《微积分A2》第三讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

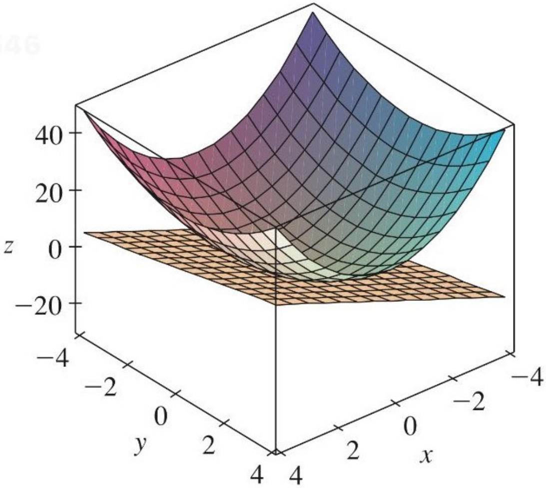
2019年02月24日

回忆: 二元函数的可微性(differentiability)

Definition

定义: 设二元函数 $f(x,y)$ 定义域包含点 $z_0=(x_0,y_0)$ 的一个邻域, 即 (x_0,y_0) 是其定义域的一个内点. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的增量可由齐次线性函数逼近, 也就是说, 存在数 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(\lambda h+\mu k)=o(\rho)$, 其中 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 并称线性函数 $\lambda h+\mu k$ 为 f 在点 (x_0,y_0) 处的微分. 这个微分常记作 $df\big|_{z_0}=\lambda h+\mu k$. 自变量增量 h,k 常写作 $h=\Delta x$, $k=\Delta y$. 故微分常常写作 $df\big|_{z_0}=\lambda\Delta x+\mu\Delta y$.

可微性 $\Leftrightarrow$ 切平面的存在性



可微性 $\Rightarrow$ 连续性

Theorem

若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处也连续.

Proof.

证：由可微性定义知，存在常数 λ,μ，使得

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\lambda(x-x_0)+\mu(y-y_0)+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 由此得 $f(x,y)\to f(x_0,y_0)$, $(x,y)\to(x_0,y_0)$. 命题得证. $\square$

微分的唯一性

Theorem

若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，即存在常数 λ,μ，使得

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\lambda h+\mu k+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$，则数对 λ,μ 唯一.

证: 假设除了存在常数 λ, μ, 使得

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\lambda h+\mu k+o(\rho), \quad (*)$$

还存在常数 $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$, 也使得

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\tilde{\lambda} h+\tilde{\mu} k+o(\rho), \quad (**)$$

则由式 (**) 减去式 (**) 可得 $(\lambda-\tilde{\lambda})h+(\mu-\tilde{\mu})k=o(\rho)$.

注意 $o(\rho)-o(\rho)=o(\rho)$. 由于增量 h 和 k 可任意取值, 故可取

$k=0, h\neq 0$, 则 $(\lambda-\tilde{\lambda})h=o(h)$. 由此得

$$\lambda-\tilde{\lambda}=\frac{o(h)}{h}\to 0, \quad h\to 0.$$

故 $\tilde{\lambda}=\lambda$. 同理可证 $\tilde{\mu}=\mu$. 证毕.

定义: 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域包含点 (a,b) 的一个邻域. 固定 $y=b$, 若 $f(x,b)$ 作为一元函数在点 $x=a$ 处可导, 即极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

存在, 则称函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处关于 x 的偏导数存在, 且极限值称为 f 在该点处关于 x 的偏导数, 常记作 $f_x(a,b)$. 类似可定义函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处关于 y 的偏导数如下

$$f_y(a,b)\triangleq\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b},$$

假设上述极限存在.

偏导数有许多记号. 假设函数 $f(x,y)$ 关于 x 的偏导数在其定义域(设为开集)处处存在, 则除了记号 $f_x(x,y)$ 记这个偏导数之外, 还常用如下记号

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ f'_x(x,y),\ D_x f(x,y),\ D_1 f(x,y),\ \cdots.$$

类似关于 y 的偏导数 $f_y(x,y)$ 还有其他常用记号

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\ f'_y(x,y),\ D_y f(x,y),\ D_2 f(x,y),\ \cdots.$$

Example

设 $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$，求 $f_x(2,1)$，$f_y(2,1)$.

解：任意固定 y 为常数，一元函数 $f(x,y)$ 关于 x 处处可导，且 $f_x(x,y)=3x^2+2xy^3$. 同理另一个偏导数 $f_y(x,y)$ 也处处存在，且 $f_y(x,y)=3x^2y^2-4y$. 于是

$$f_x(2,1)=3\cdot 2^2+2\cdot 2\cdot 1^3=16,$$

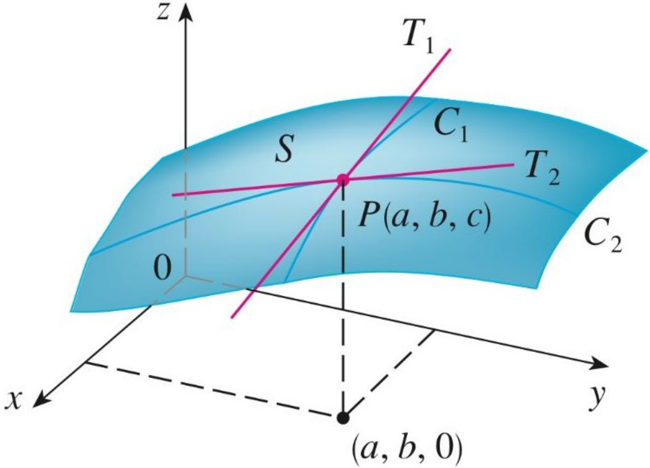
$$f_y(2,1)=3\cdot 2^2\cdot 1^2-4\cdot 1=8.$$

偏导数的几何意义

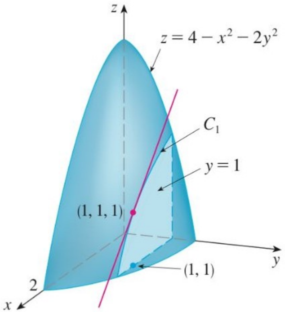
回忆二元函数 $z = f(x, y)$ 的图像

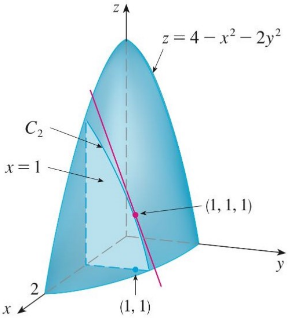
$$S \triangleq \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D\},$$

代表一空间曲面，其中 D 是 f 的定义域. 设点 $P = (a, b, c) \in S$. 固定 $y = b$, 我们得到一条由曲面 S 和平面 $y = b$ 相交的曲线 C_1. 同理，固定 $x = a$, 我们得到一条由曲面 S 和平面 $x = a$ 相交的的曲线 C_2. 两条曲线 C_1, C_2 均过点 $P = (a, b, c)$. 显然它们的斜率分别是 $f_x(a, b)$ 和 $f_y(a, b)$. 如下图.


z
T_1
C_1
S
T_2
$P(a, b, c)$
C_2
0
x
y
$(a, b, 0)$

<u>例一</u>: 设 $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, 简单计算得 $f_x(1, 1) = -2$, $f_y(1, 1) = -4$ 分别是图中两条曲线 C_1 和 C_2 在点 $(1, 1, 1)$ 处的斜率.





例二

Example

例二: 设 $f(x,y)=x\cos(xy)$, 求 $f(x,y)$ 的两个偏导数.

解: 任意固定 y (视 y 为常数), 对 $f(x,y)$ 关于 x 求导得

$$f_x(x,y)=[x\cos(xy)]_x=\cos(xy)-xy\sin(xy).$$

类似

$$f_y(x,y)=[x\cos(xy)]_y=-x^2\sin(xy).$$

解答完毕.

可微性 $\Rightarrow$ 偏导数存在

Theorem

定理：设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 f 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，并且

$$df\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy.$$

定理证明

证明: 由可微性定义知, 存在常数 λ, μ, 使得

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \lambda h + \mu k + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$. 令 $k=0$, $h \neq 0$ 得

$$\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lambda + \frac{o(h)}{h} \to \lambda, \quad h \to 0.$$

这说明偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 存在且 $\lambda = f_x(x_0, y_0)$. 同理 $f_y(x_0, y_0)$ 存在且等于 μ. 因此 $df\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$. 定理得证. □

偏导数存在 $\not\Rightarrow$ 连续性

下列例子说明函数在某点的两个偏导数存在，并不意味着函数在这个点连续．当然更不意味着函数在这个点可微．考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & xy=0,\\ 1, & xy\neq 0.\end{cases}$$

显然函数 f 在原点处不连续．但 f 在原点的两个偏导数存在．因为

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{0-0}{x}=0\to 0,\quad x\to 0.$$

这说明偏导数 $f_x(0,0)$ 存在，且 $f_x(0,0)=0$．同理可证偏导数 $f_y(0,0)$ 存在，且 $f_y(0,0)=0$.

Theorem

<u>定理</u>：设 $f_x(x,y)$, $g_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在，则 $(f\pm g)_x$, $(fg)_x$, $(f/g)_x$ 在点 (x_0,y_0) 处也存在. 对于商函数，需要补充假设 $g(x_0,y_0)\neq 0$. 进一步还有

(i) $(f\pm g)_x = f_x \pm g_x$;

(ii) $(fg)_x = f_x g + f g_x$;

(iii) $(f/g)_x = \frac{1}{g^2}(f_x g - f g_x)$;

结论(i)(ii)(iii)中的偏导数均在点 (x_0,y_0) 处取值. 关于 y 的偏导数有类似的结论.

定理的证明直接由关于一元函数导数的四则运算的结论得到.

Theorem

定理: 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在点 $z_0=(x_0,y_0)$ 处可微, 则它们的和差 $f\pm g$, 乘积 fg, 商 f/g 在点 z_0 处也可微. 对于商函数, 需要补充假设 $g(z_0)\neq 0$. 进一步还有

(i) $d(f\pm g)=df\pm dg$;

(ii) $d(fg)=(df)g+f(dg)$;

(iii) $d(f/g)=\frac{1}{g^2}[(df)g-f(dg)]$,

上述微分均在点 z_0 处取值.

证明: 根据微分定义, 以及偏导数的四则运算定理证明. 细节略. □

例: 考虑函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点 $(0,0)$ 处的连续性, 偏导数的存在性, 以及可微性.

解: (i) 连续性. 由不等式

$$0\le\sqrt{|xy|}\le\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\|z\|,$$

可知函数 f 在原点 $(0,0)$ 处连续.

(ii) 偏导数的存在性. 由于

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{0-0}{x}=0\to 0,\quad x\to 0,$$

故 $f_x(0,0)$ 存在且 $f_x(0,0)=0$. 由于函数关于变量 x,y 的对称的, 故另一个偏导 $f_y(0,0)$ 也存在且 $f_y(0,0)=0$.

例子续

(iii) 可微性. 假设 f 在原点可微, 则根据可微性定义可知

$$f(x,y)-f(0,0)=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 此即 $\sqrt{|xy|}=o(\rho)$. 这表明

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0, \quad (x,y)\to(0,0).$$

由此可知极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

但上述极限显然不存在. 矛盾. 故函数 f 在原点不可微. 解答完毕.

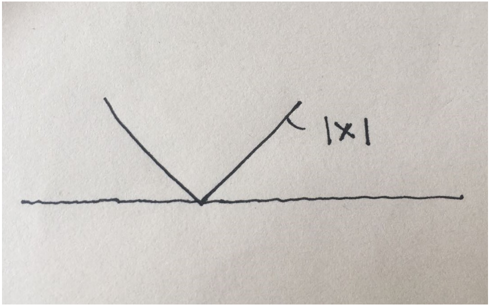
函数 $f(x)$ (一元或多元) 在一点 x_0 处可微的本质是，函数 f 在点 x_0 附近可以用一个线性函数 $L(x) = y_0 + \lambda(x - x_0)$ 来逼近(或近似)，这里 $y_0 = f(x_0)$. 逼近的意思是

$$f(x) - L(x) = o(\|x - x_0\|).$$

在多元函数的情形下，$\lambda(x - x_0)$ 表示向量内积. 在可微的情形下，通常称线性函数 $L(x)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的线性化函数，或线性化.

Example

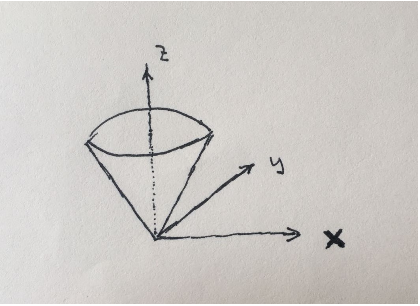
例一：一元函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 处不可微. 其函数图像是两条直线连接的折线. 连接点即原点是个尖点. 由图可知尖点处无法用任何直线作逼近.



不可微函数, 例二

Example

<u>例二</u>: 二元函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 其函数图像为圆锥. 在圆锥的尖点即原点处, 不存在任何平面可以逼近这个圆锥面.



Theorem

定理：设函数 $f(x,y)$ 的定义域包含点 (a,b) 的一个邻域 B，且两个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在 B 上处处存在. 若 f_x, f_y 在点 (a,b) 处均连续，则函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可微.

证明：考虑函数 f 在点 (a,b) 处的增量 $\Delta f = f(a+h,b+k) - f(a,b)$. 对增量加一项减一项(这个方法以后将多次使用)，并利用一元函数的中值定理得

$$\Delta f = f(a+h,b+k) - f(a,b+k) + f(a,b+k) - f(a,b)$$

$$= f_x(a+\lambda h, b+k)h + f_y(a, b+\mu k)k, \quad \lambda, \mu \in (0,1)$$

证明续一

$$= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \alpha h + \beta k,$$

其中

$$\alpha = \alpha(h,k) = f_x(a+\lambda h, b+k) - f_x(a,b),$$
$$\beta = \beta(h,k) = f_y(a, b+\mu k) - f_y(a,b).$$

由假设 f_x, f_y 在点 (a,b) 处均连续，故当 $(h,k) \to (0,0)$ 时，$(\alpha,\beta) \to (0,0)$.

于是当 $(h,k)\to(0,0)$ 时，

$$\frac{|\alpha h+\beta k|}{\rho}\le\frac{|\alpha||h|}{\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{|\beta||k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\le|\alpha|+|\beta|\to 0.$$

这表明 $\alpha h+\beta k=o(\rho)$. 故 f 在点 (a,b) 处可微. 证毕. □

注: 定理中的条件: 两个偏导数 f_x, f_y 在邻域 B 上存在，且在点 (a,b) 处连续，可以减弱为: 两个偏导数 f_x, f_y 中的一个，比如 f_x 在邻域 B 上存在且在点 (a,b) 处连续，而 f_y 在点 (a,b) 处存在. 其证明留作习题. 见课本第43页习题1.4第7题.

可微性 $\not\Rightarrow$ 偏导数的连续性，例子

之前证明了函数偏导数的连续性，蕴含了函数的可微性．以下的例子说明，反之不成立．

例：设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)^{-1}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

易证函数 f 于原点可微．因为 $f(x,y)=o(\rho)$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，故 $df|_{(0,0)}=0$．进一步可证，函数 f 在任何其他点 (x,y) 处也可微．因此函数 f 在全平面上处处可微．

例子续

另一方面不难证明，偏导数 f_x, f_y 在全平面上处处存在，且 $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$. 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f_x(x,y)=2x\sin(x^2+y^2)^{-1}-2x(x^2+y^2)^{-1}\cos(x^2+y^2)^{-1},$$
$$f_y(x,y)=2y\sin(x^2+y^2)^{-1}-2y(x^2+y^2)^{-1}\cos(x^2+y^2)^{-1}.$$

显然偏导数 f_x, f_y 在原点 $(0,0)$ 处的极限不存在. 这说明它们在 $(0,0)$ 处不连续. 例子完毕.

总结

偏导数连续性 $\Rightarrow$ 可微性 $\Rightarrow$ 连续性

$\Downarrow$

偏导存在性

例：求 $1.08^{3.94}$ 的近似值.

解：记 $f(x,y)=x^y$, $(a,b)=(1,4)$, $h=0.08$, $k=-0.04$, 则

$$1.08^{3.94}=f(a+h,b+k)$$

$$=f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+o(\rho)$$

简单计算得

$$\begin{aligned} f(x,y)&=x^y, & f(1,4)&=1^4=1,\\ f_x(x,y)&=yx^{y-1}, & f_x(1,4)&=4\cdot 1^3=4,\\ f_y(x,y)&=x^y\ln x, & f_y(1,4)&=1^4\ln 1=0. \end{aligned}$$

因此

$$1.08^{3.94} \approx f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k$$

$$= 1 + 4 \cdot 0.08 + 0 \cdot (-0.04) = 1.32.$$

解答完毕.

Definition

定义: 设函数 $f(x,y)$ 的定义域包含点 (x_0,y_0) 的一个邻域, $u=(a,b)$ 为一个单位向量, 即 $\|u\|=\sqrt{a^2+b^2}=1$. 往下称单位向量 u 为一个方向. 若极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h}$$

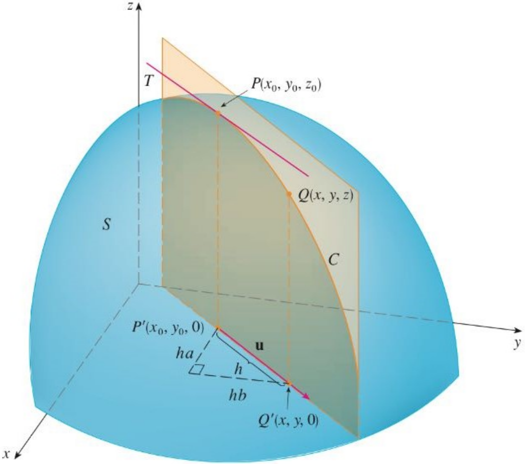
存在, 则称极限值为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处, 沿着方向 $u=(a,b)$ 的方向导数, 记作

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) \quad \text{或} \quad \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_0,y_0)} \quad \text{或} \quad D_u f\Big|_{(x_0,y_0)}, \quad \cdots$$

方向导数的几何意义

考虑曲面 S: $z = f(x, y)$, 记 $P = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, 则点 P 位于曲面 S 上. 显然满足如下三个条件的平面存在唯一: (1) 过点 P; (2) 垂直于 xy 平面; (3) 平行于方向 $(a, b, 0)$. 这个平面与曲面 S 相交于一条曲线, 记作 C. 则曲线 C 在点 P 处的斜率正是方向导数 $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$.

方向导数图示



类似可定义一般 n 元函数的方向导数. 例如三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处, 沿方向 $u=(a,b,c)$ $(\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1)$ 的方向导数定义为极限(假设存在)

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+ha,y_0+hb,z_0+hc)-f(x_0,y_0,z_0)}{h},$$

并用如下类似的符号记这个方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0,z_0) \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \quad 或 \quad \left.D_u f\right|_{(x_0,y_0,z_0)}.$$

注记

<u>注一</u>: 对于二元函数 $f(x,y)$, 令 $\phi(h) \triangleq f(x_0+ha, y_0+hb)$, 这里 $u=(a,b)$ 为单位向量, 则方向导数 $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)$ 存在, 当且仅当一元函数 $\phi(h)$ 在 $h=0$ 处可导, 且 $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\phi'(0)$.

<u>注二</u>: 偏导数也是方向导数. 例如对于二元函数 $f(x,y)$, 记 $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, 则显然有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial e_1}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial e_2}(x_0,y_0).$$

这里的方向导数定义与课本 page 35-36 中定义的方向导数略有不同. 课本中的方向导数, 实际上是函数

$$\phi(h) \triangleq f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

在 $h = 0$ 处的右导数 $\phi'_+(0)$, 即

$$\phi'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

显然, 课本中的方向导数定义比这里的定义更弱些.

例子

例如，依照这里的定义，函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，在原点 $(0,0)$ 处，沿着任意方向 $u=(a,b)$ 的方向导数均不存在. 因为

$$\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\frac{|h|}{h} \quad (*)$$

在 $h=0$ 处的极限不存在. 而依照课本的定义，方向导数存在且等于 1. 因为上式 (*) 在 $h=0$ 处右侧极限存在且等于 1.

Theorem

定理：若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 f 在点 (x_0,y_0) 处，沿着任何方向 $u=(a,b)$ $(\|u\|=1)$ 的方向导数均存在，并且

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)a+f_y(x_0,y_0)b.$$

证明: 由假设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微知

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$. 取 $(h,k)=t(a,b)$, (注意变量 h,k 可任意取值), 则 $\rho=|t|$, $o(\rho)=o(t)$. 于是

$$\frac{f(x_0+ta,y_0+tb)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$=f_x(x_0,y_0)a+f_y(x_0,y_0)b+\frac{o(t)}{t}$$

$$\to f_x(x_0,y_0)a+f_y(x_0,y_0)b,\quad t\to 0.$$

这就证明了定理的结论.

Theorem

定理: 若 n 元函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则 f 在点 x_0 处, 沿着任何方向 $u=(a_1,\cdots,a_n)$ $(\|u\|=1)$ 的方向导数均存在, 并且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_0}a_1+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{x_0}a_n.$$

证明完全同二元情形. 略.

Example

例：求函数 $f(x,y)=\sin(x+2y)$ 在原点 $(0,0)$ 处沿着方向 $u=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$ 的方向导数.

解：简单计算得

$$f_x(x,y)=\cos(x+2y),\quad f_x(0,0)=1,$$
$$f_y(x,y)=2\cos(x+2y),\quad f_y(0,0)=2.$$

于是所求的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,0)}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

根据方向导数的计算公式，函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的沿着方向 $u=(a,b)$ 的方向导数可表为两个向量的内积

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b = (f_x(x,y), f_y(x,y)) \cdot (a,b).$$

Definition

定义: 假设二元 $f(x,y)$ 在开区域 D 上可微，我们称二维向量 $(f_x(x,y), f_y(x,y))$ 为函数 f 在点 $(x,y) \in D$ 处的梯度，并且记之为 $\nabla f(x,y)$ 或 $\operatorname{grad} f(x,y)$.

于是函数 f 在点 (x,y) 处沿着方向 $u=(a,b)$ 的方向导数可表为 $D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u$.

梯度(gradients), n 元情形

一般 n 元函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的梯度类似定义. 例如对于三元函数 $f(x, y, z)$ 的梯度定义为

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z)\Big|_{(x,y,z)},$$

进一步函数 f 在点 (x, y, z) 处沿着方向 $u = (a, b, c)$ 的方向导数可表示为

$$D_u f = f_x a + f_y b + f_z c = \nabla f \cdot u,$$

这里偏导数 f_x, f_y, f_z 在点 (x, y, z) 处取值.

Definition

定义: 设 $f(x,y)$ 在开区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上可微, 则二维映射

$$\nabla f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

为由函数 f 诱导出的梯度场(gradient fields). 一般由 n 维空间到 n 维空间的映射均称为一个 n 维向量场.

Example

例: 设 $f(x,y) = \sin(x+2y)$, 则函数 f 梯度场为

$$\nabla f(x,y) = (\cos(x+2y), 2\cos(x+2y)).$$

Theorem

定理: (i) 常数函数的梯度为零, 即 $\nabla c = 0$;

(ii) $\nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f$, λ 为常数;

(iii) $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$;

(iv) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$;

(v) $\nabla(f/g) = \frac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g)$, $g \neq 0$;

(vi) $\nabla u(f) = u'(f)\nabla f$, 这里 $u(t)$ 为一元可微函数.

上述结论不难根据偏导数性质证明. 细节略.

回忆函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的沿着方向 $u=(a,b)$ 的方向导数，可表为两个向量的内积 $D_uf(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot u$. 其意义是函数沿着方向 u 的变化率. 显然若固定点 (x_0,y_0)，则方向导数 $D_uf(x_0,y_0)$ 的值依赖于方向 $u=(a,b)$ 的选择. 问题: 选取什么方向，可使得方向导数最大或最小.

Theorem

定理: 可微函数 $f(x)$ 在点 x_0 处，沿着梯度方向 $\nabla f(x_0)$ 可取得方向导数的最大值 $\|\nabla f(x_0)\|$ (设 $\nabla f(x_0)\neq 0$); 沿着负梯度方向 $-\nabla f(x_0)$ 取得方向导数值最小值 $-\|\nabla f(x_0)\|$.

Proof.

证明: 回忆内积另一计算公式

$$D_u f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot u = \|\nabla f(x_0)\| \|u\| \cos\theta = \|\nabla f(x_0)\| \cos\theta,$$

这里 θ 记梯度向量 $\nabla f(x_0)$ 和 u 的夹角. 由此可见, 当 $\theta = 0$ 时, 即当取 $u = \nabla f(x_0)/\|\nabla f(x_0)\|$ 时, 方向导数取得最大值 $\|\nabla f(x_0)\|$, 而当 $\theta = \pi$ 时, 即 $u = -\nabla f(x_0)/\|\nabla f(x_0)\|$ 时, 方向导数取得最小值 $-\|\nabla f(x_0)\|$. 证毕. □

例: 函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 的梯度为 $\nabla f=(2x,2y)$. 函数在任意点 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 处, 沿着梯度方向 $(x_0,y_0)/\rho_0$, 方向导数最大, 即函数增长最快, 这里$\rho_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$; 而沿着负梯度方向 $(-x_0,-y_0)/\rho_0$, 方向导数最小, 即函数增长最慢.

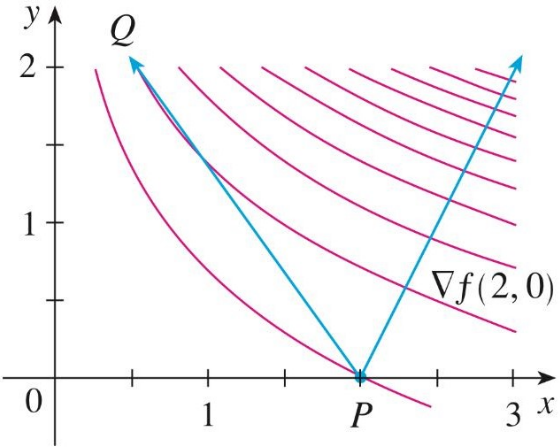
例: 设 $f(x,y)=xe^y$. (i) 求函数在点 $P=(2,0)$ 处, 沿着方向 $\overrightarrow{PQ}$ 的方向导数, 这里 $Q=(0.5,2)$; (ii) 求函数在点 P 处的方向导数的最大值.

解: 简单计算得 $\nabla f(x,y)=(e^y,xe^y)$, $\nabla f(2,0)=(1,2)$.

(i) 先计算向量 $\overrightarrow{PQ}=(0.5,2)-(2,0)=(-1.5,2)$. 其单位向量为 $u=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$. 于是函数在点 $P=(2,0)$ 处, 沿着方向 u 的方向导数为 $D_uf(2,0)=\nabla f(2,0)\cdot u=(1,2)\cdot(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})=1$.

(ii) 由定理知, 函数在点 P 处沿着梯度方向 $\nabla f(2,0)=(1,2)$ 的方向导数可取得最大值 $\|\nabla f(2,0)\|=\sqrt{5}$. 图示如下.

图示



二元函数的水平线(level curves)

Definition

<u>定义</u>：给定二元函数 $f(x,y)$，称集合 $\{(x,y)\in D, f(x,y)=k\}$ 为函数 f 的水平线，或简单地说 $f(x,y)=k$ 是水平线，这里 $k\in\mathbb{R}$，$D\subset\mathbb{R}^2$ 是函数 f 的定义域.

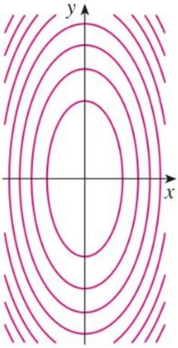
Example

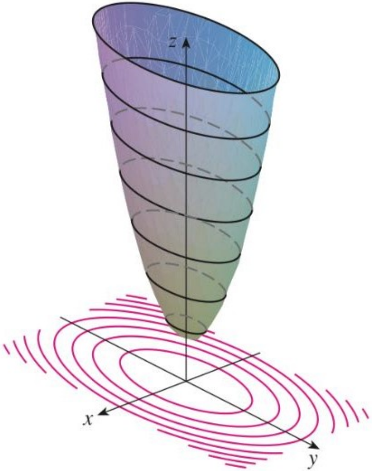
例: 考虑 $f(x,y)=4x^2+y^2$. 对于任意正数 $k>0$, 水平线 $4x^2+y^2=k$ 为椭圆, 其标准形式为

$$\frac{x^2}{k/4}+\frac{y^2}{k}=1,$$

两个半轴的长度分别为 $\sqrt{k}/2$, $\sqrt{k}$. 函数图像及其水平线如下.

水平线图示



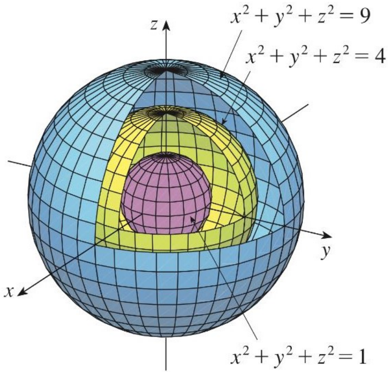


三元函数的水平面(level surfaces)

Definition

<u>定义</u>: 给定三元函数 $f(x,y,z)$, 称 $\{(x,y,z)\in D, f(x,y,z)=k\}$ 为函数 f 的水平面, 或简单地说 $f(x,y,z)=k$ 是水平面, 这里 $k\in\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^3$ 是函数 f 的定义域.

例: 函数 $x^2+y^2+z^2$ 水平面为球面. 如图.



一. 习题1.3 (page 24): 7(1)(3), 8, 9, 10(1)(3)(5).

二. 习题1.4 (page 42-43): 1(1)(3)(5), 2, 4(1)(3)(5)(7), 7. 8, 9, 10, 11(1)(3), 12(1)(3).

三. 补充习题: 求下式的近似值(答案: 1.05)

$$\frac{1.03^2}{\sqrt{0.98}\sqrt[3]{1.06}}.$$