第3章 函数的导数

学习材料(6)-1

1 导数的概念

2 导数的运算法则

定理3（反函数求导法则） 设I是R中的一个区间，$f \in C(I)$，且f是单调增函数或单调减函数，$x_0 \in I$. 若f在x_0处可导，且$f'(x_0) \neq 0$，则反函数$f^{-1}: R(f) \to I$在$y_0 =: f(x_0)$可导，且

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

证：

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} &=\!=\!= \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}\\
&\Longleftarrow\!=\!= \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \qquad \begin{array}{l} \text{（令}x=f^{-1}(y)\text{）}\\ 1\ \lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)(=x_0)\surd;\\ 2\ \text{当}y\neq y_0\text{ 时，}f^{-1}(y)\neq f^{-1}(y_0)(=x_0)\surd;\\ 3\ \text{极限 }\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\text{ 存在.}\end{array}\\
&=\!=\!= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\\
&=\!=\!= \frac{1}{f'(x_0)}.
\end{aligned}$$

注1 反函数求导公式可写成

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

若反函数的自变量用x表示，则反函数求导公式还可写成

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

命题1

$$[\arcsin x]' = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$[\arccos x]' = -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$[\arctan x]' = \tfrac{1}{1+x^2}.$$

证：

$$\begin{aligned}[\arcsin x]' &=== \frac{1}{\sin'[\arcsin x]} \\ &=== \frac{1}{\cos[\arcsin x]} \\ &=== \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{（画图）}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\arccos x]' &=== \frac{1}{\cos'[\arccos x]} \\ &=== \frac{1}{-\sin[\arccos x]} \\ &=== -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{（画图）}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\arctan x]' &=== \frac{1}{\tan'[\arctan x]} \\ &=== \cos^2[\arctan x] \\ &=== \frac{1}{1+x^2} \quad \text{（画图）}.\end{aligned}$$

注2 根据第一节命题1、第二节命题1知，基本初等函数的导数是初等函数；再根据第二节定理1、定理2，对函数运算的次数（四则运算、复合运算）做归纳法可知，<u>初等函数的导数也是初等函数</u>。

3 高阶导数

设I是开区间，函数$f: I \to R$可导，则得到函数$f': I \to R$，称f'为f的一阶导函数；若函数$f': I \to R$仍可导，则得到函数$(f')': I \to R$，称$(f')'$为f的二阶导函数，简记f''或$\frac{d^2 f}{dx^2}$. 类似可定义

$$f'''(\frac{d^3 f}{dx^3}), \quad f^{(4)}(\frac{d^4 f}{dx^4}), \quad \cdots, \quad f^{(n)}(\frac{d^n f}{dx^n}).$$

例1 求$\sin^{(n)} x$和$\cos^{(n)} x$.

解：

$$\sin' x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{（和角公式）},$$

$$\sin'' x = \sin'\left(\underline{x + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(\underline{x + \frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$\cdots,$$

$$\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

同理

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

例2 (Leibniz高阶求导公式)

设f和g具有n阶导数，则

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

证：用归纳法。课后练习

例3

求$(x^2 \cdot \sin x)^{(20)}$.

解：

$$\begin{aligned}(x^2 \cdot \sin x)^{(20)} &= x^2 \sin^{(20)} x + C_{20}^1 2x \sin^{(19)} x + C_{20}^2 2 \sin^{(18)} x \\ &= x^2 \sin\left(x + \tfrac{20\pi}{2}\right) + 40x \sin\left(x + \tfrac{19\pi}{2}\right) + 380 \sin\left(x + \tfrac{18\pi}{2}\right) \\ &= x^2 \sin x - 40x \cos x - 380 \sin x.\end{aligned}$$

4 特殊的求导方法

4.1 取对数求导法

例1

求$(\ln|f(x)|)'_{x=x_0}$，其中$f'(x_0)$存在，且$f(x_0) \neq 0$.

解：因$f'(x_0)$存在，故f在x_0处连续。又因$f(x_0) \neq 0$，故由保号性知

$$\ln|f(x)| = \begin{cases} \ln f(x), & \text{当}f(x_0) > 0,\quad |x - x_0| << 1\text{时}, \\ \ln(-f(x)), & \text{当}f(x_0) > 0,\quad |x - x_0| << 1\text{时}, \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}(\ln|f(x)|)'_{x=x_0} &= \begin{cases} \frac{1}{f(x_0)} f'(x_0), & \text{当}f(x_0) > 0\text{时}, \\ \frac{1}{-f(x)}(-f'(x_0)), & \text{当}f(x_0) < 0\text{时}, \end{cases} \\ &= \tfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}.\end{aligned}$$

例2

乘除运算、乘方（开方）运算构成的函数，可先取绝对值，再取自然对数，然后求导。它的基本原理如下：设$y = f(x)$，则

$$(\ln|y|)' = \frac{y'}{y},$$

从而$y' = y(\ln|y|)'$. 如$y = (3x-1)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$，求$y'$.

解：对$y=(3x-1)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$取绝对值，再取自然对数得，

$$\ln|y|=\frac{1}{3}\ln|3x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|1-x|,$$

求导得，

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\frac{3}{3x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2}\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{3x-1}+\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(1-x)},$$

所以

$$y'=(3x-1)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}\left[\frac{1}{3x-1}+\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(1-x)}\right].$$

$$\text{用解析表达式描述函数的主要方式：}\begin{cases}\text{显示表达：} & y=f(x),\\ \text{参数式表达：} & \begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\\ \text{隐示表达：} & F(x,y)=0.\end{cases}$$

下面我们讨论参数式表达函数的求导法和隐式表达函数的求导法。

4.2 参数式函数求导法

设有参数方程式

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in(\alpha,\beta)$$

其中$\forall t\in(\alpha,\beta)$，$\varphi'(t),\psi'(t)$都存在。若$\forall t\in(\alpha,\beta)$，$\varphi'(t)\neq 0$，则（见下章）$x=\varphi(t)$是单调增函数或单调减函数。于是

$$t=\varphi^{-1}(x),\ y=\psi(\varphi^{-1}(x)),\quad \text{（画图）。}$$

从而

$$\begin{aligned}\tfrac{dy}{dx} &=== [\psi(\varphi^{-1}(x))]'\\ &\Longleftarrow== \psi'(\varphi^{-1}(x))[\varphi^{-1}(x)]' \quad \text{（复合函数求导）}\\ &\Longleftarrow== \psi'(\varphi^{-1}(x))\tfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \quad \text{（反函数求导）}\\ &=== \tfrac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\\ &=== \left.\tfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x))}.\end{aligned}$$

若$\forall t\in(\alpha,\beta)$，$\varphi''(t),\psi''(t)$也都存在，令$Y(t)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，则

$$\frac{dy}{dx}=Y(\varphi^{-1}(x))),$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &=== \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dY(\varphi^{-1}(x))}{dx} \\
&\Longleftarrow== Y'(\varphi^{-1}(x)))[\varphi^{-1}(x)]' \quad \text{（复合函数求导）} \\
&\Longleftarrow== \left.\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\right|_{t=\varphi^{-1}(x))} \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \quad \text{（四则运算求导，反函数求导）} \\
&=== \left.\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}\right|_{t=\varphi^{-1}(x))}.
\end{aligned}$$

例3 将椭圆曲线

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$$

写成参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

试求椭圆上过$(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{b}{2})$处的切线方程。

解：令$t_0=\frac{\pi}{6}$，则$(a\cos\frac{\pi}{6},b\sin\frac{\pi}{6})=(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{b}{2})$，

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=b\cos t,$$

从而

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0=\frac{\sqrt{3}a}{2},y_0=\frac{b}{2}}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t_0=\frac{\pi}{6}}=\frac{b\cos\frac{\pi}{6}}{-a\sin\frac{\pi}{6}}=-\frac{b\sqrt{3}}{a},$$

故椭圆上过$(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{b}{2})$处的切线方程为

$$y=\frac{b}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{a}(x-\frac{\sqrt{3}a}{2}).$$

5 函数的微分

定义1 设I为开区间，$x_0\in I$，$f:I\to\mathcal{R}$. 如果$\exists a\in\mathcal{R}$，使得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-[f(x_0)+a(x-x_0)]}{x-x_0}=0,$$

即

$$f(x)-[f(x_0)+a(x-x_0)+]=o(x-x_0)\quad \text{（当}x\to x_0\text{时）},$$

也即

$$f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+o(x-x_0)\quad \text{（当}x\to x_0\text{时）},$$

则称f在点x_0处<u>可微</u>。

定理1（可微的充分必要条件） 设I为开区间，$x_0\in I$，$f:I\to\mathcal{R}$. 则f在x_0可微的充分必要条件是f在x_0可导，此时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\quad \text{（当}x\to x_0\text{时）}.$$

证明：
必要性. 由$f: I \to \mathcal{R}$在x_0可微，即$\exists a \in \mathcal{R}$，使得

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0) \quad （当x \to x_0时）.$$

于是

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = a,$$

所以f在x_0可导，且$f'(x_0) = a$. 此时

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad （当x \to x_0时）.$$

充分性.由$f: I \to \mathcal{R}$在x_0可导，有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

所以f在x_0可微。

定义2 设I为区间，$x_0 \in I$，$f: I \to \mathcal{R}$. 如果f在点x_0处可微，记

$$\underline{df(x_0)} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

$$\underline{df(x_0)}(h) = f'(x_0)h$$

显然，$d\underline{f(x_0)}$是线性映射，称$\underline{df(x_0)}$为f在点x_0 处的<u>微分</u>，称$df(x_0)(h)$为<u>f在x_0处的微分在h处的值</u>.

注1微分的几何意义：$\forall h \in R$，

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h \quad （画图）.$$

当$x_0 + h \in I$且$h \neq 0$时，

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad （当h \to 0时）.$$

故<u>当$h \neq 0$且h充分小时</u>，

$$\underline{f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0)(h)},$$

即

$$\underline{f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)(h) \quad （画图）}$$

例1求$\sqrt[3]{1.002}$的近似值。

解：令$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $h = 0.002$，则$f'(x_0) = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$，所以

$$\sqrt[3]{1.002} = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0)(h) = 1 + \frac{1}{3} \times 0.002 = 1 + \frac{1}{1500}.$$

注2 由于$x'=1$，故$\forall h\in\mathcal{R}$

$$\underline{dx}(h)=h.$$

因此当f在点x_0处可微时，对$\forall h\in\mathcal{R}$，都有

$$\begin{aligned} f'(x_0)\underline{dx}(h) &= f'(x_0)h \\ &= \underline{df(x_0)}(h), \end{aligned}$$

所以

$$\underline{df(x_0)=f'(x_0)dx}.$$