Review

含参广义积分的性质

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad D=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta].$$

$$\bullet\begin{cases} f(x,y),\ f_y'(x,y)\in C(D); \\ \forall y\in[\alpha,\beta], I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\ \text{收敛}; \\ \int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx\ \text{关于} y\in[\alpha,\beta]\text{一致收敛}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \in C^1[\alpha,\beta], \text{且} I'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx.$$

$$\bullet\begin{cases} f(x,y)\in C(D); \\ \int_a^{+\infty} f(x,y)dx\text{关于}y\in[\alpha,\beta]\text{一致收敛}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} I(y)\in C[\alpha,\beta],\text{即} \\ \qquad \lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x,y)dx. \\ I(y)\in R[\alpha,\beta], \\ \qquad \text{且}\int_\alpha^\beta dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\int_\alpha^\beta f(x,y)dy. \end{cases}$$

- $f(x,y)\in C\left([a,+\infty)\times[\alpha,+\infty]\right)$, 且满足

(1) $\forall\beta>\alpha, \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $y\in[\alpha,\beta]$上一致收敛;

$\forall b>a, \int_\alpha^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $x\in[a,b]$上一致收敛;

(2) $\int_\alpha^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty} dx\int_\alpha^{+\infty} |f(x,y)|dy$ 中至少有一个存在;

则$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在$[\alpha,+\infty]$上可积, 且

$$\int_\alpha^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty} dx\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)dy.$$

Chap3 重积分

§1. 二重积分的概念和性质

二重积分是三重积分的基础. 只有掌握好了二重积分才能学好三重积分. 而且, 二重积分完全体现了重积分的所有思想.

- 二重积分的几何与物理背景
  - 曲顶柱体的体积
  - 平板质量
- 二重积分的概念
- 二重积分的性质

1. 二重积分的几何与物理背景

(1) 曲顶柱体的体积

设曲面S:$z=f(x,y),(x,y)\in D$.求以D为下底,以曲面S为上顶的曲顶柱体Ω的体积$V(\Omega)$.

•Step1.对D进行分划: 将D分成n个小区域$D_1,D_2,\cdots,D_n$,称之为D的一个分划$T=\{D_i\}_{i=1}^{n}$.相应地,Ω被分成了曲顶柱体$\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$.记

$$d(D_i)\triangleq\sup\{d(P,Q)\mid P,Q\in D_i\}.$$

称$\lambda(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\{d(D_i)\}$为分划$T$的直径.

- Step2.取标志点　在D_i中任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$.
- Step3.求近似和　以$\Delta\sigma_i$表示D_i的面积, 则

$$\mathrm{V}(\Omega_i)\approx f(P_i)\Delta\sigma_i,$$

$$\mathrm{V}(\Omega)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(\Omega_i)\approx\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i.$$

- Step4.取极限

直观上,当D的分划越来越细,即$\lambda(T)\to 0$时,

$$\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i\to\mathrm{V}(\Omega).$$

(2) 平板质量

薄板D上点(x,y)处的密度为$m(x,y)$,求薄板质量.

- Step1.分划:将D分成n个小区域$D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$
- Step2.取标志点:在D_i中任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$.
- Step3.求近似和:用$\Delta\sigma_i$表示D_i的面积,薄板质量

$$m(D)=\sum_{i=1}^{n}m(D_i)\approx\sum_{i=1}^{n}m(P_i)\Delta\sigma_i.$$

- Step4.取极限:

当D的分割越来越细时,$\sum\limits_{i=1}^{n}m(P_i)\Delta\sigma_i\to m(D)$.

2. 矩形区域上的二重积分

Def. f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有定义, 对 D 的任意分划

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<x_k=d,$$

及任意 $P_{ij}(\xi_{ij},\eta_{ij})\in D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j], 1\le i\le n,$

$1\le j\le k$, 若 *Riemann* 和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$ 的极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$$

存在,则称 f 在 D 上(*Riemann*)可积,记作 $f \in R(D)$,

并称该极限为 f 在 D 上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j.$$

其中$\iint$是二重积分号,D是积分域, f是被积函数.

Remark: 定义中, *Riemann*和的极限与对D的分划无关,与标志点$\{(\xi_{ij},\eta_{ij})\}$的选取无关. 因此也可以用$\varepsilon-\delta$语言定义二重积分:

Def. f在$D=[a,b]\times[c,d]$上有定义, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$. 若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0, s.t.$对 D的任意分划

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$
$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<x_k=d,$$

及任意$P_{ij}(\xi_{ij},\eta_{ij})\in D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j], 1\le i\le n,$ $1\le j\le k,$只要$\lambda(T)<\delta,$就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j-\mathrm{A}\right|<\varepsilon,$$

则称f在D上(*Riemann*)可积, 称A为f在D上的二重积分, 记为$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{A}.$

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x,y)\}, M_{ij} = \sup_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x,y)\}.$$

Darboux下和： $L(f,T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$

Darboux上和：$U(f,T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$

Thm. f为$D=[a,b]\times[c,d]$上有界函数.

(1)T是D的分划, T'为T的加密分划, 则

$$L(f,T)\le L(f,T')\le U(f,T')\le U(f,T);$$

(2)T_1,T_2是D的分划, 则 $L(f,T_1)\le U(f,T_2)$.

Darboux下积分: $\underline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sup_T L(f,T)$

Darboux上积分: $\overline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \inf_T U(f,T)$

Thm. f为$D=[a,b]\times[c,d]$上有界函数, 则以下命题等价

(1) $f \in R(D)$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists D$的分划$T, s.t.\ U(f,T) - L(f,T) < \varepsilon$;

(3) $\underline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Def. 称$G\subset\mathbb{R}^2$为零面积集, 若$\forall\varepsilon>0,\exists$有限个矩形$\{I_i\}, i=1,2,\cdots,n$, 使得$G\subset\bigcup_{1\le i\le n} I_i$, 且这些矩形的面积和$\sum_{i=1}^{n}\sigma(I_i)<\varepsilon$.

Thm. $D=[a,b]\times[c,d]$, 则

(1) $f\in R(D)\Rightarrow f$在D上有界;

(2) $f\in C(D)\Rightarrow f\in R(D)$;

(3) f在D上的间断点集为零面积集$\Rightarrow f\in R(D)$.

3. 一般有界闭集上的二重积分

Def. $D \subset \mathbb{R}^2$为有界闭集, f为D上有界函数. 若存在

$I = [a,b] \times [c,d]$, s.t. $D \subset I$, 且

$$f_I(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in I \setminus D \end{cases} \in R(I),$$

则称f在D上Riemann可积, 且f在D上的积分定义为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f_I(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Thm.$D\subset\mathbb{R}^2$为有界闭集, f为D上有界函数.若f在D上的间断点集为零面积集,∂D为零面积集,则$f\in R(D)$.

Question1.$D\subset\mathbb{R}^2$为有界闭集,若f在D上有瑕点(瑕点的邻域中f无界), 如何拓展f在D上的Riemann可积性？（类比一元函数的瑕积分）

Question2. $D\subset\mathbb{R}^2$为无界闭区域,如何讨论f在D上的可积性？（类比一元函数的无穷限积分）

例. $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 在$[-1,1]\times[-1,1]$上Riemann可积.因为f仅有一个间断点$(0,0)$.

例. Dirichlet函数$D(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in\mathbb{Q}^2\\ 0 & (x,y)\notin\mathbb{Q}^2\end{cases}$ 在$\mathbb{R}^2$中任一有界区域E上均不可积.因为对E的任意分划,

$$L(f,T)=0<\sigma(E)=U(f,T).$$

4. 二重积分的性质

1)(线性性质) $f, g \in R(D)$, 则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in R(D)$, 且

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\sigma = \alpha \iint_D f\,\mathrm{d}\sigma + \beta \iint_D g\,\mathrm{d}\sigma.$$

2)(区域可加性) D_1, D_2 为 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭集, $D_1 \cap D_2$ 为零面积集, $D = D_1 \cup D_2$, 则

$$f \in R(D) \Leftrightarrow f \in R(D_i), i = 1, 2.$$

且 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

3)(保序性) $f, g \in R(D), f \geq g$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地, $f \in R(D), f \geq 0$,则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0.$

4) $f \in R(D)$,则 $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Proof: $\pm f \leq |f|$,由线性性质和保序性,

$$\pm\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \ \square$$

5)(估值定理)$f\in R(D), m\le f(x,y)\le M$.记$\sigma(D)$为$D$的面积,则

$$m\sigma(D)\le\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le M\sigma(D).$$

6)(积分中值定理)$D\subset\mathbb{R}^2$连通、有界闭,∂D为零面积集,$f\in C(D)$,则存在$(\xi,\eta)\in D, s.t.$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\sigma(D).$$

7)(对称性)设$f\in R(D)$, D关于OX轴对称,

- 若$f(x,y)$关于y为奇函数,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$;

- 若$f(x,y)$关于y为偶函数,记D_1为D位于OX轴上方的部分,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

8)(轮换不变性) 若$D\subset\mathbb{R}^2$关于x,y是轮换对称的,即$(x,y)\in D\Leftrightarrow(y,x)\in D$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例. $f \in C([a,b]),\ f>0,\ D=[a,b]\times[a,b]$,则

$$\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge (b-a)^2.$$

Proof: 由于区域D是轮换对称的,因此

$$\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\ge \frac{1}{2}\iint\limits_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)^2. \square$$

Thm. $D\subset\mathbb{R}^2$为连通有界闭集,∂D为零面积集,g不变号,$f,g\in C(D)$. 则存在$(\xi,\eta)\in D$, s.t.

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解: $f,g\in C(D)$,则$fg\in C(D)$,从而$fg\in R(D)$. g不变号,不妨设$g\geq 0$.记

$$m=\min_{(x,y)\in D} f(x,y),\ M=\max_{(x,y)\in D} f(x,y),$$

则 $$mg(x,y)\leq f(x,y)g(x,y)\leq Mg(x,y).$$

由二重积分的保序性,

$$m\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le M\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- 若$\iint_D g(x,y)dxdy \ne 0$,则

$$m \le \mu \triangleq \frac{\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \le M,$$

由连续函数的介值定理,$\exists(\xi,\eta)\in D, s.t. f(\xi,\eta)=\mu,$

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

•若$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, 则$g(x,y) \equiv 0. \forall (\xi,\eta) \in D$,

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \quad \square$$

Remark: g变号时, 结论不一定成立.

例如, $D = [-1,1]\times[-1,1]$, $f(x,y) = g(x,y) = x$.则

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0.$$

事实上,

$$\iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_{\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_{\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1} \frac{1}{4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16} > 0.$$

而区域D关于y轴对称, $g(x,y)=x$关于x为奇函数,

所以$\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$

故$\forall(\xi,\eta)\in D$,

$$0 < \iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\neq f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \ \square$$

例. 求 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

分析: 将被积函数看成薄板点密度,则所求为原点处的点密度,即被积函数在点(0, 0)的值,结果应为1.

解:由积分中值定理,$\exists(\xi_r,\eta_r)$, s.t. $\xi_r^2+\eta_r^2\le r^2$,s.t.

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=e^{\xi_r^2-\eta_r^2}\cos(\xi_r+\eta_r)\to 1,\text{当} r\to 0\text{时}. \ \square$$

基本的二重积分的计算很重要, 大家要熟练掌握

- 二重积分的基本性质
- 二重积分化累次积分
- 交换积分次序
- 由累次积分给出积分区域
- 极坐标下二重积分的计算
- 二重积分的变量替换方法

作业:

习题3.1 No.3,4,10

习题3.2 No.4.