微A　第一周　章越阁　新雅93　2019013397

10

习题1.1

1. 证明：(1) 正定性：设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

则 $\|X-Y\|_n=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

由于 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$(x_i-y_i)^2\geq 0$，故 $\|X-Y\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\geq 0$.

而 $\|X-Y\|=0$ 当且仅当 $x_i=y_i$, $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，当且仅当 $X=Y$. 证毕.

(2) 对称性：同上有 $\|Y-X\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\|X-Y\|$. 证毕.

(3) 三角不等式：设 $Z=(z_1,z_2,\cdots z_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$(\|X-Z\|+\|Z-Y\|)^2=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2+2\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right]}$$

由Cauchy不等式：
$$\geq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-z_i)^2+2(x_i-z_i)(z_i-y_i)+(z_i-y_i)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=\|X-Y\|^2$$

由正定性可知：$\|X-Z\|+\|Z-Y\|\geq\|X-Y\|$. 证毕.

2. (1) Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 的子集，$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

内部：$\varnothing$　　外部：$\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$.

边界：$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$　　闭包：$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

(2) Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 的子集，$\Omega=\{(x,y,z)\mid 1\leq x^2+y^2+z^2<4\}$.

内部：$\{(x,y,z)\mid 1<x^2+y^2+z^2<4\}$　　外部：$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<1 或 x^2+y^2+z^2>4\}$

边界：$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1 或 4\}$　　闭包：$\{(x,y,z)\mid 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4\}$

3. (1) 已知 $S \subset R^n$，则 S 为开集 $\Leftrightarrow S = \mathring{S}$

证明：① 由开集的定义，知 $\forall X_0 \in S$，$X_0 \in R^n$，有 X_0 是 S 的一个内点。

而 $\mathring{S} = \{X \mid X 为 S 的内点\}$。故 $\forall X_0 \in S$，$X_0 \in \mathring{S}$。从而 $S \subseteq \mathring{S}$。

而另一方面，显然 $\mathring{S} \subseteq S$。从而 $S = \mathring{S}$。

故 S 为开集 $\Rightarrow S = \mathring{S}$。

② 若 $S = \mathring{S}$。由此 $\forall X \in S$，$X \in \mathring{S}$。

由 $\mathring{S}$ 的定义知，X 为 S 的内点。从而 $\forall X \in S$，X 为 S 的内点

故 S 为开集。

综上，S 为开集 $\Leftrightarrow S = \mathring{S}$。证毕。

(2) 若 $S \subset R^n$ 为开集，则 $S \cap \partial S = \varnothing$

证明：由于 S 为开集，故 S 内每一点都是内点，即 $\forall X \in S$，$\exists \delta > 0$ 使 $B(X_0, \delta) \subset S$。

而 $\forall X_0 \in \partial S$，$\forall \delta > 0$ 均有 $B(X_0, \delta) \cap S \neq \varnothing$ 且 $B(X_0, \delta) \cap (R^n \setminus S) \neq \varnothing$。

于是 $X_0 \notin S$。因此，$S \cap \partial S = \varnothing$。证毕。

(3) 任意多个开集之并为开集；有限个开集之交为开集。

证明：① 考虑任意多个开集 $S_1, S_2, \cdots, S_k, \cdots\cdots$

对对其中任意的某个开集 S_k，$\forall X \in S_k$，$\exists \delta > 0$ 使 $B(X, \delta) \subset S_k$。

记 $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k \cup \cdots$，则 $\forall X_0 \in S$，

必 $\exists l$ 使 $X_0 \in S_l$，从而 $\exists \delta > 0$ 使 $B(X_0, \delta) \subset S_l \subset S$。

于是 S 为开集。证毕。

② 考虑有限个开集 $S_1, S_2, \cdots, S_n$。

若 $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n = \varnothing$，此时 $\varnothing$ 也是开集，命题成立。

不妨考虑它们交集非空的情形。

同理①可知 $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$\forall X \in S_k$，$\exists \delta > 0$ 使 $B(X, \delta) \subset S_k$。

记 $I = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n$，则 $\forall X_0 \in I$，有 $X_0 \in S_k$，$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$。

于是 $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$\exists \delta_k > 0$ 使 $B(X_0, \delta_k) \subset S_k$。

取 $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$，对 $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$B(X_0, \delta_0) \subset S_k$

从而 $B(X_0, \delta_0) \subset (S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n) = I$。故 I 为开集。证毕。

4. (1) 已知 $S \subset \mathbb{R}^n$，则 S 为闭集 $\Leftrightarrow S = \bar{S} \Leftrightarrow \partial S \subset S$

证明：记 $T = \mathbb{R}^n \setminus S$．由于 S 为闭集，故 T 为开集．

考虑 $\forall X_0 \in \partial S$，有 $\forall \delta > 0$ 满足 $B(X_0, \delta) \cap S \neq \emptyset$ 且 $B(X_0, \delta) \cap T \neq \emptyset$．

从而可知 $\partial S = \partial T$．（因为 $\forall X_0' \in \partial T$ 满足相同的条件）

而由 3.(2) 结论知：当 T 为开集时，$T \cap \partial T = \emptyset$．即 $T \cap \partial S = \emptyset$．

从而 $\partial S \subset (\mathbb{R}^n \setminus T) = S$．

从而 S 为闭集 $\Rightarrow \partial S \subset S$．

而 $\partial S \subset S \Rightarrow \bar{S} = S \cup \partial S = S$．

又 $S = \bar{S}$，而 $\bar{S}$ 为闭集（闭包是闭集）$\Rightarrow S$ 为闭集．

综上，S 为闭集 $\Leftrightarrow S = \bar{S} \Leftrightarrow \partial S \subset S$

(4) 任意多个闭集之交为闭集；有限个闭集之并为闭集．

证明：① 考虑任意多个闭集 $S_1, S_2, \cdots, S_k, \cdots$；记它们的余集为 $T_1, T_2, \cdots, T_k, \cdots$

可知 $T_1, T_2, \cdots, T_k, \cdots$ 均为开集．

记 $S = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k \cap \cdots$，$T = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k \cup \cdots$

故 $S = \mathbb{R}^n \setminus T$．而由 3.(3) 的结论知 T 为开集．故 S 为闭集．证毕．

② 考虑有限个闭集 $S_1, S_2, \cdots, S_n$；记它们的余集为 $T_1, T_2, \cdots, T_n$．

可知 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 均为开集．

记 $S' = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$，$T' = T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_n$．

故 $S' = \mathbb{R}^n \setminus T'$．由 3.(3) 的结论知 T' 为开集．故 S' 为闭集．证毕．

习题 1.2

3. 已知 $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解：令 $a = x+y$，$b = \frac{y}{x}$. 　 解得 $x = \frac{a}{1+b}$，$y = \frac{ab}{1+b}$，$b \neq -1$.

从而 $f(a,b) = (\frac{a}{1+b})^2 - (\frac{ab}{1+b})^2 = \frac{1-b}{1+b}a^2$，$b \neq -1$.

从而 $f(x,y) = \frac{1-y}{1+y}x^2$，$y \neq -1$

5. 解：~~$F = \frac{GM_0m_0}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$~~ $\vec{F} = -\frac{GM_0m_0}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]^{\frac{3}{2}}}(x-a, y-b, z-c)$

其中 $F_x = -\frac{GM_0m_0}{r^3}(x-a)$，$F_y = -\frac{GM_0m_0}{r^3}(y-b)$，$F_z = -\frac{GM_0m_0}{r^3}(z-c)$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$

6. 解：由于定义域 D 满足：$1 \le x^2-y^2 \le 4$，$1 \le xy \le 2$.

故 $u = x^2-y^2 \in [1,4]$，$v = xy \in [1,2]$

故 F(D) 是由直线 ~~[illegible]~~ $u=1, u=4$，$v=1, v=2$ 围成的区域.

考虑直线 $x=a$，则 $u = a^2-y^2$，$v = ay$，　故 $y = \frac{v}{a}$

从而 $x=a$ 映成曲线 $u = a^2 - \frac{v^2}{a^2}$

习题1.3

1. (1) $\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

令 $t=x^2+y^2$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t}=1$

(2) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

由于当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y|\le |y|\to 0$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

(3) $(x^2+y^2)e^{-x-y}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)e^{-x-y}=\left[\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\right]\cdot\left[\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}e^{-x-y}\right]=0\cdot 1=0$

(4) $\dfrac{x+y}{|x|+|y|}$.

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\dfrac{x+y}{|x|+|y|}=\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\dfrac{x+y}{x+y}=1$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0^-,0^-)}\dfrac{x+y}{|x|+|y|}=\lim\limits_{(x,y)\to(0^-,0^-)}\dfrac{x+y}{-x-y}=-1$. 故极限不存在.

(5) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

当 (x,y) 沿 x 轴 $(y=0)$ 趋向原点时，$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2}{x^2}=1\to 1$, $(x,0)\to(0,0)$

而当 (x,y) 沿 y 轴 $(x=0)$ 趋向原点时，$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{-y^2}{y^2}=-1\to -1$, $(0,y)\to(0,0)$.

故极限不存在.

(6) $\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$.

当 (x,y) 沿曲线 $y=x^3$ 趋向原点时，$\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}=\dfrac{x^6}{2x^6}=\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}$, $(x,y)\to(0,0)$.

当 (x,y) 沿曲线 $y=2x^3$ 趋向原点时，$\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}=\dfrac{2x^6}{5x^6}=\dfrac{2}{5}\to\dfrac{2}{5}$, $(x,y)\to(0,0)$.

故极限不存在

(7) $\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$

令 $x+y=a$, $x-y=b$, 则 $(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow (a,b)\to(0,0)$

$\dfrac{x^3-y^3}{x+y}=\dfrac{b\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{4}\right)}{a}=\dfrac{3}{4}ab+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{b^3}{a}$, 其中 $\dfrac{3}{4}ab\to 0$.

当 (a,b) 沿 $a=kb^3$ 趋向于原点时, $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{b^3}{a}=\dfrac{b^3}{4kb^3}=\dfrac{1}{4k}$. 故 $\dfrac{x^3-y^3}{x+y}\to\dfrac{1}{4k}$, $(x,y)\to(0,0)$

由 k 的任意性知极限不存在.

(8) $\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$

由于 $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}y^2\le y^2\to 0$, $(x,y)\to(0,0)$. 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}=\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}\right)\cdot\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0$.

2. (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(3+0)}{\sqrt{9}}=\dfrac{\ln 3}{3}$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$.

由于 $\left|\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}-0\right|=\dfrac{|x+y|}{x^2+xy+y^2}\le\dfrac{|x|+|y|}{\frac{1}{4}(|x|+|y|)^2}=\dfrac{4}{|x|+|y|}\to 0$, $(x,y)\to(\infty,\infty)$

(其中不等号成立是因为: $|x+y|\le|x|+|y|$, 且 $x^2+xy+y^2\ge\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\ge\frac{1}{4}(|x|+|y|)^2$.)

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}=0$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}$.

由于 $(x^2+y^2)e^{y-x}=\dfrac{x^2}{e^x}\cdot e^y+y^2e^y\cdot\dfrac{1}{e^x}$.

而当 $x\to+\infty$, $y\to-\infty$ 时, $\dfrac{x^2}{e^x}\to 0$, $y^2e^y\to 0$, $e^y\to 0$, $\dfrac{1}{e^x}\to 0$.

故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}=0$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

令 $\sqrt{x^2+y^2}=t$, 则 $(x,y)\to\infty$ 时 $t\to+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2\ln t}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{t}}{1}=0$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

由均值不等式知，$0 \le \frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$，$0 \le \left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$

由夹逼定理知，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$. 从而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{xy}$.

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{xy} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y} = 0+0 = 0.$$

3. (1) $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to\infty} \sin\frac{\pi x}{2x+y} = \lim\limits_{x\to\infty} \sin 0 = 0$

$\lim\limits_{y\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{\pi x}{2x+y} = \lim\limits_{y\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{\pi}{2+\frac{y}{x}} = \lim\limits_{y\to\infty} \sin\frac{\pi}{2} = 1$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to\infty} \sin\frac{\pi x}{2x+y} \ne \lim\limits_{y\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{\pi x}{2x+y}$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \sin\frac{\pi x}{2x+y}$ 不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{x^y}{1+x^y} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{y\to 0^+} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1+x^y} = \lim\limits_{y\to 0^+} 1 = 1$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{x^y}{1+x^y} \ne \lim\limits_{y\to 0^+} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1+x^y}$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to 0^+}} \frac{x^y}{1+x^y}$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 不存在：因为 $y\to 0$ 时 $\left|y\sin\frac{1}{y}\sin\frac{1}{x}\right|\le |y|\to 0$.

而 $x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 极限不存在.

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 不存在：因为 $x\to 0$ 时 $\left|x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\le |x|\to 0$

而 $y\sin\frac{1}{y}\sin\frac{1}{x}$ 极限不存在.

而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}-0\right|\le\left|x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|+\left|y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|$

$\le |x|+|y|\to 0$.

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$.

4. (2) 证明：若二元函数f在某一点的两个累次极限和二重极限都存在，则这三个值相等.

证明：记该点为$Z_0(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使得$\forall Z(x,y)\in B^{\circ}(Z_0,\delta)$，$|f(x,y)-A|<\varepsilon$. $\cdots$ ①

由于$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$存在，故$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$存在，即

$\exists\varphi(x)$使得$\forall x\in U^{\circ}(x_0,\delta)$，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)\equiv\varphi(x)$.

在①式中令$y\to y_0$得到$|\varphi(x)-A|<\varepsilon$.

于是$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使得$\forall x\in U^{\circ}(x_0,\delta)$有$|\varphi(x)-A|<\varepsilon$.

即$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$. 即$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$.

同理，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=A$.

因此$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$. 证毕

6. (1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

由于 $\left|\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}-0\right| \le \dfrac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \le \dfrac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|x| + \dfrac{y^2}{x^2+y^2}|y| \le |x|+|y| \to 0$, 当 $(x,y)\to(0,0)$.

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续

(2) $f(x,y)=\begin{cases}1, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

由于 $(x,y)\to(0,0)$ 时仍有 $x^2+y^2\neq 0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \neq f(0,0)$

故 f 在 $(0,0)$ 处不连续.

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

由于 $0\le\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le \dfrac{x^2y^2}{(2|xy|)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{2\sqrt{2}} \to 0$, $(x,y)\to(0,0)$.

由夹逼定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. 故 f 在 $(0,0)$ 处连续

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

令 $x=ky^2$, 当 (x,y) 沿 $x=ky^2$ 逼近原点时, $\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = \dfrac{ky^4}{k^2y^4+y^4} = \dfrac{k}{k^2+1} \to \dfrac{k}{k^2+1}$, $(x,y)\to(0,0)$

由 k 的任意性知 $f(x,y)$ 在原点处极限不存在. 故 f 在 $(0,0)$ 处不连续.

补充习题:

证明: 1. 充分性: 已知 D 包含其每个收敛序列的极限. 设 ∂D 为 D 的边界.

假设 $\exists X^*\in\partial D$ 满足 $X^*\notin D$, 由边界点的定义, $\forall\delta>0$, $\exists x\in B(X^*,\delta)$ 使 $x\in D$.

从而 $\forall\delta>0$. $\exists x\in D$ 使 $\|x-X^*\|<\delta$, 由此可知必存在点列 $\{x_k\}$,

$x_k\in D$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, 且 $x_k\to X^*$, $k\to+\infty$. ~~和~~ 即 $\{x_k\}$ 收敛且极限为 X^*. 最好

而 $X^*\notin D$, 矛盾! 从而原假设不成立, 故 $\forall x\in\partial D$, $x\in D$

$\Rightarrow \partial D\subset D$. $\Rightarrow$ D 为闭集. 给出取

法

2. 必要性: 已知 D 为闭集, 则 $(\mathbb{R}^n\setminus D)$ 为开集.

反设 ~~若~~ 存在点列 $\{x_k\}\subset D$ 收敛, $x_k\to x^*$ 且 $x^*\notin D$.

则 $x^*\in(\mathbb{R}^n\setminus D)$, 记 $S=\mathbb{R}^n\setminus D$. 由于 S 为开集, 故 X^* 为 S 的内点

从而 $\exists\delta>0$, 使 $B(X^*,\delta)\subset S$. 于是 $B(x^*,\delta)\cap D=\emptyset$.

即 $\forall x\in D$, $\|x-x^*\|\ge\delta$. ⋯ ①

而事实上, 由于 $x_k\to x^*$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$, $\forall k\ge M$ 有 $\|x_k-x^*\|<\varepsilon$. ⋯ ②

②式中取 $\varepsilon=\delta$, 即与①式矛盾! 故原假设不成立.

从而任意点列 $\{x_k\}\subset D$ 收敛, $x_k\to x^*$, 必有 $x^*\in D$.

综上, D 为闭集 当且仅当 D 包含其每个收敛序列的极限. 证毕