

Review

- *Green's formula*

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dxdy.$$

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_D \nabla \times \vec{v} dxdy.$$

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_D (P'_x + Q'_y) dxdy.$$

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_D \nabla \cdot \vec{v} dxdy.$$

- *Green公式的条件*



•Green公式的应用

- 1) 第二型曲线积分 \rightarrow 二重积分
- 2) 二重积分 \rightarrow 第二型曲线积分
- 3) 第二型曲线积分 \rightarrow 第二型曲线积分+二重积分
- 4) 微分形式是否存在原函数
- 5) 恰当方程的求解



§ 6. Gauss公式和Stokes公式

1. Gauss公式

Thm. (*Gauss公式*) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界区域, 向量场 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 在 Ω 内连续可微, 在闭区域 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 上连续, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\Omega} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \end{aligned}$$

在证明*Gauss*公式前先对其作一点解释:



Remark: Gauss公式将空间有界区域 Ω 的边界曲面 $\partial\Omega$ 上的第二型曲面积分转化为 Ω 上的三重积分.其中 $\partial\Omega$ 外侧为正.

Remark: 定义散度算子 $\nabla \cdot$ 为 $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$,

则Gauss公式为 $\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} dx dy dz$,

或
$$\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} dx dy dz.$$

Remark: Green公式的第二种形式为

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_D (P'_x + Q'_y) dx dy, \text{ 即 } \int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_D \nabla \cdot \vec{v} dx dy.$$

因而Gauss公式是Green公式在三维空间的推广.

Remark: 与 *Green* 公式一样, 应注意 *Gauss* 公式成立的条件.

Proof of Gauss Formula: 为证明 *Gauss* 公式, 只要证

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} R dx \wedge dy &= \iiint_{\Omega} R'_z dx dy dz \\ \iint_{\partial\Omega} Q dz \wedge dx &= \iiint_{\Omega} Q'_y dx dy dz, \\ \iint_{\partial\Omega} P dy \wedge dz &= \iiint_{\Omega} P'_x dx dy dz.\end{aligned}$$

下面只证第一式, 同理可证其它两式.

Case 1. 设 Ω 可表示为 $\begin{cases} (x, y) \in D_{xy}, \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \end{cases}$ 即 Ω 是母线平行于 oz 轴的曲顶柱体, Ω 的下底和上顶分别为

$S_1 : z = z_1(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 和 $S_2 : z = z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}$.

记 Ω 的侧面为柱面 S_3 . 则 $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, 外侧为正.

• 在柱面 S_3 上, 法向量与 oz 轴垂直, 故 $\iint_{S_3} R dx \wedge dy = 0$.

• 在下底 S_1 的下侧, 法向量与 oz 轴成钝角, 故

$$\iint_{S_1} R dx \wedge dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy.$$

• 在上顶 S_2 的上侧, 法向量与 oz 轴成锐角, 故

$$\iint_{S_2} R dx \wedge dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy.$$

三式相加得:



$$\begin{aligned}
& \iint_{\partial\Omega} R dx \wedge dy \\
&= \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx dy \\
&= \iint_{D_{xy}} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.
\end{aligned}$$

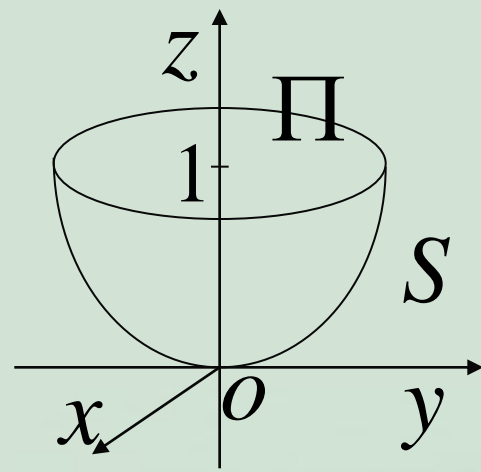
Case2. Ω 可表示为形如Case1中区域的并.(证明略) \square

例: $I = \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, 其中 S 为长方体 $\Omega: |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$ 的外表面.

解: 由Guass公式, $I = \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz = 24abc. \square$



例: $I = \iint_S (2x + z) dy \wedge dz + z dx \wedge dy$,
 其中 S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$),
 其法向量与 z 轴正向夹角为锐角.



解: 设 S 与平面 $\Pi: z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$

所围空间区域为 Ω , 则 $\partial\Omega = S^- \cup \Pi$, 其中 Π 的正向向上.

记 $\vec{v} = (2x + z, 0, z)$, 则 $I = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$, 由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned} \iint_{S^-} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Pi} \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \oiint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} dx dy dz \\ &= 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3 \int_0^1 dz \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq z} dx dy = 3\pi/2. \end{aligned}$$

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{3\pi}{2} + \iint_{\Pi} \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{3\pi}{2} + \iint_{\Pi} z dS = -\frac{3\pi}{2} + \pi = -\frac{\pi}{2}. \quad \square$$

例: 求 $I = \oiint_S \frac{\cos \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle}{r^2} dS$, S 为简单光滑闭曲面, \vec{n} 为 S 的单位外法向量, M_0 为 S 内部一个确定点, \vec{r} 是 M_0 到 S 上的点的矢向量, r 表示 \vec{r} 的长度.

解: 取 S 内部以 M_0 为球心半径为 δ 的球面为 S_1 , 外侧为正. 记 S 与 S_1 所围成的区域为 Ω , 则 $\partial\Omega = S \cup S_1^-$.

$$\frac{\cos \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0.$$

由 Gauss 公式得 $\oiint_{S \cup S_1^-} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) dx dy dz = 0$,

$$\text{于是 } I = \oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \oiint_{S_1} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \oiint_{S_1} \frac{1}{r^2} dS = 4\pi. \square$$

例*: 设 $f(u)$ 二阶连续可微, $f(0) = 0$, 求

$$I = \oiint_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz + \left[\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3 \right] dz \wedge dx + \left[\frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3 \right] dx \wedge dy,$$

其中, Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围空间区域 Ω 的外表面.

解: 记 $P = x^3, Q = \frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3, R = \frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3, (y \neq 0)$.

$$\text{由于 } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{y}{z}\right) - f(0)}{y} = \frac{f'(0)}{z},$$

$$\text{定义 } R(x, 0, z) \triangleq \lim_{y \rightarrow 0} R(x, y, z) = \frac{f'(0)}{z} + z^3.$$

可以验证 P, Q, R 在 Ω 中连续可微, 且

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{z^2} f'(\frac{y}{z}) + 3y^2, \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} f'(\frac{y}{z}) + 3z^2.$$

由Gauss公式, $I = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

令 $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$, 则

$1 \leq r \leq 2$, 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \sin \varphi$, $\varphi = \pi/4$.

又 $z > 0, 0 < \varphi \leq \pi/4$. 于是,

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_1^2 r^2 \cdot r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \\ &= 3 \times \frac{31}{5} \times 2\pi \times (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{93}{5} (2 - \sqrt{2}) \pi. \square \end{aligned}$$

2. Stokes公式

Thm. (Stokes公式) 设向量场 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 在空间区域 Ω 内连续可微, S 是 Ω 内逐片光滑的有向曲面, ∂S 逐段光滑, 则

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \iint_S (R'_y - Q'_z)dy \wedge dz + (P'_z - R'_x)dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y)dx \wedge dy \\ &= \iint_S \det \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} dS \end{aligned}$$



Remark: *Stokes*公式中 ∂S 为有向曲线,其方向由有向曲面 S 诱导:站在 S 的正侧,沿 ∂S 的正向前进时, S 总在左手侧.

Remark: $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$,定义旋度算子 $\nabla \times$ 为

$$\nabla \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix},$$

则*Stokes*公式可记为 $\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$.

Remark: 令 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + 0\vec{k}$, 设 D 为 oxy 上区域, 正向向上, 则由 *Stokes* 公式可得

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} Pdx + Qdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.\end{aligned}$$

这正是 *Green* 公式. 因此 *Stokes* 公式是 *Green* 公式在三维空间的推广.

Remark: *Stokes* 公式成立的条件。



例: $I = \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 = R^2$ 与 $x/a + z/b = 1 (a > 0, b > 0)$ 的交线, 其正向从 oz 轴往下看为逆时针方向.

解: 记 $\vec{v} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$, 则

$$\nabla \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y-z & z-x & x-y \end{pmatrix} = -2(1, 1, 1).$$

记 S 为平面 $x/a + z/b = 1$ 包含在柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 以内的部分, 上侧为正, 则其正单位法向量为

$$\vec{n} = \frac{(1/a, 0, 1/b)}{\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}} = \frac{(b, 0, a)}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

面积微元 $dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy.$

由Stokes公式

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iint_S dS \\ &= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy \\ &= \frac{-2(a+b)}{a} \pi R^2. \square \end{aligned}$$



例: L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x (z \geq 0)$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线, 从 oz 轴正向看去为逆时针方向. 求

$$I = \oint_L (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz.$$

解法一: 记 $\vec{v} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$, 则

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \\ &= 2(y - z)\vec{i} + 2(z - x)\vec{j} + 2(x - y)\vec{k}.\end{aligned}$$

在 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4x (z \geq 0) \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ 上, $z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0)$.

取 S 为锥面 $z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x)$, 上侧为正, 则 S 的正单位法向量为

$$\vec{n} = (-x, -y, z) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (-x, -y, z) / (\sqrt{2}z),$$

面积微元为

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

$$\nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n} = 2\sqrt{2}(x - y).$$



由 *Stokes* 公式得

$$I = \iint_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

$$= 4 \iint_{x^2 + y^2 \leq 2x} (x - y) dx dy$$

$$(\text{令 } x = 1 + r \cos t, y = r \sin t)$$

$$= 4 \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} (1 + r \cos t) dt = 2\pi \times 4 \int_0^1 r dr = 4\pi.$$



解法二: 选 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 上满足 $z \geq 0$,
 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 的部分, 上侧为正. 则在 S 上,

$$\vec{n} = (x-2, y, z)/2, \quad z = \sqrt{4x - x^2 - y^2},$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \frac{2}{z} dx dy.$$

由 $Stokes$ 公式,

$$I = \iint_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

$$= 4 \iint_{x^2 + y^2 \leq 2x} dx dy - 4 \iint_{x^2 + y^2 \leq 2x} \frac{y}{\sqrt{4x - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$= 4 \iint_{x^2 + y^2 \leq 2x} dx dy = 4\pi. \square$$



Remark:利用 $Stokes$ 公式将沿有向闭曲线 L 的第二型曲线积分化为以 L 为边界的曲面 S 上的第二型曲面积分. 适当选取 S ,可以简化计算过程.

例: $I = \oint_L ydx + zdy + xdz$,其中 L 是 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线,从 x 轴正向看去为逆时针方向.

分析: $v = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, $\nabla \times v = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.利用 $Stokes$ 公式计算该积分时,取 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的一部分,还是取 S 为平面 $x + y + z = 0$ 的一部分,计算的难易程度不同.以下留作习题.

3. 空间向量场

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中任一封闭曲面 S 的内部都包含在 Ω 中, 则称 Ω 是面 (二维) 连通区域.

(形象地说就是没有“洞”的区域。)

Def. 对 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中任一简单闭曲线 L , 均有 Ω 中曲面以 L 为边界, 则称 Ω 是线 (一维) 连通区域.

例. $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ 面连通、线连通

$0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1$ 线连通、非面连通

实心轮胎 (救生圈) 面连通、非线连通



空间向量场与平面向量场有相似的结论, 证明方法也完全类似, 因此不加证明地将定理叙述如下:

Thm. 设 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 为区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上的连续向量场, 则以下命题等价:

(1) \vec{v} 是 Ω 上的保守场,

(2) 对于 Ω 中任意一条逐段光滑的有向闭曲线 L ,

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

(3) \vec{v} 为 Ω 上有势场, 即存在函数 f , 使 $\vec{v} = \nabla f$.



Thm2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为线连通区域, $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 为 Ω 上连续可微的向量场, 则以下命题等价:

(1) \vec{v} 为 Ω 上的保守场.

(2) \vec{v} 为 Ω 上的无旋场.

证明无旋场是保守场
时要用到Stokes公式

Remark:

- 若向量场 \vec{v} 为 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中保守场, 则第二型曲线积分与路径无关, 可以选择适当的积分路径简化计算.
- 要验证单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上连续可微的向量场 \vec{v} 为保守场, 只要验证 \vec{v} 为无旋场, 即 $\nabla \times \vec{v} = 0$.

•微分形式 $Pdx + Qdy + Rdz$ 有原函数 f

$\Leftrightarrow f$ 是向量场 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 的势函数

•可以利用第二型曲线积分来求 $Pdx + Qdy + Rdz$ 的原函数

$$f(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz,$$

也可以用不定积分法来求原函数.



例:判断 $\vec{v} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ 是否为 \mathbb{R}^3 上的有势场, 若是, 求其势函数.

解: 在单连通区域 \mathbb{R}^3 上, $\nabla \times \vec{v} = 0$, 故 \vec{v} 为 \mathbb{R}^3 上无旋场, 从而为保守场, 有势场, 其势函数可取为

$$\begin{aligned} & f(x, y, z) \\ &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (x - x_0)dx + (y - y_0)dy + (z - z_0)dz, \end{aligned}$$

积分与路径无关, 取为折线段 $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x, y_0, z_0) \rightarrow (x, y, z_0) \rightarrow (x, y, z)$. 于是



$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{x_0}^x (t - x_0) dt + \int_{y_0}^y (t - y_0) dt + \int_{z_0}^z (t - z_0) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]. \end{aligned}$$

故 \vec{v} 的势函数为

$$\frac{1}{2} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] + C. \square$$



作业：习题4.7 No. 3, 5-7.

- 补充题：记 \mathbb{R}^3 中以原点为球心的单位球为 Ω , 设
- $$\vec{V} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T \in C^1(\mathbb{R}^3), \text{ 且}$$
- $$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V}(x, y, z) = 0, & \forall (x, y, z) \in \Omega, \\ \vec{V}(x, y, z) = (1, 1, 1)^T, & \forall (x, y, z) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

求证： $\iiint_{\Omega} (P + Q + R) dx dy dz = 4\pi$.

Hint: 利用Gauss公式将三重积分化为第二型曲面积分 $\iint_{\partial\Omega} (x + y + z) \vec{V} \cdot d\vec{S}$.