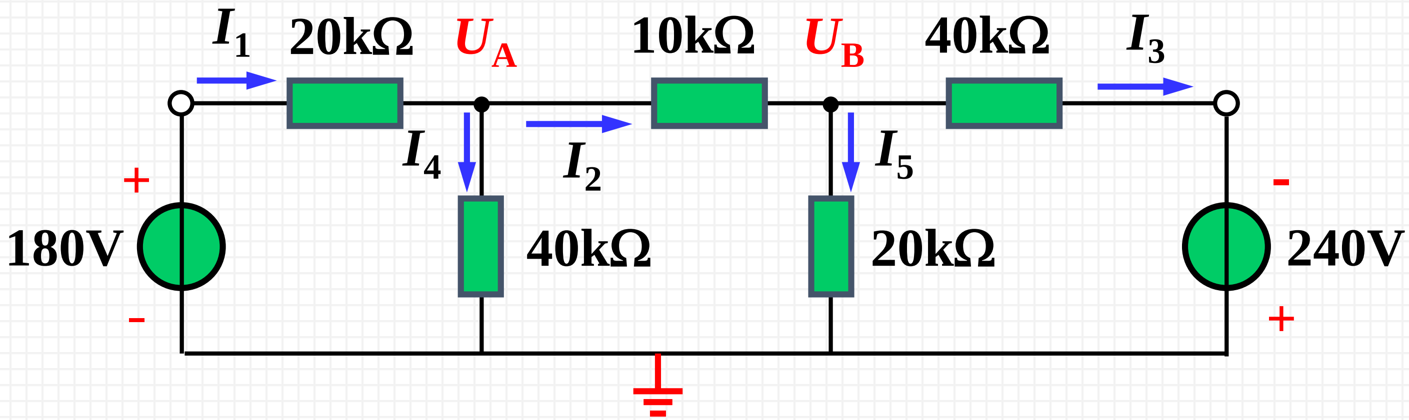
$$
\begin{cases}
\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)u_{n1}-\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)u_{n2}=\frac{u_{S1}}{R_1}-i_{S2}+i_{S3} \\
-\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)u_{n1}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_{n2}=-i_{S3}
\end{cases}
$$

等效电流源电流

例1　用节点法求各支路电流。







解

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{10}\right)U_A-\frac{1}{10}U_B=\frac{180}{20} \\ -\frac{1}{10}U_A+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\right)U_B=-\frac{240}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_A=47.27\text{V} \\ U_B=-7.27\text{V} \end{cases}$$

各支路电流

I_1=(180-U_A)/20= 6.64mA

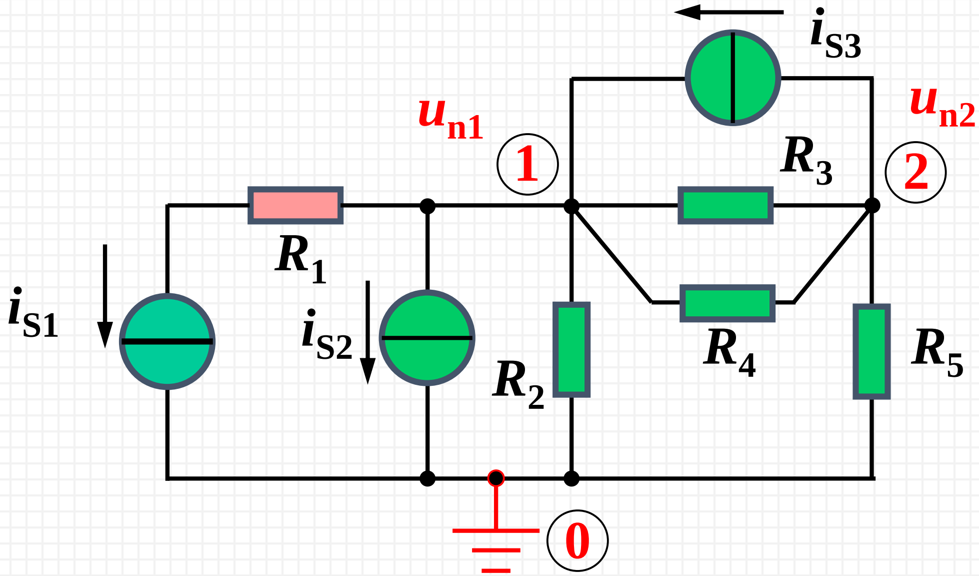
I_2= (U_A- U_B)/10= 5.45mA

I_3=(U_B +240)/40= 5.82mA

I_4= U_A /40=1.18mA

I_5= U_B /20=-0.364mA

特殊情况2：电路中电流源与电阻串联的支路。



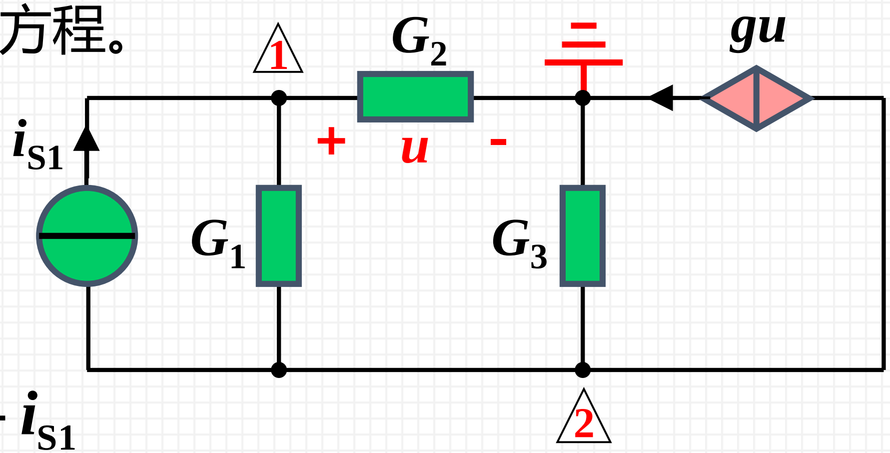
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)u_{n1}-\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)u_{n2}=-i_{S1}-i_{S2}+i_{S3}$$?

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n1}-\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n2}=-i_{S1}-i_{S2}+i_{S3}\\[2ex] -\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n1}+\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right)u_{n2}=-i_{S3}\end{cases}$$

特殊情况3：电路中含受控电流源。

CCCS如何处理?

例3 列写下图含**VCCS**电路的节点电压方程。



(1) 把受控源当作独立源，列方程

$$(G_1+G_2)\boxed{u_{n1}}-G_1\boxed{u_{n2}}=i_{S1}$$

$$-G_1u_{n1}+(G_1+G_3)u_{n2}=-g\boxed{u}-i_{S1}$$

(2) 用节点电压表示控制量。 $u=u_{n1}$

* 有一个控制量（电压或电流），就要增加一个**控制量和节点电压的补充方程。**

(3) 整理，得

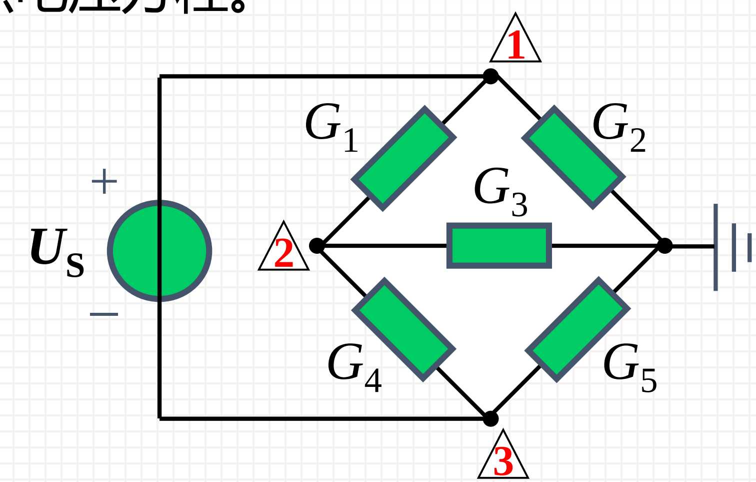
$$(G_1+G_2)u_{n1}-G_1u_{n2}=i_{S1}$$

$$(g-G_1)u_{n1}+(G_1+G_3)u_{n2}=-i_{S1}$$

* * 由于含受控源，方程的**系数矩阵一般不对称。**

特殊情况4：电路中含无串联电阻的独立电压源支路。

例4　试列写下图含理想电压源电路的节点电压方程。

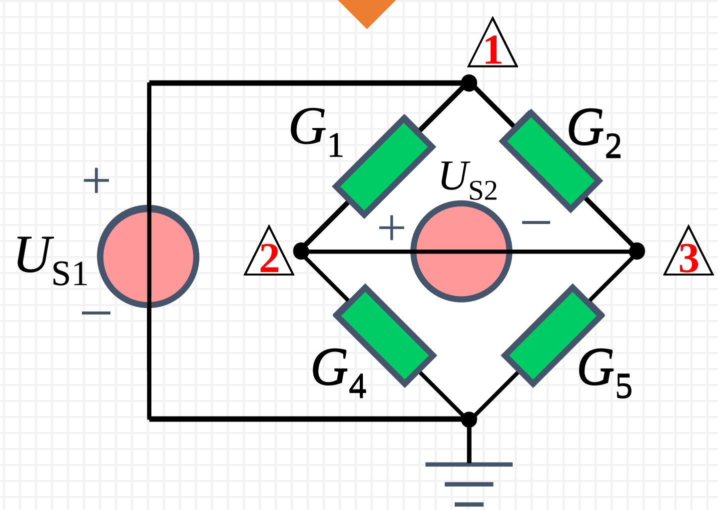


方法1： 选择合适的参考点

$$U_1 = U_S$$

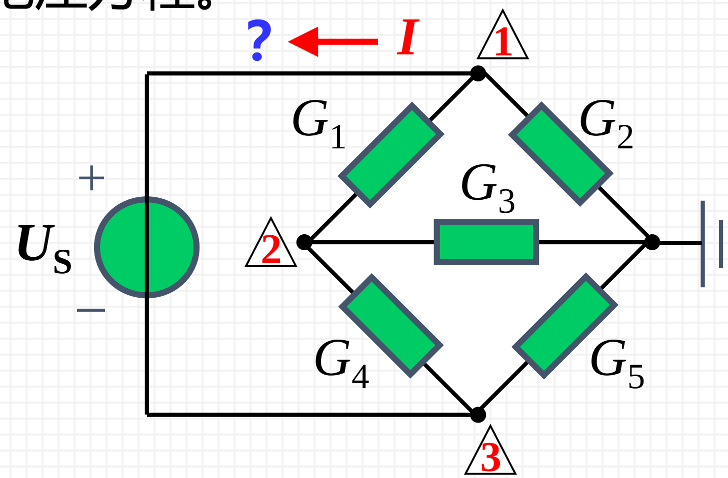
$$-G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2 - G_3U_3 = 0$$

$$-G_2U_1 - G_3U_2+(G_2+G_3+G_5)U_3 = 0$$



问题： 如果存在两个电压源支路怎么办?

例4 试列写下图含理想电压源电路的节点电压方程。



方法2 设电压源电流变量，视为流过电源的电流，列方程

$$\begin{cases} (G_1+G_2)U_1-G_1U_2=\boxed{-I} \\ -G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2-G_4U_3=0 \\ -G_4U_2+(G_4+G_5)U_3=\boxed{I} \end{cases}$$

增加节点电压与电压源电压间的关系

$$U_1-U_3=U_S$$

每增加一个**变量**，就要增加一个**补充方程**。

电流 　　 KVL

其他方法：**超节点法**

比较三种方法的优劣

节点电压法

方程变量—节点电压

独立节点到参考节点之间的电压

电路中要设定参考节点

方程形式—KCL

电阻上流出节点的电流 = 电流源流入节点的电流

$$\sum i_{R出}=\sum i_{iS入}$$

用节点电压这个“基”来“张成”支路电压，再根据元件约束获得支路电流

重新考虑减少方程数量的问题

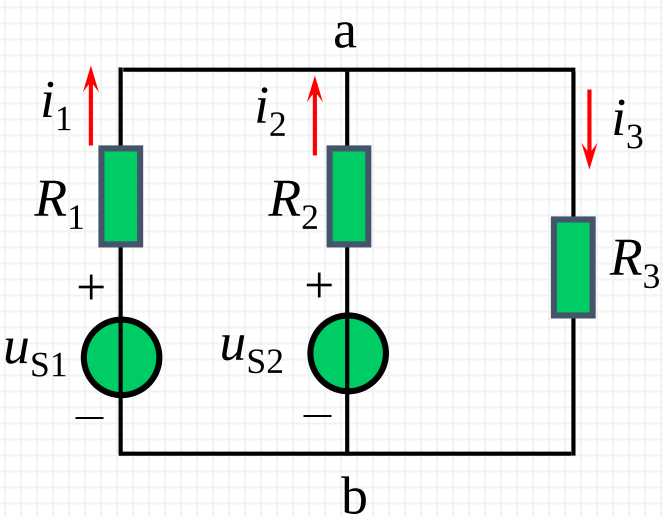
支路电流法用支路电流作为变量，需要***b*-*n*+1个KVL方程**，***n*-1个KCL方程**。

节点电压法用节点电压作为变量，只需要***n*-1个KCL方程**。

用*n*-1个节点电压表示支路电压和支路电流

***b*-*n*+1个KVL方程自动满足**

是否存在只需要***b*-*n*+1个KVL方程**的电路求解方法?



$$b=3$$

$$n=2$$

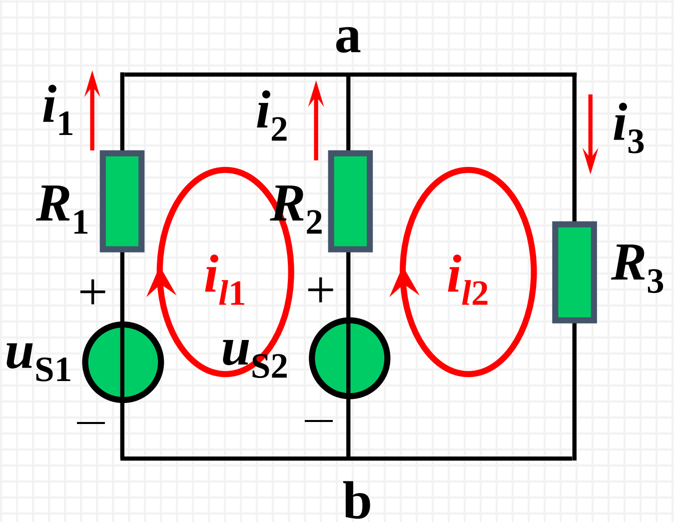
$$b-n+1=2$$

用*b*-*n*+1个 ? 表示支路电压和支路电流?

***n*-1个KCL方程自动满足。**

2 回路电流法 (loop current method)

基本思想： 以**假想的（听话的）回路电流**为独立变量。各支路电流可用回路电流的线性组合来表示。



假想的回路电流分别为i_{l1}，i_{l2}

只按照回路方向流动，不会分叉的电流

如果选择回路电流 i_{l1}，i_{l2}作变量

1、支路电流可由回路电流求出

$$i_1 = i_{l1} \qquad i_2 = i_{l2} - i_{l1} \qquad i_3 = i_{l2}$$

2、KCL自动满足

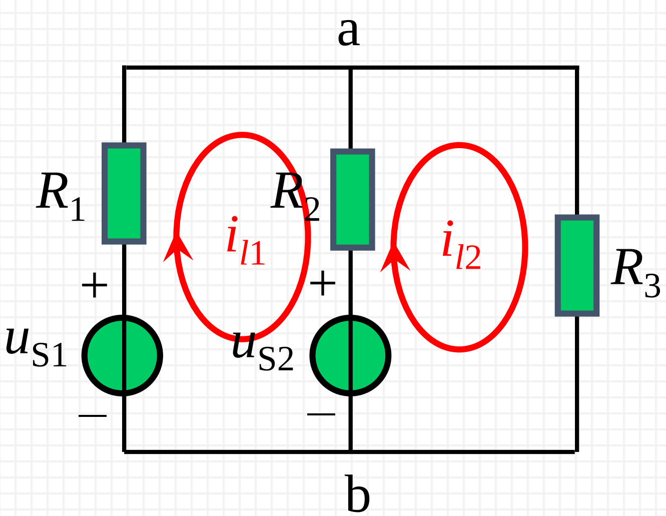
$$i_1 + i_2 - i_3 = i_{l1} + \left(i_{l2} - i_{l1}\right) - i_{l2} \equiv 0$$

3、只需列写KVL方程即可

关键思路：

求解支路量 → 求解回路量

回路电流法：以回路电流为未知变量列写电路KVL方程分析电路的方法。



回路1：$R_1 i_{l1} + R_2(i_{l1} - i_{l2}) + u_{S2} - u_{S1} = 0$

回路2：$R_2(i_{l2} - i_{l1}) + R_3 i_{l2} - u_{S2} = 0$

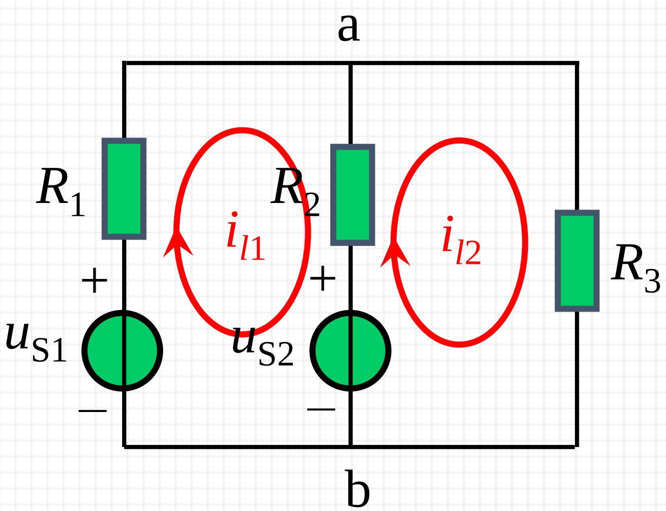
得

$$\begin{cases} R_1 i_{l1} + R_2(i_{l1} - i_{l2}) = u_{S1} - u_{S2} \\ R_2(i_{l2} - i_{l1}) + R_3 i_{l2} = u_{S2} \end{cases}$$

上面这两个式子等号左边是什么意思?

此处可以有弹幕

回路电流法：以回路电流为未知变量列写电路KVL方程分析电路的方法。



$$\begin{cases} R_1 i_{l1} + R_2(i_{l1} - i_{l2}) = u_{S1} - u_{S2} \\ R_2(i_{l2} - i_{l1}) + R_3 i_{l2} = u_{S2} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) i_{l1} - R_2 i_{l2} = u_{S1} - u_{S2} \\ -R_2 i_{l1} + (R_2 + R_3) i_{l2} = u_{S2} \end{cases}$$

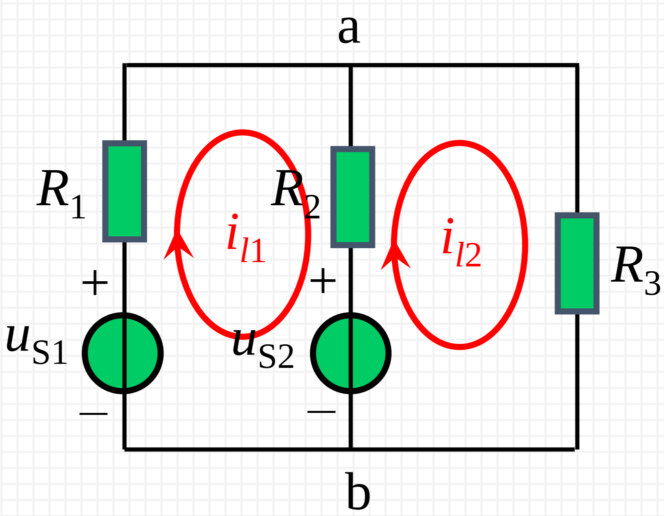
回路中电阻上**电压降**的代数和

回路中电压源上**电压升**的代数和

$R_{11}=R_1+R_2$ 代表回路1的总电阻（自电阻）

$R_{22}=R_2+R_3$ 代表回路2的总电阻（自电阻）

$R_{12}=-R_2$ ， $R_{21}=-R_2$ 代表回路1和回路2的公共电阻（互电阻）



$$(R_1+R_2)\,i_{l1}-R_2 i_{l2}=u_{S1}-u_{S2}$$

$$-R_2 i_{l1}+(R_2+R_3)\,i_{l2}=u_{S2}$$

$R_{11}=R_1+R_2$ 自电阻

$R_{22}=R_2+R_3$ 自电阻

$R_{12}=-R_2$, $R_{21}=-R_2$ 互电阻

$u_{Sl1}=u_{S1}-u_{S2}$ 回路1中所有电压源电压升的代数和

$u_{Sl2}=u_{S2}$ 回路2中所有电压源电压升的代数和

$$\begin{cases} R_{11}i_{l1}+R_{12}i_{l2}=u_{Sl1} \\ R_{21}i_{l1}+R_{22}i_{l2}=u_{Sl2} \end{cases}$$

回路电流方程的标准形式

电阻电路回路电流方程系数矩阵对称

推广到 l 个回路

$$\begin{cases} R_{11}i_{l1}+R_{12}i_{l1}+\ldots+R_{1l}\,i_{ll}=u_{Sl1} \\ R_{21}i_{l1}+R_{22}i_{l1}+\ldots+R_{2l}\,i_{ll}=u_{Sl2} \\ \cdots \\ R_{l1}i_{l1}+R_{l2}i_{l1}+\ldots+R_{ll}\,i_{ll}=u_{Sll} \end{cases}$$

其中

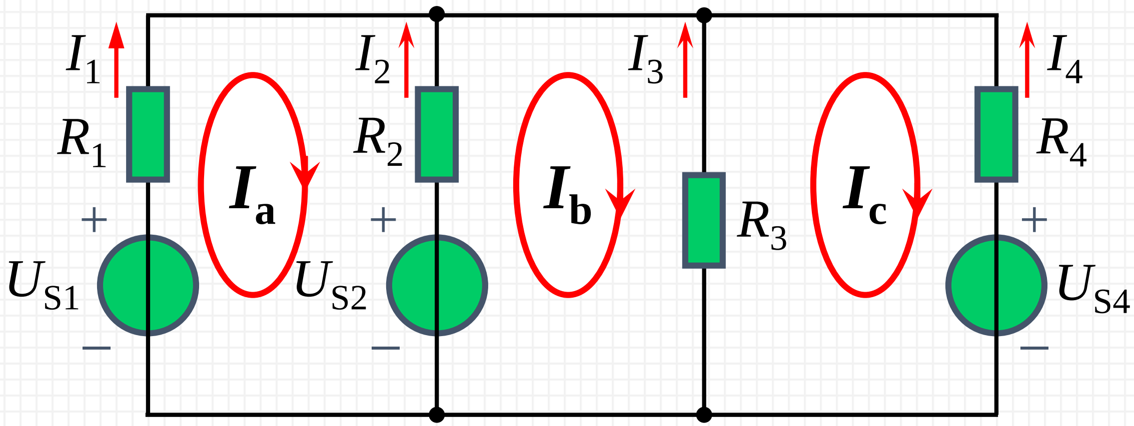
R_{kk}: **自电阻(为正)**， $k=1,2,\ldots\ldots,l$

R_{jk}: **互电阻**
$\begin{cases} + : \text{流过互阻两个回路电流}\textbf{方向相同} \\ - : \text{流过互阻两个回路电流}\textbf{方向相反} \\ 0 : \text{两个回路}\textbf{没有公共电阻} \end{cases}$

网孔电流法:

对平面电路，若以**网孔为独立回路**，此时回路电流也称为**网孔电流**，对应的分析方法称为网孔电流法。

例1 **用回路法求各支路电流。**



解

(1) 设独立回路电流（顺时针）

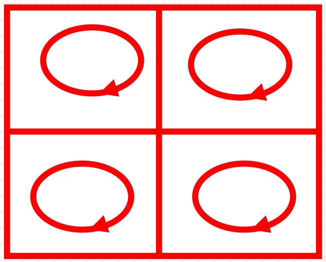
(2) 列 KVL 方程

$$(R_1+R_2)I_a \quad -R_2 I_b \quad +0 = U_{S1} - U_{S2}$$

$$-R_2 I_a + (R_2+R_3)I_b \quad - R_3 I_c = U_{S2}$$

$$0 \quad -R_3 I_b + (R_3+R_4)I_c = -U_{S4}$$

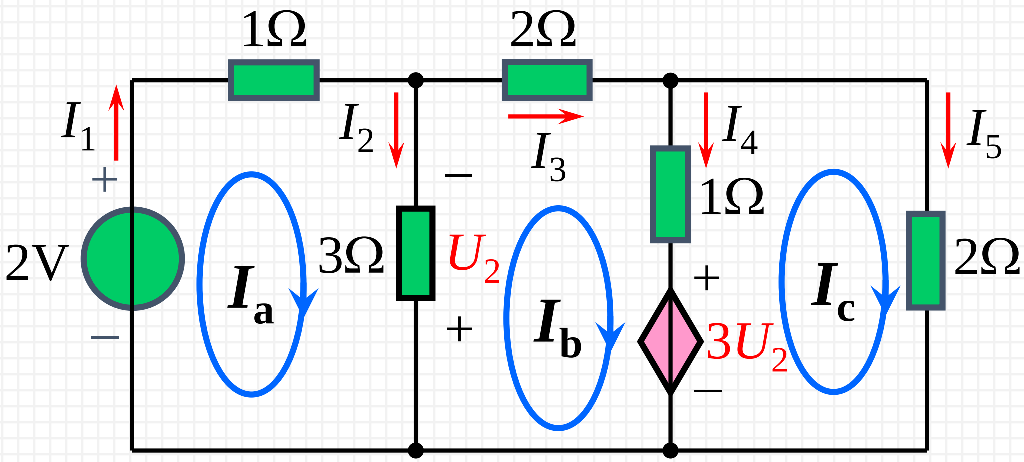
网孔法同转向
互电阻为负



(3) 求解回路电流方程，得 I_a , I_b , I_c

(4) 求各支路电流： $I_1=I_a$ ， $I_2=I_b-I_a$， $I_3=I_c-I_b$， $I_4=-I_c$

例2 用回路法求各支路电流。



① 将**VCVS**看作独立源建立方程；

$$\begin{cases} 4I_a - 3I_b = 2 \\ -3I_a + 6I_b - I_c = -3U_2 \\ -I_b + 3I_c = 3U_2 \end{cases}$$

② 找出控制量和回路电流关系。

$$U_2 = 3(I_b - I_a)$$

得

$$\begin{cases} 4I_a - 3I_b = 2 \\ -12I_a + 15I_b - I_c = 0 \\ 9I_a - 10I_b + 3I_c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{解得}} \begin{cases} I_a = 1.19\text{A} \\ I_b = 0.92\text{A} \\ I_c = -0.51\text{A} \end{cases}$$

各支路电流

$I_1 = I_a = 1.19\text{A}$

$I_2 = I_a - I_b = 0.27\text{A}$

$I_3 = I_b = 0.92\text{A}$

$I_4 = I_b - I_c = 1.43\text{A}$

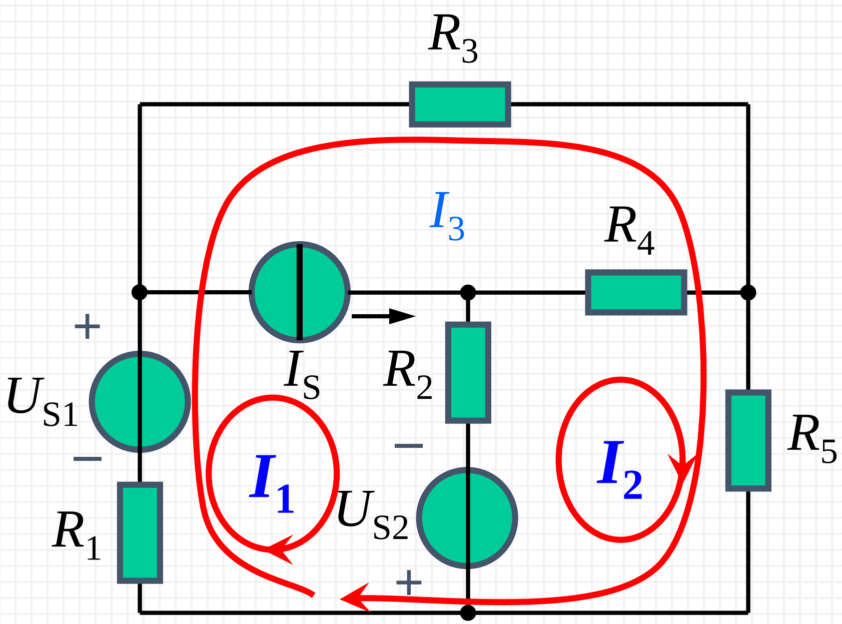
$I_5 = I_c = -0.52\text{A}$

❖ 有一个**控制量**（电压或电流），就要增加一个控制量和**回路电流**关系的**补充方程**。

❖ 由于含受控源，方程的系数矩阵一般不对称。

例3 用回路法列写含有理想电流源支路的电路方程。

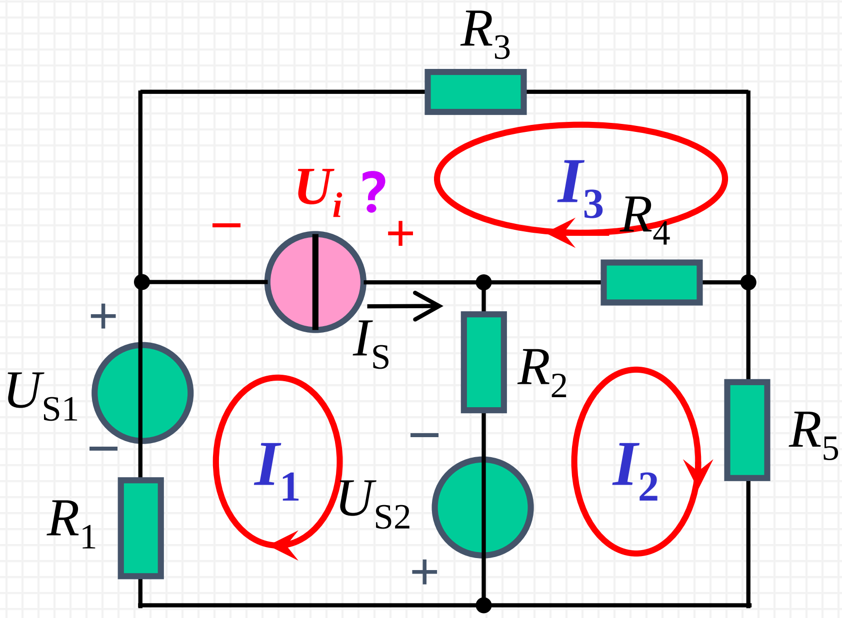
方法1： 选取独立回路时，使理想电流源支路仅仅属于一个回路, 该回路电流即 I_S 。



$$I_1=I_S$$

$$-R_2I_1+(R_2+R_4+R_5)I_2+R_5I_3=-U_{S2}$$

$$R_1I_1+R_5I_2+(R_1+R_3+R_5)I_3=U_{S1}$$



方法2

引入电流源的端电压变量

(视为电源上的电压)

$$\begin{cases} (R_1+R_2)I_1-R_2I_2=U_{S1}+U_{S2}+\boxed{U_i} \\ -R_2I_1+(R_2+R_4+R_5)I_2-R_4I_3=-U_{S2} \\ -R_4I_2+(R_3+R_4)I_3=\boxed{-U_i} \end{cases}$$

**** 增加回路电流和电流源电流的关系方程**

$$I_S=I_1-I_3$$

每增加一个变量，就要增加一个补充方程。

电压 **KCL**

其他方法：**超网孔法**

比较三种方法的优劣

回路电流法

方程变量—回路电流

为什么b-n+1个独立回路电流就够?

感兴趣的话看教材附录B

假想的听话的电流

支路电流是回路电流的组合

方程形式—KVL

沿回路方向

电阻上的电压降 = 电压源上的电压升

$$\sum U_R \ (\text{压降}) = \sum U_S \ (\text{压升})$$

用回路电流这个“基”来“张成”支路电流，再根据元件约束获得支路电压

支路法、回路法和节点法的小结和比较

(1) 方程数的比较

	KCL方程	KVL方程	方程总数
支路法	n-1	b-n+1	b
回路法	0	b-n+1	b-n+1
节点法	n-1	0	n-1

(2) 对于非平面电路，选独立回路不容易，而独立节点较容易。一般来说回路方程系数比较整，手算求解方便。

(3) 节点法、回路法易于编程。目前用计算机分析网络(电网，集成电路设计等)采用节点法较多。