微积分A2第十次习题课讨论题 杨利军 May 11-16, 2020

本次习题课有以下两个内容.

一. 关于曲线与曲面积分的总结.

二. 第二型曲面积分, Gauss定理以及 Stokes 定理的应用.

一. 关于曲线与曲面积分的总结.

1. 一维积分基本定理

(i) 区间上的积分 $\int_{[a,b]} f'(x)dx = f(b) - f(a)$ (Newton-Leibniz公式);

(ii) 曲线上的积分 $\int_{C_{AB}^+} \nabla f(r) \cdot dr = f(B) - f(A)$ (线积分基本定理), 这里 C_{AB} 表示连接起点 A 和终点 B 的平面或或空间任意一条有向曲线.

2. 二维积分的基本定理

(i) 平面域上的 Green 公式

向量形式

$$\iint_D rot(F)dxdy = \int_{\partial D^+} [F(r) \cdot \tau(r)]ds, \quad (\text{旋度形式})$$

$$\iint_D div(F)dxdy = \int_{\partial D^+} [F(r) \cdot n(r)]ds, \quad (\text{散度形式})$$

这里 $\tau(r)$ 和 $n(r)$ 分别表示边界曲线 ∂D^+ 的单位正切向和单位外法向, D 为平面有界闭域.

分量形式

$$\iint_D (Q_x - P_y)dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy, \quad (\text{旋度形式})$$

$$\iint_D (P_x + Q_y)dxdy = \int_{\partial D^+} -Qdx + Pdy, \quad (\text{散度形式})$$

其中 P, Q 为平面域 D 上的连续可微函数.

(ii) 曲面积分的 Stokes 公式

向量形式

$$\iint_{S^+}[rot(F)\cdot n]dS=\int_{\partial S^+}(F\cdot\tau)ds$$

这里 τ 代表边界曲线 ∂S^+ 的单位切向量, 曲面 S^+ 与其边界 ∂S^+ 的定向协调.

分量形式

$$\iint_{S^+}(R_y-Q_z)dydz+(P_z-R_x)dzdx+(Q_x-P_y)dxdy$$
$$=\int_{\partial S^+}Pdx+Qdy+Rdz,$$

设 P,Q,R 为曲面 S 上的连续可微函数.

3. 三维积分的基本定理(Gauss定理)

$$\iiint_\Omega divFdV=\iint_{\partial\Omega^+}F\cdot dS,$$

这里 $\partial\Omega^+$ 代表空间有界域 Ω 的边界曲面, 其正法向朝外. 设 $F=(P,Q,R)$, 则 Gauss 公式的分量形式为

$$\iiint_\Omega(P_x+Q_y+R_z)dV=\iint_{\partial\Omega^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

4. 微分算子的重要关系(参见课本第228页习题4.7题9(4)(5)):

(i) $rot(\nabla)=0$, 即对任意 C^2 函数 f, $rot(\nabla f)=0$;

(ii) $div(rot)=0$, 即对任意 C^2 向量场 F, $div(rotF)=0$.

二. 第二型曲面积分, Gauss定理以及 Stokes 定理的应用.

1. 记曲面 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截取的有界部分。规定曲面 S 的正法向向下. 所得的定向曲面记为 S^+. 求如下第一和第二型曲面积分

$$\iint_S zdS \quad 和 \quad \iint_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy).$$

2. 设 S^+ 是锥面的一个部分 $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le 1$, 规定其正法向向下. 求积分

$$I=\iint_{S^+} xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy.$$

3. 记 S^+ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分, 正法向朝外. 计算曲面积分

$$\iint_{S^+} x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy.$$

4. 计算高斯积分

$$\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2}dS,$$

其中 S 是一个不经过原点的光滑封闭曲面, 点 $\vec{r}=(x,y,z)\in S$, $\vec{n}$ 代表点 $(x,y,z)\in S$ 处的单位外法向.

5. 计算如下第一和第二型曲面积分

$$\iint_S |z|dS \quad 和 \quad \iint_{S^+} |z|dx\wedge dy.$$

其中曲面 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 规定曲面 S 的正法向朝外.

6. 设 Ω 为由圆锥面 S: $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体. 证明设此圆锥体的体积 $|\Omega|$ 可以表示为

$$|\Omega|=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\vec{r}\cdot\vec{n})dS, \tag{1}$$

其中 $\partial\Omega$ 为圆锥体 Ω 的边界曲面, $\vec{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

7. 记 Γ^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和平面 $y=x\tan\theta$ 的交线即圆周, 从位于 x 正轴看去, 圆周 Γ^+ 正向为逆时针方向, 这里 $R>0, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$. 利用 Stokes 公式计算线积分

$$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz.$$

8. 记 L^+ 为平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线(圆周), 从 z 轴的正向朝下看去, L^+ 的正向逆时针方向. 求第二类曲线积分

$$I=\oint_{L^+}\frac{(y+1)dx+(z+2)dy+(x+3)dz}{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

9. 设 S 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 位于 $0\le z\le h$ 的那一部分, 正法向向下. 设 $v=(x,y,z)$ 为流体运动的速度场. 求流体在单位时间里通过定向曲面 S 由内向外的流量 Q, 即求曲面积分

$$Q=\iint_{S^+}\vec{v}(r)\cdot\vec{n}(r)dS.$$

10. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为一空间有界闭域，其边界 $\partial\Omega$ 为逐片光滑的闭曲面. 记 $\vec{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的朝外单位法向量. 设 u,v 是 Ω 上的 C^2 函数. 证明

(i). $\displaystyle\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dS=\iiint_{\Omega}\Delta udV.$

(ii). $\displaystyle\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dS=\iiint_{\Omega}|\nabla u|^2dV+\iiint_{\Omega}u\Delta udV.$

(iii). $\displaystyle\iint_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big)dS=\iiint_{\Omega}\Big(u\Delta v-v\Delta u\Big)dV.$

这里 Δ 为 Laplace 算子, 即 $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$. (注：这是课本第229页第4章总复习题第8题.)

11. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为平面有界闭域, 设函数 $u(x,y)$ 在闭域 D 上调和, 即 $\triangle u=u_{xx}+u_{yy}=0$, 则对闭域 D 中的任意内点 (x_0,y_0), 函数值 $u(x_0,y_0)$ 可表示为

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big)dl, \tag{3}$$

其中函数 v 如下定义

$$v(x,y)=\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \tag{4}$$

$\vec{n}$ 代表边界边界曲线 ∂D^+ 的单位外法向, $\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}$ 分别代表为函数 u 和 v 关于方向 n

的方向导数. (公式(3)的意思是调和函数在区域内的值由其边界值所确定). 进一步证明

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial D_\varepsilon}u(x,y)dl, \tag{5}$$

其中 D_ε 代表闭圆盘 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\varepsilon^2$, $\varepsilon>0$ 充分小, 使得闭圆盘 $D_\varepsilon\subset D$.

<u>注1</u>: 这题实际上是课本第230页习题第4章总复习题第9题. 仅仅表述略有不同.

<u>注2</u>: 公式 (5) 揭示了调和函数的均值性质.

12. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为空间有界开区域, 其闭包记作 $\overline{\Omega}$. 设函数 $u(x,y,z)$ 在闭域 $\overline{\Omega}$ 上连续, 在开域 Ω 上调和, 即 $\triangle u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$, 则对任意内点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 的函数值 $u(P_0)$ 可表示为

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big)dS, \tag{6}$$

其中函数 v 如下定义

$$v(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \tag{7}$$

n 代表边界曲面 $\partial\Omega^+$ 的单位外法向, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别代表为函数 u 和 v 关于方向 n 的方向导数.

<u>注1</u>: 这题实际上是课本第230页习题第4章总复习题第10题(1). 也是上题二维情形的结论在三维情形的推广. 公式(6)表达同样的意思, 即调和函数在区域内的值由其边界值所确定.

<u>注2</u>: 为了解答这道题, 我们需要建立几个引理, 其中 Lemma 2 实际上就是课本习题第230页习题第4章总复习题第10题(2).

<u>注3</u>: 公式 (6) 实际上就是课本第230页第4章总复习题第10题结论(1), 因为 $\frac{\partial v}{\partial n}=-\frac{\cos(r,n)}{|r|^2}$. 可参见如下 Lemma 4 及其证明.

提示：建立如下四个引理.

<u>Lemma 1</u>: 由式 (4) 定义的函数 $v(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3\backslash\{P_0\}$ 上调和, 即 $\triangle v=0$.

Lemma 2: 对任意给定的内点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, 存在 $\delta_0>0$, 使得对任意 $\delta\in(0,\delta_0]$, 闭球 $B_\delta:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le\delta^2$ 包含在开域 Ω 中, 并且

$$\iint_{\partial\Omega^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big)dS=\iint_{S_\delta^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big)dS, \tag{8}$$

其中 $S_\delta=\partial B_\delta$, 即 S_δ 为以 P_0 为心, 以 $\delta>0$ 为半径的球面, 曲面 $\partial\Omega^+$ 和 S_δ^+ 的正法向均朝外.

Lemma 3: 对于任意 $\delta\in(0,\delta_0]$, 我们有

$$\iint_{S_\delta^+}v\frac{\partial u}{\partial n}dS=0.$$

Lemma 4: 对于任意 $\delta\in(0,\delta_0]$, 我们有

$$\iint_{S_\delta^+}-u\frac{\partial v}{\partial n}dS=4\pi u(P_\delta),$$

其中 $P_\delta\in S_\delta$.