1. 考虑一个总期限为$N+1$年的设备更新问题：公司最初拥有一台新设备，每到第n $(n=1,2,\ldots,N)$ 年的**年末**需要决定继续使用原有设备还是重新更换一台新设备，以使总收益最大。已知重新购买一台新设备的价值为C元，其T年末的残值为

$$S(T)=\begin{cases} N-T, & if\ \ N\geq T \\ 0 \quad , & otherwise \end{cases}$$

又对有 T 年役龄的该设备，第 $T+1$ 年可创收益为

$$P(T)=\begin{cases} N^2-T^2, & if\ \ N\geq T \\ 0 \quad , & otherwise \end{cases}$$

要求：

a） 对此问题建立动态规划模型。

b） 当$N=3$， $C=10$时求数值解。

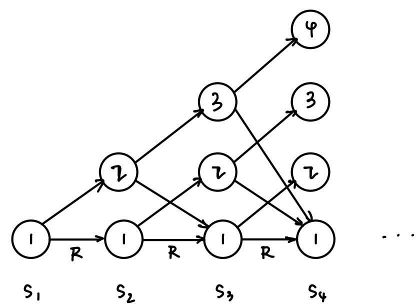
a).

状态：第k年末役龄 S_k ， $k=1,2,3,\cdots,N+1$

决策：第k年末是否更新设备 x_k ， $k=1,2,\cdots,N$

状态集： $S_1=\{1\}$， $S_2=\{1,2\}$， $\cdots$ ， $S_{N+1}=\{1,2,\cdots,N+1\}$

决策集： $U=\{\text{Renew},\ \text{Keep}\}$.



状态转移函数： $S_{k+1}=T_k(S_k,x_k)=\begin{cases} s_k+1, & x_k=\text{Keep} \\ 1, & x_k=\text{Renew} \end{cases}$ ， $k=1,2,\cdots,N$

阶段指标函数： $d_k(s_k,x_k)=\begin{cases} P(s_k), & x_k=\text{keep} \\ P(0)+S(s_k)-C, & x_k=\text{Renew} \end{cases}$ $\quad k=1,2,\cdots,N$

目标： $\max\sum_{k=1}^{N} d_k(s_k,x_k)$.

b).

逆推法：

$f_4(s_4)=0$

$f_3(s_3)=\max_{x_3\in U} d_3(s_3,x_3)=\max_{x_3\in U}\{P(s_3),\ P(0)+S(s_3)-C\}=\max\{9-s_3^2,\ 2-s_3\}=9-s_3^2$

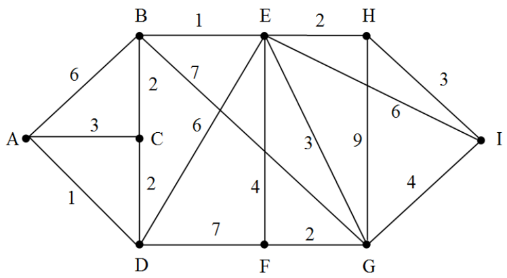
$f_2(s_2)=\max_{x_2\in U} d_2(x_2,x_2)+f_3(T_2(s_2,x_2))=\max_{x_2\in U}\{9-s_2^2+9-(s_2+1)^2,\ 2-s_2+9-1^2\}=\max_{x_2\in U}\{17-2s_2^2-2s_2,\ 10-s_2\}$

$=\begin{cases} 13 & s_2=1\ (x_2=K) \\ 8 & s_2=2\ (x_2=R). \end{cases}$

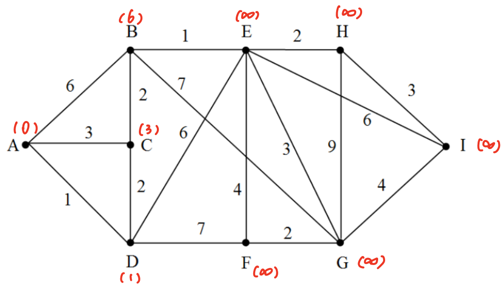
$f_1(s_1)=\max_{x_1\in U} d_1(s_1,x_1)+f_2(T_1(s_1,x_1))=\max_{x_1\in U}\{9-s_1^2+8,\ 2-s_1+13\}=16$

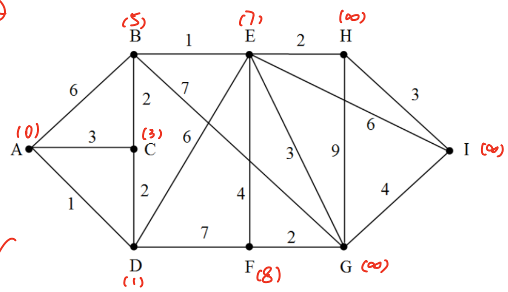
最优策略： $p^*=\{\text{keep},\ \text{Renew},\ \text{Keep}\}$. 最大收益为16

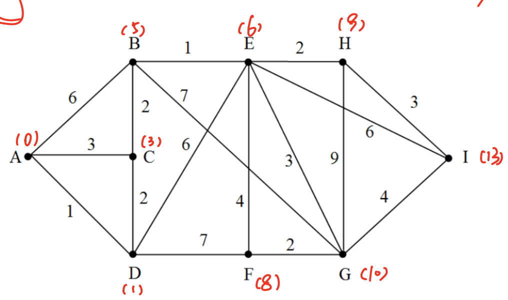
2. 对于如下网络，分别使用值迭代法和策略迭代法求解从 A 到 I 的最短路径以及最短长度。

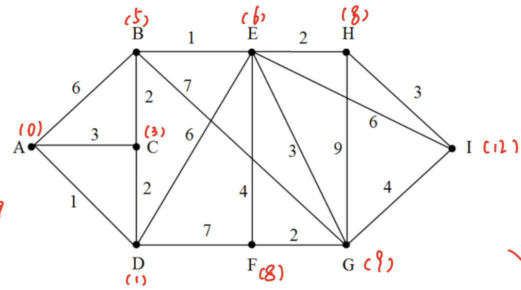


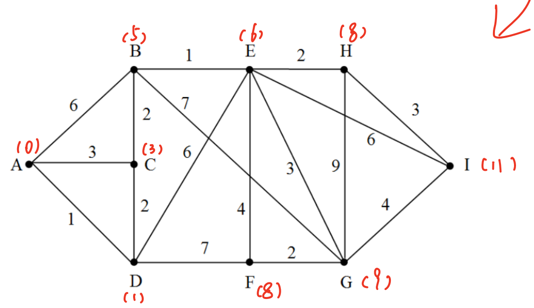
值迭代法：











A → C → B → E → H → I

A → D → C → B → E → H → I

策略迭代法：

$P_1(A)=B$
$P_1(B)=E$
$P_1(C)=B$
$P_1(D)=F$
$P_1(E)=I$
$P_1(F)=G$
$P_1(G)=I$
$P_1(H)=I$

$\Rightarrow$

$f_1(A)=6+f_1(B)$
$f_1(B)=1+f_1(E)$
$f_1(C)=2+f_1(B)$
$f_1(D)=7+f_1(F)$
$f_1(E)=6+f_1(I)$
$f_1(F)=2+f_1(G)$
$f_1(G)=4+f_1(I)$
$f_1(H)=3+f_1(I)$
$f_1(I)=0$

$\Rightarrow$

$\hat{f}_1(A)=13$
$\hat{f}_1(B)=7$
$\hat{f}_1(C)=9$
$\hat{f}_1(D)=13$
$\hat{f}_1(E)=6$
$\hat{f}_1(F)=6$
$\hat{f}_1(G)=4$
$\hat{f}_1(H)=3$
$\hat{f}_1(I)=0$

$\Rightarrow$

$P_2(A)=C$
$P_2(B)=E$
$P_1(C)=B$
$P_2(D)=C$
$P_2(E)=H$
$P_2(F)=G$
$P_2(G)=I$
$P_2(H)=I$

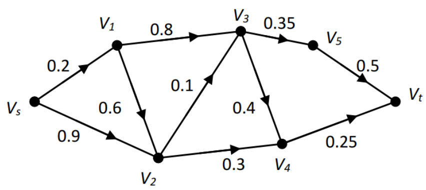
$\Rightarrow$

$P_3(A)=C$
$P_3(B)=E$
$P_3(C)=B$
$P_3(D)=C$
$P_3(E)=H$
$P_3(F)=G$
$P_3(G)=I$
$P_3(H)=I$

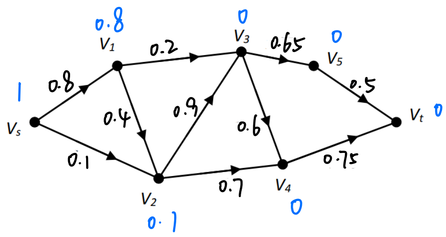
$\Rightarrow$ A → C → B → E → H → I

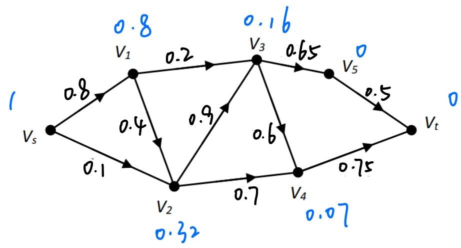
最短长度为 11.

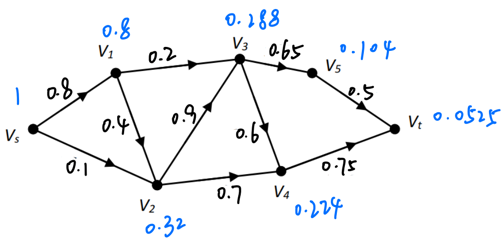
3. 开车从V_s到V_t的网络如下图所示，其中各边数字表示在相应路段堵车的概率。假定各路段是否堵车互相独立，求堵车概率最小的路线及其概率值。（提示：堵车概率最小等价于不堵车概率最大。）

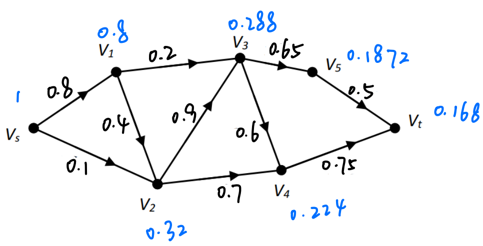


将权重换为不堵车概率，采用值迭代法求解：









故堵车概率最小路径：$V_s \to V_1 \to V_2 \to V_4 \to V_t$

概率为：$1-0.168=0.832$.