第6章　常微分方程

学习材料（14）（15）

1　引言

2　基本概念

3　初等解法

3.1　分离变量方程

3.2　齐次方程

3.3　一阶线性方程

3.4　用降阶法求解微分方程

某些高阶的微分方程可以用变量代换的方法降低阶数，进而求出方程的解。这里仅讨论两种简单的情形：

类型1. $F(x,y',y'')=0$，右边不显含y. 求解方法：
令$p=p(x)=y'$，则$y''=p'$，原方程化为$F(x,p,p')=0$.

例5 求解微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} (1-x^2)y''-xy'=0, \\ y(0)=c_1,\ y'(0)=c_2. \end{cases}$$

解：令$p=p(x)=y'$，则$y''=p'$，原初值问题化为

$$\begin{cases} (1-x^2)p'-xp=0, \\ p(0)=c_2. \end{cases}$$

此初值问题的解为

$$\begin{aligned} p(x) &= c_2e^{-\int_0^x \frac{-t}{1-t^2}dt}=c_2e^{\int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt} \\ &= c_2e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} \quad (\text{在}x=0\text{附近}) \\ &= \tfrac{c_2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

于是

$$y(x)=y(0)+\int_0^x p(t)dt=c_1+\int_0^x \frac{c_2}{\sqrt{1-t^2}}dt=c_1+c_2\arcsin x.$$

问题 求解微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} (1-x^2)y''-xy'=0, \\ y(2)=c_1,\ y'(2)=c_2. \end{cases}$$

解：令$p=p(x)=y'$，则$y''=p'$，原初值问题化为

$$\begin{cases} (1-x^2)p'-xp=0, \\ p(2)=c_2. \end{cases}$$

此初值问题的解为

$$\begin{aligned} p(x) &= c_2 e^{-\int_2^x \frac{-t}{1-t^2}dt} = c_2 e^{\int_2^x \frac{t}{1-t^2}dt} \\ &= c_2 e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+\frac{1}{2}\ln 3} \quad (\text{在}x=2\text{附近}) \\ &= \frac{\sqrt{3}c_2}{\sqrt{x^2-1}}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} y(x) &= y(2)+\int_2^x p(t)dt \\ &= c_1+\int_2^x \frac{\sqrt{3}c_2}{\sqrt{t^2-1}}dt \\ &= c_1+\sqrt{3}c_2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2+\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

类型2. $F(y,y',y'')=0$，右边不显含x. 求解方法：若$y=\varphi(x)$，记$x=\varphi^{-1}(y)$，并令

$$p=p(y):=\varphi'(\varphi^{-1}(y)),\quad \text{简记}p=p(y)=y',$$

则

$$\begin{aligned} p\frac{dp}{dy} &= \varphi'(\varphi^{-1}(y))\frac{d}{dy}[\varphi'(\varphi^{-1}(y))] \\ &= \varphi'(\varphi^{-1}(y))\varphi''(\varphi^{-1}(y))\frac{d}{dy}[\varphi^{-1}(y)] \\ &= \varphi'(\varphi^{-1}(y))\varphi''(\varphi^{-1}(y))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} \quad (\text{反函数求导公式}) \\ &= \varphi''(\underline{\varphi^{-1}(y)}), \end{aligned}$$

故原方程化为$F\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0$，或

$$\begin{aligned} p\frac{dp}{dy} &= y'\underline{\underline{\frac{dy'}{dy}?}} \\ &= y'\underline{\underline{\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}}} \\ &= y'\underline{\underline{y''\frac{1}{\frac{dy}{dx}}}} \quad (\text{反函数求导公式}) \\ &= y'', \end{aligned}$$

故原方程化为$F\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0$.

例6 求解微分方程通解

$$y'' = \frac{1+(y')^2}{2y}.$$

解：令$p=p(y)=y'$，则$y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{1+p^2}{2y}.$$

此方程的通解为

$$\ln(1+p^2)=\ln|y|+c_1,$$

即

$$1+p^2=C_1y,\ 其中C_1=\pm e^{c_1}.$$

于是

$$y'=p=\pm\sqrt{C_1y-1},$$

故

$$\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=x+C_2,$$

$$\frac{4}{C_1^2}(C_1y-1)=(x+C_2)^2.$$

这就是微分方程的通解.

4 高阶线性常微分方程理论

称形如

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$$

的微分方程为<u>n阶线性齐次方程</u>，称形如

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

的微分方程为<u>n阶线性非齐次方程</u>。

4.1 存在唯一性定理

对于一阶线性非齐次微分方程的初值问题，我们已经得到解的公式。一般而言，我们无法得到n阶线性非齐次微分方程的初值问题解的表达公式，那怕是对二阶线性齐次微分方程

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0,$$

我们也无法得到其初值问题解的表达公式！

定理1 设函数$a_i(x)$, $f(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$在区间I上都是连续的，$x_0\in I$，$\left(y_1^0,y_2^0,\cdots,y_n^0\right)\in\mathcal{R}^n$，则$n$阶线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

满足初值条件

$$y(x_0)=y_1^0,\ y'(x_0)=y_2^0,\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_n^0$$

的解

$$y=\varphi(x)$$

在区间I上是存在和唯一的。

例1 设函数$a_i(x),\ f(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$在区间$I$上都是连续的，$x_0\in I$，则$n$阶线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

存在n个解$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$，它们分别满足初值条件：

$$\Big(\varphi_1(x_0),\varphi_1'(x_0),\varphi_1''(x_0),\cdots,\varphi_1^{(n-1)}(x_0)\Big)^\top=(1,0,0,\cdots,0)^\top,$$

$$\Big(\varphi_2(x_0),\varphi_1'(x_0),\varphi_2''(x_0),\cdots,\varphi_2^{(n-1)}(x_0)\Big)^\top=(0,1,0,\cdots,0)^\top,$$

$$\cdots,$$

$$\Big(\varphi_n(x_0),\varphi_n'(x_0),\varphi_1''(x_0),\cdots,\varphi_n^{(n-1)}(x_0)\Big)^\top=(0,0,0,\cdots,1)^\top.$$

4.2 函数的线性相关与线性无关

定义1 设$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$是定义在区间$I$上的函数。如果存在一组不全为零的实数$c_1,\cdots,c_m$，使得

$$c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)\equiv 0,\ x\in I,$$

则称$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性相关，否则称为线性无关。

注1 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性相关的充要条件是：其中某个函数可以表示为其他函数的线性组合，例如

$$\varphi_m(x)=c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_{m-1}\varphi_{m-1}(x),\ x\in I.$$

例2 设

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3, & x>0.\end{cases},\quad \varphi_2(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

验证φ_1,φ_2在$\mathcal{R}$上线性无关。

证：若有一组实数c_1,c_2，使得

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)\equiv 0,\ x\in\mathcal{R}.$$

特取$x=1$得

$$c_1 1^3+c_2 0=0,$$

由此得$c_1=0$；再特取$x=-1$得

$$c_1 0+c_2(-1)^3=0,$$

由此得$c_2=0$. 于是

$$c_1=0,\ c_2=0,$$

故φ_1,φ_2在$\mathcal{R}$上线性无关。

定义2(Wronsky行列式) 设$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上有1到$m-1$阶导数，称行列式

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \cdots & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix}$$

为$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$的Wronsky行列式。在意义明确的情况下，也用$W(x)$表示Wronsky行列式.

定理2 设$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上有1到$m-1$阶导数，

$$W[\varphi_1,\cdots,\varphi_m](x)$$

为$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$的Wronsky行列式。

(1) 如果$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性相关，则有

$$W[\varphi_1,\cdots,\varphi_m](x)\equiv 0,\ x\in I.$$

(2) 如果存在$x_0\in I$使得

$$W[\varphi_1,\cdots,\varphi_m](x_0)\neq 0,$$

则$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性无关。

证：(1) 假设$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性相关，则存在一组不全为零的实数$c_1,\cdots,c_m$，使得

$$c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)\equiv 0,\ x\in I.$$

对上式求1到$m-1$阶导数，得到

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)\equiv 0, \\ c_1\varphi_1'(x)+c_2\varphi_2'(x)+\cdots+c_m\varphi_m'(x)\equiv 0, \\ \cdots \\ c_1\varphi_1^{(m-1)}(x)+c_2\varphi_2^{(m-1)}(x)+\cdots+c_m\varphi_m^{(m-1)}(x)\equiv 0, \end{cases} \qquad x\in I$$

即

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \cdots & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x\in I.$$

因为$c_1,\cdots,c_m$不全为零，因此对于每一个$x\in I$，

$$\det\begin{pmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_m(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_m'(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \cdots & \varphi_m^{(m-1)}(x)\end{pmatrix}=0.$$

例3 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是一组相异实数，则函数组$e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},\cdots,e^{\lambda_m x}$在任何区间上线性无关。

证：该函数组在任何点x的Wronsky行列式

$$\begin{aligned}W(x) &= \det\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_m x}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_m e^{\lambda_m x}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{m-1}e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{m-1}e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_m^{m-1}e^{\lambda_m x}\end{pmatrix}\\ &= e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x}\cdots e^{\lambda_m x}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}\neq 0,\end{aligned}$$

它们的Wronsky行列式处处不为零，所以线性无关.

定理3 设函数$a_1,\cdots,a_n$在区间I连续，$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$是高阶线性齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$$

在区间I上的解，则下述陈述等价：
(1). $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$在区间$I$上线性相关。

(2). $W[\varphi_1,\cdots,\varphi_n](x)\equiv 0,\ x\in I.$

(3). 存在$x_0\in I$，使得$W[\varphi_1,\cdots,\varphi_n](x_0)=0.$

证：定理2已经证明了线性相关的函数组的Wronsky行列式恒等于零。(2)推出(3)是显然的。现在仅需要证明(3) $\Longrightarrow$ (1).

设存在$x_0 \in I$，使得$W[\varphi_1, \cdots, \varphi_n](x_0) = 0$，即

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) & \cdots & \varphi_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \varphi_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = 0.$$

则存在一组不全为零的实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(x_0) + c_2\varphi_2(x_0) + \cdots + c_n\varphi_n(x_0) = 0, \\ c_1\varphi_1'(x_0) + c_2\varphi_2'(x_0) + \cdots + c_n\varphi_n'(x_0) = 0, \\ \cdots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{cases}$$

令

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x),$$

则ψ满足

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0, \\ y(x_0) = 0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

而恒等于零的函数也是上述线性齐次方程初值问题的解。于是根据定理1（微分方程的存在唯一性定理）推出

$$\psi(x) \equiv 0,\ x \in I,$$

即

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \equiv 0,\ x \in I,$$

于是由线性相关的定义推出：函数组$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$在区间$I$上线性相关。

推论1

设函数$a_1, \cdots, a_n$在区间I连续，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$是高阶线性齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

在区间I上的解，则下述陈述等价：

(1). $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$在区间$I$上线性无关。

(2). 存在$x_0 \in I$，使得$W[\varphi_1, \cdots, \varphi_n](x_0) \neq 0$.

(3). $W[\varphi_1, \cdots, \varphi_n](x) \neq 0,\ \forall x \in I$.

定理4

设函数$a_1, \cdots, a_n$在区间I连续，则线性齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

在I 上有n个线性无关解。

证：在区间I任取一点x_0，根据线性微分方程的存在唯一性定理，存在n个解$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$，它们分别满足初值条件：

$$\Big(\varphi_1(x_0),\varphi_1'(x_0),\varphi_1''(x_0),\cdots,\varphi_1^{(n-1)}(x_0)\Big)^\top=(1,0,0,\cdots,0)^\top$$

$$\Big(\varphi_2(x_0),\varphi_1'(x_0),\varphi_2''(x_0),\cdots,\varphi_2^{(n-1)}(x_0)\Big)^\top=(0,1,0,\cdots,0)^\top$$

$$\cdots,$$

$$\Big(\varphi_n(x_0),\varphi_n'(x_0),\varphi_1''(x_0),\cdots,\varphi_n^{(n-1)}(x_0)\Big)^\top=(0,0,0,\cdots,1)^\top$$

于是函数组$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$的Wronsky行列式满足

$$W[\varphi_1,\cdots,\varphi_n](x_0)\ =\ \det\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=1\neq 0,$$

故由定理2推出函数组$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$线性无关，这说明此线性齐次方程有$n$ 个线性无关的解。

4.3 高阶线性常微分方程解的结构

定理5（线性齐次方程解的结构） 设函数$a_1,\cdots,a_n$在区间I连续，$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$是线性齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$$

在I 上的n个线性无关的解。

(1). 对任意常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$，则

$$C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+\cdots+C_n\varphi_n$$

都是此线性齐次方程的解;

(2). 设ψ是此线性齐次方程的一个解，则存在一组实数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得

$$\psi=c_1\varphi_1+c_1\varphi_2+\cdots+c_n\varphi_n.$$

证：(1)

$$\begin{aligned}&[C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+\cdots+C_n\varphi_n]^{(n)}+a_1(x)[C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+\cdots+C_n\varphi_n]^{(n-1)}\\&+\cdots+a_n(x)[C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+\cdots+C_n\varphi_n]\\=\ &C_1\varphi_1^{(n)}+C_2\varphi_2^{(n)}+\cdots+C_n\varphi_n^{(n)}+a_1(x)[C_1\varphi_1^{(n-1)}+C_2\varphi_2^{(n-1)}+\cdots+C_n\varphi_n^{(n-1)}]\\&+\cdots+a_n(x)[C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+\cdots+C_n\varphi_n]\\=\ &C_1[\varphi_1^{(n)}+a_1(x)\varphi_1^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)\varphi_1]+C_2[\varphi_2^{(n)}+a_1(x)\varphi_2^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)\varphi_2]\\&+\cdots+C_n[\varphi_n^{(n)}+a_1(x)\varphi_n^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)\varphi_n]\\=\ &C_1\cdot 0+C_2\cdot 0+\cdots+C_n\cdot 0=0,\end{aligned}$$

故$C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+\cdots+C_n\varphi_n$是此线性齐次方程的解。

(2). 由于$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$是此线性齐次方程的一组$n$个线性无关的解，因此定理3(3)可推出，对$\forall x\in I$，有

$$W[\varphi_1,\cdots,\varphi_n](x)\neq 0,$$

特别有

$$W[\varphi_1,\cdots,\varphi_n](x_0)\neq 0,$$

即

$$\det\begin{pmatrix}\varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0)\\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) & \cdots & \varphi_n'(x_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \varphi_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}\neq 0.$$

于是存在一组实数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得

$$\begin{cases}c_1\varphi_1(x_0)+c_2\varphi_2(x_0)+\cdots+c_n\varphi_n(x_0)=\psi(x_0),\\ c_1\varphi_1'(x_0)+c_2\varphi_2'(x_0)+\cdots+c_n\varphi_n'(x_0)=\psi'(x_0),\\ \cdots\\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+c_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=\psi^{(n-1)}(x_0),\end{cases}$$

因此

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)$$

满足初值问题

$$\begin{cases}y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0,\\ y(x_0)=\psi(x_0),\\ \cdots\\ y^{(n-1)}(x_0)=\psi^{(n-1)}(x_0).\end{cases}$$

而ψ也是上述线性齐次方程初值问题的解。于是根据定理1（微分方程的存在唯一性定理）推出

$$\psi(x)\equiv c_1\varphi_1(x)+c_1\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x),\ x\in I.$$

注2

通解$C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+\cdots+C_n\varphi_n$囊括方程的所有的解。

定理6（线性非齐次方程解的结构）

设函数$a_1,\cdots,a_n,f$在区间I连续，ψ_*是线性非齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

在区间I的一个解，$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$是线性齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$$

的一组n个线性无关的解。
(1). 对任意常数$C_1, C_2, \cdots, C_n$，则

$$\psi_* + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n$$

都是线性非齐次方程的解;
(2). 设ψ是此线性齐次方程的一个解，则存在一组实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$\psi = \psi_* + c_1\varphi_1 + c_1\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n.$$

证明：(1)

$$\begin{aligned}
& [\psi_* + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n]^{(n)} + a_1(x)[\psi_* + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n]^{(n-1)} \\
& + \cdots + a_n(x)[\psi_* + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n] \\
= \;& \psi_*^{(n)} + C_1\varphi_1^{(n)} + C_2\varphi_2^{(n)} + \cdots + C_n\varphi_n^{(n)} + a_1(x)[\psi_*^{(n-1)} + C_1\varphi_1^{(n-1)} + C_2\varphi_2^{(n-1)} + \cdots + C_n\varphi_n^{(n-1)}] \\
& + \cdots + a_n(x)[\psi_* + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n] \\
= \;& [\psi_*^{(n)} + a_1(x)\psi_*^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\psi_*] + C_1[\varphi_1^{(n)} + a_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\varphi_1] \\
& + C_2[\varphi_2^{(n)} + a_1(x)\varphi_2^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\varphi_2] \cdots + C_n[\varphi_n^{(n)} + a_1(x)\varphi_n^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\varphi_n] \\
= \;& f(x) + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \cdots + C_n \cdot 0 = f(x),
\end{aligned}$$

故$\psi_* + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n$是此线性非齐次方程的解。

(2) 若ψ是此线性非齐次方程的一个解，则$\psi - \psi_*$是线性齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

的一个解。于是存在一组实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$\psi - \psi_* = c_1\varphi_1 + c_1\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n$$

因此

$$\psi = \psi_* + c_1\varphi_1 + c_1\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n.$$

注3 通解$\psi_* + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n$囊括方程的所有的解。

4.4 二阶线性常微分方程的解法

考察二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

情形1. 知道齐次方程的两个线性无关解φ_1, φ_2，求非齐次方程的通解和特解。易知$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$是齐次方程的通解，下采用“常数变易法”，假设非齐次方程有一个解为 $y = u\varphi_1(x) + v\varphi_2(x)$，则

$$y' = u'\varphi_1 + u\varphi_1' + v'\varphi_2 + v\varphi_2'.$$

令
$$u'\varphi_1(x)+v'\varphi_2(x)=0,$$
得到
$$y'=u\varphi_1'+v\varphi_2',$$
于是
$$y''=u'\varphi_1'+u\varphi_1''+v'\varphi_2'+v\varphi_2''.$$
将待定解$y=u\varphi_1(x)+v\varphi_2(x)$ 及其导数代入非齐次方程。整理以后得到
$$u'\varphi_1'(x)+v'\varphi_2'(x)+u[\varphi_1''(x)+p(x)\varphi_1'(x)+q(x)\varphi_1(x)]+v[\varphi_2''(x)+p(x)\varphi_2'(x)+q(x)\varphi_2(x)]=f(x).$$
注意到φ_1,φ_2 满足齐次方程，所以
$$u'\varphi_1'(x)+v'\varphi_2'(x)=f(x).$$
故得到关于u',v'的代数方程组
$$\begin{cases} u'\varphi_1(x)+v'\varphi_2(x)=0, \\ \\ u'\varphi_1'(x)+v'\varphi_2'(x)=f(x), \end{cases}$$
其系数行列式为φ_1,φ_2的Wronsky行列式$W[\varphi_1,\varphi_2](x)$，它不等于零，故解
$$\begin{cases} u'=-\frac{\varphi_2(x)f(x)}{W[\varphi_1,\varphi_2](x)}, \\ \\ v'=\frac{\varphi_1(x)f(x)}{W[\varphi_1,\varphi_2](x)}, \end{cases}$$
积分后就得到
$$u=c_1-\int_{x_0}^x\frac{\varphi_2(t)f(t)}{W[\varphi_1,\varphi_2](t)}dt,\quad v=c_2+\int_{x_0}^x\frac{\varphi_1(t)f(t)}{W[\varphi_1,\varphi_2](t)}dt$$
可验证
$$\begin{aligned} y &= c_1\varphi_1(x)-\varphi_1(x)\int_{x_0}^x\frac{\varphi_2(t)f(t)}{W[\varphi_1,\varphi_2](t)}dt+c_2\varphi_2(x)+\varphi_2(x)\int_{x_0}^x\frac{\varphi_1(t)f(t)}{W[\varphi_1,\varphi_2](t)}dt \\ &= -\varphi_1(x)\int_{x_0}^x\frac{\varphi_2(t)f(t)}{W[\varphi_1,\varphi_2](t)}dt+\varphi_2(x)\int_{x_0}^x\frac{\varphi_1(t)f(t)}{W[\varphi_1,\varphi_2](t)}dt+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x), \end{aligned}$$
为非齐次方程的通解，而
$$\psi_*(x)=-\varphi_1(x)\int_{x_0}^x\frac{\varphi_2(t)f(t)}{W[\varphi_1,\varphi_2](t)}dt+\varphi_2(x)\int_{x_0}^x\frac{\varphi_1(t)f(t)}{W[\varphi_1,\varphi_2](t)}dt.$$
为非齐次方程的一个特解。

例4 求二阶非齐次方程的通解：

$$y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=x-1.$$

解：$\varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=e^x$是下述齐次方程的两个线性无关解：
$$y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0.$$
假设方程
$$y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=x-1$$
有一个解
$$y=ux+ve^x.$$

求解方程组

$$\begin{cases} u'x + v'e^x = 0, \\ u' + v'e^x = x - 1, \end{cases}$$

解方程组得到：

$$\begin{cases} u' = -1, \\ v' = xe^{-x}. \end{cases}$$

积分得到

$$u = c_1 - x,\ v = c_2 - e^{-x} - xe^{-x}.$$

取$c_1 = 0,\ c_2 = 0$，得到

$$u = -x,\ v = -e^{-x} - xe^{-x}.$$

于是得到非齐次方程的一个特解

$$\psi_*(x) = ux + ve^x = -x^2 - 1 - x.$$

从而得到非齐次方程的通解

$$y = -x^2 - 1 - x + C_1x + C_2e^x = C_1x + C_2e^x - x^2 - 1.$$

情形2. 假设知道了齐次方程的一个非零解φ_1，求齐次方程的与φ_1线性无关的解。

因为φ_1是非零的，故存在$x_0 \in I$，使得$\varphi_1(x_0) \neq 0$. 假设齐次方程的与φ_1线性无关的解为$y = u\varphi_1(x)$，则

$$y' = u'\varphi_1 + u\varphi_1';$$

$$y'' = u''\varphi_1 + 2u'\varphi_1' + u\varphi_1''.$$

将待定解$y = u\varphi_1(x)$ 及其导数代入齐次方程。整理以后得到

$$\varphi_1(x)u'' + [2\varphi_1'(x) + p(x)\varphi_1(x)]u' + [\varphi_1''(x) + p(x)\varphi_1'(x) + q(x)\varphi_1(x)]u = 0.$$

注意到φ_1 满足齐次方程，所以由此式得到

$$\varphi_1(x)u'' + [2\varphi_1'(x) + p(x)\varphi_1(x)]u' = 0,$$

即

$$u'' + \left[\left(\ln\varphi_1^2(x)\right)' + p(x)\right]u' = 0\text{”}$$

5 高阶线性常系数微分方程解法

5.1 高阶线性常系数齐次微分方程

考察高阶线性常系数齐次微分方程：

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

设此方程具有$y = e^{\lambda x}$形式的解，其中λ为常数，代入方程可得

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda x} = 0.$$

定义1 称一元n 次代数方程：

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

为微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

的特征方程，特征方程的根称为此微分方程的特征根。

定理1 设特征方程有r个相异的实根$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$和$s$个相异的共轭复根$\alpha_1 \pm i\beta_1, \cdots, \alpha_s \pm i\beta_s$，代数重数分别为$m_1, \cdots, m_r$和$n_1, \cdots, n_s$，其中$\beta_1, \cdots \beta_s > 0$，$m_1 + \cdots + m_r + 2n_1 + \cdots + 2n_s = n$，则函数组

$$\begin{cases} e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \cdots, x^{m_k-1}e^{\lambda_k x}, & k = 1, \cdots, r, \\ e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, \cdots, x^{n_j-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, & j = 1, \cdots, s \\ e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, \cdots, x^{n_j-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, & j = 1, \cdots, s \end{cases}, \tag{5.1}$$

是微分方程的n个线性无关解组。

例1 求方程

$$y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = 0$$

的通解。

解：特征方程

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 10\lambda^2 - 12\lambda + 5 = 0,$$

即

$$(\lambda - 1)^2[(\lambda - 1)^2 + 4] = 0.$$

特征根$\lambda_1 = 1$（二重实特征根）， $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$（复特征根）. 于是得到方程的4个线性无关解

$$e^x,\ xe^x,$$

$$e^x\cos 2x,\ e^x\sin 2x.$$

因此得到方程的通解：

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^x\cos 2x + C_4e^x\sin 2x.$$

例2 求解初值问题：

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

解：(1) 先求方程通解特征方程

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

特征根$\lambda=-1\pm i$，因此得到方程的通解：

$$y=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x.$$

(2)利用初值条件确定常数C_1,C_2. 由

$$y(0)=C_1e^{-0}\cos 0+C_2e^{-0}\sin 0=0$$

得到$C_1=0$，于是$y=C_2e^{-x}\sin x$. 求导

$$y'=(C_2e^{-x}\sin x)'=C_2\left[-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\right],$$

故

$$y'(0)=C_2\left[-e^{-0}\sin 0+e^{-0}\cos 0\right]=1,$$

得到$C_2=1$, 所以因此初值问题的解为：

$$y'=e^{-x}\sin x.$$

5.2 高阶线性常系数非齐次微分方程

考察线性高阶常系数非齐次微分方程：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x).$$

我们可得其齐次方程的通解，从而"常数变易法"可得原方程的一个特解，由此可给出原方程的通解表达式。如果

$$f(x)=p(x)e^{\lambda x},\quad 或\quad f(x)=e^{\alpha x}\left[q(x)\cos\beta x+Q(x)\cos\beta x\right],$$

其中p,q,Q是x的多项式，可以用待定系数法求非齐次方程的一个特解，从而求出通解.

<u>类型I</u>

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=p(x)e^{\lambda x},$$

其中p是x的多项式。
(1). 如果λ不是齐次方程的特征根，则非齐次方程有如下形式的特解

$$\psi_*(x)=A(x)e^{\lambda x};$$

(2). 如果λ是齐次方程的k重特征根，则非齐次方程有如下形式的特解

$$\psi_*(x)=x^kA(x)e^{\lambda x}.$$

其中A是次数与p相同的待定多项式。

<u>类型II</u>

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=e^{\alpha x}\left[q(x)\cos\beta x+Q(x)\cos\beta x\right],$$

其中p,q,Q是x的多项式。
(1). 如果$\alpha+i\beta$不是齐次方程的特征根，则非齐次方程有如下形式的特解

$$\psi_*(x)=e^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x+B(x)\cos\beta x\right];$$

(2). 如果$\alpha + i\beta$是齐次方程的k重特征根，则非齐次方程如下形式的特解

$$\psi_*(x) = x^k e^{\alpha x} \left[A(x)\cos\beta x + B(x)\cos\beta x\right].$$

其中A, B是次数为$\max[\deg(q), \deg(Q)]$的待定多项式。

例3 求方程

$$y'' + y' = 2x^2 + 1$$

的通解。

解：第一步，求齐次方程的通解：

$$y'' + y' = 0,$$

特征方程

$$\lambda^2 + \lambda = 0.$$

特征根$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0$. 因此得到方程的通解：

$$y = C_1 e^x + C_2.$$

第二步，求非齐次方程的一个特解：
令

$$\psi_*(x) = x[ax^2 + bx + c] = ax^3 + bx^2 + cx.$$

将待定解求导

$$\psi_*'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad \psi_*''(x) = 6ax + 2b,$$

代入原方程：

$$6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c = 2x^2 + 1,$$

整理得到：

$$3ax^2 + (6a + 2b)x + 2b + c = 2x^2 + 1,$$

比较方程两端同次幂的系数可以求出

$$a = \frac{2}{3}, b = -2, c = 5.$$

得到非齐次方程的一个特解：

$$\psi_*(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x.$$

第三步，原方程的通解：

$$y = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + C_1 e^x + C_2.$$

例4 求方程

$$y'' - 4y' + 13y = 4\sin 3x$$

的通解。

解：第一步，求齐次方程的通解：

$$y'' - 4y' + 13y = 0,$$

特征方程

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

特征根$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. 因此得到方程的通解：

$$y = e^{2x} \left[C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x \right].$$

第二步，求非齐次方程的一个特解：
$3i$不是特征根，令

$$\psi_*(x) = a \cos 3x + b \sin 3x.$$

将待定解求导

$$\psi_*'(x) = -3a \sin 3x + 3b \cos 3x, \quad \psi_*''(x) = -9a \cos 3x - 9b \sin 3x,$$

代入原方程：

$$-9a \cos 3x - 9b \sin 3x + 12a \sin 3x - 12b \cos 3x + 13a \cos 3x + 13b \sin 3x = 4 \sin 3x,$$

整理得到：

$$(4a - 12b) \cos 3x + (4b + 12a) \sin 3x = 4 \sin 3x,$$

比较方程两端可以求出

$$a = \frac{3}{10}, b = \frac{1}{10}.$$

得到非齐次方程的一个特解：

$$\psi_*(x) = \frac{3}{10} \cos 3x + \frac{1}{10} \sin 3x.$$

第三步，原方程的通解：

$$y = \frac{3}{10} \cos 3x + \frac{1}{10} \sin 3x + e^{2x} \left[C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x \right].$$

例5 求方程

$$y'' + y = \cos x \cos 2x$$

的通解。

解：第一步，求齐次方程的通解：

$$y'' + y = 0,$$

特征方程

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

特征根$\lambda_{1,2} = \pm i$. 因此得到方程的通解：

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

第二步，求非齐次方程的一个特解：
$f(x) = \cos x \cos 2x$不是上面讨论的形式，但通过变换，可以成为讨论过的形式。

$$f(x) = \cos x \cos 2x = \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x.$$

记

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \cos 3x, \quad f_2(x) = \frac{1}{2} \cos x.$$

求
$$y''+y=\frac{1}{2}\cos 3x$$
的特解$\psi_{*1}(x)$，得
$$\psi_{*1}(x)=-\frac{1}{16}\cos 3x.$$
再求
$$y''+y=\frac{1}{2}\cos x$$
的特解$\psi_{*2}(x)$，得
$$\psi_{*2}(x)=\frac{1}{4}x\sin x.$$
故
$$\psi_{*}(x)=\psi_{*1}(x)+\psi_{*2}(x)=-\frac{1}{16}\cos 3x+\frac{1}{4}x\sin x$$
是原方程的一个特解。

第三步，原方程的通解：
$$y=-\frac{1}{16}\cos 3x+\frac{1}{4}x\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

5.3 Euler方程

形如
$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$$
的方程称为Euler方程。作自变量变换
$$s=\ln x\ (x>0)\quad 或\quad s=\ln|x|\ (x<0)$$
可以将Euler方程化为常系数线性方程。

例6求方程
$$x^2y''+3xy'+2y=3x^6(x>0)$$
的通解。

解：第一步：将Euler方程做变换。
令
$$x=e^s.$$
则
$$\begin{aligned}&s=\ln x\\&\tfrac{dy}{dx}=\tfrac{dy}{ds}\tfrac{ds}{dx}=\tfrac{dy}{ds}\tfrac{1}{x}\\&\tfrac{d^2y}{dx^2}=\tfrac{d}{dx}\left[\tfrac{dy}{ds}\tfrac{1}{x}\right]=\tfrac{d^2y}{ds^2}\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{dy}{ds}\tfrac{1}{x^2},\end{aligned}$$
代入方程，得到
$$\frac{d^2y}{ds^2}+2\frac{dy}{ds}+2y=3e^{6s}.$$

第二步：求齐次方程的通解：

$$\frac{d^2y}{ds^2}+2\frac{dy}{ds}+2y=0.$$

特征方程

$$\lambda^2+2\lambda+2=0.$$

特征根$\lambda_{1,2}=-1\pm i$. 因此得到方程的通解：

$$y=e^{-s}\left[C_1\cos s+C_2\sin s\right].$$

第三步：求非齐次方程的一个特解：

$$\frac{d^2y}{ds^2}+2\frac{dy}{ds}+2y=3e^{6s}.$$

6不是特征根，令

$$\psi_*(s)=ae^{6s}$$

将待定解求导

$$\psi_*'(s)=6ae^{6s},\quad \psi_*''(s)=36ae^{6s},$$

代入原方程：

$$36ae^{6s}+12ae^{6s}+2ae^{6s}=3e^{6s},$$

得

$$36a+12a+2a=3,$$

$$a=\frac{3}{50}.$$

得到非齐次方程的一个特解：

$$\psi_*(s)=\frac{3}{50}e^{6s},$$

于是得到非齐次方程的通解：

$$y=\frac{3}{50}e^{6s}+e^{-s}\left[C_1\cos s+C_2\sin s\right].$$

故得到原非齐次方程的通解：

$$y=\frac{3}{50}x^6+\frac{1}{x}\left[C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x\right].$$

6 线性微分方程组

考察线性高阶常系数非齐次微分方程：对n阶线性非齐次微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x), \tag{1}$$

令

$$y_1=y,\ y_2=y',\ \cdots,\ y_n=y^{(n-1)},$$

则n阶线性非齐次微分方程等价于下列n阶微分方程组：

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx}=y_2, \\ \cdots, \\ \frac{dy_{n-1}}{dx}=y_n, \\ \frac{dy_n}{dx}=-a_1(x)y_n-\cdots-a_n(x)y_1+f(x). \end{cases} \tag{2}$$

这里等价的含义是：若函数

$$y=\varphi(x)$$

是(1)的解，则由它导出的函数组

$$y_1=\varphi(x),\ y_2=\varphi'(x),\ \cdots,\ y_n=\varphi^{(n-1)}(x)$$

是(2)的解；反之，若函数组

$$y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\ \cdots,\ y_n=\varphi_n(x)$$

是(2)的解，则其中的第一个函数

$$y=\varphi_1(x)$$

是(1)的解。

一般线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+\cdots+a_{1n}(x)y_n+f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx}=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+\cdots+a_{2n}(x)y_n+f_2(x), \\ \cdots, \\ \frac{dy_n}{dx}=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+\cdots+a_{nn}(x)y_n+f_n(x). \end{cases} \tag{3}$$

其中函数$a_{ij}(x)$，$f_i(x)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$在区间I上都是连续的。记

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},\ F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

则线性微分方程组可写成

$$Y'=A(x)Y+F(x) \qquad (4).$$

称

$$Y' = A(x)Y \tag{5}$$

为<u>线性齐次方程(组)</u>；若$F(x) \neq \mathbf{0}$，则称（4）为<u>线性非齐次方程(组)</u>。

例1 解方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2, \\ \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

解：采取消元法，将方程组化成高阶方程。将第一个方程解出y_2，得

$$y_2 = \frac{y_1' - y_1}{2}.$$

将上式带入第二个方程，得

$$\frac{y_1'' - y_1'}{2} = 3y_1 + y_1' - y_1,$$

即

$$y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 0.$$

解之

$$y_1 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}.$$

从而原方程组的解为

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}, \\ \\ y_2 = \frac{3C_1}{2} e^{4x} - C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

例2 设λ为常数，求解方程组

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{即} \quad \begin{cases} z_1' = \lambda z_1 + z_2 \\ \\ z_2' = \lambda z_2 \end{cases}$$

解：将方程组写成

$$\begin{cases} \left(e^{-\lambda x} z_1\right)' = e^{-\lambda x} z_2 \\ \\ \left(e^{-\lambda x} z_2\right)' = 0, \end{cases} \qquad \text{故} \qquad \begin{cases} e^{-\lambda x} z_2 = C_2, \\ \\ e^{-\lambda x} z_1 = C_1 + C_2 x \end{cases}$$

其中C_1, C_2为任意常数。所以

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \\ 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

形如

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \cdots, \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{cases} \quad (6)$$

的n阶微分方程组称为<u>n阶线性常系数齐次微分方程组</u>。记

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则(4)可写成

$$\frac{dY}{dx} = AY.$$

由线性代数知识，对任何一个$n \times n$ 阶实矩阵A，必存在一个$n \times n$ 阶可逆实矩阵$\mathbf{P}$使得

$$\mathbf{P}^{-1}A\mathbf{P} = diag\left(\mathbf{J}_1, \cdots, \mathbf{J}_s\right),$$

其中$\mathbf{J}_j$为如下形式之一：

(i) $\mathbf{J}_j \in \mathbf{M}_{n_j}(\mathbf{R})$，$n_j \geq 1$，$\mathbf{J}_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}$；

(ii) $\mathbf{J}_j \in \mathbf{M}_{2n_j}(\mathbf{R})$，$n_j \geq 1$，$\mathbf{J}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_j & \mathbf{I}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbf{I}_2 \\ & & & \mathbf{B}_j \end{pmatrix}$，其中$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$，$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\beta_j \neq 0.$

对于n阶线性常系数齐次微分方程组

$$Y' = AY \quad (7)$$

其中$A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. 令$Y = \mathbf{P}Z$，则

$$\begin{aligned} Z' &= \mathbf{P}^{-1}Y' = \mathbf{P}^{-1}AY = \mathbf{P}^{-1}A\mathbf{P}Z \\ &= diag\left(\mathbf{J}_1, \cdots, \mathbf{J}_s\right)Z. \end{aligned}$$

因此原来n阶线性常系数齐次微分方程组分解成s个互不耦合的方程组。

特别，当矩阵A可对角化时，即存在一个$n \times n$ 阶可逆实矩阵$\mathbf{P}$使得

$$\mathbf{P}^{-1} A \mathbf{P} = diag\left(\lambda_1, \cdots, \lambda_n\right),$$

令$Y = \mathbf{P} Z$，则$Y' = AY$化为

$$\begin{aligned} Z' &= \mathbf{P}^{-1} Y' = \mathbf{P}^{-1} A Y = \mathbf{P}^{-1} A \mathbf{P} Z \\ &= diag\left(\lambda_1, \cdots, \lambda_n\right) Z. \end{aligned}$$

因此$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \cdots, z_n = C_n e^{\lambda_n x}$,从而

$$Y = \mathbf{P} \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 x} \\ C_2 e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 x} \mathbf{P_1} + C_2 e^{\lambda_2 x} \mathbf{P_2} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \mathbf{P_n}$$

其中$\mathbf{P_i}$为矩阵$\mathbf{P}$的第i列.