§ 3. 向量值函数的极限与连续

1. 向量值函数在一点的极限

Def. $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, x_0\in\mathbb{R}^n, \mathrm{A}\in\mathbb{R}^m$, f在x_0的某个去心邻域$B_0(x_0,r)$中有定义. 若$\forall\varepsilon>0, \exists\delta\in(0,r), s.t.$

$$\|f(x)-\mathrm{A}\|<\varepsilon,\quad \forall x\in B_0(x_0,\delta),$$

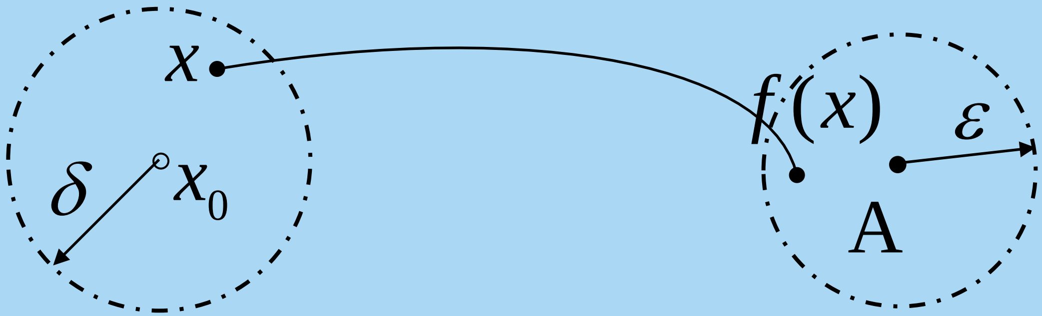
则称$x\to x_0$时, $f(x)$以A为极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$.

Remark. 令$m=1$, 得到n元函数在一点的极限的定义.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in(0,r), s.t.\\ \left|f(x)-\mathrm{A}\right|<\varepsilon, \forall 0<\|x-x_0\|<\delta\end{array}}$$

Remark. 向量值函数在一点的极限的几何意义.

$$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, x_0\in\mathbb{R}^n, \mathrm{A}\in\mathbb{R}^m, \lim_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}:$$



Remark. 若向量值函数的极限存在, 则极限必唯一.

Remark. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$, 则:

不论动点x沿什么路径趋于定点x_0, 都有$f(x)\to\mathrm{A}$.

Question. 如何证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在？

例. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$是否存在？

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{xy}{x+y} = 0,$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}} \frac{xy}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-x^2}{x^2} = -1.$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$不存在. □

例. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}$

解: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 只要 $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, 就有

$$\left| \frac{xy^2}{x^2+y^2+y^4} - 0 \right| \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2+y^4} = 0.$ □

Question. 多元函数在一点的极限的和、差、积、商（分母不为0）有何性质？

Question. 多元复合函数在一点的极限有何性质？

Question. 多元函数的极限是否有保序性、夹挤原理？

$$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\text{即}f=\left(f_1,f_2,\cdots,f_m\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\text{其中}f_i:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},i=1,2,\cdots,m.$$

Thm. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\mathrm{A}=\left(a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(m)}\right)$

$$\Leftrightarrow\quad\lim_{x\to x_0}f_i(x)=a^{(i)},i=1,2,\cdots,m.$$

Thm. $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n$,若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在, 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(2) $m=1$时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(3) $m=1$且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$时, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Thm. $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l,\ g:f(\Omega)\subset\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$,若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A},\ \lim_{y\to \mathrm{A}} g(y)=\mathrm{B},$$

且$\exists B(x_0,\delta)\subset\Omega, s.t. \forall x\in B(x_0,\delta)$,有$f(x)\neq \mathrm{A}$,则

$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=\mathrm{B}.$$

Thm. (夹挤原理)$f,g,h:B_0(x_0,\delta)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,若

$$f(x)\le g(x)\le h(x),\forall x\in B_0(x_0,\delta),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=\mathrm{A},$$

则
$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\mathrm{A}.$$

例. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$

解: $\ln\,(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\;(x^2+y^2)\ln\,(x^2+y^2),$

当 $x\to 0, y\to 0$时, $0<\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}y^2\le y^2\to 0.$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$

又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln\,(x^2+y^2)=\lim\limits_{t\to 0}t\ln t=0.$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\ln\,(x^2+y^2)^{x^2y^2}=0,$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}=e^0=1.\ \square$$

清華大學

Thm.(Cauchy准则) 设$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$在$B_0(x_0,r)$中有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in B_0(x_0,\delta),\text{都有}\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon.$$

Thm. 设$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$在$B_0(x_0,r)$中有定义，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}\text{对}B_0(x_0,r)\text{中收敛到}x_0\text{的任意点列}\{x_k\},\\ \text{都有}\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k)=\mathrm{A}.\end{array}\right)$$

Def. $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, x_0\in\partial\Omega, A\in\mathbb{R}^m, \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, s.t.$

$$\|f(x)-\mathrm{A}\|<\varepsilon,\quad \forall x\in\Omega\bigcap B_0(x_0,\delta),$$

则称x在Ω内趋于x_0时$f(x)$以A为极限, 记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x)=\mathrm{A}$,

不引起混淆的情况下, 也简记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}.$

例. $c>0, \Omega_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y>0\right\}, \Omega_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y<0\right\},$

$\Omega_3=\Omega_1\bigcup\Omega_2$. 求 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(c,0)\\ (x,y)\in\Omega_i}} e^{-\frac{x^2}{y}}, i=1,2,3.$

解：$(x,y)\in\Omega_1,(x,y)\to(c,0)$时，$-\dfrac{x^2}{y}\to-\infty,$

$(x,y)\in\Omega_2,(x,y)\to(c,0)$时，$-\dfrac{x^2}{y}\to+\infty,$

故 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(c,0)\\(x,y)\in\Omega_1}} e^{-\frac{x^2}{y}}=0,\quad \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(c,0)\\(x,y)\in\Omega_2}} e^{-\frac{x^2}{y}}=+\infty,$

而 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(c,0)\\(x,y)\in\Omega_3}} e^{-\frac{x^2}{y}}$不存在. □

Remark. $\lim\limits_{(x,y)\to(c,0)} e^{-\frac{x^2}{y}}$不存在. 默认$(x,y)\in\Omega_3$.

例. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

解: 当$x>0, y>0$时，$0<\dfrac{xy}{x^2+y^2}<\dfrac{1}{2}$，故

$$0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2},$$

由夹挤原理,

$$\lim_{x\to+\infty,\ y\to+\infty}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.\ \square$$

清華大學

2. 累次极限

Def.(累次极限) $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \triangleq \lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \triangleq \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

Remark. 任意固定$y\neq y_0$, 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在, 记为

$$g(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

若$\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=A$, 则$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=A.$

Remark. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$称为二重极限.

例. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$在原点的二重极限与累次极限.

解: 先考虑累次极限. $\forall y\neq 0$,

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{y^2}=0,$$

于是$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$. 同理$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$.

再看二重极限.

$$\lim_{y=kx,x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

即(x,y)沿不同的曲线$y=kx$趋于$(0,0)$时, $f(x,y)$有不同的极限$k/(1+k^2)$. 故二重极限不存在. □

例. 讨论$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y} & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$

在原点的二重极限和累次极限.

解: 先看二重极限. 对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$|f(x,y)|\leq\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}\right|\leq|x|+|y|,$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

再来考虑累次极限.

$$\forall x \neq 0,\ \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$$

不存在. 故累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

同理累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在. □

Remark. 累次极限与二重极限的关系.

(1) 累次极限的存在性 $\not\Rightarrow$ 二重极限的存在性;

(2) 二重极限的存在性 $\not\Rightarrow$ 累次极限的存在性;

(3) 二重极限与累次极限都存在

$$\Rightarrow \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

(4) $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$均存在且不相等

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$不存在.

3. 向量值函数的连续

Def. 设$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $x_0\in\Omega$, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 也即

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, s.t.$

$$\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in\Omega\bigcap B(x_0,\delta),$$

则称f在点x_0处连续, 称f的不连续点为间断点.

Def. 设$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 若$f$在$\Omega$上点点连续, 则称$f$在$\Omega$上连续, 记作$f\in C(\Omega)$.

Remark. $f=(f_1, f_1,\dots, f_m):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 则

$$f\text{在点}x_0\text{连续}\Leftrightarrow f_i\text{在点}x_0\text{连续}, i=1,2,\cdots m.$$

Thm.(1)多元连续函数的和、差、积、商(分母不为0处)均连续.

(2)连续向量值函数的和、差、数乘与复合都连续.

(3)$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $C(\Omega)$关于加法、数乘构成实数域上的一个无穷维线性空间.

(4)在开区域中定义的初等函数(幂、指数、对数、三角、反三角及其四则运算与复合)处处连续.

例：讨论 $f(x,y)=\begin{cases}1 & y=x^2, x>0 \\ 0 & \text{其它情形}\end{cases}$ 的连续性.

解：f 在开区域 $\{(x,y)\mid x\neq\sqrt{y}\}$ 中为初等函数，故处处连续. 而 f 在曲线 $x=\sqrt{y}$ 上每一点都不连续. 事实上，任取 (x_0,y_0)，$x_0=\sqrt{y_0}$，当点列 $\{P_k(x_k,y_k)\}$ 沿曲线 $x=\sqrt{y}$ 趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x_k,y_k)\to 1$；当点列 $\{P_k\}$ 沿直线 $x=x_0$ 趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x_k,y_k)\to 0$.□

例. 讨论$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$的连续性.

解：$\forall(x,y)\neq(0,0)$, 有

$$|f(x,y)-0|=\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\leq|x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$, $f(x,y)$在$(0,0)$连续.

$f(x,y)$在开区域中$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$中为初等函数, 处处连续.

故$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$中处处连续. □

Thm. 设$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, x_0\in\Omega$,则称$f$在点$x_0$处连续的充要条件是:对$\Omega$中任意点列$\{x_k\}$,当$\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k-x_0\|=0$时,有$\lim\limits_{k\to\infty}\|f(x_k)-f(x_0)\|=0$.

Question. $f(x)=\dfrac{1}{1+(1+xy)^{1/y}},\quad 0\le x\le 1, 0<y\le 1$,是否可以连续延拓到$D=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$上?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{1/y}}, & 0\le x\le 1, 0<y\le 1,\\[2ex] \dfrac{1}{1+e^x}, & 0\le x\le 1, y=0\end{cases}$$

在D上连续.

Thm.(最值定理) 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界闭集, $f\in C(\Omega)$, 则f在Ω上存在最大值M和最小值m, 即$\exists\xi,\eta\in\Omega, s.t.\forall x\in\Omega$, 都有

$$m=f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)=M.$$

Thm.(介值定理) 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为连通区域, $f\in C(\Omega), x_1,x_2\in\Omega$, $f(x_1)=\lambda\le\mu=f(x_2)$, 则$\forall\sigma\in[\lambda,\mu], \exists x\in\Omega, s.t. f(x)=\sigma$.

例. f在$\mathbb{R}^2$上连续, 当$x^2+y^2\neq 0$时, $f(x,y)>0$, 且$\forall c>0$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 有$f(cx,cy)=c^2 f(x,y)$. 求证: $\exists 0<a\le b$, $s.t.$

$$a(x^2+y^2)\le f(x,y)\le b(x^2+y^2),\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

证明: 在有界闭集 $S^1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$上, 连续函数 f有最大值b和最小值a. 注意到$f(x,y)>0$, 有$0<a\le b$.

$$\forall(x,y)\neq(0,0),\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\in S^1,$$

$$f(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$=(x^2+y^2)f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

故

$$a(x^2+y^2)\le f(x,y)\le b(x^2+y^2),\ \forall (x,y)\ne(0,0).$$

又f在$(0,0)$连续, 所以

$$f(0,0)=\lim_{x=y,x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)$$

$$=\lim_{x\to 0} x^2 f(1,1)=0.$$

故以上不等式对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$成立. □

4. 一致连续

Def. 设$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.$

$$\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon,\quad\forall x,x'\in\Omega,\|x-x'\|<\delta,$$

则称f在Ω上一致连续.

Thm. f在$\Omega\subset\mathbb{R}^n$上一致连续的充要条件是:

对Ω中任意两个点列$\{x_n\},\{y_n\}$,当$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$时,有

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0.$$

Thm. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界闭集, $f\in C(\Omega)$,则f在Ω上一致连续.

5. 无穷小函数的阶

Def. 设n元函数f在$B_0(x_0,r)$中有定义，$x\in\mathbb{R}^n$，记$\rho=\|x-x_0\|$.

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称$x\to x_0$时$f(x)$为无穷小函数(或无穷小量)，记作

$$f(x)=o(1),\quad x\to x_0.$$

(2)$k>0$，若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\rho^k}=0$，则称$x\to x_0$时$f(x)$是$\rho^k$的高阶无穷小，记作

$$f(x)=o(\rho^k),\quad x\to x_0.$$

(3)若$\exists c\neq 0, s.t. \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\rho^k}=c$,则称$x\to x_0$时$f(x)$是$k$阶无穷小函数, 记作

$$f(x)\sim c\rho^k,\quad x\to x_0.$$

(4)若$\exists M>0,\delta>0, s.t.$

$$|f(x)|<M\rho^k,\quad \forall x\in B_0(x_0,\delta),$$

则称$x\to x_0$时$f(x)$被ρ^k所控制, 记作

$$f(x)=O(\rho^k),\quad x\to x_0.$$

例. $f_1(x)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$,

$$f_2(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad (a_{ij}=a_{ji}),$$

证明:当$x\to 0$时, $f_1(x)=O(\|x\|)$, $f_2(x)=O(\|x\|^2)$.

Proof.(1) $|f_1(x)|=|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|$

$$\le(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$$

$$\le n(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)\|x\|,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

所以, $f_1(x)=O(\|x\|)$, $x\to 0$.

$$(2)\ f_2(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad (a_{ij}=a_{ji}).$$

令$\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, 则A为对称矩阵, $\exists$正交矩阵$Q, s.t.$

$\mathrm{QAQ}^{\mathrm{T}}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$为实对称阵. 令$x=y\mathrm{Q}$, 则

$$\frac{f_2(x)}{\|x\|^2}=\frac{x\mathrm{A}x^{\mathrm{T}}}{xx^{\mathrm{T}}}=\frac{y\mathrm{QAQ}^{\mathrm{T}}y^{\mathrm{T}}}{y\mathrm{QQ}^{\mathrm{T}}y^{\mathrm{T}}}=\frac{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}$$

$$\frac{|f_2(x)|}{\|x\|^2}\le|\lambda_1|+|\lambda_2|+\cdots+|\lambda_n|,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

所以, $f_2(x)=O(\|x\|^2), x\to 0.$ $\square$

作业：　习题1.3

No. 1(单),6(单),8,10(单)