习题 3.1

3. 解：由条件，对 $D=[0,1]\times[0,1]$ 进行以下划分：

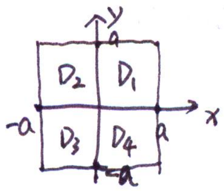
$$T:\ 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1,\quad x_i=\frac{i}{n},\ 0\le i\le n;$$
$$0=y_0<y_1<\cdots<y_n=1,\quad y_i=\frac{i}{n},\ 0\le i\le n.$$

并选取 $P_{ij}\in D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ 为正方形 D_{ij} 右上顶点.

即 $P_{ij}=(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$，$1\le i\le n$，$1\le j\le n$. $f(P_{ij})=\frac{ij}{n^2}$.

$$\text{故}\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dxdy=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ij}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^4}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left[1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right]=\frac{1}{4}.$$

4. 证明：不妨设 $a>0$. 将 $D=[-a,a]\times[-a,a]$ 分为在第一、二、三、四象限



的四个部分. 即 $D_1=[0,a]\times[0,a]$，$D_2=[-a,0]\times[0,a]$，$D_3=[-a,0]\times[-a,0]$，$D_4=[0,a]\times[-a,0]$. 对四个部分都进行 x，y 轴方向 n 段均等划分，变为 n^2 个大小相同的小正方形.

先计算 $\iint\limits_{D_1\cup D_3}\sin(x+y)\,dxdy$. 计算时 D_1 中的正方形均选取右上顶点，即

$$P_{1ij}=(\frac{i}{n}a,\frac{j}{n}a),\quad 1\le i,j\le n.$$

D_3 中的正方形均选取左下顶点，即

$$P_{3ij}=(-\frac{i}{n}a,-\frac{j}{n}a),\quad 1\le i,j\le n.$$

$$\text{则}\iint\limits_{D_1\cup D_3}\sin(x+y)\,dxdy=\cancel{\iint\limits_{D_1}\sin(x+y)\,dxdy+\iint\limits_{D_3}\sin(x+y)\,dxdy}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[f(P_{1ij})\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+f(P_{3ij})\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right].$$

因为 $f(P_{1ij})+f(P_{3ij})=\sin(\frac{i}{n}a+\frac{j}{n}a)+\sin(-\frac{i}{n}a-\frac{j}{n}a)=0$ （P_{1ij}、P_{3ij} 关于原点对称）

故 $\iint\limits_{D_1\cup D_3}\sin(x+y)\,dxdy=0$. 同理可证 $\iint\limits_{D_2\cup D_4}\sin(x+y)\,dxdy=0$.

$$\text{因此}\iint\limits_{[-a,a]\times[-a,a]}\sin(x+y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4}\sin(x+y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1\cup D_3}\sin(x+y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2\cup D_4}\sin(x+y)\,dxdy=0.$$

10. 证明：(1) $D=[-2,2]\times[-2,2]$为有界闭集，~~$f=f(x,y)=\sin$~~

$f(x,y)=\sin\dfrac{1}{(1-x^2)^2+(1-y^2)^2}\in[-1,1]$为$D$上的有界函数.

令$1-x^2=0$，$1-y^2=0$ 得$x=\pm1$，$y=\pm1$. 即f在D上的间断点

仅有$(-1,-1)$、$(-1,1)$、$(1,-1)$、$(1,1)$四个点，为零面积集.

又∂D为该边长为4的正方形的四条边，~~用宽度为t，长度为4~~

用宽度为t，长度为4的四个矩形$\underbrace{\text{盖住这四条边}}_{I_i,\ i=1,2,3,4}$，

对$\forall\varepsilon>0$，令$t<\frac{\varepsilon}{16}$，则$\sum\limits_{i=1}^{4}\sigma(I_i)=\sum\limits_{i=1}^{4}4t=16t<\varepsilon$，故$\partial D$为零面积集.

故$f\in R(D)$，即$f(x,y)$在D上可积.

(2) $D=[0,1]\times[0,1]$为有界闭集，

$f(x,y)=\arctan\dfrac{1}{y-x^2}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$为$D$上的有界函数.

∂D为零面积集~~的定义~~同(1)可证.

f在D上的间断点集为$y-x^2=0$的那些点，即函数$y=x^2$在D中的部分. 如图1.

现选取以下n个矩形覆盖间断点集：

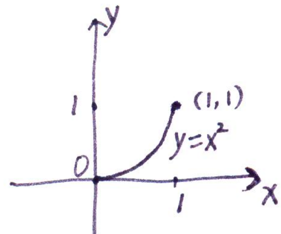


图1

I_i：第i个矩形以$(\frac{i-1}{n},\frac{(i-1)^2}{n^2})$和$(\frac{i}{n},\frac{i^2}{n^2})$为对角线的两个端点，且边与坐标轴平行. 如图2.

则$\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma(I_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n})\cdot(\frac{i^2}{n^2}-\frac{(i-1)^2}{n^2})=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{2i-1}{n^2}$

$=\frac{1}{n}$.

对$\forall\varepsilon>0$，令$n>\frac{1}{\varepsilon}$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma(I_i)=\frac{1}{n}<\varepsilon$.

故间断点集为零面积集.

综上$f\in R(D)$，即$f(x,y)$在D上可积.

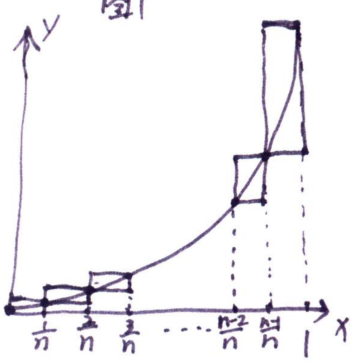


图2

习题3.2.

4. 证明：假设$\exists (x_0,y_0)\in D$，使得$f(x_0,y_0)\neq 0$.

由$f(x,y)$是D上的非负函数可知$f(x_0,y_0)=\varepsilon>0$.

因为$f(x,y)\in C(D)$，故$\exists (x_0,y_0)$的邻域$U\subset D$，使得

$\forall (x,y)\in U$，有$f(x,y)>\frac{\varepsilon}{2}$.

又由$\forall (x,y)\in D\setminus U$，有$f(x,y)\geq 0$.

故$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_U f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{U\setminus D} f(x,y)\,dxdy\geq \sigma(U)\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\sigma(U\setminus D)\cdot 0$

$=\sigma(U)\cdot\frac{\varepsilon}{2}>0$. 这与$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=0$矛盾！

因此$f(x,y)=0$，$\forall (x,y)\in D$.