微积分A2第五次习题课讨论题　　　　杨利军　Apr 06-11, 2020

一. 极值问题

1. 证明如下定理: 设 n 元函数 $f(x)$ 在开区域 $D \subset R^n$ 上二阶连续可微. 记 $H(x)$ 为 $f(x)$ 的 Hesse 矩阵. (i) 若 $x_0 \in D$ 是 f 的极小值点, 则 $H(x_0)$ 半正定; (ii) 若 $x_0 \in D$ 是 f 的极大值点, 则 $H(x_0)$ 半负定.

2. 设 n 元函数 $f(x)$ 在全空间 $\mathbb{R}^n$ 上二阶连续可微. 若 f 的 Hesse 矩阵 $H(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处正定. 证明函数 $f(x)$ 至多有一个临界点.

3. 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数. 用线性三角函数 $g(x) = A + B\cos x + C\sin x$ 平均逼近 $f(x)$ 逼近函数 $f(x)$, 是得误差

$$\sigma(A,B,C) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big[A + B\cos x + C\sin x - f(x)\Big]^2 dx$$

达到最小.

注：上述结论的进一步推广就是 Fourier 级数的最佳均方逼近性质. 可参见课本7.2节.

4. 设正数 $p, q > 0$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 求函数 $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x, y > 0$ 里满足约束条件 $xy = 1$ 的最小值. 由此进一步证明 Young 不等式

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy, \quad \forall x, y > 0. \tag{1}$$

注：这是课本第97页第一章总复习题的第16题. 在一元微分学里, 我们已经学习过利用极值理论证明一些不等式. 利用多元函数的极值理论, 我们同样可以得到一些的不等式. 本题就是一个很好的例子.

5. 证明高维 Rolle 定理：设 n 元函数 $f(x)$ 在开球域 $B_r(x_0)$ 上可微, 在闭球 $\overline{B_r}(x_0)$ 上连续. 若 $f(x)$ 在边界 $\partial B_r(x_0)$ 即在球面 $\|x-x_0\|=r$ 上的函数值为常数, 则在开球域 $B_r(x_0)$ 内存在一点 $\xi\in B_r(x_0)$, 使得 $\nabla f(\xi)=0$. (注: 上述 Rolle 定理可推广如下: 设 $D\subset \mathbb{R}^n$ 为平面有界凸区域, 函数 $f(x)$ 在闭区域 $\bar{D}$ 上连续, 在开区域 D 上二阶连续可微. 若 $f(x)$ 在边界 ∂D 上恒为常数, 即 $f(x)=C, \forall x\in\partial D$, 则函数 $f(x)$ 在开区域 D 内存在临界点.)

6. 设 n 元函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域 $B_r(x_0)$ 上可微.
(i) 若 $(x-x_0)\cdot\nabla f(x)>0, \forall x\in B_r(x_0)\backslash\{x_0\}$, 证明 x_0 是 f 的严格极小点；
(ii) 若 $(x-x_0)\cdot\nabla f(x)<0, \forall x\in B_r(x_0)\backslash\{x_0\}$, 证明 x_0 是 f 的严格极大点.

二．关于多元函数的一致连续性

1. 证明一元函数 $\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续. 进一步证明二元函数 $\sin(x^2+y^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上非一致连续。(课本第103页习题2.1题1中, 遗漏了一个关键的否定字“不”. 本题是对这道题目的更正)

三. 关于含参变量积分

1． 利用 Dirichlet 积分公式
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2},$$
以及广义含参积分的连续性定理证明, 积分
$$I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{t}dt$$
关于 $x\in[-a,a]$ 非一致收敛, $\forall a>0$. (注: 这是课本习题2.1第8题, page 104)

2． 利用积分号下求导方法, 计算积分
$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx,$$

其中 $a \in [0,1)$ 为参变量.

3. 利用等式

$$\frac{\ln(1+a\cos x)}{a\cos x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+ay\cos x}, \quad 0 \le x \le 2\pi,$$

计算积分

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}, \quad a \in (-1,1).$$

4. 求出由积分

$$\int_0^x dt \int_t^x e^{-s^2} ds$$

所定义的函数及其导函数.

5. 设

$$f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}} dy,$$

求 $f'(x)$.

6. 求极限

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2}.$$

7. 记 $f(x) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+t^2}dt$. 证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数 $f'_+(0)$ 存在, 并求出 $f'_+(0)$.