一元微积分期中考试答案

一．　　**填空题**（每空 3 分，共 15 题）

1. $\frac{1}{e}$　　2。$\frac{1}{2}$　　3. $\frac{1}{3}$　　4。$\frac{4}{3}$　　5. 1

6．第一类间断点　　7。$x^x(1+\ln x)dx$　　8。$\underline{2x\cos(x^2+1)e^{\sin(x^2+1)}}$

9。 0　　10。$\left(e^x+\frac{1}{x}\right)^{-1}$　　11． xe^x+ne^x　　12。13　　13。0

14。$y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$　　15. $y=x+\frac{1}{3}$

二．　　计算题

1. 解：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=b,$ 故 $b=0$ 。　　…………………3 分

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=a$　　…………………3 分

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$　　…………………3 分

$a=1$

故当 $a=1$，$b=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导。　　…………………1 分

2. 解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{1/\ln x}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1/(1+x^2)}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}{1/x}$

…………罗比达法则…………4 分

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x/(1+x^2)}{-\frac{\pi}{2}+\arctan x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x^2)/(1+x^2)^2}{1/(1+x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$$

………………………4 分

所以，原极限=e^{-1}　　……………………………………………………………………2 分

3. 解：$y'=f'(x+y)(1+y')$，故 $y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}=\frac{1}{1-f'(x+y)}-1$　；……4 分

$y''=\frac{f''(x+y)(1+y')}{[1-f'(x+y)]^2}=\frac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}$ ……………………………………………6 分

4.解：

$$f(x)=\begin{cases}-(x^3-2x^2+x) & x<0\\ x^3-2x^2+x & x\ge 0\end{cases}$$

记 $g(x)=x^3-2x^2+x$，则 $g'(x)=3x^2-4x+1$， $g''(x)=6x-4$，

$g(x)=x^3-2x^2+x=0, x_1=0, x_2=1$

$g'(x)=3x^2-4x+1=0, x_3=\dfrac{1}{3}, x_4=1$

$g''(x)=6x^2-4=0, x_5=\dfrac{2}{3}$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ 单调减，在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 及 $(1,+\infty)$ 单调增； …………………2 分

在 $(-\infty,0)$ 及 $\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ 下凸，在 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 上凸； …………………2 分

极大值点为 $x=\dfrac{1}{3}$，极小值点为 $x=0,1$。 …………………2 分

草图 …………………4 分

证明题

1． 证明：记 $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$， ………………………………..1 分

$\varphi'(x)=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0,(x>0)$， ………………………………..2 分

因为 $\varphi(1)=0$，当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)<0$； ………………………………..2 分

当 $x>1$ 时，$\varphi(x)>0$。 ………………………………..2 分

故当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$。 ………………………………..1 分

2． （1）当 $x>x_0$ 时，存在 $\xi\in(x_0x)$ 使得 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$。又因为设 $f(x)\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$ 为下凸函数，$f'(x)$ 为单调增函数，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)\ge f'(x_0)$，

即 $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),(x>x_0)$。同理可证，当 $x<x_0$ 时，$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$。 …………………………4 分

（2）反证，如果 $f(x)$ 不是常数函数，必存在 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty),(x_1<x_2)$，使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$，不妨假设 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $k=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$。由中值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(\xi)=k$。因为 $f(x)$ 是下凸的，$f(x)\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$，$f'(x)$ 单调增，当 $x>\xi$ 时，$f'(x)>k$。

$$f(x)>f(\xi)+k(x-\xi)\qquad \text{当 } x>\xi \text{ 时}$$

故 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$，与 $f(x)\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$，且有界矛盾。即 $f(x)$ 为常数函数。

……………………………3 分