微积分 A2 第六次习题课讨论题 杨利军 April 13-18, 2020

1. 对下列二重积分先化简然后再作计算.

(i). $\iint_{x^2+y^2\leq 1}|xy|dxdy$.

(ii). $\iint_D [x+y]dxdy$, 其中积分区域 $D=[0,2]\times[0,2]$, 符号 $[\cdot]$ 表示取整函数, 即 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数. 例如 $[1.5]=1$, $[-0.5]=-1$.

(iii). $I=\iint_D |x^2+y^2-4|dxdy$, 其中 D 代表闭圆盘 $x^2+y^2\leq 16$.

2. 选择适当的累次积分计算二重积分.

(i) $I=\iint_D x\cos(xy)dxdy$, 其中 $D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$.

(ii) $I=\iint_D xye^{x^2y}dxdy$, 其中 $D=[0,1]\times[0,2]$.

3. 证明 $\iint_D (xy)^{(xy)}dxdy=\int_0^1 t^t dt$, 积分区域 D 为正方形 $0\leq x,y\leq 1$. (课本第171页第3章总复习题题9).

4. 设二元函数 $f(x,y)$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\leq 1$ 上连续, 在开单位圆盘 $x^2+y^2<1$ 上二次连续可微. 若函数 $f(x,y)$ 在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上取值为零. 证明

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)[f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)]dxdy\leq 0.$$

(这是课本第171页第三章总复习题题10)

5. 假设 $f(x,y)$ 在全平面上连续, 若极限

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)dxdy$$

存在, 则称该极限为函数 $f(x,y)$ 在全平面上广义积分, 记作 $\iint_{x^2+y^2<\infty} f(x,y)dxdy$. 即

$$\iint_{x^2+y^2<\infty} f(x,y)dxdy := \lim_{R\to+\infty} \iint_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)dxdy.$$

(此时也称函数 $f(x,y)$ 在全平面上广义可积.) 计算广义积分.

$$\iint_{x^2+y^2<\infty} e^{(2xy-2x^2-y^2)}dxdy.$$

(注: 这是课本第171页总复习题题7(3))

6. 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面的一个闭矩形 Ω 上Riemann可积, 且 $f(x,y)>0, \forall(x,y)\in\Omega$. 证明 $\iint_\Omega f(x,y)dxdy>0$. (注: 这是课本第170页第三章总复习题题 1. 提示：利用Lebesgue 可积准则).

7. 利用二重积分理论, 证明以下积分不等式. 设 $f(x)$, $g(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续, 则

$$(i) \qquad \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

$$(ii) \qquad \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx;$$

$$(iii) \qquad \iint_{[a,b]^2} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy \geq (b-a)^2, \text{ 其中假设 } f(x)>0, \forall x\in[a,b].$$

注： 证明上述不等式的方法有许多, 其中二重积分理论可以用来证明这些重要的不等式.