微积分A期中讲座

经73班　　罗承扬

目录

contents

1、定义

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. \, |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$的$\varepsilon$-N语言描述

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{N}\in\mathbb{N},\text{s.t. 当}n>\mathrm{N}\text{时,有}\left|a_n-\mathrm{A}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{N}\in\mathbb{N},\text{s.t. 当}n\geq\mathrm{N}\text{时,有}\left|a_n-\mathrm{A}\right|\leq\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{N}\in\mathbb{N},\text{s.t. 当}n>\mathrm{N}\text{时,有}\left|a_n-\mathrm{A}\right|<\varepsilon/2$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon\in(0,1),\exists \mathrm{N}\in\mathbb{N},\text{s.t. 当}n\geq\mathrm{N}\text{时,有}\left|a_n-\mathrm{A}\right|\leq 2\varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N},\exists \mathrm{N}=\mathrm{N}(k)\in\mathbb{N},\text{s.t. 当}n\geq\mathrm{N}\text{时,有}\left|a_n-\mathrm{A}\right|\leq\frac{1}{2^k}.$$

1-2、定义法证明数列极限

- ε-N语言中N的选取.

(1) 放缩法求解不等式 $|a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon$

$$|a_n - \mathrm{A}| < \cdots < \boxed{n\text{的简单表达式}} < \varepsilon$$

(2) 分段法确定N

$$\mathrm{N} = \max\{N_1, N_2, \cdots, N_k\}$$

2、性质

Prop1. 收敛列的极限唯一.

Prop2. 在数列中添加、删除有限项, 或者改变有限项的值, 不改变数列的敛散性与极限值.

Prop3. (收敛列的任意子列具有相同的极限)

$$\lim_{k\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

2、性质

Prop3. (收敛列的任意子列具有相同的极限)

$$\lim_{k\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Corollary.(具有不同极限子列的数列发散.)

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \neq b = \lim_{k\to\infty} a_{m_k} \Rightarrow \{a_n\}\text{发散}.$$

Ex. $\{(-1)^n\}$发散.

2、性质

Prop4. 收敛列一定有界.

Question. 有界列是否必为收敛列？

Ex. $\{(-1)^n\}$ 发散.

Prop5. (极限的保序性) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

(1)若 $a < b$,则 $\exists N$,当 $n > N$ 时有 $a_n < b_n$.

(2)若 $\exists N$,当 $n > N$ 时有 $a_n \le b_n$,则 $a \le b$.

2、性质

Prop6. (极限的四则运算) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

(1)$\forall c \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ca;$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab;$

(4)$b \neq 0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}.$

3、求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

Thm.(单调收敛原理)

(1) 单调递增且有上界的数列必收敛;

(2) 单调递减且有下界的数列必收敛.

3、求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

Prop7. (夹挤原理) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, 且 $\exists n_0, s.t.$

$$a_n \le x_n \le b_n, \quad \forall n > n_0.$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

4、数列极限例题选讲

1. (夹逼原理) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=1$$

4、数列极限例题选讲

2. (夹逼原理) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$

$$3=\sqrt[n]{3^n}\le\sqrt[n]{2^n+3^n}\le 3\sqrt[n]{2}$$

Review. (重要极限) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\forall a>0$

3. (夹逼原理) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+2}$

$$\left|\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+2}\right|\le\frac{\sqrt{n}}{n+2}$$

Review. $\sin x,\cos x$的有界性

填空题 2分

设置

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}$$ [填空1]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}$$ [填空2]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

4、数列极限例题选讲

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}$$

$$\frac{1}{4n}=\frac{n}{(2n)^2}\le\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}$$

$$n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)2n}\le$$

$$\frac{n}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}\quad\le\frac{n}{n(n+1)}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)2n}=\frac{1}{2}$$

Ex. $(P31,$问题$1.5\text{-}1)$

$c>0, a_1=c/2, a_{n+1}=c/2+a_n^{\ 2}/2$, 证明 (1) $c>1$ 时 $a_n\to+\infty$; (2) $0<c\le 1$ 时收敛

Proof. (1)解法1 $a_n\ge 0, c>1, a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}\ge 2\sqrt{\dfrac{c}{2}\dfrac{a_n^2}{2}}=\sqrt{c}a_n\Rightarrow a_{n+1}\ge c^{n/2}a_1$

(1)解法2

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_n^{\ 2}}{2}-\dfrac{a_{n-1}^{\ 2}}{2}=\dfrac{1}{2}(a_n^{\ 2}-a_{n-1}^{\ 2})=\dfrac{1}{2}(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1}), \therefore a_{n+1}-a_n$ 和 a_n-a_{n-1} 同号

$\because a_2-a_1=\dfrac{a_1^2}{2}\ge 0, \therefore a_n\uparrow$ 若 $a_n\to A$, 则在 $a_{n+1}=c/2+a_n^{\ 2}/2$ 取极限, $A=c/2+A^2/2$

$\therefore A^2-2A+c=0, c>1$ 时无实根.

(2) $0<c\le 1$ 时

Ex. (P31,问题1.5-1)

$c>0, a_1=c/2, a_{n+1}=c/2+a_n^2/2$, 证明(1) $c>1$时$a_n\to+\infty$; (2) $0<c\le 1$时收敛

(2) $0<c\le 1$时

归纳证. $a_n\le 1$, 单调递增有上界

归纳基础. $a_1=c/2\le 1/2$

归纳递推. $a_n\le 1, a_{n+1}=c/2+a_n^2/2\le c/2+1/2=(c+1)/2\le 1$

Thm. (*Stolz*定理)

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} \{b_n\}\text{严格}\uparrow \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A;$$

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} \{b_n\}\text{严格}\downarrow \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

序列极限的存在性判定（Stolz定理）

问题1.11-1变形.

$a_0=1, a_n=\sin(a_{n-1})$,求证

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}a_n=1$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}a_n=1 \Leftrightarrow$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}a_n{}^2=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}a_n{}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3/a_n{}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{3}{a_n{}^2}-\frac{3}{a_{n-1}{}^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n{}^2a_{n-1}{}^2}{3a_{n-1}{}^2-3a_n{}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 a_{n-1}a_{n-1}{}^2}{3a_{n-1}{}^2-3\sin^2 a_{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{3x^2-3\sin^2 x}$$

02/ 等价无穷小

$(1)\sin x \sim x,\ \ \tan x \sim x,\ \ \arcsin x \sim x,\ \ \arctan x \sim x;$

$(2) 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2;\qquad (3)\ln(1+x) \sim x;$

$(4) e^x - 1 \sim x,\ a^x - 1 \sim x\ln a (a>0);$

$(5)(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$

$$\sin x \sim x \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \ln(x+1) \sim x \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$e^x - 1 \sim x \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a - 1}{ax} = 1$$

$$(4)\ e^x - 1 \sim x,\ a^x - 1 \sim x\ln a\ (a > 0);$$

$$(5)\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

Ex. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\frac{1}{m}(x-1)}\frac{\frac{1}{m}(x-1)}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{1}{m}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sqrt[n]{x}-1}$$

$$=\frac{1}{m}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{1}{m}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{n}(x-1)}{\sqrt[n]{x}-1}\frac{(x-1)}{\frac{1}{n}(x-1)}=\frac{1}{m}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\frac{1}{n}(x-1)}=\frac{n}{m}$$

02 等价无穷小

Ex. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{m}(x-1)}{\frac{1}{n}(x-1)}=\frac{n}{m}$$

Note.等价无穷小替换本质？

清华大学学生学习与发展指导中心
Tsinghua Learning and Development Center

$(1)\sin x \sim x,\ \tan x \sim x,$

$(2)1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

Ex. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$

解法一: $x\to 0$时, $\tan x \sim x, \sin x \sim x, \ln(1+x)\sim x.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^2\cdot x}=0.$$

是否正确? ×

解法二: $\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^2\cos x\ln(1+x)}$

$$=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{1}{2\cos x}\to\frac{1}{2}\quad(x\to 0)$$

1. 1^{∞}型

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=1,\ \lim_{x\to x_0} h(x)=\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x)^{h(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)x^2}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)}{\frac{2}{x^2-1}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-1}x^2}=e^2$$

1.1^{∞}型

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}==\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+1-\cos 2x}{x^2}=\frac{3}{2}$$

1. 1^{∞}型

$$\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^{n}$$

单选题 1分

设置

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$$

A $\sqrt{ab}$

B $\dfrac{a+b}{2}$

C $\max(a,b)$

D $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

提交

2.0/0型(直接等价无穷小)

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=0, \lim_{x\to x_0} h(x)=0, \lim_{x\to x_0} g(x)/h(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos x-1)}{x^2}=-1$$

2.0/0型(直接等价无穷小)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}=\lim_{x\to0}2\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}x^2}-1}{x+x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}2\frac{1}{3}\frac{\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}x^2}{x+x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}x^2}{x+x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{8}-\frac{1}{8}x}{1+x}=\frac{2}{3}\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型 增长速度观.

(1)多项式相比: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+4)^{50}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+4)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(2+\frac{4}{x})^{50}}=1.5^{30}$$

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型 增长速度观.

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}} \approx \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

$$(2)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$型

$$\frac{\ln(e^{2x}+x^2)}{\ln(e^{3x}+x^3)} \approx \frac{\ln(e^{2x})}{\ln(e^{3x})} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^{2x}+x^2)}{\ln(e^{3x}+x^3)}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{2x}+x^2)}{\ln(e^{3x}+x^3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{x^2}{e^{2x}})+\ln(e^{2x})}{\ln(1+\frac{x^3}{e^{3x}})+\ln(e^{3x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{x^2}{e^{2x}})+2x}{\ln(1+\frac{x^3}{e^{3x}})+3x} = \frac{2}{3}$$

4. $\infty-\infty$型

方法：设法转化为$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\ldots$

(1) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

$$(x^3+x^2)^c \approx (x^3)^c = x^{3c}$$

4. $\infty-\infty$型

方法: 设法转化为$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\ldots$

(3)求常数c, s. t. $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2)^c-x$极限存在, 并求值.

直观猜测$c=\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2)^{1/3}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{(x^3+x^2)^{2/3}+x(x^3+x^2)^{1/3}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x^3+x^2)^{2/3}+x(x^3+x^2)^{1/3}+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^{2/3}+(1+\frac{1}{x})^{1/3}+1}=1/3$$

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

5.夹挤原理

(1) $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} =$ ____1____;

(2) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} =$ __0_____;

5.夹挤原理

$$(3)\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$$

$$\frac{1}{x}-1\le[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x} \qquad x(\frac{1}{x}-1)=1-x\le x[\frac{1}{x}]\le x\frac{1}{x}=1$$

02/ 连续性

Def.(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称$f$在点$x_0$处连续;

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)$,则称$f$在点$x_0$处右连续;

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)$,则称$f$在点$x_0$处左连续;

Note.(1)连续的几何意义？图像不“断”;

(2)左连续的几何意义?

(3)右连续的几何意义?

Note. 连续性是一个局部性质

Def. f在点x_0处不连续, 则称f在点x_0处间断.

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,但$f$在点$x_0$处无定义或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$,

则称x_0为f的可去间断点.

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$,

则称x_0为f的跳跃间断点.可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点.

(3)若$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$或$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$至少有一个不存在,则称$x_0$为$f$的第二类间断点.

Ex. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在0处是___B_____;$f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$在0处是___C_____;

(A)连续点

(B)可去间断点

(C)跳跃间断点

(D)第二类间断点

02/ 连续性

Ex. 已知$f(x)=\begin{cases} x^a\sin\dfrac{1}{x}(x\neq 0) \\ 0(x=0) \end{cases}$连续，求$a$的取值范围

$\Leftrightarrow$ 求a的取值范围, s. t. $\lim_{x\to 0} x^a\sin\dfrac{1}{x}=0$

Question. 如何说明$\lim_{x\to 0} x^a\sin\dfrac{1}{x}=0$不成立

02 连续性（闭区间上的连续函数）

Def. 若f在(a,b)上任一点处连续，则称f在(a,b)上连续，记作$f \in C(a,b)$.若$f \in C(a,b)$，且f在点a右连续，在点b左连续，则称f在$[a,b]$上连续，记作$f \in C[a,b]$.

Thm. $f \in C[a,b], f(a)\cdot f(b) < 0$,则$\exists \xi \in (a,b), s.t. f(\xi) = 0$.

Thm.(介值定理) $f \in C[a,b], f(a) < f(b)$,则$\forall c \in (f(a), f(b))$,
$\exists \xi \in (a,b), s.t. f(\xi) = c$.

Thm.(最大最小值定理) $f\in C[a,b]$,则f在$[a,b]$上可以取到最大、最小值, 即$\exists\xi,\eta\in[a,b], s.t.$

$$f(\xi)=\max_{a\le x\le b}\{f(x)\},\quad f(\eta)=\min_{a\le x\le b}\{f(x)\}.$$

*Note.*闭区间的意义

$f(x)=x, x\in(1,2)$,有没有最大值和最小值?

Ex.(运用零点定理解决问题) $f \in C[0,2], f(0)=f(2)$, 求证 $\exists \xi>0, s.t. f(\xi)=f(\xi+1)$

分析.

等价于说 $f(x)=f(x+1)$ 至少有一个解，也就是 $f(x)-f(x+1)$ 至少有一个零点

令 $g(x)=f(x)-f(x+1)$

$g(0)=f(0)-f(1)$，$g(1)=f(1)-f(2)=f(1)-f(0)$

$g(0)g(1)\leq 0$

Ex.(运用介值定理解决问题)

$f \in C[0,1]$

(1)若$\exists n, f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\ldots+f(\frac{n-1}{n})=0$,则$f$必有零点;

(2)$f(0)=f(1)$,则$\forall n \in \mathrm{N}, \exists \xi, s.t. f(\frac{1}{n}+\xi)=f(\xi)$

02 连续性（闭区间上的连续函数）

Ex.(运用介值定理解决问题)

$f \in C[0,1]$

(1)若$\exists n, f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\dots+f(\frac{n-1}{n})=0$,则$f$必有零点;

(2)$f(0)=f(1)$,则$\forall n\in \mathrm{N}, \exists \xi, s.t. f(\frac{1}{n}+\xi)=f(\xi)$

Proof.

(1)(运用介值定理)若$\exists n$,

$1°$若$\exists i\in\{0,1,2,\dots,n-1\}, f(i/n)=0$.则结论成立

$2°$若全部非零,必存在$i\neq j, s.t. f(\frac{j}{n})f(\frac{i}{n})<0$

02 连续性（闭区间上的连续函数）

Ex.(运用介值定理解决问题)

$f \in C[0,1]$

(1)若$\exists n, f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\ldots+f(\frac{n-1}{n})=0$，则$f$必有零点；

(2)$f(0)=f(1)$，则$\forall n \in \mathrm{N}, \exists \xi, s.t. f(\frac{1}{n}+\xi)=f(\xi)$

Proof.

(2)(构造函数)$g(x)=f(x+1/n)-f(x)$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(i/n)=f(1)-f(0)=0 \Rightarrow g\text{存在零点}$$

Ex.(运用最值定理解决问题)

$f\in C(-\infty,\infty)$,以T为周期

(1)f存在最大值和最小值;

(2)$\forall a\in\mathbb{R},\exists\xi,s.t.f(a+\xi)=f(\xi)$成立.

Proof.

(1) $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\max_{x\in[0,T]} f(x)\quad \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\min_{x\in[0,T]} f(x)$

$\exists x'\in[0,T],f(x')=\max_{x\in[0,T]} f(x),\exists x'\in[0,T],f(x'')=\min_{x\in[0,T]} f(x)$

$\forall x_1\in\mathbb{R},f(x_1)=f(x_1-T[\frac{x_1}{T}]),0\le x_1-T[\frac{x_1}{T}]\le T,$

$\therefore f(x_1)=f(x_1-T[\frac{x_1}{T}])\le\max_{x\in[0,T]} f(x)=f(x')$

Ex.(运用最值定理解决问题)

$f \in C(-\infty,\infty)$,以T为周期

(1)f存在最大值和最小值;

(2)$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \xi, s.t. f(a+\xi)=f(\xi)$成立.

Proof.

(2) $g(x)=f(x+a)-f(x);$

$$g(x')=f(x'+a)-f(x')\le 0$$

$$g(x'')=f(x''+a)-f(x'')\ge 0$$

02 连续性（一致连续）

Def. 称f在区间I上一致连续，若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon, \qquad \forall x, y \in I, |x-y| < \delta.$$

Question. f在区间I上非一致连续，$\varepsilon-\delta$语言描述？

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in I, |x-y| < \delta, s.t.$$

$$|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Remark. f在I上非一致连续$\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x_n, y_n \in I, \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0, s.t. |f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

02 连续性（一致连续）

Question. 证明一个函数一致连续 ？

一般方法. 验证f满足如下条件:

$\exists M, \forall x, y, s.t. |f(y)-f(x)| \le M|y-x|$

Ex. $f=\ln(x)$在$[2,+\infty)$上一致连续

Ex. $f=\sin x$在$[1,+\infty)$上一致连续

一般方法. 验证f满足如下条件:

$\exists M, \forall x, y, s.t. |f(y)-f(x)| \le M|y-x|^p, p>0$

Ex. $f=x^{1/2}$在$[0,+\infty)$上一致连续

Remark. f在I上非一致连续$\Leftrightarrow$

$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x_n, y_n \in I, \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0, s.t. \left| f(x_n) - f(y_n) \right| \geq \varepsilon_0.$

Ex. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续.

Proof. 令 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi}, \ y_n = \dfrac{1}{2n\pi},$

Ex. $f(x) = \ln x$在$(0,+\infty)$上不一致连续.

令 $x_n = \dfrac{1}{2n}, \ y_n = \dfrac{1}{n},$

$$c' = 0, \qquad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x, \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x,$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x, \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \operatorname{arc}\cot x = \frac{-1}{1+x^2}$$

Def. (导数, 左、右导数)

$$(1)\ f'(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$(2)\ f'_-(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$(3)\ f'_+(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

左导数与导函数的左极限

左导数$f'_-(x_0) \triangleq \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

导函数的左极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} f'(x_0+\Delta x)$

例：已知函数$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 \quad (x=0) \end{cases}$,求0处的左导数和导函数在0处的左极限.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$$

$f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$,在0处没有左极限

- (链式法则) $\varphi(x)$在x_0可导, $f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$可导,则
  $h(x)=f(\varphi(x))$在x_0可导, 且

  $h'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$,即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

- $\varphi(x)=\ln(e^{3x}+1)$的导数是?

导数考点提要

- 填空：求某个函数的导数（注意对数求导法）
- 大题：1、隐函数求导；2、参数函数求导
- 3、计算高阶导数

- 对数求导法
- 适合连乘的情况！

Ex. 求下列函数的导数.

$$(1)y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}};(2)y=e^{e^x};(3)y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$$

解: $\ln y=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|1-x|-\frac{1}{2}\ln|1+x|$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}\right)=\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$$

Ex. $f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$, 求$f'(x)$.

解: $\ln|f(x)|=\ln|f_1(x)|+\ln|f_2(x)|+\cdots+\ln|f_n(x)|$,

两边对x求导, 得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

$$f'(x)=f(x)\left(\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right).\square$$

Remark. 多个因子连乘的函数求导时先取对数再两端求导可简化计算.

•隐函数求导

Def.(隐函数) $F(x,y)=0$确定的函数$y=y(x)$称为隐函数.

Ex. $xy-e^x+e^y=0$确定隐函数$y=y(x)$,求$y'(x)$.

解：视方程$xy-e^x+e^y=0$中$y=y(x)$,两边对x求导,得

$$y+xy'(x)-e^x+e^y y'(x)=0.$$

解得 $y'(x)=\dfrac{e^x-y}{x+e^y}$.□

Ex. $x^2+xy+y^2=1$确定了隐函数$y=y(x)$, 求$y''(x)$.

解： 视$x^2+xy+y^2=1$中$y=y(x)$, 两边对x求导, 得

$$2x+y+xy'+2yy'=0,\quad y'=-\frac{2x+y}{x+2y}.$$

于是

$$y''=-\frac{(2x+y)'(x+2y)-(2x+y)(x+2y)'}{(x+2y)^2}$$

$$=-\frac{(2+y')(x+2y)-(2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

$$=\frac{3(xy'-y)}{(x+2y)^2}=\frac{-6}{(x+2y)^3}.\square$$

- 参数函数求导
- 形式上认可 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}$

Ex. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，求$y'(x), y''(x)$.

解：$y'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$.

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\sin t}{1 - \cos t}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dfrac{\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}}{a(1 - \cos t)}$$

$$= \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2}. \square$$

高阶导数计算方法总结

清华大学学生学习与发展指导中心
Tsinghua Learning and Development Center

1、直接法：（考点、重点）

2、莱布尼茨公式：（考点、重点）

$$(fg)^{(n)} = \sum C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

3、递推法（较难，不一定考）

等价变换原式

Ex. $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$, 求$y^{(n)}$.

解： $y=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}\right).$

$$y^{(n)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$=\frac{1}{3}(-1)^n n!(x-2)^{-(n+1)}-\frac{1}{3}(-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}.\square$$

Thm. 设$f(x)$与$g(x)$在点x处有n阶导数,$c\in\mathbb{R}$,则

(1)$(f+g)^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$;

(2)$(cf)^{(n)}(x)=c\cdot f^{(n)}(x)$;

(3)$(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.(Leibniz公式)

Leibniz公式使用场景:f求过几次导之后就是0

Leibniz公式

Ex. $y=x^2e^{-x}$, 求$y^{(n)}$.

解： $y=x^2e^{-x}$.

$$y^{(n)}=x^2e^{-x}(-1)^n+C_n^1 2xe^{-x}(-1)^{n-1}+C_n^2 xe^{-x}(-1)^{n-2}+0+\ldots+0$$

Thm.(Rolle) $f\in C[a,b]$, f在(a,b)可导.若$f(a)=f(b)$,则存在$\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=0$.

Thm.(Lagrange) $f\in C[a,b]$, f在(a,b)可导,则$\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Thm.(Cauchy) $f,g\in C[a,b]$, f,g在(a,b)可导,且$\forall t\in(a,b)$,有$g'(t)\neq 0$. 则存在$\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

中值定理的应用：

- 证明不等式
- 分析某些函数的零点存在性
- 含有ξ的证明题

Ex. 证明:若$p>0$

(1) $px^{p-1}\le (x+1)^p-x^p\le p(x+1)^{p-1}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^p+\ldots+n^p}{(n+1)^{p+1}}=?$

证. (1) $(x+1)^p-x^p=\dfrac{(x+1)^p-x^p}{1}=p(x+\xi)^{p-1},0<\xi<1$

$px^{p-1}\le p(x+\xi)^{p-1}\le p(x+1)^{p-1}$

(2) $pk^{p-1}\le (k+1)^p-k^p\le p(k+1)^{p-1}$; $p\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}\le (n+1)^p-1\le p\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p-1}$;

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}}{(n+1)^p}\le\frac{(n+1)^p-1}{p(n+1)^p}\qquad \frac{(n+1)^p-1}{p(n+1)^p}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p-1}}{p(n+1)^p}\Rightarrow\frac{1}{p}-\frac{1}{p(n+1)}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}}{p(n+1)^p}$$

Ex. $x^4+2x^3+6x^2-4x-5=0$恰有两个不同的实根.

Proof. 令$f(x)=x^4+2x^3+6x^2-4x-5$,则

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty.$$

于是$\exists a<0<b, s.t. f(a)>0, f(b)>0.$ 而$f(0)=-5<0$,

由介值定理,$f(x)=0$至少有两个相异实根.

假设$f(x)=0$至少有3个相异实根. 由Rolle定理,$f'(x)$

至少有2个相异实根,$f''(x)$至少有1个实根. 但

$$f''(x)=12x^2+12x+12>0,$$

矛盾.故$f(x)=0$恰有两个相异实根.□

Ex. f在$[a,c]$上连续, 在$(a,b)\cup(b,c)$上可导,

求证$\exists\xi\in[a,c],s.t.\left|\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|\le|f'(\xi)|$

证明:

在$[a,b]$上用一次微分中值定理: $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi_1)$

在$[b,c]$上用一次微分中值定理: $f(c)-f(b)=(c-b)f'(\xi_2)$

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\left|\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\frac{c-b}{c-a}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{b-a}{c-a}\right|\le\frac{c-b}{c-a}|f'(\xi_1)|+\frac{b-a}{c-a}|f'(\xi_2)|$$

$$\le\left(\frac{c-b}{c-a}+\frac{b-a}{c-a}\right)\max(|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|)=\max(|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|)$$

05 / 中值定理含有 ξ 的证明

清华大学学生学习与发展指导中心
Tsinghua Learning and Development Center

Ex. $f(x)\in C^1[a,b], ab>0$, 证明：存在ξ, s.t. $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

$f(\xi)-\xi f'(\xi)$会由谁求导产生？

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

Ex. （构造函数法）

$$f(x)\in C^1[0,+\infty),0\le f(x)\le \frac{x}{1+x^2}\Rightarrow \exists\xi>0,s.t.f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

令$g(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$

$$g(0)=f(0)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

令$y=\arctan x$!

$$f(x)\in C^1[0,+\infty),0\le f(x)\le \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow g(y)=f(\tan y),g\in C^1[0,\frac{\pi}{2}),0\le g(y)\le \frac{\tan y}{1+\tan^2 y}=\frac{\sin y/\cos y}{1/\cos^2 y}=\sin y\cos y$$

$\because 0\le g(y)\le \sin y\cos y,\therefore$ 定义$g(\frac{\pi}{2})=0$!

$\therefore q(y)=g(y)-\sin y\cos y$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续,在$(0,\frac{\pi}{2})$上可导

$$\because q(\frac{\pi}{2})=q(0),\therefore \exists\zeta,q'(\zeta)=g'(\zeta)-\cos 2\zeta=0$$

$$q'(\zeta)=f'(\tan\zeta)\sec^2\zeta-\cos 2\zeta=f'(\tan\zeta)(1+\tan^2\zeta)-\cos 2\zeta=0\quad \cos 2\zeta=\frac{1-\tan^2\zeta}{1+\tan^2\zeta}$$

$$f'(\tan\zeta)=\frac{1-\tan^2\zeta}{(1+\tan^2\zeta)^2}\square$$