Chap5 曲线积分与曲面积分

§1. 第一型曲线积分

1. 光滑曲线

Def. 点(x,y,z)在曲线L上变化时,若L的单位切向量$\vec{\tau}(x,y,z)$与$-\vec{\tau}(x,y,z)$都连续变化,则称L为光滑曲线.

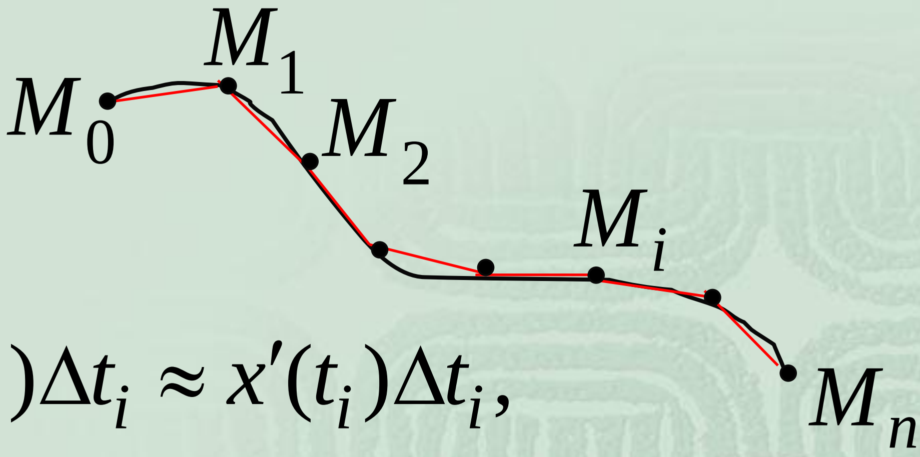
Remark. $L: x=x(t), y=y(t), z=z(t), t\in[\alpha,\beta]$,则

L为光滑曲线$\Leftrightarrow x(t), y(t), z(t)\in C^1([\alpha,\beta])$.

2. 曲线的弧长

光滑曲线L:$r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right),t\in[\alpha,\beta]$

•分划Δ: $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta, M_i=r(t_i), 0\le i\le n.$



•求弧长$M_{i-1}M_i$:

$$x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\xi_i)\Delta t_i\approx x'(t_i)\Delta t_i,$$

$$y(t_i)-y(t_{i-1})=y'(\eta_i)\Delta t_i\approx y'(t_i)\Delta t_i$$

$$z(t_i)-z(t_{i-1})=z'(\lambda_i)\Delta t_i\approx z'(t_i)\Delta t_i,$$

$$M_{i-1}M_i \approx \left\| r(t_i) - r(t_{i-1}) \right\|$$

$$\approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2}\,\Delta t_i$$

•求和、求极限

弧长$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \left\| r'(t) \right\| dt$

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \left\| r'(t) \right\|$$

Remark.物理解释:路程对时间的变化率等于速率.

3. 第一型曲线积分的物理背景及定义

设空间曲线L上点(x,y,z)处的密度为$\mu(x,y,z)$,
欲求曲线L的质量.

- Step1.分划: 将曲线L分成若干小段$L_1, L_2, \cdots,$
  L_n,用$\Delta l_i\,(i=1,2,\cdots,n)$表示$L_i$的长度.
- Step2.取标志点:在L_i上取点$P_i(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)$.
- Step3.近似求和:L的质量$m(L)\approx\sum_{i=1}^{n}\mu(P_i)\cdot\Delta l_i$.
- Step4.取极限: $\lim\limits_{\max\{\Delta l_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(P_i)\cdot\Delta l_i = m(L)$.

Def.设曲线L长度有限,$f(x,y,z)$是定义在L上的函数.将L分成若干段$L_1, L_2, \cdots, L_n$,用$\Delta l_i (i=1,2,\cdots,n)$表示$L_i$的长度, 在$L_i$上任取点$P_i(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)(i=1,2,\cdots,n)$,构造积分和$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$.若极限

$$\lim_{\max\{\Delta l_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$$

存在,则称该极限为函数f在曲线L上的(第一型)曲线积分,记作$\int_L f dl$.

Remark: 极限 $\lim\limits_{\max\{\Delta l_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$与对曲线$L$的分割无关,与$P_i$的选取也无关.

Remark: $\int_L dl$ 表示曲线 L 的长度.

4.第一型曲线积分$\int_L f(x,y,z)dl$的计算

设曲线L有参数方程：

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

其中$x(t), y(t), z(t) \in C^1([\alpha, \beta])$.

- Step1.分划：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$,对应地,曲线 L被分成若干个弧段$L_1, L_2, \cdots, L_n$.
- Step2.取点：在L_i上取点$P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$.

•Step3.近似和：L_i的长度为

$$\Delta l_i \approx \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$$

$$\approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i$$

•Step4.取极限：$\max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0$时，$\max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i \to 0$，于是

$$\int_L f dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

5.第一型曲线积分的性质

(1)(积分存在的充分条件)设

• L为光滑曲线, 即L的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)(\alpha \le t \le \beta),$$

且$x(t), y(t), z(t) \in C^1([\alpha, \beta]),$

• $f(x, y, z)$是曲线L上的连续函数.即关于t的一元函数

$$f(x(t), y(t), z(t)) \in C([\alpha, \beta]),$$

则第一型曲线积分$\int_L fdl$存在.

(2)(线性性质)设$\int_L fdl$和$\int_L gdl$存在,则$\forall$实数α, β,积分$\int_L (\alpha f + \beta g)dl$存在,且

$$\int_L (\alpha f + \beta g)dl = \alpha \int_L fdl + \beta \int_L gdl.$$

(3)(关于积分曲线的可加性)设曲线L由曲线$L_1, L_2, \cdots, L_k$连接而成,则 $\int_L fdl = \int_{L_1} fdl + \int_{L_2} fdl + \cdots + \int_{L_k} fdl.$

(4)(保序性) $f \le g$,则$\int_L fdl \le \int_L gdl.$

(5)(积分估值不等式)$\left|\int_L fdl\right| \le \int_L |f| dl.$

例:$I=\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})dl, L: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0).$

解:L的参数方程为$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, t\in[0,2\pi].$

$$dl=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

$$=\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$=3a|\sin t\cos t|\,dt$$

$$I=\int_0^{2\pi}[(a\cos^3 t)^{\frac{4}{3}}+(a\sin^3 t)^{\frac{4}{3}})]\cdot\frac{3a}{2}|\sin 2t|\,dt$$

$$=\frac{3}{2}a^{\frac{7}{3}}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t+\sin^4 t)|\sin 2t|\,dt=4a^{\frac{7}{3}}.\ \square$$

例: $I=\oint_L x^2 dl$, 其中 L 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解法一: 将 $z=-x-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 有

$x^2+xy+y^2=R^2/2$, 即 $\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2=\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2$.

$$\text{即} L:\begin{cases} x=\sqrt{2/3}R\cos t, \\ y=\sqrt{1/2}R\sin t-\sqrt{1/6}R\cos t, \quad (0\le t\le 2\pi). \\ z=-\sqrt{1/2}R\sin t-\sqrt{1/6}R\cos t, \end{cases}$$

$$dl=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=Rdt.$$

$$I=\oint_L x^2 dl=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^2\cos^2 t\cdot Rdt=\frac{2}{3}\pi R^3.\square$$

例: $I=\oint_L x^2 dl$, 其中L为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

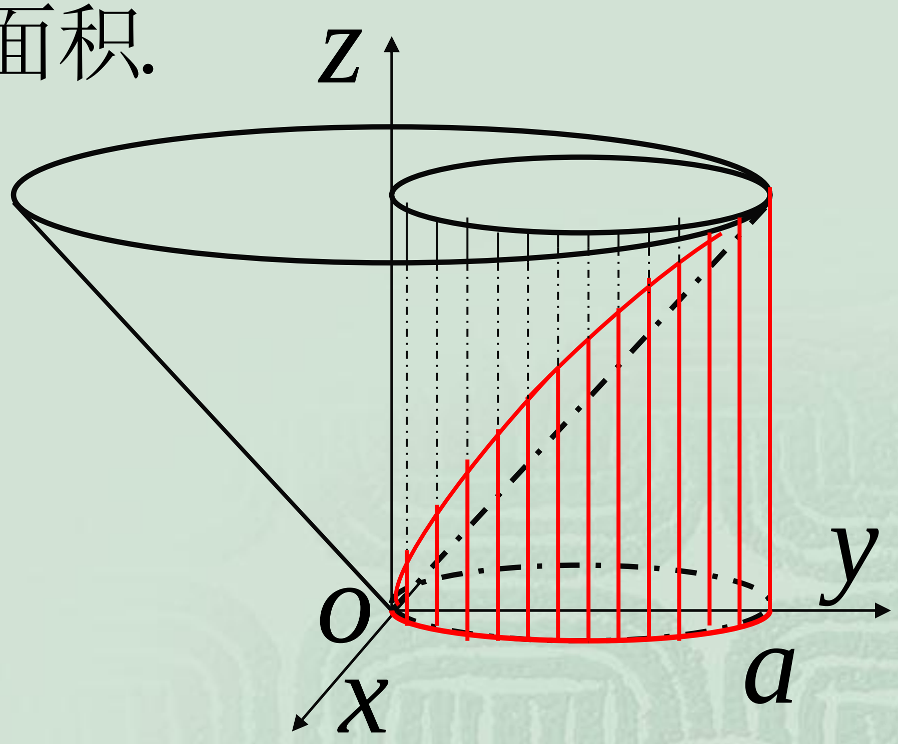
解法二: 利用轮换不变性.(如何证明?)

$$I=\oint_L x^2 dl=\oint_L y^2 dl=\oint_L z^2 dl$$

$$=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2) dl$$

$$=\frac{R^2}{3}\oint_L dl=\frac{2\pi R^3}{3}. \square$$

例:求圆柱面$x^2+y^2=ay$界于锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=0$之间部分S的面积.



解: 记L:$\begin{cases} x^2+y^2=ay \\ z=0 \end{cases}$,

由微元法得

$$\sigma(S)=\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$$

L的参数方程为:

$$x=\frac{a}{2}\cos t,\ y=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t,\ t\in[0,2\pi].$$

于是

$$\sigma(S)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t\right)^2}\cdot\frac{a}{2}dt$$

$$=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin t}\,dt$$

$$=2a^2.\square$$

作业：习题4.2 No.3-7