第4章 导数应用

学习材料(7)

1 求最大、最小值

2 微分中值定理及应用

定理1（Rolle） 设函数$f:[a,b]\to R$满足
(1). $f\in C[a,b]$;
(2). $f(a)=f(b)$；
(3). f在(a,b)可导。
则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

例1 求证$f(x)=x^3+x-1$有唯一的零点。

例2 设λ是个实数，函数$f:[a,b]\to R$满足
(1). $f\in C[a,b]$;
(2). $f(a)=f(b)=0$；
(3). f在(a,b)可导。
则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0$.

定理2（Lagrange） 设函数$f:[a,b]\to R$满足
(1). $f\in C[a,b]$;
(2). f在(a,b)可导。
则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

注1 Lagrange微分中值公式也写成

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),$$

其中θ是介于0和1的某个数。

例3 设函数$f:(a,b)\to R$可导，$x_0\in(a,b)$为f'的间断点，则x_0为f'的第二类间断点。

例4 由参数方程表示平面曲线

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

其中函数$\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \to R$满足
(1). $\varphi, \psi \in C[\alpha, \beta]$;
(2). φ, ψ在(α, β)可导，且$\varphi' \neq 0$.

则由条件（2）知φ是单调增（或单调减）函数，不妨φ是单调增函数。记$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$，于是

$$\frac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} = \frac{\psi(\varphi^{-1}(b)) - \psi(\varphi^{-1}(a))}{b - a},$$

我们看看用Lagrange微分中值定理，能得到什么结论？

解：

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} &= \frac{\psi(\varphi^{-1}(b)) - \psi(\varphi^{-1}(a))}{b - a} \\
&= \left(\psi(\varphi^{-1}\right)'(\eta) \quad \text{（Lagrange 微分中值定理，其中}\eta \in (a, b)\text{）} \\
&= \psi'(\varphi^{-1}(\eta)) \left(\varphi^{-1}\right)'(\eta) \quad \text{（复合函数求导）} \\
&= \psi'(\varphi^{-1}(\eta)) \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(\eta)\right)} \quad \text{（反函数求导）} \\
&= \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \quad \text{（记}\xi = \varphi^{-1}(\eta)\text{，则}\xi \in (\alpha, \beta)\text{），}
\end{aligned}$$

定理3（Cauchy） 设函数$f, g : [a, b] \to R$满足

(1). $f, g \in C[a, b]$;
(2). f, g在(a, b)可导，且$g' \neq 0$.
则$\exists \xi \in (a, b)$，使得$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

证：因$g' \neq 0$，故由Lagrange定理知，$g(b) - g(a) \neq 0$. 令$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$，则$F \in C[a, b]$、$F(a) = f(a) = F(b)$、$F$ 在(a, b)可导，故由Roll定理知，$\exists \xi \in (a, b)$，使得

$$F'(\xi) = 0,$$

即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0,$$

也即

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

2.1 应用1-单调性判别

命题1 设函数$f:(a,b)\to R$可导，则

(1). $f'\geq 0 \Longleftarrow\!\!\!=\!\!\!\Longrightarrow f$单调不减；

(2). $f'\leq 0 \Longleftarrow\!\!\!=\!\!\!\Longrightarrow f$单调不增；

(3). $f'>0 \Longrightarrow f$严格增；

(4). $f'<0 \Longrightarrow f$严格减。

例5 证明不等式

$$\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x},\ \forall x\geq 1.$$

2.2 应用2-极值判别

例6 设函数$f:[a,b]\to R$二阶可导，且满足$f(a)=f(b)=0$ 及

$$f''(x)+\lambda f'(x)+\mu f(x)\equiv 0,$$

其中λ,μ是常数，$\mu<0$. 证明$f(x)\equiv 0$.

证：反证法。若不然，则$\exists x_0\in(a,b)$使得$f(x_0)\neq 0$, 不妨$f(x_0)>0$。于是f在$[a,b]$上的最大值在(a,b)取得，记$x_M\in(a,b)$为f在$[a,b]$上的最大值点。故$f(x_M)>0$且$f'(x_M)=0$ (Fermat定理), 从而

$$f''(x_M)=-\lambda f'(x_M)-\mu f(x_M)=-\mu f(x_M)>0.$$

由于

$$\lim_{x\to x_M}\frac{f'(x)}{x-x_M}=\lim_{x\to x_M}\frac{f'(x)-f'(x_M)}{x-x_M}=f''(x_M)>0,$$

故当$0<|x-x_M|<<1$时，

$$\frac{f'(x)}{x-x_M}>0,$$

于是

$$f'(x)>0, 当0<x-x_M<<1.$$

故由命题1知，f在x_0右侧小邻域上是严格增（画图），但这与x_M是最大值点矛盾。该矛盾说明原反证法假设不对，所以$f(x)\equiv 0$.

命题2 设函数$f:(a,b)\to R$在x_0处存在二阶导数。

(1). 若$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$，则x_0是f的极小点；

(2). 若$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$，则x_0是f的极大点。

证：只证（1）. 由于

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)>0,$$

故当$0 < |x - x_0| << 1$时，

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

即

$$f'(x) > 0, \quad \text{当} 0 < x - x_0 << 1,$$

$$f'(x) < 0, \quad \text{当} 0 < x_0 - x << 1.$$

故由命题1知，f在x_0右侧小邻域上是严格增，f在x_0左侧小邻域上是严格减，（画图），所以x_0是f的极小点。

问题1：

(1). 若$f'(x_0) \neq 0$，则由Fermat定理知，x_0不是f的极点；

(2). 若$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) \neq 0$，则由命题2知，$x_0$是$f$的极点；

(3). 若$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0$，问$x_0$是否为$f$的极点？

(4). 若$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) = 0,\ f^{(4)}(x_0) \neq 0$，问$x_0$是否为$f$的极点？

2.3 应用3–凸性判别

命题3

(1). 设函数$f : (a, b) \to R$可导，则f是凸函数$\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow f'$单调不减；

(2). 设函数$f : (a, b) \to R$二阶可导，则f是凸函数$\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow f'' \geq 0$.

(3) 设函数$f : (a, b) \to R$可导，则f是凸函数$\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow \forall x_0,\ x \in (a, b)$，有

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x).$$

注2

（3）的几何意义？f是凸函数$\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$曲线$y = f(x)$总在其切线的上方。

证：证（1）.

<u>充分性</u>（“$\Longleftarrow\!=\!=$”）. $\forall x_1, \xi, x_2 \in I,\ x_1 < \xi < x_2$，则由Lagrange微分中值公式得

$$\frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} = f'(\eta_1), \quad \frac{f(x_2) - f(\xi)}{x_2 - \xi} = f'(\eta_2),$$

其中$\eta_1 \in (x_1, \xi), \quad \eta_2 \in (\xi, x_2)$. 于是由$f'(\eta_1) \leq f'(\eta_2)$得，

$$\frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(\xi)}{x_2 - \xi},$$

故由凸函数等价陈述2知，f是凸函数。

<u>必要性</u>（“$=\!=\!\Longrightarrow$”）. $\forall x_1,\ x_2 \in (a, b)$，若$x_1 < x_2$，则$\forall h \in \left(0, \frac{x_2 - x_1}{2}\right)$，由凸函数等价陈述2得，

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq \frac{f(x_2) - f(x_2 - h)}{h} = \frac{f(x_2 - h) - f(x_2)}{-h}.$$

故
$$f'(x_1)=f'_+(x_1)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\le\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_2-h)-f(x_2)}{-h}=f'_-(x_2)=f'(x_2),$$
所以
$$f'(x_1)\le f'(x_2).$$

证(2). 由(1)知，f是凸函数$\Longleftarrow\!\Longrightarrow f'$单调不减；再由命题1知，$f'$单调不减$\Longleftarrow\!\Longrightarrow f''\ge0$.

证(3).
<u>充分性</u>（“$\Longleftarrow\!=$”）. $\forall x_1,\xi,x_2\in I,\ x_1<\xi<x_2$，则
$$f(\xi)+f'(\xi)(x_1-\xi)\le f(x_1),\quad f(\xi)+f'(\xi)(x_2-\xi)\le f(x_2),$$
即
$$\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi}\le f'(\xi),\quad f'(\xi)\le\frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi},$$
于是
$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi},$$
故由凸函数等价陈述2知，f是凸函数。

<u>必要性</u>（“$=\!\Longrightarrow$”）. $\forall x_0,\ x\in(a,b)$，若$x>x_0$，则由Lagrange微分中值公式得
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi),$$
其中$\xi\in(x_0,x)$. 而由命题3.（1）知，$f'(x_0)\le f'(\xi)$，即有
$$f'(x_0)\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$
所以
$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\le f(x);$$
若$x<x_0$，则由Lagrange微分中值公式得
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi),$$
其中$\xi\in(x,x_0)$. 而由命题3.（1）知，$f'(\xi)\le f'(x_0)$，即有
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le f'(x_0),$$
所以
$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\le f(x).$$
综上，$\forall x_0,\ x\in(a,b)$，有$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\le f(x)$.

例7
设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是正数，$\mu_1,\mu_1,\cdots,\mu_n$是满足$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n=1$的非负实数，证明
$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}\le\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_nx_n,$$

特别
$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdot x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$
证：令$f(x)=-\ln x\ \ x\in(0,+\infty)$，则
$$f'(x)=-\frac{1}{x},\ f''(x)=\frac{1}{x^2}>0,$$
所以f是凸函数，故
$$f(\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_nx_n)\le\mu_1f(x_1)+\mu_2f(x_2)+\cdots+\mu_nf(x_n),$$
即
$$-\ln[\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_nx_n]\le\mu_1(-\ln x_1)+\mu_2(-\ln x_2)+\cdots+\mu_n(-\ln x_n),$$
也即
$$\mu_1\ln x_1+\mu_2\ln x_2+\cdots+\mu_n\ln x_n\le\ln[\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_nx_n],$$
所以
$$x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}\le\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_nx_n.$$

定义1（拐点） 设函数f在点x_0的两侧有不同的凸性，即一侧是凸（下凸），一侧是凹（上凸），则称点$M=:(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点。

例8 设$f(x)=x^3$，则
$$f'(x)=3x^2,\ f''(x)=6x,$$
所以由命题3知，f在$(0,+\infty)$是凸（下凸）的，在$(-\infty,0)$是凹的（上凸）。故$(0,0)$是曲线$y=x^3$ 的拐点。

注4 新闻、经济学中所说的拐点，如房价出现了“拐点”是什么含义？经济增长出现了“拐点”是什么含义？

2.4 画图

定义2（渐近线）

(1). 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+(x_0^-,x_0)}f(x)=\infty$，则称$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的垂直渐近线；

(2). 若 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty,\infty)}f(x)=b$，则称$y=b$为曲线$y=f(x)$的水平渐近线；

(3). 若 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty,\infty)}[f(x)-(ax+b)]=0$，其中$a\ne0$，则称$y=ax+b$为曲线$y=f(x)$的斜渐近线。

命题4 设函数$f:[c,+\infty)$上有定义，则曲线$y=f(x)$以直线$y=ax+b$为斜渐近线的充分必要条件是
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\quad\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b.$$

证：<u>充分性</u>（“$\Longleftarrow$”）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] &=== \lim_{x\to+\infty}[(f(x)-ax)-b]\\ &=== b-b\\ &=== 0.\end{aligned}$$

<u>必要性</u>（“$\Longrightarrow$”）.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &=== \lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{x}\left[f(x)-(ax+b)\right]+a+\frac{b}{x}\right\}\\ &=== a,\\ \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] &=== \lim_{x\to+\infty}\{[f(x)-(ax+b)]+b\}\\ &=== b.\end{aligned}$$

函数画图要领:

1.定义域；2.对称性（奇、偶性，周期性等）；3.与坐标轴的交点；4.渐近线；5.单调区间，极点；6.凸凹区间，拐点。

例9

设$f(x)=\frac{(x-1)^2}{2x-1}$，画出曲线$y=f(x)$的图像。

解:

1. f的定义域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2. $f(0)=-1$，$f(1)=0$；

3.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\infty,$$

故曲线$y=f(x)$有垂直渐近线$x=\frac{1}{2}$.而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=-\frac{3}{4}.$$

故曲线$y=f(x)$有斜渐近线$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$.

4. $f'(x)=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$. 令$f'(x)=0$，得$x=0,\ x=1$.

5. $f''(x)=\frac{2}{(2x-1)^3}$.

$$\begin{bmatrix} x & (-\infty,0) & 0 & \left(0,\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2},1\right) & 1 & (1,+\infty)\\ f': & + & 0 & - & - & 0 & +\\ f'': & - & - & - & + & + & +\\ f: & \uparrow,\frown & \text{极大点} & \downarrow,\frown & \downarrow,\smile & \text{极小点} & \uparrow,\smile \end{bmatrix}$$

3 L'Hopital 法则

定理1

设$f,g:N_+^*(x_0,\delta_0)\to R$ 满足

1. f,g在$N_+^*(x_0,\delta_0)$连续, 且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=0$;
2. f,g在$N_+^*(x_0,\delta_0)$可导，且$g'\neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$或$\infty$.

则$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$或$\infty$.

证：不妨设$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 故$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1\in(0,\delta_0^*)$, 使得当$x\in(x_0,x_0+\delta_1)$时，

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由$g'\neq 0$知g是单调增或单调减函数，于是当$x_0<x^*<x<x_0+\delta_1$时，由Cauchy微分中值定理知，存在$\xi\in(x^*,x)$，使得

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x^*)}{g(x)-g(x^*)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

令$x^*\to x_0^+$, 故由条件（1）知，当$x_0<x<x_0+\delta_1$时，

$$A-\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{f(x)}{g(x)}\le A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以由定义知，

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

定理2

设$f,g:N_+^*(x_0,\delta_0)\to R$ 满足

1. f,g在$N_+^*(x_0,\delta_0)$连续, 且$\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty$;
2. f,g在$N_+^*(x_0,\delta_0)$可导，且$g'\neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$或$\infty$.

则$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$或$\infty$.

证：不妨设$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 故$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1\in(0,\delta_0^*)$, 使得当$x\in(x_0,x_0+\delta_1)$时，

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由$g' \neq 0$知g是单调增或单调减函数，于是当$x_0 < x < x_0+\delta_1$时，由Cauchy微分中值定理知，存在$\xi \in (x, x_0+\delta_1)$，使得

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)-g\left(x_0+\delta_1\right)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\frac{\varepsilon}{2} \quad (1).$$

由$\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$知，

$$\lim_{x\to x_0^+}\left[1-\frac{g\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}\right]=1$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\left[\frac{f\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}+\left(1-\frac{g\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}\right)\left(A\pm\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]=A\pm\frac{\varepsilon}{2},$$

故$\exists\delta_2 \in (0,\delta_1)$, 使得当$x_0<x<x_0+\delta_2$时，

$$g(x) \neq 0 \qquad (2)$$

$$1-\frac{g\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}>0 \qquad (3)$$

$$\frac{f\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}+\left(1-\frac{g\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)<A+\varepsilon \qquad (4)$$

$$\frac{f\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}+\left(1-\frac{g\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)>A-\varepsilon \qquad (5),$$

于是由(1)和(2)得

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}}{1-\frac{g\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}}<A+\frac{\varepsilon}{2},$$

再由(3)得

$$\frac{f\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}+\left(1-\frac{g\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}+\left(1-\frac{g\left(x_0+\delta_1\right)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

从而由(4)和(5)得

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon,$$

故由定义知，

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

注 对其它极限过程，也有类似结论。

例1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x} \quad \Longleftarrow\!=\!= \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

1 $\lim\limits_{x\to 0}[e^x-e^{-x}-2x]=0, \lim\limits_{x\to 0}[x-\sin x]=0\surd$;

2 $[e^x-e^{-x}-2x]'=e^x+e^{-x}-2,\ [x-\sin x]'=1-\cos x\surd$;

3 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ 存在.

$$\Longleftarrow\!=\!= \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

$$\Longleftarrow\!=\!= \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$$

$$=\!=\!= \quad 2.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$，其中$\alpha>0$.

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} \quad \Longleftarrow\!=\!= \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

1 $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha=\infty\surd$;

2 $[\ln]'=\frac{1}{x},\ [x^\alpha]'=\alpha x^{\alpha-1}\surd$;

3 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}$ 存在.

$$=\!=\!= \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}$$

$$=\!=\!= \quad 0.$$

4 Taylor公式

例1 设$P(x)$为一个x的n次多项式，

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n.$$

对于实数x_0，因

$$x=x_0+(x-x_0)$$

$$x^2=[x_0+(x-x_0)]^2=x_0^2+2x_0(x-x_0)+(x-x_0)^2$$

$$\ldots$$

$$x^n=[x_0+(x-x_0)]^n=\textstyle\sum_{k=0}^n C_n^k x_0^{n-k}(x-x_0)^k,$$

故$P(x)$可写成

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n.$$

如何通过
$$P(x_0),\ P'(x_0),\ P''(x_0),\ \cdots,\ P^{(n)}(x_0)$$
确定系数
$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n?$$

解：
$P(x_0)=a_0;$

$P'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1},\quad P'(x_0)=a_1;$

$P''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},\quad P''(x_0)=2!a_2;$

$P'''(x)=3\cdot 2a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3},\quad P'''(x_0)=3!a_3;$

$\cdots$

$P^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 2a_n,\quad P^{(n)}(x_0)=n!a_n.$
所以
$$a_0=P(x_0),\ a_1=P'(x_0),\ a_2=\frac{P''(x_0)}{2!},\quad a_3=\frac{P'''(x_0)}{3!},\cdots,\ a_n=\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!},$$
从而
$$P(x)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

定义1（Taylor多项式）

设f是定义在x_0的某个邻域$N(x_0)$上的函数。若f在点x_0处有1至n阶导数，称
$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
为<u>f在点x_0处的n阶Taylor多项式</u>，并称
$$R_n(x)=:f(x)-\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]$$
为<u>f在点x_0处n阶Taylor公式的余项</u>。

问题

函数f在点x_0处n阶Taylor公式的余项$R_n(x)$有多大？我们已经知道
$$\begin{aligned}R_1(x)\quad &=:\quad f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\\ &=\quad o(x-x_0)\quad（当x\to x_0）.\end{aligned}$$

我们有如下<u>带Peano余项的Taylor公式</u>。

定理1(Peano)

设f是定义在x_0的某个邻域$N(x_0)$上的函数。若f在点x_0处有1至n阶导数，则
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]\quad（当x\to x_0）,$$

即

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]\quad（当x\to x_0）.$$

证：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \quad &\Longleftarrow\!\!= \quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\\
&\quad（因为R_n'(x)=f'(x)-\left[f'(x_0)+\tfrac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\right],\\
&\quad \text{L'Hopital}法则）\\
&\Longleftarrow\!\!= \quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}\quad（\text{L'Hopital}法则）\\
&\cdots\\
&\Longleftarrow\!\!= \quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}}{n!(x-x_0)}\quad（\text{L'Hopital}法则）\\
&=\!\!= \quad \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]\\
&=\!\!= \quad \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right]\\
&=\!\!= \quad 0,
\end{aligned}$$

所以

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]\quad（当x\to x_0）.$$

进一步，我们有如下带Lagrange余项的Taylor公式。

定理2(Lagrange) 设$f:(a,b)\to R$有$n+1$阶导数，$x_0\in(a,b)$，则$\forall x\in(a,b)$，存在ξ介于x_0与x之间，使得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

即

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

证：不妨设$x\in(x_0,b)$，令

$$F(x)=f(x)-\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right],\ G(x)=(x-x_0)^{n+1},$$

则

$$
\begin{aligned}
\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &=\!=\!= \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} \quad （因为F(x_0)=0, G(x_0)=0）\\
&\Longleftarrow\!=\!= \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}\\
&\qquad （因为F'(x)=f'(x)-\left[f'(x_0)+\tfrac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\right],\\
&\qquad\quad G'(x)=(n+1)(x-x_0)^n，\ \text{Cauchy}微分中值定理，\exists\xi_1\in(x_0,x)）\\
&=\!=\!= \frac{F'(\xi_1)-F'(x_0)}{G'(\xi_1)-G'(x_0)} \quad （因为F'(x_0)=0, G'(x_0)=0)\\
&\Longleftarrow\!=\!= \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \quad （\text{Cauchy}微分中值定理，\exists\xi_2\in(x_0,\xi_1)）\\
&\cdots\\
&\Longleftarrow\!=\!= \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} \quad （\text{Cauchy}微分中值定理，\exists\xi_{n+1}\in(x_0,\xi_n)）\\
&=\!=\!= \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

所以

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中$\xi_{n+1}\in(x_0,x)$.

例2 e^x在$x_0=0$处的n阶Taylor公式。

解：$[e^x]^{(n)}=e^x$，故

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \quad （当x\to 0）,$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中ξ是介于0与x之间的某个数。

例3 证明e是无理数。

证明: 反正法。若不然，则$\exists p,q\in NZ_+$ 使得$e=\frac{p}{q}$. 而由带Lagrange余项的Taylor公式，有

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!},$$

其中ξ介于0和1之间内。于是

$$n!\left[\frac{p}{q}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]=\frac{e^\xi}{n+1}.$$

取$n>\max\{q,3\}$, 则
$$n!\left[\frac{p}{q}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]\in Z;$$
而
$$0<\frac{e^{\xi}}{n+1}<\frac{e}{n+1}<\frac{3}{n+1}<1,$$
从而
$$\frac{e^{\xi}}{n+1}\text{不}\in Z.$$
但这与
$$n!\left[\frac{p}{q}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]=\frac{e^{\xi}}{n+1}$$
矛盾。该矛盾说明原反证法假设不对，所以e是无理数。

例4 $\sin x$在$x_0=0$处的n阶Taylor公式。

解：$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$，故$\sin^{(n)}0=\begin{cases}0, & \text{当}n=2k,\\ (-1)^{k-1}, & \text{当}n=2k-1,\end{cases}$ 所以

$$\begin{aligned}\sin x-\left[x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] &= o(x^{2k-1}) \quad (\text{当}x\to 0)\\ &= \frac{\sin(\xi+k\pi)}{(2k)!}x^{2k}\\ &= \frac{\sin\left(\eta+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}{(2k+1)!}x^{2k+1},\end{aligned}$$

其中ξ和η是介于0与x之间的某数。

例5 $\cos x$在$x_0=0$处的n阶Taylor公式。

解：$\cos^{(n)}x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$，故$\cos^{(n)}0=\begin{cases}(-1)^k, & \text{当}n=2k,\\ 0, & \text{当}n=2k-1,\end{cases}$ 所以

$$\begin{aligned}\cos x-\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right] &= o(x^{2k}) \quad (\text{当}x\to 0)\\ &= \frac{\cos\left(\xi+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\ &= \frac{\cos(\eta+(k+1)\pi)}{(2k+2)!}x^{2k+2},\end{aligned}$$

其中ξ和η是介于0与x之间的某数。

例6 $(1+x)^\alpha$在$x_0=0$处的n阶Taylor公式。

解：$[(1+x)^\alpha]^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$，
所以

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha-\left[1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right] &= o(x^n)\quad（当x\to 0）\\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\end{aligned}$$

其中$x\in(-1,+\infty)$，ξ是介于0与x之间的某数。

例7 $\ln(1+x)$在$x_0=0$处的n阶Taylor公式。

解：$[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$，

$$\begin{aligned}[\ln(1+x)]^{(n)} &= [(1+x)^{-1}]^{(n-1)}\\ &= (-1)(-2)\cdots(-n+1)(1+x)^{-n}\\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\tfrac{1}{(1+x)^n},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right] &= o(x^n)\quad（当x\to 0）\\ &= (-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1},\end{aligned}$$

其中$x\in(-1,+\infty)$，ξ是介于0与x之间的某数。

定理3（Taylor公式唯一性） 设f是定义在x_0的某个邻域$N(x_0)$上的函数，且

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]\quad（当x\to x_0）,$$

其中a_0，a_1，$a_2,\cdots,a_n$为常数。若f在点x_0处有1至n阶导数，则

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

证：由带Peano余项的Taylor公式得，

$$[a_0-f(x_0)]+\left[a_1-\frac{f'(x_0)}{1!}\right](x-x_0)+\left[a_2-\frac{f''(x_0)}{2!}\right](x-x_0)^2+\cdots+\left[a_n-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right](x-x_0)^n=o[(x-x_0)^n]\quad（当x\to x_0）.$$

令$x\to x_0$得，$a_0-f(x_0)=0$，即

$$a_0=f(x_0).$$

于是

$$\left[a_1-\frac{f'(x_0)}{1!}\right](x-x_0)+\left[a_2-\frac{f''(x_0)}{2!}\right](x-x_0)^2+\cdots+\left[a_n-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right](x-x_0)^n=o[(x-x_0)^n]\quad（当x\to x_0）,$$

即

$$\left[a_1-\frac{f'(x_0)}{1!}\right]+\left[a_2-\frac{f''(x_0)}{2!}\right](x-x_0)+\cdots+\left[a_n-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right](x-x_0)^{n-1}=o[(x-x_0)^{n-1}]\quad（当x\to x_0）.$$

再令$x\to x_0$得，$a_1-\frac{f'(x_0)}{1!}=0$，即

$$a_1=\frac{f'(x_0)}{1!}.$$

按此方法继续进行，可得

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

例如 当$x\neq 1$时，

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

故

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\tfrac{x^{n+1}}{1-x}\\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)\quad (x\to 0).\end{aligned}$$

特别

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)\quad (x\to 0),\\ \tfrac{1}{1+x^2} &= 1-x^2+\cdots+(-1)^n x^{2n}\quad (x\to 0),\end{aligned}$$

从而由Taylor公式的唯一性得

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m)}\Bigg|_{x=0}=\begin{cases}0 & 当m=2k-1,\\ (-1)^k(2k)! & 当m=2k.\end{cases}$$

于是

$$\arctan^{(m)}0=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m-1)}\Bigg|_{x=0}=\begin{cases}0 & 当m=2k,\\ (-1)^k(2k)! & 当m=2k+1.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\arctan x &= x+\tfrac{(-1)(2)!}{3!}x^3+\cdots+\tfrac{(-1)^n(2n)!}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})\quad (x\to 0)\\ &= x-\tfrac{1}{3}x^3+\cdots+\tfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})\quad (x\to 0).\end{aligned}$$

例8 $\ln x$在$x_0=3$处的带Peano余项n阶Taylor公式。

解：因为

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}+R_n(u),$$

其中$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{R_n(u)}{u^n}=0$，故

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln[3+x-3]\\ &= \ln 3+\ln\left[1+\frac{x-3}{3}\right]\\ &= \ln 3+\frac{x-3}{3}-\frac{1}{2}\left[\frac{x-3}{3}\right]^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\frac{x-3}{3}\right]^n+R_n\left(\frac{x-3}{3}\right)\\ &= \ln 3+\frac{(x-3)}{3}-\frac{(x-3)^2}{2\times 3^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-3)^n}{n\cdot 3^n}+R_n\left(\frac{x-3}{3}\right),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{R_n\left(\frac{x-3}{3}\right)}{(x-3)^n} &=\!=\!= \lim_{x\to 3}\left[\frac{R_n\left(\frac{x-3}{3}\right)}{\left(\frac{x-3}{3}\right)^n}\cdot\frac{1}{3^n}\right]\\ &\Leftarrow\!=\!= \lim_{u\to 0}\left[\frac{R_n(u)}{u^n}\cdot\frac{1}{3^n}\right]\\ &=\!=\!= 0,\end{aligned}$$

所以

$$R_n\left(\frac{x-3}{3}\right)=o[(x-3)^n]\quad（当x\to 3）,$$

从而

$$\ln x=\ln 3+\frac{(x-3)}{3}-\frac{(x-3)^2}{2\times 3^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-3)^n}{n\cdot 3^n}+o[(x-3)^n]\quad（当x\to x_0）.$$

例9（求极限） 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x-\sin x}$.

解：当$x\to 0$时，

$$\begin{aligned}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x-\sin x} &= \frac{[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)][x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)]-x(1+x)}{x-x+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}\\ &= \frac{x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+o(x^3)-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)+o(x^3)-x(1+x)}{\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}\\ &= \frac{\frac{x^3}{2!}-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}\\ &= \frac{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+o(1)}{\frac{1}{3!}+o(1)},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+o(1)}{\frac{1}{3!}+o(1)}=\frac{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}}{\frac{1}{3!}}=2.$$

例10（局部分析）

设f是定义在x_0的某个邻域$N(x_0)$上的函数，且f在点x_0处有1 至n阶导数，其中$n \geq 2$.

(1). 若$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) = 0$，$f'''(x_0) > 0$，则f在x_0某个邻域$N(x_0, \delta)$单调增，且f在x_0某个右侧邻域$N_+^*(x_0, \delta)$是凸的、在x_0某个左侧邻域$N_-^*(x_0, \delta)$是凹的。

(2). 若$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) = 0$，$f'''(x_0) = 0$，$f^{(4)}(x_0) > 0$，则f在x_0某个右侧邻域$N_+^*(x_0, \delta)$单调增、在x_0某个左侧邻域$N_-^*(x_0, \delta)$单调减，且f在x_0某个邻域$N(x_0, \delta)$是凸的。

证：证(1).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2} f'''(x_0)(x-x_0)^2 + o[(x-x_0)^2] \quad （当x \to x_0时） \\ &= \left[\tfrac{1}{2} f'''(x_0) + o(1)\right](x-x_0)^2 \quad （当x \to x_0时）, \end{aligned}$$

所以f在x_0某个领域$N(x_0)$单调增。而

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'''(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad （当x \to x_0时） \\ &= [f'''(x_0) + o(1)](x-x_0) \quad （当x \to x_0时）, \end{aligned}$$

所以f在x_0某个右侧领域$N_+^*(x_0)$是凸的、在x_0某个左侧领域$N_-^*(x_0)$是凹的。

证(2).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{3!} f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^3 + o[(x-x_0)^3] \quad （当x \to x_0 时） \\ &= \left[\tfrac{1}{3!} f^{(4)}(x_0) + o(1)\right](x-x_0)^3 \quad （当x \to x_0 时）, \end{aligned}$$

所以f在x_0某个右侧领域$N_+^*(x_0)$单调增、f在x_0某个左侧领域$N_-^*(x_0)$单调减。而

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{1}{2} f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^2 + o[(x-x_0)^2] \quad （当x \to x_0 时） \\ &= \left[\tfrac{1}{2} f^{(4)}(x_0) + o(1)\right](x-x_0)^2 \quad （当x \to x_0 时）, \end{aligned}$$

所以f在x_0某个领域$N(x_0)$是凸的。

例11（近似计算）

近似计算e，使得误差$< 10^{-5}$.

解：由带Lagrange余项的Taylor公式，有

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} + \frac{e^{\xi}}{10!},$$

其中ξ介于0和1之间内。于是

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} =: e_1,$$

公式误差

$$|e - e_1| = \frac{e^{\xi}}{10!} < \frac{e}{10!} < \frac{3}{10!} = \frac{1}{1209600} < 10^{-6}.$$

将e_1中$\frac{1}{3!}, \cdots, \frac{1}{9!}$的每一项计算到小数点第七位，并将第七位四舍五入，则

$$e_1 \approx 1+1+0.5+0.166667+0.041667+0.008333+0.001389+0.000198+0.000025+0.000003 = 2.718282 =: e_2,$$

计算误差

$$|e_1 - e_2| < (10^{-7} \times 5) \times 7 = 3.5 \times 10^{-6}.$$

将e_2的小数点第六位四舍五入，则

$$e_2 \approx 2.71828 =: e_3,$$

最后舍入误差

$$|e_2 - e_3| < 10^{-6} \times 5.$$

故

$$e \approx e_3 = 2.71828,$$

总误差

$$|e - e_3| \leq |e - e_1| + |e_1 - e_2| + |e_2 - e_3| < 10^{-6} + 3.5 \times 10^{-6} + 10^{-6} \times 5 = 9.5 \times 10^{-6} < 10^{-5}.$$