

# Review

- 含参广义积分的一致收敛性

**Def.**  $\forall t \in \Omega, \int_a^{+\infty} f(t, x)dx$  收敛. 若  $\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon), s.t.$

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| = \left| \int_a^A f(t, x)dx - \int_a^{+\infty} f(t, x)dx \right| < \varepsilon,$$

$$\forall A > M, \forall t \in \Omega,$$

则称含参  $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$  关于  $t \in \Omega$  一致收敛.



**Def .** 设  $\forall t \in \Omega, \int_a^b f(t, x)dx$  收敛,  $b$  为唯一瑕点, 若

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \in (0, b-a), s.t.$

$$\left| \int_{b-\eta}^b f(t, x)dx \right| = \left| \int_a^{b-\eta} f(t, x)dx - \int_a^b f(t, x)dx \right| < \varepsilon,$$

$$\forall \eta \in (0, \delta), \forall t \in \Omega,$$

则称含参瑕积分  $\int_a^b f(t, x)dx$  关于  $t \in \Omega$  一致收敛.



## •含参广义积分一致收敛性的判别法

Thm.(Cauchy)  $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$  关于  $t \in \Omega$  一致收敛

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon), s.t.$$

$$\left| \int_A^{A'} f(t, x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall A, A' > M, \forall t \in \Omega.$$

Thm.(Cauchy)  $\forall t \in \Omega, b$  为  $\int_a^b f(t, x)dx$  的唯一瑕点, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, s.t.$$

$$\left| \int_{b-\eta_2}^{b-\eta_1} f(t, x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in (0, \delta), \forall t \in \Omega,$$

则  $\int_a^b f(t, x)dx$  关于  $t \in \Omega$  一致收敛.



Thm.(Weirstrass)  $\forall t \in \Omega, \int_a^{+\infty} f(t, x)dx$  收敛, 若存在

$[a, +\infty)$  上的函数  $g(x), \int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛, 且

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [a, +\infty),$$

则  $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$  在  $t \in \Omega$  上一致收敛.

Remark.  $\forall t \in \Omega, f(t, x)$  在  $x \in [a, +\infty)$  上连续, 若存在

$b > a$  及  $[b, +\infty)$  上的函数  $g(x), \int_b^{+\infty} g(x)dx$  收敛, 且

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [b, +\infty),$$

则  $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$  在  $t \in \Omega$  上一致收敛.



Thm.(Weirstrass)  $\forall t \in \Omega, \int_a^b f(t, x)dx$  收敛,  $b$  为唯一

瑕点, 且存在  $[a, b)$  上的函数  $g(x), \int_a^b g(x)dx$  收敛, 且

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [a, b),$$

则  $\int_a^b f(t, x)dx$  在  $t \in \Omega$  上一致收敛.

Remark.  $\forall t \in \Omega, f(t, x)$  在  $x \in [a, b)$  上连续, 若存在  $\delta > 0$

及  $[b-\delta, b)$  上的函数  $g(x), \int_{b-\delta}^b g(x)dx$  收敛, 且

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [b-\delta, b),$$

则  $\int_a^b f(t, x)dx$  在  $t \in \Omega$  上一致收敛.



**Thm.(Dirichlet)**  $\forall t \in \Omega, f(t, x), g(t, x)$  在  $x \in [a, +\infty)$  上连续, 若

(1)  $\forall t \in \Omega, f(t, x)$  关于  $x$  单调,

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t, x) = 0$  关于  $t \in \Omega$  一致成立, 即;

(3)  $\int_a^A g(t, x) dx$  关于  $t \in \Omega$  以及充分大的  $A$  一致有界;

则  $\int_a^{+\infty} f(t, x) g(t, x) dx$  在  $t \in \Omega$  上一致收敛.



**Thm.(Dirichlet)**  $\forall t \in \Omega$ ,  $f(t, x), g(t, x)$  在  $x \in [a, b)$  上连续, 若

(1)  $\forall t \in \Omega$ ,  $f(t, x)$  关于  $x$  单调;

(2)  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(t, x) = 0$  关于  $t \in \Omega$  一致成立;

(3)  $\int_a^A g(t, x) dx$  关于  $t \in \Omega$  以及  $A \in [a, b)$  一致有界;

则  $\int_a^b f(t, x) g(t, x) dx$  在  $t \in \Omega$  上一致收敛.





**Thm.(Abel)**  $\forall t \in \Omega, f(t, x), g(t, x)$  在  $x \in [a, +\infty)$  上连续, 若

(1)  $\forall t \in \Omega, f(t, x)$  关于  $x$  单调;

(2)  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(t, x)$  关于  $t \in \Omega$  一致有界;

(3)  $\int_a^{+\infty} g(t, x) dx$  关于  $t \in \Omega$  一致收敛;

则  $\int_a^{+\infty} f(t, x) g(t, x) dx$  在  $t \in \Omega$  上一致收敛.





**Thm.(Abel)**  $\forall t \in \Omega, f(t, x), g(t, x)$  在  $x \in [a, b)$  上连续, 若

(1)  $\forall t \in \Omega, f(t, x)$  关于  $x$  单调;

(2)  $x \rightarrow b^-$  时,  $f(t, x)$  关于  $t \in \Omega$  一致有界;

(3)  $\int_a^b g(t, x) dx$  关于  $t \in \Omega$  一致收敛;

则  $\int_a^b f(t, x) g(t, x) dx$  在  $t \in \Omega$  上一致收敛.



### § 3. 含参广义积分的性质

**Thm1.**  $f(t, x) \in C([\alpha, \beta] \times [a, +\infty))$ ,  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(t, x) dx$  关于  $t \in [\alpha, \beta]$  一致收敛, 则  $I(t) \in C[\alpha, \beta]$ .

**Proof.**  $\int_a^{+\infty} f(t, x) dx$  关于  $t$  一致收敛, 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, s.t.$

$$\left| \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \right| < \varepsilon, \forall A > M, \forall t \in [\alpha, \beta].$$

取定  $A > M$ ,  $f \in C([\alpha, \beta] \times [a, A])$ , 因而  $\exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \varepsilon / (A - a),$$

$$\forall |t - t_0| < \delta, t, t_0 \in [\alpha, \beta], x \in [a, A].$$



于是 $\forall t, t_0 \in [\alpha, \beta]$ , 当 $|t - t_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} |I(t) - I(t_0)| &= \left| \int_a^{+\infty} f(t, x) dx - \int_a^{+\infty} f(t_0, x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^A f(t, x) dx + \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_a^A f(t_0, x) dx - \int_A^{+\infty} f(t_0, x) dx \right| \\ &\leq \int_a^A |f(t, x) - f(t_0, x)| dx \\ &\quad + \left| \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(t_0, x) dx \right| \\ &\leq 3\varepsilon. \square \end{aligned}$$



例.  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  在  $x \in (0, +\infty)$  连续.

分析:  $x < 1$  时,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{x-1} e^{-t} = +\infty$ ,  $t = 0$  为积分的瑕点, 因此  $t = 0$  和  $t = +\infty$  都要讨论.

Proof. 只要证  $\Gamma(x) \in C[a, b]$ ,  $\forall 0 < a < b$ . 由于

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \triangleq \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x),$$

只要证  $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x)$  均在  $[a, b]$  上连续.



先看 $\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ . 由于

$$0 < t^{x-1} e^{-t} \leq t^{a-1}, \quad \forall (t, x) \in (0, 1] \times [a, b],$$

而 $a > 0$ , 所以 $\int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{1}{a}$ , 收敛, 由Weirstrass判别法,

$\Gamma_1(x)$ 关于 $x \in [a, b]$ 一致收敛, 进而有 $\Gamma_1(x) \in C[a, b]$ .

再看 $\Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . 由于

$$0 < t^{x-1} e^{-t} < t^{b-1} e^{-t}, \quad \forall (t, x) \in [1, +\infty) \times [a, b],$$

而 $\int_1^{+\infty} t^{b-1} e^{-t} dt$ 收敛, 由Weirstrass判别法,  $\Gamma_2(x)$ 关于

$x \in [a, b]$ 一致收敛, 进而有 $\Gamma_2(x) \in C[a, b]$ .  $\square$

例. 证明  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$  在  $t \in [0, +\infty)$  上不一致收敛.

解: 
$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}.$$

若  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$  在  $t \in [0, +\infty)$  上一致收敛, 则  $I(t)$

$\in C[0, +\infty)$ , 矛盾.  $\square$

Remark. 证明含参积分不一致收敛的方法:

定义、Cauchy 准则、含参积分不连续.

例.  $a \in (0, \pi)$ , 求  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}}$ ,  $\lim_{a \rightarrow \pi^-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}}$ .

解: 
$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{adt}{\sqrt{\cos at - \cos a}} \\ &= \int_0^1 \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a}{\sqrt{\cos at - \cos a}} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \end{aligned}$$

下证积分与求极限可交换次序.

$$f(a, t) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{\cos at - \cos a}}, & a \neq 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}, & a = 0, \end{cases} \in C\left([0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1)\right).$$



当 $a \in (0, \pi/2), t \in [0, 1)$ 时,

$$\cos at - \cos a = 2 \sin \frac{a(1+t)}{2} \sin \frac{a(1-t)}{2} > \frac{2a^2(1-t^2)}{\pi^2} > 0,$$

$$\frac{a}{\sqrt{\cos at - \cos a}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(1-t^2)}}.$$

于是  $f(a, t) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(1-t^2)}}, \quad \forall (a, t) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1).$

$\int_0^1 \frac{adt}{\sqrt{\cos at - \cos a}} = \int_0^1 f(a, t)dt$  关于 $a \in [0, \pi/2]$ 一致收敛

(Weistrass), 因此积分与求极限可交换次序.

当  $a \in (\pi/2, \pi)$ ,  $x \in (0, a)$  时,

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos x - \cos a} &\leq \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \sqrt{2 \sin^2 \frac{\pi - x}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}(\pi - x)}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} &\geq \int_0^a \frac{\sqrt{2} dx}{\pi - x} \\ &= \sqrt{2} \ln(\pi - x) \Big|_a^0 \rightarrow +\infty, a \rightarrow \pi^- \text{ 时.}\end{aligned}$$

故  $\lim_{a \rightarrow \pi^-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} = +\infty. \square$



**Thm2.** 设(1)  $f(t, x), f'_t(t, x) \in C([\alpha, \beta] \times [a, +\infty))$ ;  
(2)  $\forall t \in [\alpha, \beta], I(t) = \int_a^{+\infty} f(t, x) dx$  收敛;  
(3)  $\int_a^{+\infty} f'_t(t, x) dx$  关于  $t \in [\alpha, \beta]$  一致收敛;

则  $I(t) \in C^1[\alpha, \beta]$ , 且

$$I'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^{+\infty} f(t, x) dx = \int_a^{+\infty} f'_t(t, x) dx.$$



例. 证明  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

引入收敛因子  $e^{-xy}$

解: 令  $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ .  $\forall y \in [0, +\infty)$ ,  $x=0$  是关

于  $x$  的一元函数  $f(x, y) = \frac{\sin x}{x} e^{-xy}$  的可去间断点.

由Abel判别法,  $I(y)$  在  $y \in [0, +\infty)$  上(一致)收敛,

因此  $I(y) \in C[0, +\infty)$ .  $\forall y_0 > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx = - \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx$$

在  $y \in [y_0, +\infty)$  一致收敛(Dirichlet). 因此



$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \frac{-1}{1+y^2}, \quad \forall y \geq y_0 > 0,$$

由 $y_0 > 0$ 的任意性,

$$I(y) = -\arctan y + c, \quad \forall y > 0.$$

又

$$|I(y)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y}, \quad \forall y > 0.$$

故

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} I(y) = 0, \quad c = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

例. 利用  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  计算  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ .

解: 令  $I(t) \triangleq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 tx}{x^2} dx$ , 则  $I(0) = 0$ , 欲求  $I(1)$ .

$\forall t \in [0, +\infty)$ ,  $x=0$  是关于  $x$  的一元函数  $f(t, x) = \frac{\sin^2 tx}{x^2}$  的可去间断点.

$$\frac{\sin^2 tx}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ 收敛,}$$

由 Weirstrass 判别法,  $\int_0^{+\infty} f(t, x) dx$  关于  $t \in [0, 1]$  一致收敛.

故  $I(t) \in C[0, 1]$ .



已知  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , 收敛, 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, s.t.$

$$\left| \int_A^B \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \varepsilon > 0, \quad \forall A, B > M.$$

对任意取定的  $t_0 \in (0, 1]$ , 有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f'_t(t, x) dx \right| &= \left| \int_a^b \frac{2 \sin tx \cos tx}{x} dx \right| = \left| \int_a^b \frac{\sin 2tx}{x} dx \right| \\ &= \left| \int_{2at}^{2bt} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon, \quad \forall a, b > \frac{M}{2t_0}, \forall t > t_0. \end{aligned}$$

因此  $\int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx$  关于  $t \geq t_0 > 0$  一致收敛(Cauchy), 故



$$\begin{aligned}
 I'(t) &= \int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin tx \cos tx}{x} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2tx}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in [t_0, 1].
 \end{aligned}$$

由 $t_0$ 的任意性, 有

$$I'(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in (0, 1].$$

又 $I(t) \in C[0, 1]$ ,  $I(0) = 0$ , 所以

$$I(t) = \frac{\pi}{2} t, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = I(1) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Question.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = ? \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = ? \quad \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}.$

**Thm3.**  $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [\alpha, \beta]), I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$

关于  $y \in [\alpha, \beta]$  一致收敛, 则  $I(y)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} I(y) dy = \int_a^{+\infty} \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) dx,$$

即 
$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) dx,$$

也记为 
$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy.$$

**Proof.** 往证  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, \forall A > M,$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} I(y) dy - \int_a^A \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) dx \right| < \varepsilon.$$



因为  $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$  关于  $y \in [\alpha, \beta]$  一致收敛, 所以  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\exists M > a, s.t. \quad \left| \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall A > M, \forall y \in [\alpha, \beta].$$

于是  $\forall A > M$ , 有

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} I(y)dy &= \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^A f(x, y)dx + \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \\ &= \int_a^A dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dy + \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} I(y)dy - \int_a^A dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dy \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \left| \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| dy < \varepsilon(\beta - \alpha). \quad \square \end{aligned}$$



例:  $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (b > a > 0).$

解法一:  $I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-tx} dt.$

$e^{-tx}$  在  $(t, x) \in D = [a, b] \times [0, +\infty)$  上连续, 且

$$|e^{-tx}| \leq e^{-ax}, \quad \forall (t, x) \in D;$$

$a > 0, \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$  收敛.  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx$  关于  $t \in [a, b]$  一致

收敛 (Weistrass), 从而累次积分可交换次序

$$I = \int_a^b dt \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln \frac{b}{a}. \quad \square$$

解法二:引入参数  $t \in [a, b]$ , 令  $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-bx}}{x} dx$ .

则  $I(b) = 0$ , 欲求  $I(a)$ , 可以先求  $I'(t)$ , 再积分. 因为

•  $f(t, x) = (e^{-tx} - e^{-bx})/x$ ,  $f'_t(t, x) \in C([a, b] \times [0, +\infty))$ ,

•  $\int_0^{+\infty} f(t, x) dx$  对任意  $t \in [a, b]$  收敛,

•  $\int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx$  对  $t \in [a, b]$  一致收敛,

所以  $I'(t) = \int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx = \int_0^{+\infty} -e^{-tx} dx = \frac{e^{-tx}}{t} \Big|_{x=0}^{+\infty} = -1/t$ ,

$I(t) = -\ln t + C$ . 又  $I(b) = 0$ ,  $C = \ln b$ ,  $I(t) = \ln b - \ln t$ .

所求积分为  $I = I(a) = \ln b - \ln a$ .  $\square$

**Thm4.**  $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [\alpha, +\infty])$ , 且满足

(1)  $\forall \beta > \alpha, \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$  在  $y \in [\alpha, \beta]$  上一致收敛;

$\forall b > a, \int_\alpha^{+\infty} f(x, y)dy$  在  $x \in [a, b]$  上一致收敛;

(2)  $\int_\alpha^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx$  与  $\int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} |f(x, y)|dy$  中至少有一个存在;

则  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$  在  $[\alpha, +\infty]$  上可积, 且

$$\int_\alpha^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} f(x, y)dy.$$

**作业：习题2.3 No. 1, 2**





例. 计算  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (b > a > 0).$

思路1.  $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos tx}{x} dx, I(a) = 0, I(b) = ?$

$I'(t) \neq \int_0^{+\infty} \sin t x dx$ , 右边的积分不收敛, 无法继续.

思路2.  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b \sin t x dt$

$\neq \int_a^b dt \int_0^{+\infty} \sin t x dx$ , 无法继续计算.

对策: 引入收敛因子  $e^{-\lambda x}, \lambda > 0.$



解: 令  $J(\lambda) \triangleq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx, \lambda \in [0, 1]$ . 欲求  $J(0)$ .

$e^{\lambda x} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}$  可以连续延拓到  $(\lambda, x) \in [0, 1] \times [0, +\infty)$ .

$x=0$  不是含参积分的瑕点.  $x \rightarrow +\infty$  时,  $e^{-\lambda x}/x$  关于  $\lambda \in [0, 1]$  一致收敛到 0, 且

$$\left| \int_0^A (\cos ax - \cos bx) dx \right| \leq \frac{2}{a} + \frac{2}{b}, \quad \forall A > 0, \forall \lambda \in [0, 1].$$

由 Dirichlet 判别法, 含参积分  $J(\lambda)$  关于  $\lambda \in [0, 1]$  一致收敛.

因此,  $J(\lambda) \in C[0, 1]$ .

下面先任意固定  $\lambda \in (0, 1]$ , 求  $J(\lambda)$ ; 再令  $\lambda \rightarrow 0$ , 得  $J(0)$ .



固定 $\lambda \in (0, 1]$ , 令 $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\cos ax - \cos tx}{x} dx, t \in [a, b]$ .

$e^{\lambda x} \frac{\cos ax - \cos tx}{x}$  可以连续延拓到  $(t, x) \in [a, b] \times [0, +\infty)$ .

$x=0$  不是积分的瑕点.  $I(t)$  关于  $t \in [a, b]$  一致收敛 (Dirichlet),

因此,  $I(t) \in C[a, b]$ .  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin txdx$  关于  $t \in [a, b]$  一致收敛 (Weistrass). 故

$$I'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin txdx = \frac{t}{\lambda^2 + t^2}, \quad t \in [a, b];$$

$$J(\lambda) = I(b) = I(a) + \int_a^b I'(t) dt = \int_a^b \frac{t}{\lambda^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 + b^2}{\lambda^2 + a^2}.$$

由  $J(\lambda) \in C[0, 1]$ , 得  $J(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J(\lambda) = \ln \frac{b}{a}$ .  $\square$

例.  $\alpha, \beta > 0$ , 计算Laplace积分

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx.$$

解:  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$  关于  $\beta \geq b > 0$  一致收敛 (Dirichlet).

故  $I'(\beta) = -J(\beta)$ . (再在积分下求导是不允许的?)

已知  $\beta > 0$  时,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

两式相加, 得  $I'(\beta) + \frac{\pi}{2} = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} dx.$

求导得  $I''(\beta) = \alpha^2 I(\beta).$

此微分方程通解为  $I = c_1 e^{-\alpha\beta} + c_2 e^{\alpha\beta}.$

因为  $|I| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I = 0,$

所以  $c_2 = 0, I = c_1 e^{-\alpha\beta}.$

$$\text{又 } \lim_{\beta \rightarrow 0+} I = \lim_{\beta \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

所以  $c_1 = \frac{\pi}{2\alpha}, I(\beta) = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta},$

$$J(\beta) = -I'(\beta) = -\frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}. \quad \square$$

Ex.  $I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ . (瑕积分)

引入参变量  $t$

解: 令  $I(t) = \int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ , 则  $I(0) = 0$ , 求  $I(1)$ .

$$I'(t) \stackrel{\text{Able}}{=} \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{x=\sin\theta}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+t^2\sin^2\theta}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\csc^2\theta d\theta}{\csc^2\theta + t^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{-d\cot\theta}{1+t^2+\cot^2\theta}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+t^2}} \arctan \frac{\cot\theta}{\sqrt{1+t^2}} \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_{t=0}^1 = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \square$$

Ex.  $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin(\ln \frac{1}{x}) dx \quad (a, b > 0).$

解: 固定  $a > 0$ , 欲求含参积分  $I(b)$ .  $I(a) = 0$ .

$$f(b, x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin(\ln \frac{1}{x}), \quad |f(b, x)| \leq |x^b - x^a|.$$

$\forall b > 0, I(b)$  收敛.  $\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt = \frac{1}{2}$ ;  $x^b$  在  $x \in (0, 1)$  上单调,  $x^b \leq 1$ .  $\int_0^1 x^b \sin(\ln \frac{1}{x}) dx$  关于  $b > 0$  一致收敛 (Abel).

因此

$$I'(b) = \int_0^1 x^b \sin(\ln \frac{1}{x}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+b)t} \sin t dt = \frac{1}{1 + (1+b)^2}.$$

$$I(b) = I(a) + \int_a^b \frac{dt}{1 + (1+t)^2} = \arctan(1+b) - \arctan(1+a). \square$$



例. 利用Poisson积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , 计算  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx$ .

解: 由Poisson积分得  $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}, t > 0$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx \stackrel{t=x^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin t dx \stackrel{?}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin t dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \square$$

$$\left( \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bxdx = \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$



附.  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx, J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

$$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+(1/x)^2}{x^2+(1/x)^2} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-1/x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$I - J = \int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(1/x)^2-1}{x^2+(1/x)^2} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-d(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x+1/x-\sqrt{2}}{x+1/x+\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = 0.$$

$$I = J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$