运筹学第 13 周作业（20220518）

1.【知识点：凸函数判别】构造同时满足以下条件的函数 $f(X):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 及凸集 Ω：

   (a) $f(X)$ 为二阶连续可导函数，

   (b) $f(X)$ 在 Ω 上是凸函数，

   (c) 对任意的 $X\in\Omega$，$\nabla^2 f(X)$ 均不是正定或半正定矩阵。

2.【知识点：约束优化问题最优性条件】判断以下说法是否正确，并说明理由（若不正确，最好能给出反例）：

   考虑约束优化问题 $\min\left\{f(X)\ |\text{s.t. } g_i(X)\geq 0,\ 1\leq i\leq l\right\}$。若 $\hat{X}$ 是该问题的可行解，且在 $\hat{X}$ 处没有可行下降方向，则 $\hat{X}$ 是该问题的局部最优解。

3. 模仿课件中对标准线性规划问题的推导，推导出如下一般线性规划问题的拉格朗日对偶问题：

$$\min_{\boldsymbol{x}}\Big\{\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_j,\ \forall i=1,...,m\Big\}.$$

4. 证明课堂上提到的“Lagrange 对偶问题是凸优化问题”。

5. 分别用课件中的“深探法”和“广探法”求下图的支撑树（以 a 为起点）：

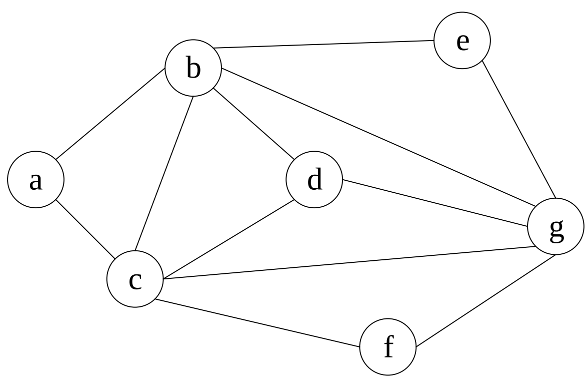

图 1: 第 5 题图

6. 分别用 Kruskal 算法和 Dijkstra 算法求图的最小支撑树（图见下一页）。

备注：同学们可手写后拍照并扫描上传至网络学堂，或直接完成电子版后上传，截止日期为下周二晚 23:59 前，以网络学堂实际截止时间为准。

请同学们认真独立完成作业。

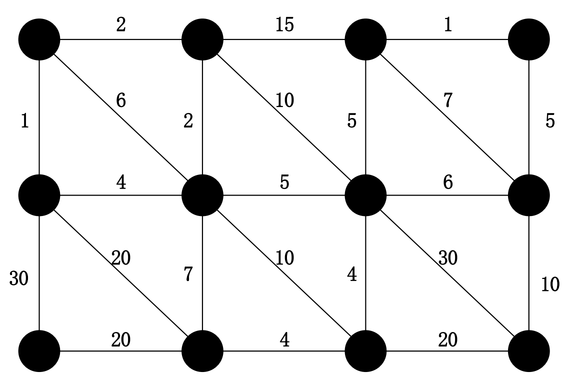

图 2: 第 6 题图