《微积分A2》第二十四讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年05月11日

Definition

<u>定义</u>: 给定级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, 以及任意正整数列 $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_m < \cdots$, $n_m \to +\infty$, 记

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + \cdots + a_{n_1}, \\ b_2 &= a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \\ &\vdots \\ b_m &= a_{n_{m-1}+1} + \cdots + a_{n_m}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

称级数 $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ 为级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 的加括号级数.

例子

Example

例：取正整数序列 $2 < 4 < 6 < \cdots < 2m < \cdots$，则相应的加括号级数为

$$\sum_{m=1}^{+\infty} b_m = \sum_{m=1}^{+\infty} (a_{2m-1} + a_{2m}).$$

Theorem

定理：收敛级数的任意括号级数收敛，且有相同的和．确切地说，若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则它的每个加括号级数 $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ 均收敛，且 $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$．

注一：当一个加括号级数收敛时，原级数不一定收敛．例如级数 $\sum(-1)^{k-1}$ 不收敛，但其加括号级数 $\sum[(-1)^{2m} + (-1)^{2m+1}]$ 收敛．

注二：课本第234页习题5.1题4(1)表明，对于正项级数而言，原级数收敛，等价于它的任何一个加括号级数收敛．

证：设级数 $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ 为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的加括号级数，即存在正整数序列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_m < \cdots$，使得

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1 + \cdots + a_{n_1}, \\
b_2 &= a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \\
&\vdots \\
b_m &= a_{n_{m-1}+1} + \cdots + a_{n_m}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

证明续

记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$T_m = \sum_{p=1}^{m} b_p$，则显然

$$T_m = \sum_{p=1}^{m} b_p = \sum_{p=1}^{m} (a_{n_{p-1}+1} + \cdots + a_{n_p}) = \sum_{k=1}^{n_m} a_k = S_{n_m},$$

即序列 $\{T_m\}$ 是序列 $\{S_n\}$ 的一个子序列 $\{S_{n_m}\}$. 因此当级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，即部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛时，子列 $T_m = S_{n_m}$ 也收敛，且收敛到同一个极限. 故加括号级数 $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ 收敛，且 $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. 证毕. $\square$

在一定的条件下，加括号级数收敛蕴含原级数收敛

Theorem

定理：设级数 $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ 是级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 的加括号级数. 假设(1) $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ 收敛; (2) 每个括号中的各项都有相同的符号，即均非正或均非负，则原级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 也收敛.

注：上述定理的结论可稍作推广如下：若将假设(1) 改为 $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m = +\infty$ $(-\infty)$，假设(2)不变，则原级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$ $(-\infty)$. 这个推广后面要用到.

例：讨论如下级数的收敛性

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k}.$$

解：考虑上述级数的加括号级数 $\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m b_m$，其中

$$b_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$b_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8},$$

$$\vdots$$

$$b_m = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2+1} + \cdots + \frac{1}{(m+1)^2-1},$$

$$\vdots$$

注意一般项 b_m 可表示为

$$b_m = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2+1} + \cdots + \frac{1}{m^2+m-1}$$

$$+\frac{1}{m^2+m} + \frac{1}{m^2+m+1} + \cdots + \frac{1}{m^2+2m}$$

$$< \frac{m}{m^2} + \frac{m+1}{m^2+m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}.$$

另一方面

$$b_m > \frac{m}{m^2+m-1} + \frac{m+1}{m^2+2m} > \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} = \frac{2}{m+1}.$$

即 $\frac{2}{m+1} < b_m < \frac{2}{m}$, $\forall m \geq 1$. 这表明 $\{b_m\}$ 单调下降，故级数 $\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m b_m$ 是 Leibniz 型级数，收敛. 由于项 $(-1)^m b_m$ 所对应的原级数的各项同号，根据上述定理知原级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k}$$

收敛. 解答完毕.

证: 记 B_m 为加括号级数 $\sum b_m$ 的部分和, 即 $B_m = \sum_{k=1}^{m} b_k$, 由假设可知序列 $\{B_m\}$ 收敛. 设 $B_m \to B$, 亦即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 M, 使得 $|B_m - B| < \varepsilon$, $\forall m \geq M$. 假设加括号级数 $\sum b_m$ 由正整数序列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_m < \cdots$ 确定, 即

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1 + \cdots + a_{n_1}, \\
b_2 &= a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \\
&\vdots \\
b_m &= a_{n_{m-1}+1} + \cdots + a_{n_m}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

设 A_n 为原级数 $\sum a_k$ 的部分和，即 $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. 取 $N = n_M$, 则对任意 $n \geq N$, 存在 $m \geq M$, 使得 $n_m \leq n < n_{m+1}$. 于是

$$B_m = a_1 + a_2 \cdots + a_{n_m},$$

$$A_n = B_m + a_{n_m+1} + \cdots + a_n,$$

$$B_{m+1} = A_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n_{m+1}}.$$

由于每个括号中的各项同号，故 A_n 的值介于 B_m 和 B_{m+1} 之间，从而 $|A_n - B| \leq \max\{|B_m - B|, |B_{m+1} - B|\} < \varepsilon$, $\forall n \geq N = n_M$. 这表明 $A_n \to B$, $n \to +\infty$. 定理得证. $\square$

记号: 给定级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, 记

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

则 $a_n^+, a_n^- \geq 0$, 且 $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. 实际上

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0, \\ 0, & a_n < 0, \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n \leq 0, \\ 0, & a_n > 0. \end{cases}$$

例子

Example

例：对于级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 来说，$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，则

$$a_{2n-1}^{+}=\frac{1}{2n-1},\qquad a_{2n-1}^{-}=0,$$
$$a_{2n}^{+}=0,\qquad a_{2n}^{-}=\frac{1}{2n}.$$

级数绝对收敛与条件收敛的特征

Theorem

定理: (i) 级数 $\sum a_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum a_n^{\pm}$ 均收敛;

(ii) 当级数 $\sum a_n$ 绝对收敛时, $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$;

(iii) 级数 $\sum a_n$ 条件收敛 $\Rightarrow$ $\sum a_n^+ = +\infty$ 且 $\sum a_n^- = +\infty$

证: (i) 级数 $\sum a_n$ 绝对收敛, 即级数 $\sum |a_n|$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 级数 $\sum(a_n^+ + a_n^-)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 级数 $\sum a_n^{\pm}$ 均收敛.

(ii) 当级数 $\sum a_n$ 绝对收敛时, 级数 $\sum a_n^{\pm}$ 均收敛. 于是 $\sum(a_n^+ - a_n^-)$ 收敛, 即 $\sum a_n$ 收敛, 且 $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$.

(iii) 级数 $\sum a_n$ 条件收敛，即级数 $\sum a_n$ 收敛，但级数 $\sum |a_n|$ 发散．此时两级数 $\sum a_n^{\pm}$ 收敛情况可能有如下三种情况：

(1) 它们均收敛；(2) 一个发散，一个收敛；(3) 它们均发散．

情况(1)不可能发生．否则级数 $\sum a_n$ 绝对收敛．考虑情况(2)．不妨设 $\sum a_n^+$ 收敛，而 $\sum a_n^-$ 发散．由于 $a_n = a_n^+ - a_n^-$，故 $a_n^- = a_n^+ - a_n$．由于级数 $\sum a_n^+$ 和 $\sum a_n$ 均收敛，故级数 $\sum a_n^-$ 也收敛．矛盾．故情况(2)也不会发生．因此必出现情况(3)，即非负级数 $\sum a_n^{\pm}$ 均发散．故 $\sum a_n^{\pm} = \pm\infty$．定理得证． $\square$

级数重排 (rearrangement)

Definition

定义: 设 π 是 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ 到自身的一个双射(bijective), 即既是单射又是满射, 则级数 $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{\pi(m)}$ 称为级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 的一个重排(rearrangement).

例：级数 $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 有如下两个重排级数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\cdots, \qquad (*)$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots. \qquad (**)$$

级数(*)的重排规则：先排一个负项，接着排一个正项，然后不断重复这个过程。等价地说，每个负项与它前面的正项互换。

级数(**)的重排规则：先排两个正项，接着排一个负项。然后不断重复这个过程。

Theorem

定理: 若级数 $\sum a_n$ 绝对收敛, 则它的每个重排级数 $\sum a_{\pi(n)}$ 均收敛, 且 $\sum a_{\pi(n)} = \sum a_n$.

证: 先考虑 $\sum a_n$ 为非负级数情形, 即 $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$. 级数 $\sum a_n$ 及其重排级数 $\sum a_{\pi(n)}$ 的部分和分别记为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)},$$

则 $S_n \uparrow$, $T_n \uparrow$. 由假设 $\sum a_n$ 绝对收敛, 即 $\{S_n\}$ 收敛, 可设 $S_n \uparrow S$, 且 $S_n \leq S$, $\forall n \geq 1$.

对任意 $n \geq 1$, 取 $N = \max\{\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n)\}$, 则 $T_n \leq S_N \leq S$. 这表明单调上升序列$\{T_n\}$ 有上界 S. 因此 $\{T_n\}$ 收敛, 并且它的极限 $T \leq S$. 另一方面级数 $\sum a_n$ 也可看作级数 $\sum a_{\pi(n)}$ 的一个重排, 从而有 $S \leq T$. 故 $S = T$. 因此对于非负级数, 结论成立.

现考虑一般级数 $\sum a_n$. 已证 $\sum a_n$ 绝对收敛，当且仅当 $\sum a_n^{\pm}$ 均收敛. 根据上述关于非负级数情形的结论可知，两个重排级数 $\sum a_{\pi(n)}^{\pm}$ 均收敛，且 $\sum a_{\pi(n)}^{\pm} = \sum a_n^{\pm}$. 于是重排级数 $\sum a_{\pi(n)}$ 绝对收敛，且

$$\sum a_{\pi(n)} = \sum a_{\pi(n)}^{+} - \sum a_{\pi(n)}^{-}$$

$$= \sum a_n^{+} - \sum a_n^{-} = \sum a_n$$

定理得证. □

例: 考虑条件收敛级数(*) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 的求和. 回忆上个学期我们曾经证明过结论: $a_n \triangleq \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 有极限, 其极限 γ 称为 Euler 常数, 且 $\gamma = 0.57721566490\cdots$.

(目前尚不清楚 γ 是有理数还是无理数, 虽然一般期待它是超越数). 由此我们得到调和级数部分和的一个表示

$$H_n \triangleq \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln n + \gamma + a_n,$$

其中 $a_n \to 0$, $n \to +\infty$, 记级数(*)的前 n 项和为 S_n, 即 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, 则

求和续

$$
\begin{aligned}
S_{2n} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + a_{2n} - \ln n - \gamma - a_n \\
&= \ln 2 + a_{2n} - a_n \to \ln 2, \quad n \to +\infty.
\end{aligned}
$$

由于 $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2$, 故 $S_n \to \ln 2$. 因此级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$.

另解: 对于熟知的等式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\frac{(-1)^n x^n}{1+x},$$

两边从 0 到 1 积分得

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+(-1)^n\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}.$$

$$\Rightarrow\quad |S_n-\ln 2|=\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\to 0.$$

这就证明了级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2.$

例一：考虑条件收敛级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \quad (*)$$

的一个重排级数

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots \quad (**)$$

的和. 级数 (**) 的重排规则是一个正项，两个负项，不断重复. 往下证明重排级数 (**) 的和是级数(*) 和的一半，即级数 (**) 的和为 $\frac{1}{2}\ln 2$. 级数 (*)和 (**) 的部分和分别记作 S_n 和 T_n，则

$$T_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}S_{2n}.$$

因此 $T_{3n} \to \frac{1}{2}\ln 2$. 由于 $T_{3n+1} = T_{3n} + \frac{1}{4n+1} \to \frac{1}{2}\ln 2$, $T_{3n+2} = T_{3n+1} - \frac{1}{4n+2} \to \frac{1}{2}\ln 2$. 故 $T_n \to \frac{1}{2}\ln 2$. 结论得证.

例：考虑条件收敛级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 的如下重排：先依次取 p 个正项，接着取 q 个负项，不断重复．考虑这个重排级数的收敛性．在收敛的情况下求这个级数的和．

解：记上述重排级数的部分和为 S_n，则

$$S_{m(p+q)}=\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k}=H_{2mp}-\frac{1}{2}H_{mp}-\frac{1}{2}H_{mq},$$

其中 H_n 代表调和级数的部分和，即 $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

再利用 H_n 的渐近式 $H_n = \ln n + \gamma + a_n$ 可知

$$S_{m(p+q)} = \ln(2mp) + \gamma + a_{2mp}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\ln(mp) + \gamma + a_{mp}\right] - \frac{1}{2}\left[\ln(mq) + \gamma + a_{mq}\right]$$

$$= \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right) + a_{2mp} - \frac{1}{2}[a_{mp} + a_{mq}] \to \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right), m \to +\infty.$$

由于当 $m \to +\infty$

$$S_{m(p+q)+1} = S_{m(p+q)} + \frac{1}{m(p+q)+1} \to \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

$$S_{m(p+q)+2} = S_{m(p+q)+1} + \frac{1}{m(p+q)+3} \to \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

$$\vdots$$

$$S_{m(p+q)+p} = S_{m(p+q)+p-1} + \frac{1}{m(p+q)+2p-1}$$

$$\to \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

$$S_{m(p+q)+p+1} = S_{m(p+q)+p} - \frac{1}{2mq+2} \to \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

$$S_{m(p+q)+p+2} = S_{m(p+q)+p+1)} - \frac{1}{2mq+4} \to \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

$$\vdots$$

$$S_{m(p+q)+p+q-1} = S_{(m+1)(p+q)-2} - \frac{1}{2mq+2q-2}$$

$$\to \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right).$$

因此 $S_n \to \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$. 综上可知所考虑的重排级数收敛，且其和为 $\ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$. 解答完毕.

Riemann 重排定理

Theorem

定理: 若级数 $\sum a_n$ 条件收敛, 则对任意 $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 存在一个重排级数 $\sum a_{\pi(n)}$, 使得 $\sum a_{\pi(n)} = A$.

证明复杂. 稍后给出. 对于条件收敛级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, 课本有 $A = 100$ 情形的证明.

注: 这个定理被誉为 4R 定理, 即 Riemann's Remarkable Rearrangement Result.

定理证明(可略去)

证明: 记 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 为级数 $\sum a_n$ 的所有非负项的依次排列, $q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots$ 为级数 $\sum a_n$ 的所有负项绝对值的依次排列. 例如级数 $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ 对应的非负项的依次排列为 $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots$, 对应负项绝对值的依次排列为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots$. 由假设 $\sum a_n$ 条件收敛, 故级数 $\sum a_n^+ = +\infty$ 和 $\sum a_n^- = +\infty$. 显然级数 $\sum a_n^+$ 可以看作在非负级数 $\sum_{n\geq 1} p_n$ 中添加若干零元素的非负级数, 而级数 $\sum a_n^-$ 可以看作在非负级数 $\sum_{n\geq 1} q_n$ 中添加若干零元素的非负级数. 故 $\sum_{n\geq 1} p_n = \sum_{n\geq 1} a_n^+ = +\infty$, $\sum_{n\geq 1} q_n = \sum_{n\geq 1} a_n^- = +\infty$. 以下分三种情况讨论.

证明续一

情形一: A 为有限实数. 不妨设 $A>0$. (当 $A\le 0$ 时, 以下证明只需作微小修改.) 由于 $\sum_{n\ge1}p_n=+\infty$, 故存在唯一正整数 $N_1\ge 1$, 使得

$$p_1+p_2+\cdots+p_{N_1-1}\le A,\ p_1+p_2+\cdots+p_{N_1-1}+p_{N_1}>A.$$

同理由于 $\sum_{n\ge1}q_n=+\infty$, 故存在唯一正整数 $M_1\ge 1$, 使得

$$p_1+p_2+\cdots+p_{N_1}-q_1-q_2-\cdots-q_{M_1-1}\ge A,$$

$$p_1+p_2+\cdots+p_{N_1}-q_1-q_2-\cdots-q_{M_1-1}-q_{M_1}<A.$$

同理可以从 $\{p_n\}$ 中，依次从项 p_{N_1+1} 起，取出若干项，使得

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{M_1}$$

$$+p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_2-1} \leq A,$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{M_1}$$

$$+p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_2-1} + p_{N_2} > A.$$

同理可以从 $\{q_n\}$ 中，依次从项 q_{M_1+1} 起，取出若干项，使得

$$p_1 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1}$$

$$+p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_2} - q_{M_1+1} - \cdots - q_{M_2-1} \geq A,$$

$$p_1 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1}$$

$$+p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_2} - q_{M_1+1} - \cdots - q_{M_2-1} - q_{M_2} < A.$$

不断重复上述做法，即可得到如下级数

$$p_1 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1}$$

$$+p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_2} - q_{M_1+1} - \cdots - q_{M_2} + \cdots$$

$$+p_{N_{i-1}+1} + \cdots + p_{N_i} - q_{M_{i-1}+1} - \cdots - q_{M_i} + \cdots. \, (*)$$

显然级数 (*) 是原级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 的一个重排级数. 往下我们来证明这个重排级数收敛于 A. 记 $S_i = p_{N_{i-1}+1} + \cdots + p_{N_i}$, $T_i = q_{M_{i-1}+1} + \cdots + q_{M_i}$, 其中 $\forall i \geq 1$, $N_0 = 0$, $M_0 = 0$. 于是级数

$$S_1 - T_1 + S_2 - T_2 + \cdots + S_i - T_i + \cdots \qquad (**)$$

是级数 (*) 的一个加括号级数,

且每个括号内的各项均有相同的符号. 因此只要证明级数 (**) $S_1 - T_1 + S_2 - T_2 + \cdots + S_i - T_i + \cdots$ 收敛于 A, 那么也就证明了重排级数级数 (*) 收敛于 A. 记级数 (**) 的部分和为 σ_m. 根据重排级数的做法知, 对于任意正整数 i

$$\sigma_{2i-1} = S_1 - T_1 + \cdots + S_i > A \quad 且 \quad \sigma_{2i-1} - p_{N_i} \leq A,$$
$$\sigma_{2i} = S_1 - T_1 + \cdots + S_i - T_i < A \quad 且 \quad \sigma_{2i} + q_{M_i} \geq A,$$
$$\Rightarrow \quad 0 < \sigma_{2i-1} - A \leq p_{N_i} \quad 且 \quad 0 < A - \sigma_{2i} \leq q_{M_i}.$$

令 $i \to +\infty$ 知 $q_{M_i} \to 0$, $p_{N_i} \to 0$. 因为收敛级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 的一般项趋向于零. 故级数 $S_1 - T_1 + S_2 - T_2 + \cdots + S_i - T_i + \cdots$ 收敛于 A.

证明续六

从而级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 的重排级数(*), 即级数

$$p_1 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1}$$

$$+p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_2} - q_{M_1+1} - \cdots - q_{M_2} + \cdots$$

$$+p_{N_{i-1}+1} + \cdots + p_{N_i} - q_{M_{i-1}+1} - \cdots - q_{M_i} + \cdots$$

收敛于 A.

证明续七

情形二: $A = +\infty$. 由于 $\sum_{n\geq 1} p_n = +\infty$ 和 $\sum_{n\geq 1} q_n = +\infty$, 故存在正整数 $N_1 \geq 1$, $M_1 \geq 1$,

$$p_1 + \cdots + p_{N_1-1} \leq 1,$$

$$p_1 + \cdots + p_{N_1-1} + p_{N_1} > 1,$$

$$p_1 + \cdots + p_{N_1-1} + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1-1} \geq 1,$$

$$p_1 + \cdots + p_{N_1-1} + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1-1} - q_{M_1} < 1.$$

同理存在正整数 $N_2 > N_1$, $M_2 > M_1$, 使得

证明续八

$$p_1+\cdots+p_{N_1}-q_1-\cdots-q_{M_1}+p_{N_1+1}+\cdots+p_{N_2-1}\leq 2,$$

$$p_1+\cdots+p_{N_1}-q_1-\cdots-q_{M_1}+p_{N_1+1}+\cdots+p_{N_2-1}+p_{N_2}>2,$$

$$p_1+\cdots+p_{N_1}-q_1-\cdots-q_{M_1}+p_{N_1+1}+\cdots+p_{N_2}$$

$$-q_{M_1+1}-\cdots-q_{M_2-1}\geq 2,$$

$$p_1+\cdots+p_{N_1}-q_1-\cdots-q_{M_1}+p_{N_1+1}+\cdots+p_{N_2}$$

$$-q_{M_1+1}-\cdots-q_{M_2-1}-q_{M_2}<2.$$

上述做法可以无限次进行下去.

于是存在正整数 $N_i > N_{i-1}$, $M_i > M_{i-1}$, 使得级数

$$p_1 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1}$$

$$+p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_2} - q_{M_1+1} - \cdots - q_{M_2} + \cdots$$

$$+p_{N_{i-1}+1} + \cdots + p_{N_i} - q_{M_{i-1}+1} - \cdots - q_{M_i} + \cdots. \quad (*)$$

级数(*)是原级数 $\sum a_n$ 的一个重排级数，满足如下条件

$$p_1 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1} + \cdots + p_{N_{i-1}+1} + \cdots + p_{N_i-1} \leq i$$

$$p_1 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1} + \cdots + p_{N_{i-1}+1} + \cdots + p_{N_i} > i$$

$$p_1+\cdots+p_{N_1}-q_1-\cdots-q_{M_1}+\cdots$$

$$+p_{N_{i-1}+1}+\cdots+p_{N_i}-q_{M_{i-1}+1}-\cdots-q_{M_i-1}\geq i$$

$$p_1+\cdots+p_{N_1}-q_1-\cdots-q_{M_1}+\cdots$$

$$+p_{N_{i-1}+1}+\cdots+p_{N_i}-q_{M_{i-1}+1}-\cdots-q_{M_i}< i,$$

其中 $i\geq 1$. 记 $S_i=p_{N_{i-1}+1}+\cdots+p_{N_i}$, $T_i=q_{M_{i-1}+1}+\cdots+q_{M_i}$, 则级数

$$S_1-T_1+S_2-T_2+\cdots+S_i-T_i+\cdots \qquad (**)$$

是重排级数(*)的加括号级数.

证明续十一

往下我们来证明加括号级数 (**) 发散到 $+\infty$. 由于每个括号内的各项均同号, 故去掉括号的级数, 即重排级数 (*) 也发散到 $+\infty$. 记加括号级数 (**) 的部分和为 σ_n, 根据重排级数 (*) 的做法, 我们有

$$\begin{cases} \sigma_{2i-1} = S_1 - T_1 + \cdots + S_i > i & \text{且} \quad \sigma_{2i-1} - p_{N_i} \le i \\ \sigma_{2i} = S_1 - T_1 + \cdots + S_i - T_i < i & \text{且} \quad \sigma_{2i} + q_{M_i} \ge i. \end{cases}$$

由此可见, 当 $i \to +\infty$ 时, $\sigma_{2i-1} \to +\infty$ 且 $\sigma_{2i} \to +\infty$, 从而 $\sigma_i \to +\infty$.

因此加括号级数 $S_1 - T_1 + S_2 - T_2 + \cdots + S_i - T_i + \cdots$ 发散到 $+\infty$. 从而重排级数 (*), 即级数

$$p_1 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - \cdots - q_{M_1}$$

$$+p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_2} - q_{M_1+1} - \cdots - q_{M_2} + \cdots$$

$$+p_{N_{i-1}+1} + \cdots + p_{N_i} - q_{M_{i-1}+1} - \cdots - q_{M_i} + \cdots$$

也发散到 $+\infty$.

情形三: $A = -\infty$. 证明同情形 $A = +\infty$. 证毕. □

作业

习题5.3(page 257-258):

1, 3, 4(1)(3)(5)(7)(9)(11)(13)(14), 6, 7, 9.