第2章 函数的极限与连续

学习材料（4）

1 函数

2 函数极限

2.1 函数极限概念及函数极限的性质

例 设$f:[a,b]\to R$是凸的，$x_0\in(a,b)$，则

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$

证明：当$x\in(x_0,x_0+\delta_0)$时，由凸函数的等价叙述2和3知

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0},$$

即

$$f(x_0)+\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x-x_0)\le f(x)\le f(x_0)+\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}(x-x_0),$$

从而由函数极限的夹挤性得

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$

同理

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0).$$

于是由$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$和$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$得

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

例 设f是定义在x_0某个空心邻域上的函数，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件是两个单侧极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等。

证明：必要性是显然的。

充分性。设

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

$\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$知，$\exists \delta_1 > 0$，当$x_0 - \delta_1 < x < x_0$时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon;$$

由 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$知，$\exists \delta_2 > 0$，当$x_0 < x < x_0 + \delta_2$时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

例 （1）$\lim\limits_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$；（2）当$x_0 > 0$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$.

证:

定理1 设f是初等函数，$x_0 \in D(f)$，则

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to x_0^+) \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = f(x_0).$$

其中的极限过程视x_0为$D(f)$的内点（右端点、左端点）而定。

证明思路: 先对基本初等函数证明结论。然后对函数运算的次数（四则运算、复合运算）做归纳法，用性质5、性质6证明结论。

2.2 函数极限举例

例1 证明重要极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

证明：（画图）$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$，利用图形，有如下面积关系：

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x,$$

即

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

也即

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

而$\frac{x}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}$都是偶函数，故对$\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$，

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

即

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

因$\cos x$是初等函数，故

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

于是由函数极限的夹挤性得，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

例2

(1). 证明

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e.$$

(2). 证明

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e, \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e, \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e, \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

证明：(1).

$$\left[\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e\right]$$

$\forall \varepsilon > 0$，由$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$知，$\exists N_\varepsilon \in Z_+$，当$n > N_\varepsilon$时，有

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} - e\right| < \varepsilon.$$

取$M = N_\varepsilon + 1$，当$x > M$时，有$[x] \geq N_\varepsilon + 1 > N_\varepsilon$，于是

$$\left|\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} - e\right| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e.$$

(2). $\forall x \geq 2$，

$$\begin{aligned}
\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^{x} &\leq \left(1 + \tfrac{1}{[x]}\right)^{x} \leq \left(1 + \tfrac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \tfrac{1}{[x]}\right), \\
\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^{x} &\geq \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^{[x]} \geq \left(1 + \tfrac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \frac{\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)}.
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)\\ &= e\cdot 1=e,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)} &= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{[x]+1}\right)}\\ &= \tfrac{e}{1}=e,\end{aligned}$$

故由函数极限的夹挤性得，

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &\xlongequal[\text{令 } u=-x]{} \lim_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u} \quad \text{（\underline{函数极限定义}）}\\ &\xlongequal{} \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u-1}{u}\right)^{-u}\\ &\xlongequal{} \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)\\ &\Longleftarrow\!= e\cdot 1=e.\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$及$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &\xlongequal[\text{令 } u=\frac{1}{x}]{} \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} \quad \text{（\underline{函数极限定义}）}\\ &\xlongequal{} e.\end{aligned}$$

例3 设$a>0$，$a\neq 1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解：令 $u=a^x-1$，则

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{u}{\log_a(1+u)}=\frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{\ln a}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \Longleftarrow\!=\!= \lim_{u\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

（复合函数极限性质）

1 $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0\surd$;

2 当$x\neq 0$ 时，$a^x-1\neq 0$；$\surd$

3 极限 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln a}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$ 存在.

$$\Longleftarrow\!=\!= \frac{\ln a}{\lim\limits_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

（函数极限四则运算性质）

$$==== \frac{\ln a}{\ln e}$$

$$==== \ln a.$$

例4 设$\mu\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}$.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} ==== \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x}$$

$$\Longleftarrow\!=\!= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}$$

（函数极限的四则运算）

$$\Longleftarrow\!=\!= \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\cdot\lim_{x\to 0}\mu\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

（复合函数极限性质）

在第一极限式中，令$u=\mu\ln(1+x)$

1 $\lim\limits_{x\to 0}=\mu\ln(1+x)=\mu\ln(1+0)=0\surd$;

2 当$x\neq 0$ 时，$\mu\ln(1+x)\neq 0$；$\surd$

3 极限 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}$ 存在.

$$==== \ln e\cdot\mu\ln e=\mu.$$

2.3 无穷小量及其阶的比较

定义1

1. 若$\lim\limits_{x\to\Diamond}f(x)=0$，则称当$x\to\Diamond$时$f$是<u>无穷小量</u>，记作

$$f(x)=o(1)\ \ (x\to\Diamond).$$

2. 若$\lim\limits_{x\to\Diamond}\dfrac{1}{f(x)}=0$，则称当$x\to\Diamond$时$f$是<u>无穷大量</u>；

特别当$x\to\Diamond$时f是无穷大量，且$f>0$时，则称当$x\to\Diamond$时f是<u>正无穷大量</u>;

当$x\to\Diamond$时f是无穷大量，且$f<0$时，则称当$x\to\Diamond$ 时f是<u>负无穷大量</u>。

定义2

设$f(x)=o(1),\ g(x)=o(1)\quad(x\to\Diamond)$，且$g(x)\neq 0$.

1. 若$\lim\limits_{x\to\Diamond}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，则称当$x\to\Diamond$时$f$与$g(x)$是<u>同阶无穷小量</u>；

特别若$\lim\limits_{x\to\Diamond}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称当$x\to\Diamond$时$f$与$g(x)$是<u>等价无穷小量</u>，记作

$$f(x)\sim g(x)\quad(x\to\Diamond).$$

2. 若$\lim\limits_{x\to\Diamond}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当$x\to\Diamond$时$f$是$g(x)$是<u>高阶无穷小量</u>，记作

$$f(x)=o(g(x))\quad(x\to\Diamond).$$

3. 若$\exists M>0$，使得在$\Diamond$附近有$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq M$，则记作

$$f(x)=O(g(x))\quad(x\to\Diamond).$$

注1

对于无穷大量，可类似定义同阶无穷大量、等价无穷大量、低阶无穷大量。

例1

设$\mu\neq 0$，求证

$$(1+x)^\mu-1\sim\mu x\quad(x\to 0).$$

证：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}\quad ====\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x}$$

$$\Longleftarrow===\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}$$ （函数极限的四则运算）

$$\Longleftarrow===\quad \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\cdot\lim_{x\to 0}\mu\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

（复合函数极限性质）

在第一极限式中，令$u=\mu\ln(1+x)$

1 $\lim\limits_{x\to 0}=\mu\ln(1+x)=\mu\ln(1+0)=0\surd$;

2 当$x\neq 0$ 时，$\mu\ln(1+x)\neq 0$； $\surd$

3 极限 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}$ 存在.

$$====\quad \ln e\cdot\mu\ln e=\mu,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}=1,$$

即

$$(1+x)^\mu-1\sim \mu x\quad (x\to 0).$$

例2 计算函数极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{\tan x\sin x(1-\cos x)}.$$

解:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{\tan x\sin x(1-\cos x)} &= \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\tan x\sin x(1-\cos x)}-\frac{\sqrt[3]{1-2x^4}-1}{\tan x\sin x(1-\cos x)}\\ &= \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\frac{1}{2}x^4}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^4\cos x}{\sin^2 x(1-\cos x)}-\frac{\sqrt[3]{1-2x^4}-1}{\frac{1}{3}(-2x^4)}\cdot\frac{\frac{1}{3}(-2x^4)\cos x}{\sin^2 x(1-\cos x)}\\ &= \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\frac{1}{2}x^4}\cdot\frac{x^2\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x}+\frac{\sqrt[3]{1-2x^4}-1}{\frac{1}{3}(-2x^4)}\cdot\frac{x^2\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\frac{2}{3}x^2}{1-\cos x}\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{\tan x\sin x(1-\cos x)}=1\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot\frac{4}{3}=\frac{7}{3}.$$

2.4 函数极限存在准则

定理1(函数极限存在Heine准则)

设f是定义在$U(x_0,\delta_0)=:(x_0-\delta_0,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_0)$上的函数，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是

若数列$\{x_n\}$满足$\{x_n\}\subset U(x_0,\delta_0)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在.

此时，

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x).$$

证：必要性。记$A=:\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. $\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$知，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

若$\{x_n\}\subset U(x_0,\delta_0)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则对上述$\delta>0$，$\exists N\in Z_+$，当$n>N$时，有

$$0<|x_n-x_0|<\delta,$$

从而有

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon.$$

所以极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A(=\lim\limits_{x\to x_0}f(x))$。

充分性。取$\{u_n\}\subset U(x_0,\delta_0)$且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x_0$，记

$$A=:\lim_{n\to\infty}f(u_n),$$

下证
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$
反证法。若不然，则$\exists\varepsilon_0>0$，对$\forall\delta>0$，$\exists x_\delta\in N^*(x_0,\delta)$，使得
$$|f(x_\delta)-A|\geq\varepsilon_0.$$
特别对$\frac{\delta_0}{k}>0\ (k=1,2,\cdots)$，$\exists v_k\in U(x_0,\frac{\delta_0}{k})$，使得
$$|f(v_k)-A|\geq\varepsilon_0.$$
令$\{x_n\}$为数列
$$u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ u_3,\ v_3,\cdots,u_k,\ v_k,\cdots,$$
则$\underline{\{x_n\}\subset U(x_0,\delta_0)}$. 而$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x_0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=x_0$，故
$$\underline{\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.}$$
<u>因此由条件知，极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在，于是</u>
$$\lim_{n\to\infty}f(x_{2n})=\lim_{n\to\infty}f(x_{2n-1}),$$
即
$$\lim_{n\to\infty}f(v_n)=\lim_{n\to\infty}f(u_n)(=A),$$
但这与
$$|f(v_k)-A|\geq\varepsilon_0,\quad k=1,2,\cdots$$
矛盾。该矛盾说明原假设不对，故有
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

注1

对于其它的极限过程，Heine准则也有类似的陈述。

注2(函数极限不存在Heine准则)

设f是定义在$U(x_0,\delta_0)$上的函数，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在的充分必要条件是
$$\text{若存在数列}\{x_n\}\text{满足}\{x_n\}\subset U(x_0,\delta_0)\text{且}\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\text{，但极限}\lim_{n\to\infty}f(x_n)\text{ 不存在.}$$

例1

证明极限$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在。

证：取$x_n=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\ (n=1,2,\cdots)$，则$x_n\neq0\ (n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{x\to0}x_n=0$. 而
$$\sin\frac{1}{x_n}=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n,$$
故极限
$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n$$

不存在，所以由Heine准则知，极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在。

定理2（单调函数极限存在准则）

若$f:(a,b)\to R$是单调函数，$x_0\in(a,b)$，则极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在。

证明类似数列情形。

例2

设$f:(a,b)\to R$是凸的。

1. 若$x_0\in(a,b)$，则单侧极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$和$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$都存在，且
$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
2. 若$x_0,x_*\in(a,b)$, $x_0<x_*$，则
$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\lim_{x\to x_*^-}\frac{f(x)-f(x_*)}{x-x_*}.$$

注3

在第3章，将称单侧极限值$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$和$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$分别为$f$在$x_0$处的<u>左导数</u>和<u>右导数</u>。

定理3（函数极限存在的Cauchy准则）

设f是定义在$U(x_0,\delta_0)$上的函数，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{当}x_1,\ x_2\in U(x_0,\delta)\text{时，有}|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

证：<u>必要性</u>。记$A=:\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. $\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$知，$\exists\delta>0$，当$x\in N^*(x_0,\delta)$时，有
$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
于是当$x_1,\ x_2\in U(x_0,\delta)$时，有
$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &= |f(x_1)-A+A-f(x_2)|\\ &\le |f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|\\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

<u>充分性</u>。

若数列$\{x_n\}$满足$\{x_n\}\subset U(x_0,\delta_0)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，下证极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在.

$\forall\varepsilon>0$，由已知，$\exists\delta>0$，当$x_1,\ x_2\in U(x_0,\delta)$时，有
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon;$$

再由$\{x_n\} \subset U(x_0,\delta_0)$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 知，$\exists N \in Z_+$，当$n,m > N$时，有x_n，$x_m \in U(x_0,\delta)$，从而

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

故数列$\{f(x_n)\}$是Cauchy列。由Cauchy收敛准则知，数列$\{f(x_n)\}$收敛。由Heine准则知，极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在。

3 连续函数的概念及连续函数的性质

定义1 设f是定义在x_0某个邻域上的函数。

1. 如果

$$\underline{\underline{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),}}$$

即

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 当0 < |x - x_0| < \delta时，有|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

也即

$$\underline{\underline{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 当|x - x_0| < \delta时，有|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,}}$$

则称$\underline{f在x_0处连续}$；

2. 如果

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

即

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 当x_0 - \delta < x < x_0时，有|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

也即

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 当x_0 - \delta < x \le x_0时，有|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称$\underline{f在x_0处左连续}$；

3. 如果

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

即

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 当x_0 < x < x_0 + \delta时，有|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

也即

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 当x_0 \le x < x_0 + \delta时，有|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称$\underline{f在x_0处右连续}$。

例1 设f是初等函数，$x_0 \in D(f)$，则f在x_0处连续。

例2 设$f:(a,b) \to R$是下凸函数，$x_0 \in (a,b)$，则f在x_0处连续。

例3 设$f(x)$和$g(x)$在x_0处连续，$f(x_0) > 0$，则

$$\ln f(x),\ e^{g(x)}, f(x)^{g(x)}$$

在x_0处连续。

例4 设f是定义在x_0某个邻域上的函数，则f在x_0处连续$\Longleftrightarrow f$在x_0处左连续、右连续，即极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\Longleftrightarrow$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0), \quad \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$

定义2 设f是定义在x_0某个邻域上的函数。如果f在x_0处不连续，则称x_0为f的间断点。
1. 若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，且$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，但$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，则称$x_0$为$f$的可去间断点。
2. 若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，但$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称$x_0$为$f$的第一类间断点。
3. 若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在，则称x_0为f的第二类间断点。

注 若x_0为f的可去间断点，可令

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 当x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & 当x = x_0. \end{cases}$$

则F在x_0处连续。

例5
(1). 设

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

则极限$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$不存在，故0为$f$的第二类间断点。（画图）
(2). 设

$$f(x) = [x] \quad (x \geq 0).$$

则对$n \in Z_+$，有$\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = n, \quad \lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n-1$，故$n$为$f$的第一类间断点。（画图）
(3). 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 当x \neq 0, \\ 3, & 当x = 0. \end{cases}$$

则$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(0)$，故0为$f$的可去间断点。（画图）

命题1（局部有界性） 若f在x_0处连续，则f在x_0附近有界，即$\exists \delta_0 > 0$，$\exists M_0 > 0$，当$|x - x_0| < \delta$时，有

$$|f(x)| \leq M_0.$$

命题2（局部保序性）

设f,g在x_0处连续。若$f(x_0) > g(x_0)$，则$\exists\delta > 0$，当$|x - x_0| < \delta$时，有

$$f(x) > g(x).$$

命题3（四则运算）

设f和g在x_0处连续，则

(1). $f+g$, $f-g, f\cdot g$在x_0处也连续。

(2) 当$g(x_0)\neq 0$时，$\frac{f}{g}$在x_0处连续。

命题4

设$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$f$在$u_0$处连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x) = f(u_0).$$

证：（画图）$\forall\varepsilon > 0$，由f在u_0处连续，$\exists\delta > 0$，当$|u - u_0| < \delta$时，

$$|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

对于上述$\delta > 0$，再由$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$知，$\exists\delta_1 > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta_1$时，有

$$|g(x) - u_0| < \delta,$$

于是

$$|f\circ g(x) - f(u_0)| = |f(g(x)) - f(u_0)| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x) = f(u_0).$$

注1

上结果还可写成

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x) \Longleftarrow\!=\!= f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) \quad \text{（若极限 }\lim_{x\to x_0} g(x)\text{ 存在，且}f\text{在}\lim_{x\to x_0} g(x)\text{ 处连续。）}$$

命题5（复合函数连续性）

设g在x_0处连续，f在$g(x_0)$处连续，则$f\circ g$在x_0处连续。

证：由命题4知，

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x) = f(g(x_0)) = f\circ g(x_0),$$

所以$f\circ g$在x_0处连续。