《微积分A2》第十一讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年03月23日

考虑含参变量的广义积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx, \quad y\in K,$$

这里 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times K$ 上连续, K 记某一区间.

以下介绍两个含参广义积分的一致收敛性判别法, Dirichlet 判别法和 Abel 判别法, 其证明与通常广义积分的相应的判别法基本相同. 这里从略.

定理：假设

(i) (一致有界性)：存在 $M > 0$，使得

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx\right| \le M, \quad \forall b \ge a, \quad \forall y \in K;$$

(ii) (单调一致收敛于零)：$g(x,y)$ 关于 x 单调，且关于 $y \in K$ 一致收敛于零，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists B = B(\varepsilon) > a$，使得 $|g(x,y)| \le \varepsilon$，$\forall x \ge B$，$\forall y \in K$，则广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx, \quad y \in K$$

关于 $y \in K$ 一致收敛.

定理：假设

(i) (一致收敛性)：下述广义积分关于 $y \in K$ 一致收敛

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad y \in K;$$

(ii) (单调一致有界)：函数 $g(x,y)$ 关于 x 单调，且关于 $y \in K$ 一致有界，即存在 $M > 0$，使得

$$|g(x,y)| \le M, \quad \forall (x,y) \in [a,+\infty) \times K,$$

则广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx, \quad y \in K$$

关于 $y \in K$ 一致收敛.

例：证明积分

$$J(y)=\int_0^{+\infty}e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$$

关于 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

证：记

$$f(x,y)=\frac{\sin x}{x},\quad g(x,y)=e^{-xy}.$$

由一元函数的广义积分的 Dirichlet 的判别法可知广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

收敛.

由于被积函数与 y 无关，故上述积分当然关于 $y \geq 0$ 一致收敛. Abel 判别法中的条件 (i) 成立. 现考虑条件 (ii). 显然 e^{-xy} 对 $\forall x, y \geq 0$ 关于 x 单调减且关于 $y \geq 0$ 一致有界: $|e^{-xy}| \leq 1$, $\forall x, y \geq 0$. 这说明条件 (ii) 成立. 因此由 Abel 判别法可知所考虑的积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$$

关于 $y \in [0, +\infty)$ 一致收敛. 解答完毕.

例: 证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(xy)}{a^2+x^2}dx$$

关于 $y \geq \delta$ 一致收敛, 这里 $\delta > 0$, $a > 0$.

证: 证明思想是利用 Dirichlet 判别法. 记

$$f(x,y) = \sin(xy), \quad g(x,y) = \frac{x}{a^2+x^2}.$$

我们来验证 D 判别法中的两个条件成立. (i) 积分

$$\left|\int_0^b \sin(xy)dx\right| = \frac{1}{y}\left|1-\cos(by)\right| \leq \frac{2}{\delta}, \quad \forall y \geq \delta, \ \forall b \geq 0.$$

例二，续

(ii) 显然函数

$$g(x,y)=\frac{x}{a^2+x^2}$$

关于 $x\ge a$ 单调下降(注：单调性要求只需充分大的 x 成立即可. 这可以从一致收敛性的定义看出)，因为其导数 $g_x(x,y)=\frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}$. 进一步当 $x\to+\infty$ 时，$g(x,y)$ 关于 $y\ge\delta$ 一致收敛于 0，因为 $g(x,y)$ 实际上与 y 无关. 因此由 D 判别法知广义含参积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(xy)}{a^2+x^2}dx$$

关于 $y\ge\delta$ 一致收敛. 解答完毕.

例: 证明 Dirichlet 积分公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

证: 考虑含参变量积分

$$J(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx, \quad y \geq 0.$$

被积函数中的 e^{-xy} 称为收敛因子. 在前例中已证积分 $J(y)$ 关于 $y \geq 0$ 一致收敛. 由连续性定理知 $J(y)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续. 因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = J(0) = \lim_{y \to 0^+} J(y).$$

证明续一

以下将利用积分号下求导技术来计算积分 $J(y)$, $y > 0$. 记

$$f(x,y) = e^{-xy}\frac{\sin x}{x},$$

则 $f_y(x,y) = -e^{-xy}\sin x$. 于是 $|f_y(x,y)| \le e^{-xy} \le e^{-\delta x}$, $\forall y \ge \delta$, $\forall x \ge 0$, 这里 $\delta > 0$ 为任意正常数. 因此积分

$$\int_0^{+\infty} f_y(x,y)dx = \int_0^{+\infty} -e^{-xy}\sin x dx$$

关于 $y \ge \delta$ 一致收敛 (Weierstrass 判别法). 于是由积分号下求导定理得

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} f_y(x,y)dx = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx.$$

注意上述积分是可以积出来的. 回忆关于积分 $\int e^{ax}\cos(bx)dx$ 和 $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ 的计算公式

$$\int e^{ax}\begin{bmatrix}\cos(bx)\\ \sin(bx)\end{bmatrix}dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(bx)\\ \sin(bx)\end{bmatrix}.$$

证明: $\int e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)dx=\int e^{(a+bi)x}dx=\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}e^{(a+bi)x}$. 然后分离实部和虚部即得.

根据上述公式可知 $J'(y)=-\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx$

$$=-\frac{e^{-xy}}{1+y^2}(-y\sin x-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{-1}{1+y^2},\quad \forall y>\delta.$$

即

$$J'(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad \forall y > \delta.$$

因此得 $J(y) = c - \arctan y$, $\forall y > \delta$. 由于 $\delta > 0$ 是任意给定的正数，故

$$J(y) = c - \arctan y, \quad \forall y > 0.$$

以下来确定常数 c. 由定义

$$J(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx.$$

可知当 $y \to +\infty$,

$$|J(y)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy} = \frac{1}{y} \to 0.$$

因此

$$0 = \lim_{y\to+\infty} J(y) = \lim_{y\to+\infty} (c - \arctan y) = c - \frac{\pi}{2}.$$

即 $c = \frac{\pi}{2}$. 于是 $J(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$, $\forall y > 0$. 由此我们就得到了 Dirichlet 积分公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = J(0) = \lim_{y\to 0^+} J(y) = \frac{\pi}{2}.$$

解答完毕.

例：利用含参变量积分技术证明 Euler-Poisson 积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(以后我们将利用重积分技术给出这个公式的另一个比较简单的证明)

证：记

$$f(y) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)y^2}}{1+x^2}dx, \quad y \in \mathbb{R},$$

则

$$f'(y) = \int_0^1 e^{-(1+x^2)y^2}(-2y)dx = -2e^{-y^2}\int_0^1 e^{-x^2y^2}d(xy)$$

$$= -2e^{-y^2}\int_0^y e^{-u^2}du = -\frac{d}{dy}\left[\int_0^y e^{-u^2}du\right]^2.$$

记

$$g(y)=\left[\int_0^y e^{-u^2}du\right]^2,\quad y\in\mathbb{R},$$

则 $f'(y)+g'(y)\equiv 0$. 因此

$$f(y)+g(y)\equiv f(0)+g(0),\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

由于 $g(0)=0$,

$$f(0)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

另一方面当 $y\to+\infty$ 时,

$$0 < f(y) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)y^2}}{1+x^2}dx \le e^{-y^2}\int_0^1 \frac{e^{-x^2y^2}}{1+x^2}dx \le e^{-y^2} \to 0,$$

$$g(y) = \left[\int_0^y e^{-u^2}du\right]^2 \to \left[\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right]^2,$$

故

$$\left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 = \frac{\pi}{4}.$$

由此得 Euler-Poisson 公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

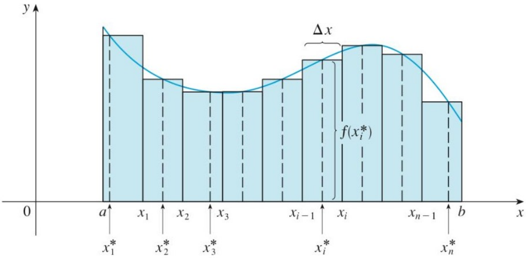
证毕.

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的函数. 对区间 $[a,b]$ 作分割 π, 其分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 并取样点 $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$, 作 Riemann 和

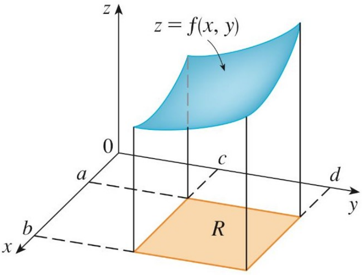
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i, \quad \triangle x_i = x_i - x_{i-1}.$$

如果当 $\|\pi\|=\max\{\triangle x_1,\cdots,\triangle x_n\}\to 0$, 上述 Riemann 和有极限 J, 且极限值 J 与样点集 $\{x_i^*\}$ 的选择无关, 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 极限值 J 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分, 并记作 $\int_a^b f(x)dx$.

当函数 $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ 时，由曲线 $y = f(x)$ 和三条直线段 $x = a$, $x = b$, $y = 0$ 所围图形(区域)为 S，上述 Riemann 和可看作图形 S 之面积的近似值。于是积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可定义为图形 S 之面积。



设函数 $f(x,y)$ 为定义在闭矩形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上. 假设 $f(x,y)\geq 0, \forall (x,y)\in R$. 记 V 为曲面 $z=f(x,y)$ 和五个平面 $x=a,b$, $y=c,d$ 以及 $z=0$ 所围成的立体, 即 $V=\{(x,y,z), 0\leq z\leq f(x,y),(x,y)\in R\}$. 如图所示.



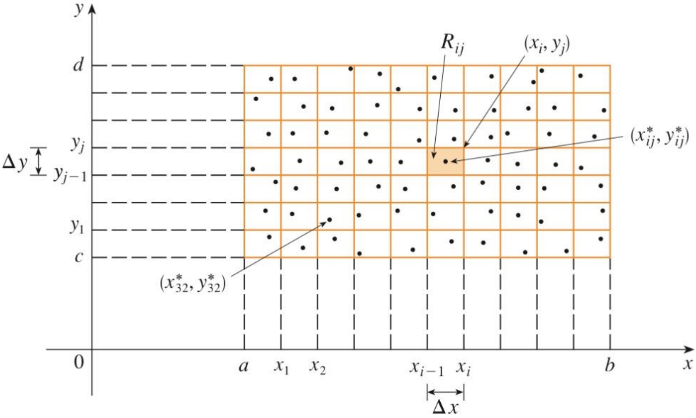
我们希望定义并求出 V 的体积. 同一元情形，将区间 $[a,b]$ 分割为 m 闭子区间，分点为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$，将区间 $[c,d]$ 分割为 n 闭子区间，分点为 $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. 记小闭矩形

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

其面积为 $|R_{ij}| = \triangle x_i \triangle y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. 对每个小矩形 R_{ij} 取样点 $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$，则可得立体 V 的近似体积

$$|V| \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \triangle x_i \triangle y_j.$$

图示一



y
d
y_j
Δy
y_{j-1}
y_1
c
0
R_{ij}
(x_i, y_j)
(x_{ij}^*, y_{ij}^*)
(x_{32}^*, y_{32}^*)
a
x_1
x_2
x_{i-1}
x_i
b
x
Δx

图示二

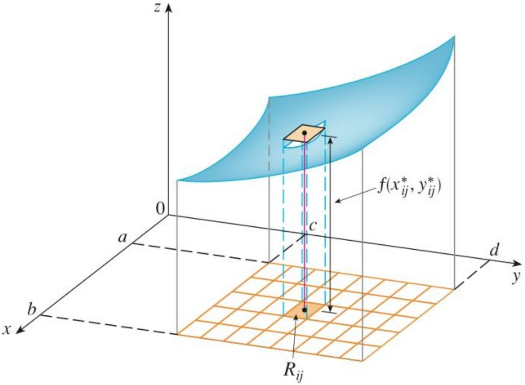
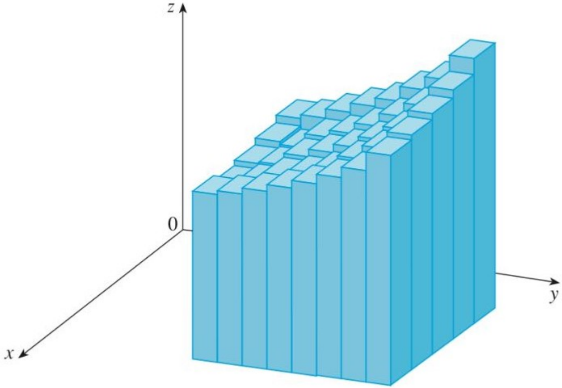


FIGURE 4

图示三



记 $d_{ij} = \sqrt{\triangle x_i^2 + \triangle y_j^2}$，即 d_{ij} 记小矩形 R_{ij} 的对角线长度，$\|\pi\| = \max\{d_{ij}\}$ 为分割的宽度，$P = \{(x_i^*, y_j^*)\}$ 为样本点集．如果当 $\|\pi\| \to 0$ 时，二重和

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\triangle x_i \triangle y_j$$

有极限，且这个极限值与样本点集 P 的选择无关，则可以定义所求体积 $|V|$ 就是这个极限值，即

$$|V| := \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\triangle x_i \triangle y_j.$$

一般二重积分定义(double integrals)

定义: 闭矩形 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上的二元函数 $f(x, y)$ 的二重积分定义为

$$\iint_R f(x, y)dxdy := \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\triangle x_i \triangle y_j,$$

假设左边极限存在，且极限值与样本点集 $P = \{(x_i^*, y_j^*)\}$ 的选择无关，即存在实数 J，使得对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对闭矩形 R 的任意分割 π 满足 $\|\pi\| < \delta$，以及任意样本点集 $P = \{(x_i^*, y_j^*)\}$ 的选择，均成立

$$\left| J - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\triangle x_i \triangle y_j \right| < \varepsilon.$$

一般二重积分定义续

上式中的和

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\triangle x_i \triangle y_j$$

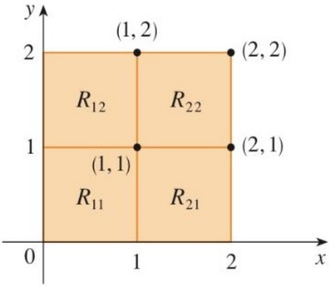
称为 f 的一个 Riemann 和; 数 J 称作 $f(x,y)$ 在 R 上的二重积分, 并记 J 为 $\iint_R f(x,y)dxdy$. 易证这个数 J 如果存在, 则必唯一. 当 $f(x,y)$ 的二重积分存在时, 称 f 在矩形 R 上 (Riemann) 可积.

注: 上述二重积分 $\iint_R f(x,y)dxdy$ 常常简记为

$$\iint_R f \quad \text{or} \quad \int_R f.$$

例子

<u>例</u>: 考虑函数 $z = 16 - x^2 - 2y^2$ 在矩形 $R = [0,2] \times [0,2]$ 上的二重积分. 以下对区间 $[0,2]$ 作 m 等分和 n 等分, 并且对每个小矩形的样本点均取为右上角点. 先考虑情形 $m = 2$ 和 $n = 2$, 即 $R = \cup_{i,j=1}^{2} R_{ij}$, 如图.



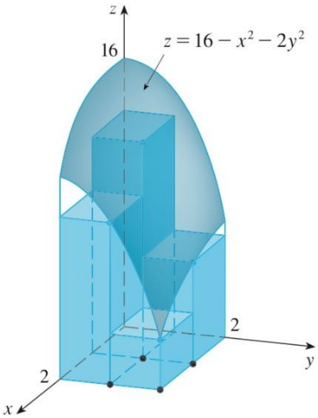
相应的 Riemann 和为

$$\sum_{i,j=1}^{2} f(x_i^*, y_j^*)\triangle x_i \triangle y_j$$

$$= f(1,1)\cdot 1 + f(1,2)\cdot 1 + f(2,1)\cdot 1 + f(2,2)\cdot 1$$

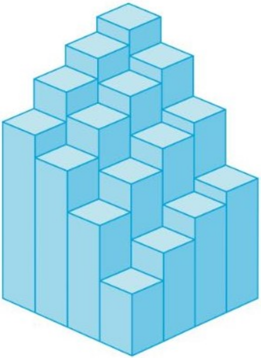
$$= 13 + 7 + 10 + 4 = 34.$$

Riemann 和作为体积逼近，如下图所示



当 $m = n = 4$ 时，且样本点均取右上角点，Riemann 和为 41.5.

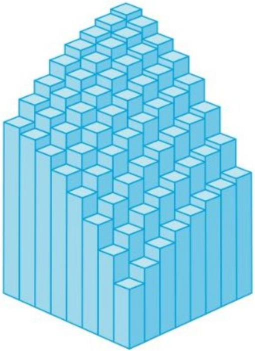
计算过程略. 图示如下.



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$

例子续四

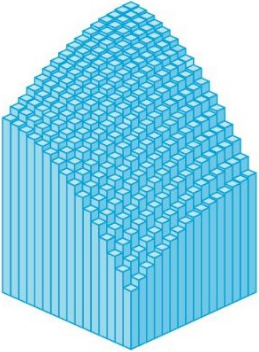
当 $m = n = 8$ 时，且样本点均取右上角点，Riemann 和为 44.875. 图示如下.



(b) $m = n = 8, V \approx 44.875$

例子续五

当 m = n = 16 时，且样本点均取右上角点，Riemann 和为46.46875. 图示如下.



(c) $m=n=16,\ V\approx 46.46875$

Theorem

<u>定理</u>: 若函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 R 上可积, 则 $f(x,y)$ 在 R 上有界.

Proof.

<u>证明</u>: 证明方法类似一维情形. 细节略. □

设 $f(x,y)$ 为闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上的函数. 设 π 是 R 的一个分割: $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, $c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$. 记小闭矩形 $R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$,

$$M_{ij}=\sup_{R_{ij}}\{f(x,y)\},\quad m_{ij}=\inf_{R_{ij}}\{f(x,y)\}.$$

定义: 我们分别称

$$U(\pi)\triangleq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\triangle x_i\triangle y_j,\quad L(\pi)\triangleq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\triangle x_i\triangle y_j,$$

为函数 f 关于分割 π 的 Darboux 上和与下和.

振幅与振幅体积

Definition

定义: 称 $\omega_{ij} = M_{ij} - m_{ij}$ 为函数 f 在小矩形 R_{ij} 上的振幅, 称

$$U(\pi) - L(\pi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(M_{ij} - m_{ij})\triangle x_i \triangle y_j$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\triangle x_i \triangle y_j$$

为 f 关于分割 π 的振幅体积.

与一元函数情形类似，称一个分割 π' 是另一个分割 π 的加密(分割)，如果 π 的分点均为 π' 的分点．此事简单记作 $\pi \subset \pi'$．显然以下两件事情成立．

(i) 若 $\pi \subset \pi'$，则 $\mathsf{U}(\pi') \leq \mathsf{U}(\pi)$，$\mathsf{L}(\pi') \geq \mathsf{L}(\pi)$．通俗地说，关于加密分割，上和不增，下和不减．

(ii) 对于任意两个分割 π_1，π_2，$\mathsf{L}(\pi_1) \leq \mathsf{U}(\pi_2)$．证明：记 $\pi' = \pi_1 \cup \pi_2$，则分割 π' 既是 π_1 又是 π_2 的加密分割．于是

$$\mathsf{L}(\pi_1) \leq \mathsf{L}(\pi') \leq \mathsf{U}(\pi') \leq \mathsf{U}(\pi_2).$$

由假设 f 在矩形 R 上可积，故有界，即存在数 $m, M \in \mathbb{R}$，使得 $m \le f(x,y) \le M$，$(x,y) \in R$. 故对 R 的任意分割 π，$m|R| \le L(\pi) \le U(\pi) \le M|R|$，这里 $|R| = (b-a)(d-c)$. 定义

$$\overline{\int} f := \inf_{\pi}\{U(\pi)\}, \quad \underline{\int} f := \sup_{\pi}\{L(\pi)\},$$

并分别称它们为 Darboux 上积分和 Darboux 下积分. 由于对任意分割 π_1 和 π_2，成立 $L(\pi_1) \le U(\pi_2)$. 由此可得 $\underline{\int} f \le \overline{\int} f$. 于是对任意分割 π，

$$m|R| \le L(\pi) \le \underline{\int} f \le \overline{\int} f \le U(\pi) \le M|R|.$$

Darboux 可积性准则

Theorem

定理：设 $f(x,y)$ 是闭矩形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上的有界函数，则以下事情等价

(i) f 在 R 上可积；

(ii) $\overline{\int} f = \underline{\int} f$；

(iii) $\forall\varepsilon>0$，存在分割 π，使得 $U(\pi)-L(\pi)<\varepsilon$；

(iv) $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当任意分割 π 满足 $\|\pi\|<\delta$，$U(\pi)-L(\pi)<\varepsilon$.

定理的证明方法同一维情形. 详见常庚哲史济怀的《数学分析教程》下册，第三版，page 2-8.

Theorem

定理：若 $f(x,y)$ 为闭矩形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上的连续函数，则 $f(x,y)$ 在 R 上可积.

证明：由于 f 在闭矩形 R 上连续，从而一致连续. 故对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}<\delta$ 时，$|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon$, 设分割 $\pi: R=\cup_{i,j}R_{ij}$ 满足 $\|\pi\|<\delta$.

记

$$M_{ij}=\sup_{R_{ij}}\{f(x,y)\}=\max_{R_{ij}}\{f(x,y)\}=f(x_i',y_j'),$$

$$m_{ij}=\inf_{R_{ij}}\{f(x,y)\}=\min_{R_{ij}}\{f(x,y)\}=f(x_i'',y_j''),$$

这里 (x_i', y_j'), $(x_i'', y_j'') \in R_{ij}$. 因此

$$0 \le \omega_{ij} = M_{ij} - m_{ij} = f(x_i', y_j') - f(x_i'', y_j'') < \varepsilon$$

于是关于分割 π 的振幅体积

$$U(\pi) - L(\pi) = \sum_{i,j} \omega_{ij} \triangle x_i \triangle y_j < \varepsilon |R|.$$

根据可积准则知函数 f 在闭矩形 R 上可积. 证毕. $\square$

例: 记 $R = [0,1] \times [0,1]$. 对每个 $(x,y) \in R$, 定义函数

$$D(x,y) = \begin{cases} 1, & x, y \text{ 均为有理数}, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

上述函数称为矩形 R 上的 Dirichlet 函数. 函数 $D(x,y)$ 在 R 上不可积. 因为对于任何分割 π 的任何一个小矩形 R_{ij}, 根据有理数和无理数的稠密性可知, 函数的振幅 $\omega_{ij} = 1 - 0 = 1$, 从而振幅面积为 $\sum_{ij} \omega_{ij} \triangle x_i \triangle y_j = |R| = 1$. 根据可积性准则知函数 $D(x,y)$ 在 R 上不可积. 证毕. $\square$

Definition

定义: 设 $S \subset \mathbb{R}^2$ 为平面点集. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限个或可数个闭矩形 R_j, $j \geq 1$, 使得

$$S \subset \bigcup_{j \geq 1} R_j \quad \text{and} \quad \sum_{j \geq 1} |R_j| < \varepsilon,$$

则称集合 S 为平面零测度集.

零测度集性质

Theorem

定理: (i) 平面有限点集是零测度集; (ii) 可数点集是零测度集; (iii) 零测度集的任意子集是零测度集; (iv) 平面直线或直线段均为零测度集; (v) 有限个或可数无限个零测度集的并集也是零测度集.

Proof.

证明不难. 略去. 详见常庚哲史济怀《数学分析教程》下册, 第三版, page 10. □

Lebesgue 可积性准则

Theorem

定理：设 $f(x,y)$ 为闭矩形 R 上的有界函数，则 f 在 R 上可积，当且仅当 f 的不连续点集是零测度集.

Proof.

证明比较麻烦. 略去. 详见常庚哲史济怀《数学分析教程》下册，第三版，page 12-14. □

注：如果函数 $f(x,y)$ 在其定义域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的不连续点集是零测度集，则称 f 在 Ω 上几乎处处连续. 几乎处处的英文表达为 almost everywhere，简写为 a. e. 记号：$D(f) := \{f \text{ 的间断点全体}\}$，$C(f) := \{f \text{ 的连续点全体}\}$. $\mathcal{R}(\Omega)$ 为闭矩形 Ω 上的可积函数全体.

<u>线性性</u>: 若 $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(\Omega)$, 且

$$\int_\Omega (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_\Omega + \mu \int_\Omega g. \quad (*)$$

<u>证</u>: 由于 $C(f) \cap C(g) \subset C(\lambda f + \mu g)$, 故 $D(f) \cup D(g) \supset D(\lambda f + \mu g)$. 再由 Lebesgue 准则立刻得到结论. 再由 Riemann 和的关系

$$\sum_{i,j} \Big[\lambda f(x_i^*, y_j^*) + \mu g(x_i^*, y_j^*)\Big] \Delta x_i \Delta y_j$$

$$= \lambda \sum_{i,j} f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j + \mu \sum_{i,j} g(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j,$$

令分割宽度趋向于零取极限, 即可得到等式(*).

可加性: 设闭矩形 Ω 分解为有限个闭矩形 Ω_j 之并, $j = 1, \cdots, m$, $\Omega = \cup_{j=1}^{m} \Omega_j$, 且任意两个矩形至多只有一条公共线段, 则

(i) $f \in \mathcal{R}(\Omega) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{R}(\Omega_j), j = 1, \cdots, m$;

(ii) 当 $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ 时, $\int_\Omega f = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} f$.

证: 由 Lebesgue 准则可知结论(i)成立. (ii)的证明概要. 只需证情形 $m = 2$, 即 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. 不妨设 Ω_1 和 Ω_2 的公共边在直线 $x = x_0$ 上. 设 $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, 分割矩形 Ω 时, 总是取 x_0 作为 x 区间 $[a, b]$ 的一个分点. 于是 Ω 上的 Riemann 和, 可表为 Ω_1 与 Ω_2 上两个 Riemann 和之和. 再令分割宽度趋向于零, 取极限即得到 $\int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$. 证毕. $\square$

保序性: 设 $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$. 若 $f(x,y) \le g(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$, 则 $\int_\Omega f \le \int_\Omega g$.

证: 显然函数 f 和 g 的 Riemann 和满足

$$\sum_{i,j} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i,j} g(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j.$$

令分割宽度 $\|\pi\|$ 趋近于零, 并利用 f 和 g 的可积性, 即可得到结论. 证毕. □

绝对可积性: 若函数 $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, 则其绝对值函数 $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$, 且 $\int_\Omega f \le \int_\Omega |f|$.

证: 由于 $C(f) \subset C(|f|)$, 故 $D(f) \supset D(|f|)$. 由 Lebesgue 准则知 $D(f)$ 为零测集, 从而 $D(|f|)$ 也为零测集. 再次利用 Lebesgue 准则知 $|f|$ 可积. 由积分的保序性得 $\int_\Omega f \le \int_\Omega |f|$. 证毕. $\square$

乘积可积性: 设 $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, 则它们的乘积 $fg \in \mathcal{R}(\Omega)$.

证: 由于 $C(f) \cap C(g) \subset C(fg)$, 故 $D(f) \cup D(g) \supset D(fg)$. 由 Lebesgue 准则知 $D(f)$ 和 $D(g)$ 均为零测集, 从而 $D(fg)$ 也是零测集. 因此乘积函数 fg 可积. $\square$

Theorem

定理: 设 $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, 且函数 $g(x,y)$ 在 Ω 上不变号, 则

$$\int_{\Omega} fg = \mu \int_{\Omega} g, \quad m \le \mu \le M, \qquad (*)$$

$m = \inf\{f(x,y), (x,y) \in \Omega\}$, $M = \sup\{f(x,y), (x,y) \in \Omega\}$.

证: 不妨设 $g(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$. 由 m, M 的定义知

$$m \leq f(x,y) \leq M, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

由此得

$$mg(x,y) \leq f(x,y)g(x,y) \leq Mg(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

由积分保序性知

$$m \int_{\Omega} g \leq \int_{\Omega} fg \leq M \int_{\Omega} g.$$

若 $\int_\Omega g = 0$, 则必有 $\int_\Omega fg = 0$, 等式 (*) 对任意常数 μ 均成立.

设 $\int_\Omega g > 0$, 则由不等式 $m\int_\Omega g \le \int_\Omega fg \le M\int_\Omega g$ 得

$$m \le \frac{\int_\Omega fg}{\int_\Omega g} \le M.$$

取 $\mu = \frac{\int_\Omega fg}{\int_\Omega g}$, 则立刻得到等式 (*). 证毕. $\square$

Corollary

推论一: 设 $f(x,y)$ 在闭矩形 Ω 上连续, $g(x,y)$ 在闭矩形 Ω 上可积, 且不变号, 则存在点 $(\xi,\eta)\in\Omega$, 使得

$$\int_\Omega fg = f(\xi,\eta)\int_\Omega g.$$

Corollary

推论二: 设 $f(x,y)$ 在闭矩形 Ω 上可积, 则

$$\int_\Omega f = \mu|\Omega|, \quad m\le\mu\le M,$$

这里 m, M 记函数 f 在 Ω 上的下确界和上确界.

Theorem (Fubini)

定理一: 设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $\Omega = [a,b]\times[c,d]$ 上可积，且对任意 $x\in[a,b]$，积分 $\int_c^d f(x,y)dy$ 存在，记作 $A(x)$，则 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b A(x)dx = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$，即

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

二重积分化为累次积分，续一

Theorem (Fubini)

定理二：设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，且对任意 $y\in[c,d]$，积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 存在，记作 $B(y)$，则 $B(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，且 $\int_c^d B(y)dy=\iint_\Omega f(x,y)dxdy$，即

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

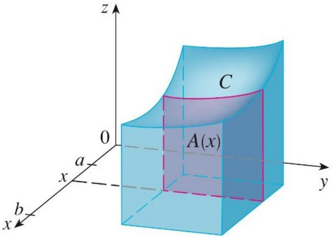
Theorem (Fubini)

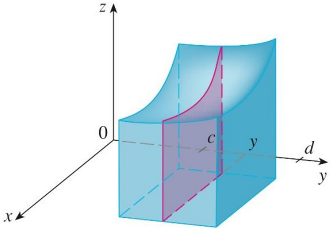
定理三: 设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

显然上述定理三是定理一和定理二的直接推论.

Fubini 定理图示





例: 计算积分 $J=\iint_\Omega f(x,y)dxdy$, 其中 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$,

$$f(x,y)=\frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

解: 根据上述定理可知

$$J=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{ydx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

第二个累次积分的内层积分不便计算. 而第一个累次积分的计算比较容易:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{-2}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}\right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right] dx$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

解答完毕.

证: 想法是利用 Darboux 可积性准则. 设 π 为 Ω 的一个分割:

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$. 记

$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$,

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}}\{f(x,y)\}, \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}}\{f(x,y)\}.$$

相应的 Darboux 上和与下和为

$$U_f(\pi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\triangle x_i \triangle y_j, \quad L_f(\pi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\triangle x_i \triangle y_j.$$

证明续一

由 Darboux 可积性准则知，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当分割 π 满足 $\|\pi\| < \delta$ 时，$U_f(\pi) - L_f(\pi) < \varepsilon$. 现证明函数 $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积性. 每个闭矩形 $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ 的分割 π，均确定了闭区间 $[a, b]$ 的一个分割 π': $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 函数 $A(x)$ 关于分割 π' 的 Darboux 上和与下和分别记作 $U_A(\pi')$, $L_A(\pi')$. 下面考虑它们与 $f(x, y)$ 的 Darboux 上和与下和 $U_f(\pi)$ 与 $L_f(\pi)$ 的关系. 记 $J_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$,

$$M_i = \sup_{J_i}\{A(x)\}, \quad m_i = \inf_{J_i}\{A(x)\}.$$

证明续二

对 $i=1,\cdots,n$, $m_i=\inf_{J_i}\{A(x)\}$

$$=\inf_{J_i}\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}=\inf_{J_i}\left\{\sum_{j=1}^m\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy\right\}$$

$$\geq\sum_{j=1}^m\inf_{J_i}\left\{\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy\right\}\geq\sum_{j=1}^m m_{ij}\triangle y_j.$$

即

$$m_i\geq\sum_{j=1}^m m_{ij}\triangle y_j.$$

于上述不等式的两边同乘以 $\triangle x_i$, 并对 $i=1,\cdots,n$ 求和得

$$L_A(\pi')=\sum_{i=1}^n m_i\triangle x_i\geq\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m m_{ij}\triangle x_i\triangle y_j=L_f(\pi).$$

即 $L_A(\pi') \geq L_f(\pi)$. 同理可证 $U_A(\pi') \leq U_f(\pi)$. 由此得

$$L_f(\pi) \leq L_A(\pi') \leq U_A(\pi') \leq U_f(\pi).$$

于是根据 $f(x, y)$ 的可积性，以及一维和二维 Darboux 可积性准则知，函数 $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，并且 $\int_{[a,b]} A = \iint_\Omega f$. 定理得证.

第一章总复习题(page 97): 17.

第二章总复习题(page 115-116): 5(1).

习题3.1 (page 124): 6.

习题3.3 (page 143): 1, 2, 3.