清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　**微积分 A(1)**　　　　2019 年 12 月 22 日

系名________________　**班级**______________　**姓名**______________　**学号**____________

一．　填空题（每空 3 分，共 15 题）

1. 函数$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-4x}}$在 0 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒展开为 ________________。

2. 曲线$\begin{cases} x=\int_{\mathrm{t}}^{t(2+t)}\sqrt{1+2cos\theta}\,d\theta \\ y=t(1-t) \end{cases}$在$(0,0)$点处的切线方程为___________。

3. 函数$f(x)=\frac{\ln x}{x^{2019}}$的极大值为_____________，拐点为___________。

4. 函数$y=5\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4}}$在$x\to+\infty$的渐近线方程为___________。

5. 不定积分$\int\frac{cosx-2sinx}{cosx+2sinx}dx=$________________。

6. $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=$　________________。

7. 设$g(x)=\int_x^1\frac{t}{1+t^3}dt$，则$\int_0^1 g(x)dx=$___________。

8. 若曲线在极坐标下表达式为$r=\sin\theta$，则该曲线围成的平面图形面积为______________。

9. 求瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$______________。

10. 求不定积分 $\int\frac{1}{1+x^3}dx=$_________。

11. 广义积分$\int_e^{\infty}\frac{1}{x\,(ln\,x)^p}dx$收敛，则$p$的取值范围为________________。

12. 瑕积分$\int_0^1\frac{\sin x}{x^p(1-x)^q}dx$收敛，则$p,q$的取值范围分别为______________。

13. 常微分方程$y''=y$的通解为____________________。

14. 常微分方程$y'+\mathrm{y}\cos x=\cos x$的通解为______________。

15. 满足常微分方程 $y'(x)=\frac{x^2+y(x)^2}{xy(x)}(x\geq 1)$ 以及初值条件$y(1)=1$的解为__________________________。

二．　计算题（每题 10 分，共 4 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

1．对于瑕积分$I_p=\int_0^1\frac{x^p\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$与广义积分$J_q=\int_1^\infty\frac{x^q\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$

(I) 讨论I_p,J_q的收敛性；

(II) 求I_1的值。

2．设$I_n(x)=\int_x^\infty\frac{t^n}{n!}e^{-t}dt$（$n\in N$），

(I) 求$I_n(x)$表达式；

(II) 求$I_2(x)$在原点处带皮亚诺余项的 n 阶泰勒展开式、单调区间和凸性区间。

(III) 求$f(x)=\frac{I_2(x)e^x}{1+x}$（$x\to+\infty$）的渐近线。

3．设曲线$r=\theta,\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$,

(I) 求该曲线的长度；

(II) 求该曲线和 y 轴包围起来的区域面积；

(III) 求该曲线的曲率公式，表达为θ的函数；

(IV) 求该曲线绕 y 轴旋转得到的旋转体的体积。

4．求微分方程 $y''-5y'+6y=cos(\mathrm{x})$ 的通解。

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

1．已知可导函数$f(x)$满足$\int_{-1}^0 xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0$,

(I) 求证存在$\xi\in(0,1)$使得$\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$；

(II) 求证存在$\eta\in(-1,1)$使得$\eta f''(\eta)+4f'(\eta)=0$

2．证明：$2x(x-y)+\frac{\arctan x-\arctan y}{x-y}>\frac{1}{1+y^2},(x>y>0)$。