6.2.4.3

Set 6.2

4.(3) $x \geq 2$时,

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}\right| < \frac{1}{x^2}$$

而 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛

$\therefore \int_2^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}\right|$ 收敛

$\therefore \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}$ 绝对收敛且收敛

6.2.4.5

(5) 令 $t = \frac{1}{x}$

则原式 $= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}-1}{t^{2-p}\ln(1+t^2)}\, dt$

而 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{\sqrt{1+t}-1}{t^{2-p}\ln(1+t^2)}}{\frac{1}{t^{3-p}}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t(\sqrt{1+t}-1)}{\ln(1+t^2)}$

$= \frac{1}{2}$

故当 $\int_0^1 \frac{1}{t^{3-p}}$ 收敛时，原式收敛

即 $p>2$ 时,原式收敛

$p \leq 2$ 时 原式发散

常见错误：敛散性只写了收敛范围，没有写发散范围

6.2.5.3

5 (3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{p_0}|x-1|^{p_1}|x-2|^{p_2}}\, dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{x^{p_0}(1-x)^{p_1}(2-x)^{p_2}}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x^{p_0}(x-1)^{p_1}(2-x)^{p_2}}\, dx$

$+ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{p_0}(x-1)^{p_1}(x-2)^{p_2}}\, dx \triangleq I_1 + I_2 + I_3$

可知 $I_1, I_2, I_3$ 均 $>0$

原积分收敛 $\Leftrightarrow I_1, I_2, I_3$ 均收敛

对 $I_1=\int_0^1 \frac{1}{x^{p_0}(1-x)^{p_1}(2-x)^{p_2}}dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{p_0}(1-x)^{p_1}(2-x)^{p_2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{x^{p_0}(1-x)^{p_1}(2-x)^{p_2}}$$

有 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^{p_0}(1-x)^{p_1}(2-x)^{p_2}}\Big/x^{-p_0}=2^{-p_2}$

当且仅当 $p_0<1$ 时，$\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-p_0}dx$ 收敛

$\therefore p_0<1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x^{p_0}(1-x)^{p_1}(2-x)^{p_2}}\Big/\frac{1}{(1-x)^{p_1}}=1$

当且仅当 $p_1<1$ 时，$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{(1-x)^{p_1}}dx$ 收敛

$\therefore p_1<1$

同理对 $I_2$ 有 $p_1<1$ 且 $p_2<1$

对 $I_3=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{p_0}(x-1)^{p_1}(x-2)^{p_2}}dx$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p_0}(x-1)^{p_1}(x-2)^{p_2}}\Big/x^{-p_0-p_1-p_2}=1$

当且仅当 $-p_0-p_1-p_2<-1$，

即 $p_0+p_1+p_2>1$ 时 $\int_2^{+\infty}x^{-p_0-p_1-p_2}dx$ 收敛

$\therefore p_0+p_1+p_2>1$

综上：当且仅当 $\begin{cases}p_0<1\\p_1<1\\p_2<1\\p_0+p_1+p_2>1\end{cases}$ 时，原积分收敛

否则发散

常见错误：过程分析中即引入约束$0<p_0,p_1,p_2$

7.1.2

2. 由题: $y_1''(x)+a_1(x)\cdot y_1'(x)+a_2(x)\cdot y_1(x)=f(x)$;

$y_2''(x)+a_1(x)\cdot y_2'(x)+a_2(x)\cdot y_2(x)=g(x)$

故 $(k_1y_1+k_2y_2)''+a_1(k_1y_1+k_2y_2)'+a_2(k_1y_1+k_2y_2)$

$=k_1y_1''+k_2y_2''+k_1a_1y_1'+k_2a_1y_2'+k_1a_2y_1+k_2a_2y_2$

$=k_1(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+k_2(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)$

$=k_1f(x)+k_2g(x)$

得证.

7.1.5

(5) 解: $y=Cx^3 \Rightarrow y'=3Cx^2$.

$\therefore 3y-xy'=3Cx^3-x\cdot 3Cx^2=0$.

即 $y=Cx^3$ 是微分方程 $3y-xy'=0$ 的解

由存在唯一性定理, $y=Cx^3$ 是一般解.

过A$(1,1) \Rightarrow C=1 \quad \therefore y=x^3$.

过B$(1,-\frac{1}{3}) \Rightarrow C=-\frac{1}{3} \quad \therefore y=-\frac{1}{3}x^3$.

另外,可证 $y=Cx^3$ 是该方程所有解.

$x=0$时, $y=0$

$x\neq0$时, 由$3y-xy'=0$知:

$$\frac{y'x-3y}{x^4}=0$$

$$\therefore \left(\frac{y}{x^3}\right)'=0$$

两边同时对$x$积分:

$$\frac{y}{x^3}=C$$

$$\therefore y=Cx^3$$

综上, $y=Cx^3$

常见错误: 没有讨论$x=0$时情况