微积分A2第十一次习题课讨论题参考解答　　　　　　杨利军　May 18-23, 2020

本次习题课讨论题涉及以下三方面内容.

一．数项级数的一般理论

二．交错级数

三．通过分析一般项的阶来判断级数的收敛性

一．级数的一般理论

1. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 判断如下哪些级数必收敛.

(i). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$;

(ii). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$;

(iii). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n-u_{2n})$;

(iv). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n+u_{n+1})$;

解：级数 (iv) 必收敛. 因为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1}$ 也收敛, 从而它们的和 $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛, 即级数 (iv) 收敛. 其他级数均可能发散. 例如, 取 $u_n=\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 时, 级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ 收敛, 但级数 (i) 和 (ii) 均发散. 若取 $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 同样收敛, 但级数 (iii) 发散. 解答完毕.

2．设 $0<nu_n\le 1$, 判断下列哪些级数收敛.

(i). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$;

(ii). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$;

(iii). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{u_n}$;

(iv). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2\ln n$;

解：级数(iv)必收敛. 因为级数(iv)的一般项满足

$$u_n^2\ln n\le\frac{\ln n}{n^2},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ 收敛, 故级数(iv)收敛. 以下举例说明其他级数不一定收敛. 取 $u_n=\frac{1}{n}$ 满足 $0<nu_n\le 1$, 级数 $\sum\frac{1}{n}$ 和 $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 即级数(i)和(iii)发散. 取 $u_1=u_2=1/2$,

$$u_n=\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^n}{2n\ln n},\quad \forall n\ge 3,$$

则

$$0<nu_n=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2\ln n}\le 1,\quad \forall n\ge 3.$$

易证级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n=\sum_{n=3}^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^n}{2n}+\frac{1}{2n\ln n}\Big]$$

发散. 即级数(ii)发散. 解答完毕.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛, 判断以下哪些结论正确.

(i) 极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$;

(ii) 极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\le 1$;

(iii) 若极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 则极限值小于1;

(iv) 若极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 则极限值小于等于1.

解：仅结论(iv)正确. 注意正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛的假设, 并不意味着极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在. 例如对于级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$, 极限 $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在. 参见课本第243页例5.2.7. 因此结论(i)和(ii)不成立. 此外对于收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 而言, 极限 $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. 这说明结论(iii)不成立. 解答完毕.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 绝对收敛, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1} = 5$. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的和.

解：注意到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}.$$

由此得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2\cdot 5 - 2 = 8.$$

解答完毕.

5．考虑交错级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

的一个重排级数

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots, \tag{1}$$

排列规则为按顺序两正一负. 证明上述重排级数收敛, 并求出这个级数的和.

解. 记调和级数的前 n 项和为 H_n, 即

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

则 H_n 可表为 $H_n = \ln n + \gamma + a_n$, 其中 $\gamma = 0.577\cdots$ 为 Euler 常数, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. 我们来考虑重排级数 (1), 其前 n 项部分和记为 S_n. 于是根据重排级数的排列规则可知

$$S_{3n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdot + \frac{1}{4n-1} - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2n}\Big)$$

部分和 S_{3n} 可如下表示

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdot + \frac{1}{4n} - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{4n}\Big) - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2n}\Big) \\ &= H_{4n} - \frac{1}{2}H_{2n} - \frac{1}{2}H_n = \ln(4n) + \gamma + a_{4n} - \frac{1}{2}\Big(\ln(2n) + \gamma + a_{2n} + \ln n + \gamma + a_n\Big) \\ &= \ln(4n) - \frac{1}{2}\Big(\ln(2n) + \ln n\Big) + a_{4n} - \frac{1}{2}(a_{2n} + a_n) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 + a_{4n} - \frac{1}{2}(a_{2n} + a_n).$$

由此可见数列 S_{3n} 收敛, 且 $S_{3n} \to \frac{3}{2}\ln 2$. 由于级数的一般项趋向于零. 因此重排级数(1)收敛, 且重排级数的和为 $\frac{3}{2}\ln 2$. 解答完毕.

6．证明下述级数发散.

(i) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots$

(ii) $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$

证: 以下我们利用 Cauchy 收敛准则来证明这两个级数发散.

考虑级数(i). 其排列规则为 $+,+,-,+,+,-,\cdots$. 设级数的一般项为 u_n, 则

$$u_{3n+1} + \cdots + u_{6n} = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n}$$

$$> \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \cdots + \frac{1}{6n-2} > \frac{n}{6n-2} > \frac{1}{6}.$$

上述不等式对任意 n 均成立. 故由 Cauchy 收敛准则可知级数(i) 发散.

考虑级数(ii). 其排列规则为 $+,-,+,+,-,+,\cdots$. 记级数的一般项为 v_n, 则

$$u_{3n+1} + \cdots + u_{6n} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-2} - \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n}$$

$$> \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+6} + \cdots + \frac{1}{6n} > \frac{n}{6n} = \frac{1}{6}.$$

根据 Cauchy 收敛准则原理可知级数发散. 解答完毕.

7．若正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_n$ 收敛, 且数列 $\{x_n\}$ 单调下降, 证明 $\lim_{n\to+\infty} nx_n = 0$.

证. 由假设级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_n$ 收敛, 利用 Cauchy 收敛准则可知对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} x_n < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \forall p \geq 1. \tag{2}$$

取 $p=n$ 并注意到 x_n 单调下降, 故

$$0 < nx_{2n} \le \sum_{k=n+1}^{2n} x_k < \varepsilon.$$

这表明 $\lim_{n\to+\infty} nx_{2n}=0$, 从而 $\lim_{n\to+\infty} 2nx_{2n}=0$. 在式(2)中, 取 $p=n+1$, 我们有

$$0<(n+1)x_{2n+1} \le \sum_{k=n+1}^{2n+1} x_k < \varepsilon.$$

这表明 $\lim_{n\to+\infty}(n+1)x_{2n+1}=0$. 由此进一步得到

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)x_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+1}\lim_{n\to+\infty}(n+1)x_{2n+1} = 2\cdot 0 = 0$$

这就证明了$\lim_{n\to+\infty} nx_n = 0$. 证毕.

8. 假设正项级数 $\sum a_k$ 发散, 判断级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 的收敛性.

解. 级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 发散. 以下分两种情况证明.
(i) 假设序列 $\{a_k\}$ 有界, 即存在正数 $M>0$, 使得 $0<a_k\le M, \forall k\ge 1$. 于是

$$\frac{a_k}{1+a_k} \ge \frac{a_k}{1+M},$$

显然级数 $\sum \frac{a_k}{1+M}$ 发散. 因此级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 发散.
(ii) 假设序列 $\{a_k\}$ 无界, 即存在一个子列 $a_{n_k}\to+\infty, k\to+\infty$. 由此得

$$\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} \to 1, \quad k\to+\infty.$$

这说明级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 不满足收敛的必要条件, 即一般项趋向于零. 故级数 $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ 发散.

二．交错级数

1. 设 $a>0$, 讨论如下交错级数的收敛性, 以及绝对收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\frac{a}{1+a^n}. \tag{3}$$

解：记级数的一般项为 $(-1)^n u_n$.

(i) 当 $a>1$ 时, 由于

$$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{a}{n(1+a^n)}}=\frac{1}{a}\left[\frac{a}{n(1+a^{-n})}\right]^{\frac{1}{n}}\to\frac{1}{a}<1,$$

故级数绝对收敛.

(ii) 当 $a=1$ 时, $u_n=\frac{1}{2n}$, 可见级数条件收敛。

(iii) 当 $0<a<1$ 时, 由于级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

收敛, 且 $\frac{a}{1+a^n}$ 关于 n 单调有界, 故根据 Abel判别法知级数(3)收敛. 由于

$$\frac{1}{n}\frac{a}{1+a^n}>\frac{a}{2n},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{2n}$ 发散, 故级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n(1+a^n)}$$

发散. 因此级数(3)条件收敛. 解答完毕.

2. 设 $a\neq 0$, 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin[\pi\sqrt{n^2+a^2}] \tag{4}$$

的收敛性, 以及绝对收敛性.

解：将级数的一般项改写如下

$$\sin[\pi\sqrt{n^2+a^2}]=(-1)^n\sin[\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi]=(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}.$$

易证

$$\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$$

关于 n 单调下降并趋向于零. 因此级数(4)是 Leibniz 型级数. 故收敛. 显然级数(4)为条件收敛. 因为当 n 充分大时,

$$\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}>0,$$

且

$$\frac{\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{\pi a^2}{2n}} \to 1, \quad n\to+\infty,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi a^2}{2n}$ 发散. 解答完毕.

3. 讨论级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\cos\frac{k\pi}{3}, \tag{5}$$

的收敛性.

解：记级数的前 n 项和为 S_n, 则

$$\begin{aligned}
S_{6n} &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{3k-2}}\cos\frac{(3k-2)\pi}{3}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{3k-1}}\cos\frac{(3k-1)\pi}{3}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{3k}}\cos\frac{3k\pi}{3}\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{3k-2}}\cos\frac{2\pi}{3}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{3k-1}}\cos\frac{\pi}{3}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{3k}}\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}}+\frac{(-1)^k}{2\sqrt{3k-1}}+\frac{(-1)^k}{\sqrt{3k}}\right]
\end{aligned}$$

由于如下三个级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2\sqrt{3k-1}},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{3k}}$$

都是 Leibniz 型级数, 故它们都收敛. 因此序列 $\{S_{6n}\}$ 收敛. 又因为级数(5)的一般项趋向于零, 所以

$$\lim_{n\to+\infty}S_{6n+j}=\lim_{n\to+\infty}S_{6n},\quad j=1,2,3,4,5,$$

从而级数(5)收敛. 级数(5)显然是条件收敛, 这是因为

$$\frac{1}{\sqrt{k}}|\cos\frac{k\pi}{3}|\ge\frac{1}{2\sqrt{k}},$$

且 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{k}}$ 发散. 解答完毕.

4. 讨论如下级数的条件收敛和绝对收敛性

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right],\quad p>0. \tag{6}$$

解: 由于不便直接判断级数(6)的收敛性, 转而考虑与它接近且收敛性明显的级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}. \tag{7}$$

回忆函数 $\ln(1+x)$ 在点 $x=0$ 处的展式

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), \quad |x| < 1.$$

于是我们有

$$\ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right] = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + O\Big(\frac{1}{n^{3p}}\Big). \tag{8}$$

由此可见

1) 当 $p \in (0, \frac{1}{2}]$ 时, 级数(6)发散. 这是因为级数

$$\sum \frac{1}{n^{2p}}$$

发散. 再根据比较判别法可知级数

$$\sum \left[-\frac{1}{2n^{2p}} + O\Big(\frac{1}{n^{3p}}\Big)\right]$$

发散. 由式(8)得

$$\sum \left[-\frac{1}{2n^{2p}} + O\Big(\frac{1}{n^{3p}}\Big)\right] = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) - \frac{(-1)^n}{n^p}\right],$$

可见上式右边级数发散. 由此可见级数(6)发散.

2) 当 $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时, 由式(8)可知级数(6)条件收敛.

3) 当 $p > 1$ 时, 级数(6)绝对收敛.

解答完毕.

三. 通过分析一般项的阶来判断级数的收敛性

1. 假设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 还假设

$$\lim_{n\to+\infty} [n^p(e^{1/n} - 1)a_n] = 1, \tag{9}$$

其中 $p>0$, 求正数 p 的取值范围.

解: 将假设(9)写作

$$1=\lim_{n\to+\infty}[n^p(e^{1/n}-1)a_n]=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}}.$$

由于正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, 根据比较定理知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p-1}}$ 收敛. 由此可见 $p>2$. 解答完毕.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶连续可微, 且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f\Big(\frac{1}{n}\Big) \tag{10}$$

绝对收敛.

证明: 由假设 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可知 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$. 由此可知

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间. 于是

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{1}{2}f''(0).$$

由此可见

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^2}}=\Big|\frac{1}{2}f''(0)\Big|.$$

由比较判别法的极限形式可知级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|f\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big|$$

收敛. 即级数 (10) 绝对收敛. 证毕.

3．设

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx,\quad \forall n\geq1, \tag{11}$$

讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}, \tag{12}$$

的收敛性, 其中 $p>0$.

解: 对定义式(11)中的定积分作变元代换 $u=\tan x$ 得

$$a_n=\int_0^1\frac{u^n du}{1+u^2}<\int_0^1 u^n du=\frac{1}{1+n}.$$

于是

$$0<\frac{a_n}{n^p}<\frac{1}{n^{p+1}}.$$

因此级数(12)收敛. 解答完毕

4. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n \sin^{2n}x}{n} \tag{13}$$

的绝对收敛性.

解：记级数的一般项为 u_n, 则

$$|u_n|=\frac{|2\sin x|^{2n}}{n}.$$

当 $|2\sin x|<1$ 时, 级数(13)绝对收敛. 解不等式 $|2\sin x|<1$ 得

$$x\in\Big(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6}\Big),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{14}$$

也就是说, 当 x 在上述所示的区间里的时候, 级数(13)绝对收敛. 当 $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 时, $2|\mathrm{sin}x|=1$. 此时级数(13) 就是 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 条件收敛. 而当

$$x\notin\cup_k\Big[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6}\Big]$$

时, $2|\mathrm{sin}x|>1$, 故级数(13)的一般项的绝对值

$$|u_n|=\frac{|2\sin x|^{2n}}{n}\to+\infty.$$

故此时级数发散. 解答完毕.

5. 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调下降, 且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x_n$ 发散. 判断级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{1+x_n}\Big)^n \tag{15}$$

的收敛性, 并说明理由.

解. 级数(15) 收敛. 理由如下. 因为正项数列 $\{x_n\}$ 单调下降, 所以序列收敛. 记它的极限为 a. 若 $a=0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x_n$ 是 Leibniz 型级数, 收敛. 此与假设矛盾. 故 $a>0$. 由于 $x_n \to a$, 故存在 N, 使得 $n \geq N$ 时, $x_n > \frac{a}{2}$. 于是

$$\frac{1}{1+x_n} < \frac{1}{1+\frac{a}{2}} < 1, \quad \forall n \geq N.$$

由此可见级数(15)收敛. 解答完毕.