第3章 函数的导数

学习材料(5)-2

1 导数的概念

例1（切线问题） 考虑方程为$y = f(x)$的曲线。为了求它在点$P(a, f(a))$处的切线方程T，（画图），我们首先在曲线上取P附近一个点$Q(x, f(x))$，计算割线PQ的斜率

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

曲线$y = f(x)$在点$P(a, f(a))$的切线T就是过点$P(a, f(a))$的一条直线，其斜率为

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

例2（速度问题） 假若一个物体沿着一条直线运动，其运动方程为$S = f(t)$，其中S是在时刻t物体离原点的距离。则物体在时间段$[t_0, t]$ 的平均速度为

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

令$t \to t_0$，称平均速度的极限

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

为物体在时刻t_0处的（瞬时）速度。

定义1 设I是一个开区间，f是定义在I上的函数，$x_0 \in I$. 若极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，则称函数f在x_0处<u>可导</u>，称此极限值为f在x_0处<u>导数</u>，记作

$$f'(x_0), \quad 或 \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0};$$

若单侧极限

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(相应地，\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

存在，则称此极限值为f在x_0处左导数 (右导数)，记作

$$f'_-(x_0) \text{（相应地，} f'_+(x_0)\text{）}.$$

注1 $f'(x_0)$存在的充分必要条件是$f'_-(x_0)$和$f'_-(x_0)$都存在，且$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

注2 极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$又常写成$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

例3 设$f:(a,b)\to R$是下凸函数，$x_0\in(a,b)$，则f在x_0处存在单侧导数$f'_-(x_0)$和$f'_+(x_0)$，且

$$f'_-(x_0)\le f'_+(x_0).$$

命题1

$$\begin{aligned}
&(1). \quad c'=0,\\
&(2). \quad (x^\mu)'=\mu x^{\mu-1};\\
&(3). \quad (a^x)'=a^x\ln a,\ \text{其中} a>0, a\neq 1,\\
&\qquad\ \ \text{特别}\ (e^x)'=e^x;\\
&(4). \quad (\log_a x)'=\tfrac{1}{x\ln a},\ \text{其中} a>0, a\neq 1,\\
&\qquad\ \ \text{特别}\ (\ln x)'=\tfrac{1}{x};\\
&(5). \quad \sin' x=(\sin x)'=\cos x,\\
&\qquad\ \ \cos' x=(\cos x)'=-\sin x,\\
&\qquad\ \ \tan' x=(\tan x)'=\tfrac{1}{\cos^2 x};.
\end{aligned}$$

证：
(2). $\forall x>0,\ h\in N^*(x,x)$，则

$$\begin{aligned}
\tfrac{(x+h)^\mu-x^\mu}{h} &= x^\mu\tfrac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu-1}{h}\\
&= x^{\mu-1}\tfrac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu-1}{\frac{h}{x}},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
(x^\mu)' &= x^{\mu-1}\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu-1}{\frac{h}{x}}\\
&= \mu x^{\mu-1}.
\end{aligned}$$

(3). $\forall x,\ h\in R$，其中$h\neq 0$，则

$$\tfrac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\tfrac{a^h-1}{h},$$

所以

$$\begin{aligned}(a^x)' &= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\\ &= a^x \ln a.\end{aligned}$$

(4). $\forall x>0$，$\forall h\in N^*(x,x)$，则

$$\begin{aligned}\tfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} &= \tfrac{1}{h}\log_a\left(1+\tfrac{h}{x}\right)\\ &= \tfrac{1}{x}\log_a\left(1+\tfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\\ &= \tfrac{1}{x}\tfrac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{\ln a},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \tfrac{1}{x\ln a}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\\ &= \tfrac{1}{x\ln a}.\end{aligned}$$

(5). $\forall x,\ h\in R$，其中$h\neq 0$，则

$$\begin{aligned}\tfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \tfrac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \sin x\tfrac{\cos h-1}{h}+\cos x\tfrac{\sin h}{h},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sin' x &= \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

$\forall x,\ h\in R$，其中$h\neq 0$，则

$$\begin{aligned}\tfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \tfrac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\ &= \cos x\tfrac{\cos h-1}{h}-\sin x\tfrac{\sin h}{h},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\cos' x &= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

$\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\forall h\in N^*(x,\min\{x+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}-x\})$，则

$$\begin{aligned}\tfrac{\tan(x+h)-\tan x}{h} &= \tfrac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{h}\\ &= \tfrac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{h\cos x\cos(x+h)}\\ &= \tfrac{\sin h}{h\cos x\cos(x+h)},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\tan' x &= \frac{1}{\cos x}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)}\\ &= \tfrac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

定理1 设I是一个开区间，f是定义在I上的函数，$x_0 \in I$. 若函数f在x_0处可导，则f在x_0处连续。

证：$\forall x \in I$，且$x \neq x_0$，则

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0),$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &\Longleftarrow\!=\!=\!= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &==== f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 \\ &==== f(x_0), \end{aligned}$$

所以f在x_0处连续。

注3 若函数f在x_0处有单侧导数，则f在x_0处单侧连续。

2 导数的运算法则

定理1（四则运算求导法则） 设函数f和g在x_0处可导，则

(1).

$$\left.\frac{d(f+g)}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(2).

$$\left.\frac{d(f-g)}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0) - g'(x_0).$$

(3).

$$\left.\frac{d(f \cdot g)}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(4). 若$g(x_0) \neq 0$，

$$\left.\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

证：

(1).

$$\begin{aligned} \left.\tfrac{d(f+g)}{dx}\right|_{x=x_0} &===: \lim_{h \to 0} \frac{[f(x_0+h) + g(x_0+h)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{h} \\ &\Longleftarrow\!=\!= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &=== f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

(3).

$$
\begin{aligned}
\frac{d(f\cdot g)}{dx}\Big|_{x=x_0} &===: \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}\\
&=== \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right]\\
&\Leftarrow== \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0}g(x_0+h)+f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\
&=== f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

(4). 因

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\ \frac{1}{g(x)},$$

故由结论(3)，我们只需证明 $\frac{d\left(\frac{1}{g}\right)}{dx}\Big|_{x=x_0}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ 即可。

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{1}{g}\right)}{dx}\Big|_{x=x_0} &===: \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}}{h}\\
&=== \lim_{h\to 0}\left[-\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{hg(x_0+h)g(x_0)}\right]\\
&\Leftarrow== -\frac{1}{g(x_0)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0+h)}\\
&=== -\tfrac{1}{g(x_0)}g'(x_0)\tfrac{1}{g(x_0)}\\
&=== -\tfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}
$$

定理2（复合函数求导法则） 设I是包含x_0的开区间，g是定义在I上的函数，g在x_0处可导；再设J是包含$u_0=:g(x_0)$的开区间，$g(I)\subset J$，f是定义在J上的函数，且f在u_0处可导。则复合函数$f\circ gI\to R$在x_0处可导，且

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

证：

$$
\left[
\begin{array}{ccl}
\frac{f\circ g(x)-f\circ g(x_0)}{x-x_0} & = & \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{h}\\
 & = & \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{h} \quad （若g(x)-g(x_0)\neq 0）\\
 & & 但在x\to x_0极限过程中，有可能g(x)-g(x_0)=0.
\end{array}
\right]
$$

定义辅助函数

$$
h(u)=\begin{cases}\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}, & 当u\in J\ 且u\neq u_0,\\ f'(u_0), & 当u=u_0.\end{cases}
$$

则函数$h: J \to R$在u_0处连续，且

$$f(u) - f(u_0) = h(u)(u - u_0), \forall u \in J,$$

即

$$f(u) - f(g(x_0)) = h(u)(u - g(x_0)), \forall u \in J.$$

于是复合函数$h \circ g: I \to R$在x_0连续，且

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = h(g(x))(g(x) - g(x_0)), \forall x \in I.$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &=== \lim_{x \to x_0} h(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&\Longleftarrow== \lim_{x \to x_0} h(g(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&=== h(g(x_0)) g'(x_0) \\
&=== f'(u_0) g'(x_0) \\
&=== f'(g(x_0)) g'(x_0).
\end{aligned}$$

例1 求导数$\left[\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right]'$，其中$a > 0$.

解：

$$\begin{aligned}
\left[\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right]' &=== \frac{\left[x + \sqrt{x^2 + a^2}\right]'}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \\
&=== \frac{1 + \left[\sqrt{x^2 + a^2}\right]'}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \\
&=== \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \left[x^2 + a^2\right]'}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \\
&=== \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \\
&=== \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.
\end{aligned}$$

例2 求导数$\left[f(x)^{g(x)}\right]'$，其中$f$和$g$都可导，且$f > 0$.

解：

$$\begin{aligned}
\left[f(x)^{g(x)}\right]' &=== \left[e^{g(x) \ln f(x)}\right]' \\
&=== e^{g(x) \ln f(x)} \left[g(x) \ln f(x)\right]' \\
&=== f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right].
\end{aligned}$$

例3 飞机A在3000米的高度作水平直线飞行。为了测量飞机在某个时刻的飞行速度，在飞机正前方的地面上选定一点B(如图)，用α表示连线$\overline{BA}$与垂直方向的夹角（锐角）。在某个时刻t_0测量得到$\alpha = \frac{\pi}{3}$，$\alpha'(t_0) = -0.1(rad/s)$，求飞机在此时刻的飞行速度。

解：用x表示A到B的水平距离，则

$$x(t) = 3000\tan[\alpha(t)],$$

于是

$$\begin{aligned} x'(t_0) &= 3000\tan'[\alpha(t_0)]\alpha'(t_0) \\ &= 3000\frac{1}{\cos^2[\alpha(t_0)]}\alpha'(t_0) \\ &= 3000\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}(-0.1) \\ &= -1200(m/s), \end{aligned}$$

所以飞机在此时刻的飞行速度为1200(m/s).

定理3（反函数求导法则） 设I是R中的一个区间，$f \in C(I)$，且f是单调增函数或单调减函数，$x_0 \in I$. 若f在x_0处可导，且$f'(x_0) \neq 0$，则反函数$f^{-1}: R(f) \to I$在$y_0 =: f(x_0)$可导，且

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

证：

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(y_0) &\Longleftarrow\!\!= \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} \\ &\Longleftarrow\!\!= \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \qquad \begin{array}{l} \text{（令}x = f^{-1}(y)\text{）} \\ 1\ \lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)(=x_0)\surd; \\ 2\ \text{当}y \neq y_0\text{ 时，}f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)(=x_0)\surd; \\ 3\ \text{极限 }\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\text{ 存在.} \end{array} \\ &=\!=\!= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \\ &=\!=\!= \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

注1 反函数求导公式可写成

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

若反函数的自变量用x表示，则反函数求导公式还可写成

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

命题1

$$[\arcsin x]' = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$[\arccos x]' = -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$[\arctan x]' = \tfrac{1}{1+x^2}.$$

证：

$$\begin{aligned}[\arcsin x]' &=\!=\!= \frac{1}{\sin'[\arcsin x]}\\ &=\!=\!= \frac{1}{\cos[\arcsin x]}\\ &=\!=\!= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{（画图）}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\arccos x]' &=\!=\!= \frac{1}{\cos'[\arccos x]}\\ &=\!=\!= \frac{1}{-\sin[\arccos x]}\\ &=\!=\!= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{（画图）}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\arctan x]' &=\!=\!= \frac{1}{\tan'[\arctan x]}\\ &=\!=\!= \cos^2[\arctan x]\\ &=\!=\!= \frac{1}{1+x^2} \quad \text{（画图）}.\end{aligned}$$

注2 根据第一节命题1、第二节命题1知，基本初等函数的导数是初等函数；再根据第二节定理1、定理2，对函数运算的次数（四则运算、复合运算）做归纳法可知，<u>初等函数的导数也是初等函数</u>。