《微积分A2》第二十七讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年05月20日

Definition

定义: 形如 $\sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k$ 的函数级数称为幂级数.

Theorem

定理: 对于幂级数 $\sum a_k x^k$, 若记 $\rho = \overline{\lim}_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, $R=\rho^{-1}$, 则幂级数的收敛情况如下:

(i) 当 $0<\rho<+\infty$, 则幂级数 $\sum a_k x^k$ 在开区间 $(-R,R)$ 上处处绝对收敛;

(ii) 当 $\rho=0$, 则 $R=+\infty$, $\sum a_k x^k$ 在实轴上处处绝对收敛;

(iii) 当 $\rho=+\infty$, 则 $R=0$, $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ 对任意 $x\neq 0$ 均发散.

注: 在区间端点 $x=\pm R$ 处, 幂级数 $\sum a_k x^k$ 的收敛情况尚需进一步确定.

收敛半径

Definition

<u>定义</u>: 定理中的 $R=\rho^{-1}$, $\rho=\overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$, 称为幂级数 $\sum_{k\geq 0}a_kx^k$ 的收敛半径. 具体说来,

(i) 当 $0<\rho<+\infty$ 时, 称幂级数的收敛半径为 R;

(ii) 当 $\rho=0$ 时, 则幂级数的收敛半径为 $R=+\infty$;

(iii) 当 $\rho=+\infty$, 则幂级数的收敛半径为 $R=0$;

(iv) 开区间 $(-R,R)$ 称为幂级数的收敛区间.

例五: 考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 5^k x^{3k}. \quad (*)$$

令 $t = 5x^3$, 并考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t^k. \quad (**)$$

显然幂级数(**) 收敛 $\Longleftrightarrow$ $|t| < 1$. 因此幂级数(*) 收敛 $\Longleftrightarrow$ $|5x^3| < 1 \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

定理证明

证: 回忆 Cauchy 根值判别法: 对非负级数 $\sum u_n$, 记

$$\rho = \overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}. \quad (\text{允许 } \rho = +\infty).$$

若 $\rho < 1$, 则级数收敛; 若 $\rho > 1$, 则级数发散. 将这个判别法用于幂级数 $\sum a_k x^k$, 考虑

$$\sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|}|x|,$$

并记 $\rho = \overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$.

证明续一

情形一: $0 < \rho < +\infty$. 此时

$$\overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k x^k|} = \overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}|x| = \rho|x|.$$

因此当 $\rho|x| < 1$, 即 $|x| < \rho^{-1} = R$ 时, 幂级数绝对收敛; 当 $\rho|x| > 1$, 即 $|x| > \rho^{-1} = R$ 时, 幂级数发散.

情形二: $\rho = 0$. 此时

$$\overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k x^k|} = \overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}|x| = 0.$$

因此幂级数对任何实数 x 均绝对收敛.

证明续二

<u>情形三</u>: $\rho = +\infty$. 此时对于任意 $x \neq 0$,

$$\overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k x^k|} = \overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}|x| = +\infty.$$

因此幂级数对任何实数 $x \neq 0$ 均发散. 定理得证. □

设幂级数 $\sum a_k x^k$ 的收敛半径为 R, 则幂级数在开区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛. 一般不能期待幂级数在 $(-R, R)$ 上一致收敛. 例如幂级数 $\sum x^k$ 的收敛半径为 $R = 1$. 已证幂级数在 $(-1, 1)$ 上非一致收敛. 然而幂级数具有一个良好的性质: 内闭一致收敛性, 即幂级数在其收敛域 $(-R, R)$ 内的任意闭区间上一致收敛.

Theorem

定理: 设幂级数 $\sum a_k x^k$ 的收敛半径为 $R > 0$, 则对 $\forall r \in (0, R)$, 幂级数在闭区间 $[-r, r]$ 上一致收敛. (这个性质称为幂级数的内闭一致收敛性).

定理证明

Proof.

证: 由于 $|a_k x^k| \leq |a_k| r^k, \forall x \in [-r, r]$, 并且级数 $\sum |a_k| r^k$ 收敛, 故根据 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum a_k x^k$ 在闭区间 $[-r, r]$ 上一致收敛. 证毕. □

Theorem

定理: 设幂级数 $\sum a_k x^k$ 的收敛半径 $R > 0$, 和函数为 $S(x)$, 则

(i) $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上连续;

(ii) 若级数 $\sum a_k R^k$ 收敛, 则 $S(x)$ 在 $(-R, R]$ 上连续;

(iii) 若级数 $\sum a_k (-R)^k$ 收敛, 则 $S(x)$ 在 $[-R, R)$ 上连续.

证(i). 根据幂级数的内闭一致收敛性知, 对幂级数 $\sum a_k x^k$ 在任意闭区间 $[-r, r] \subset (-R, R)$ 上一致收敛. 因此根据连续性守恒定理知, 和函数 $S(x)$ 在闭区间 $[-r, r]$ 上连续. 由于 $r \in (0, R)$ 任意, 故 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上处处连续. 结论(i) 得证.

证(ii). 设级数 $\sum a_k R^k$ 收敛，考虑级数 $\sum a_k x^k$, $x \in [0, R]$. 注意这个级数可以写作

$$\sum a_k x^k = \sum a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k.$$

由于级数 $\sum a_k R^k$ 一致收敛(常数级数)，并且 $(\frac{x}{R})^k$ 关于 k 单调且一致有界，根据 Abel 一致收敛判别法可知，级数 $\sum a_k x^k$ 在区间 $[0, R]$ 上一致收敛. 因此和函数 $S(x)$ 在 $[0, R]$ 上连续，从而在 $(-R, R]$ 上连续.

(iii) 的证明基本同(ii). 定理得证. $\square$

定理: 设幂级数 $\sum a_k x^k$ 的收敛半径 $R>0$, 和函数为 $S(x)$, 则

(i) $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 上连续可微, 且 $S'(x)=\sum k a_k x^{k-1}$, 此即可逐项微分

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right]' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \forall x \in (-R,R),$$

(ii) 在区间 $(-R,R)$ 上可以逐项积分. 例如

$$\int_0^x \left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right] dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x a_k t^k dt, \quad \forall x \in (-R,R),$$

亦即

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

定理证明

证(i): 注意到幂级数 $\sum a_k x^k$ 逐项求导后的幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} \quad (*)$$

的收敛半径均为 R. 这是因为根据上极限性质有

$$\overline{\lim} \sqrt[k]{|ka_k|} = \lim \sqrt[k]{k}\, \overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

故级数(*)在开区间 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛, 即 $\forall r \in (0, R)$, 幂级数(*)在开区间 $[-r, r]$ 上一致收敛. 根据函数级数逐项求导定理(见May18讲义第32页定理)知, 幂级数 $\sum a_k x^k$ 的和函数 $S(x)$ 在 $(-r, r)$ 上连续可微, 且

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kx^{k-1},\quad \forall x\in(-r,r).$$

因 $r\in(0,R)$ 任意，故 $S(x)$ 在开区间 $(-R,R)$ 上连续可微，且

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kx^{k-1},\quad \forall x\in(-R,R).$$

即结论(i)成立.

证(ii)：由于幂级数 $\sum a_kx^k$ 在开区间 $(-R,R)$ 上内闭一致收敛，故对于任意闭区间 $[a,b]\subset(-R,R)$，$\sum a_kx^k$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于和函数 $S(x)$. 根据逐项积分定理知

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_a^b x^k dx.$$

特别取闭区间 $[0, x]$ 或 $[x, 0]$ 则有

$$\int_0^x \left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right] dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

即结论(ii)成立. 定理得证. □

推论

Corollary

推论: 幂级数 $\sum a_k x^k$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内无穷次可微, 且

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right]' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \forall x \in (-R, R);$$

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right]'' = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}, \quad \forall x \in (-R, R);$$

$$\vdots$$

例：求如下幂级数的和函数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k.$$

解：显然幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ 的收敛半径为 $R=1$，且它的和函数为

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

对上述恒等式两边求导得

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

于上式两边同乘 x 即得

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

解答完毕.

例：求如下幂级数的和函数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}k(k+1)x^k. \quad (*)$$

进一步由此求出如下数项级数的和

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2^k}.$$

解：记幂级数(*) 的和函数为 $S(x)$. 显然幂级数(*) 的收敛半径 $R=1$，因为 $\sqrt[k]{k(k+1)}=\sqrt[k]{k}\sqrt[k]{k+1}\to 1\cdot 1=1$, $k\to+\infty$.

于恒等式

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} k(k+1) x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

两边积分得

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left[\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} k(k+1) t^k \right] dt$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x (-1)^{k+1} k(k+1) t^k dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} k x^{k+1}$$

$$= x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1} = x^2 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} x^k \right]'$$

例二续二

$$= x^2 \left[\frac{x}{1+x} \right]' = x^2 \left[1 - \frac{1}{1+x} \right]' = \frac{x^2}{(1+x)^2}.$$

于是我们得到

$$\int_0^x S(t)dt = \left[\frac{x}{1+x} \right]^2, \quad \forall x \in (-1,1)$$

对上式求导得

$$S(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{1+x} \right]^2 = 2 \left[\frac{x}{1+x} \right] \left[\frac{x}{1+x} \right]'$$

$$= \frac{2x}{(1+x)^3}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

即

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}k(k+1)x^k=\frac{2x}{(1+x)^3},\quad \forall x\in(-1,1).$$

于上式中令 $x=\frac{1}{2}$，则

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2^k}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^3}=\frac{8}{27}.$$

解答完毕.

例：求如下级数的和

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

解：已证

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x},\quad \forall x\in(-1,1).$$

对上述等式积分得

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x),\quad \forall x\in(-1,1).$$

即幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=-\ln(1-x),\quad \forall x\in(-1,1).$$

由于上式左边的幂级数在点 $x=-1$ 处收敛 (Leibniz 型级数), 故和函数 $-\ln(1-x)$ 在点 $x=-1$ 处(右)连续. 因此

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=-\ln 2 \quad 或 \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k}}{k+1}=\ln 2,$$

$$即 \quad \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2.$$

解答完毕. (注: 之前我们已经用两种不同的方法计算出这个级数的和).

Definition

定义：如果函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的一个邻域 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 内，可以表示为如下幂级数形式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), \qquad (*)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处解析，而表达式(*) 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的幂级数展开式.

解析的必要条件

Theorem

定理: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处解析，即 $f(x)$ 有如下展式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k,\quad \forall x\in(x_0-r,x_0+r)$$

成立，则函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-r,x_0+r) 无穷次可微，即 $f(x)$ 是 C^∞ 的.

Proof.

证明: 因为幂级数是 C^∞ 的. □

系数的确定

Theorem

定理: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处解析, 即 $f(x)$ 有如下展式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r),$$

则

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \forall k \geq 0.$$

Corollary

推论: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处解析, 那么 $f(x)$ 的幂级数展开式唯一.

证: 在 $f(x)$ 的幂级数展式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k,\quad \forall x\in(x_0-r,x_0+r),\quad (*)$$

中, 令 $x=x_0$ 得 $f(x_0)=a_0$. 对式 (*) 求导得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3(x-x_0)^2+\cdots,$$

其中 $x\in(x_0-r,x_0+r)$. 于上式令 $x=x_0$ 得 $f'(x_0)=a_1$. 对式 (*) 求导 k 次, 则

$$f^k(x)=k!a_k+(k+1)k(k-1)\cdots 2a_{k+1}(x-x_0)+\cdots,$$

其中 $x\in(x_0-r,x_0+r)$.

于上式令 $x = x_0$ 得 $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$, 即

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \forall k \geq 0.$$

证毕. $\square$

Theorem

定理: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处解析, 那么 $f(x)$ 可表示为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad (*)$$

其中 $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

证: 定理是上述系数定理的直接推论. □

注: 式 (*)称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 Taylor 级数. 特别当 $x_0 = 0$ 时, Taylor 级数 (*) 称为 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数.

n 阶 Taylor 展式与 Taylor 级数之区别

回忆当函数 $f(x)$ 在开区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上 n 次连续可微时，$f(x)$ 在这区间上可表为如下 n 阶 Taylor 展式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 称为余项. Peano 余项和 Lagrange 余项是两种常见的余项.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处解析是指，$f(x)$ 在某开区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 可表为如下幂级数，即 Taylor 级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

例: 令

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

上个学期已证(?)函数 $f(x)$ 在实轴上无穷次连续可微, 即 C^∞ 函数, 且 $f^{(k)}(0)=0,\ \forall k\geq 0$. 特别 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处是 C^∞ 的. 显然函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处非解析. 因为如果 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处解析, 则 $f(x)$ 在某个开区间 (x_0-r,x_0+r) 可表为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k\equiv 0,$$

矛盾. 这个例子表明解析比 C^∞ 要求更高. 有时称解析函数为 C^ω 函数.

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $J=(x_0-r,x_0+r)$ 上无穷次可微. 若函数 $f(x)$ 的各阶导数在区间 J 上一致有界, 即存在 $M>0$, 使得

$$|f^{(k)}(x)|\leq M,\quad \forall k\geq 1,\quad \forall x\in J,$$

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处解析.

证: 由于 f 是 C^∞ 的, 故对任意正整数 n, 函数 $f(x)$ 在 J 上有 n 阶 Taylor 展式 $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$, 其中

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\qquad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

于是

$$|f(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!}$$

$$\leq\frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!},\qquad \forall x\in J=(x_0-r,x_0+r).$$

这表明在区间 J 上, $S_n(x)\rightrightarrows f(x)$. 定理得证. $\square$

例：证明函数 e^x 在任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处均解析，且 e^x 在任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的 Taylor 级数为

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

特别函数 e^x 的 Maclaurin 级数为

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

指数函数 e^x 有许多等价的定义. 例如

(i). $e^x \triangleq \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(ii). e^x 定义为常微分方程 Cauchy 初值问题 $y' = y$, $y(0) = 1$ 的唯一解;

(iii). $e^x \triangleq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

例一续二

我们在这里的将函数 e^x 看作由为常微分方程 Cauchy 初值问题 $y' = y$, $y(0) = 1$ 所定义的唯一解，其定义区间为整个实轴. 先证 e^x 的 Maclaurin 级数. 由 e^x 的定义知 $[e^x]' = e^x$, 由此可知 $[e^x]^{(k)} = e^x$. 于是对任意正数 $R > 0$

$$\left|[e^x]^{(k)}\right| = |e^x| \leq e^R, \quad \forall x \in (-R, R).$$

这说明函数 e^x 的各阶导数在区间 $(-R, R)$ 上一致有界.

根据解析充分条件可知函数 e^x 在点 $x=0$ 处解析，且 e^x 在点 $x=0$ 处的 Taylor 级数，即 Maclaurin 级数为

$$e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k,\quad \forall x\in(-R,R).$$

由于 R 是任意给定的正数，故上述在整个实轴上成立，即

$$e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

对任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$，根据 e^x 的 Maclaurin 级数可得

$$e^x = e^{x_0} e^{x-x_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

这说明 e^x 在点 x_0 处解析，且上式就是 e^x 在点 x_0 处的 Taylor 级数．点 x_0 任意，故函数 e^x 在实轴上处处解析．证毕．

可以证明，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处解析，即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\quad \forall x\in J=(x_0-r,x_0+r),$$

则 $f(x)$ 在区间 J 的每一点解析，即对任意 $x_1\in J$，存在正数 $r_1<r$，使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}(x-x_1)^k,\quad \forall x\in(x_1-r_1,x_1+r_1).$$

这表明，函数在一点解析意味着它在这一点的一个邻域内的处处解析. 详见阿黑波夫等《数学分析讲义》第三版第329页，定理29. 高等教育出版社，2006年.

例: 求函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的 Maclaurin 级数.

解: 这里取函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的定义依次为如下两个微分方程的初值问题的解

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

可以证明, 仅仅利用上述微分方程以及初值条件, 就可证明函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 各项熟知的性质, 例如周期性, 和角公式等.

例二续一

回忆上个学期已经证明 $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$. 由此得

$$|\cos^{(k)}(x)| = \left|\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right| \le 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

根据函数解析的充分条件知, $\cos x$ 在整个实轴上解析. 进一步 $\cos^{(k)}(0) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$. 于是

$$\cos^{(2k-1)}(0) = 0, \quad \cos^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

例二续二

于是就得到函数 $\cos x$ 的 Maclaurin 级数为

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

类似可证，函数 $\sin x$ 的 Maclaurin 级数为

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

解答完毕.

作业

习题6.2(page 281): 2, 3, 4, 5, 6, 7.

(题3提示: 将函数 x^x 按指数函数 $x^x = e^{x\ln x}$ 展开, 然后逐项积分)

习题6.3 (page 291-292): 1(1)(3)(5)(7)(9), 2(1)(3)(5), 3(1)(3)(5), 4(1)(3), 5, 7, 9.