运筹学

（线性规划的对偶性）

王焕钢

清华大学自动化系

要点：线性规划的对偶问题

生产I、II两种产品，要占用A、B、C设备时间，每件产品机时利润如表所示：

	产品I	产品II	每天可用时间
占用A机时	0	5	15
占用B机时	6	2	24
占用C机时	1	1	5
利润	2	1	

如何生产使每天利润最大?

确定变量：　生产两种产品的件数 x_1, x_2

每天利润：　$2x_1 + x_2$

约束条件：　$5x_2 \le 15$　A机时约束

$6x_1 + 2x_2 \le 24$　B机时约束

$x_1 + x_2 \le 5$　C机时约束

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$　非负约束

现在，该生产厂对外承包

候选的承包商，经过调研得知如下信息：

① 该厂现有三种设备A、B、C，对应的每日可用时间分别是15小时、24小时和5小时；

② 该厂宣布对外承包前，利用这三种设备生产两种产品I、II；

③ 产品I、II投放市场后的利润分别不低于2、1

那么，候选承包商应该如何投标才最划算?

后续承包商获得的信息如下：

	A	B	C	市场最低利润
产品I	0	6	1	2
产品II	5	2	1	1
运行时间	15	24	5	

设备A、B、C的单位承租（投标）价格为 y_1, y_2, y_3

目标： $\min\ 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$

即求解如下线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ & 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\
\text{s.t.}\ & 6y_2 + y_3 \ge 2 \\
& 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\
& y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

该问题的任意一个可行解对应的目标函数值都不小于原问题的目标函数值

对比这两个优化问题：

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\ & 5x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\
& x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\min\ & 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\
\text{s.t.}\ & 6y_2 + y_3 \ge 2 \\
& 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\
& y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

两个问题的最优目标函数值（有限）相同！

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & 5x_2 \le 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & C^T X \\ \text{s.t.}\ & AX \le \vec{b} \\ & X \ge 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \min\ & Y^T \vec{b} \\ \text{s.t.}\ & Y^T A \ge C^T \\ & Y \ge 0 \end{aligned}$$

$$\max \ 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 \le \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \min \ 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} y_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y_3 \ge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$$

标准线性规划问题的对偶问题?

要点：标准线性规划的对偶问题

求解标准线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n = \vec{b} \\
& x_j \geq 0, \ \forall 1 \leq j \leq n
\end{aligned}
$$

最终要找到一个基阵 $B = \left(P_{j(1)}, P_{j(2)}, \cdots, P_{j(m)}\right)$ 满足

可行性条件： $B^{-1}\vec{b} \geq 0$

最优性条件：

$$\sigma_{j(i)} = c_{j(i)} - C_B^T B^{-1} P_{j(i)} = 0, \quad \forall i \leq m$$

$$\sigma_{j(i)} = c_{j(i)} - C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \leq 0, \quad \forall i > m$$

考虑如何由最优性条件构建另外一个优化问题（对偶问题）的可行性条件

由最优性条件 $C_B^T B^{-1} P_{j(i)} = c_{j(i)}$ ， $\forall i \le m$

记 $Y_B^T = C_B^T B^{-1}$ ，原问题有最优解时, Y_B 满足以下约束

$$Y_B^T P_{j(i)} = c_{j(i)}\ , \quad \forall i \le m$$

由最优性条件 $C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \ge c_{j(i)}$ ， $\forall i > m$

$$Y_B^T P_{j(i)} \ge c_{j(i)}\ , \quad \forall i > m$$

因此， Y_B 满足以下不等式约束

$$Y^T P_j \ge c_j\ , \quad \forall 1 \le j \le n$$

注意，只要给定了原问题的最优基阵， Y_B 就能确定，考虑满足如上约束的 Y_B 能否存在对应最优目标函数

由于 $B=\left(P_{j(1)},P_{j(2)},\cdots,P_{j(m)}\right)$ ，$C_B=\left(c_{j(1)},c_{j(2)},\cdots,c_{j(m)}\right)^T$

当 $Y^TP_j\ge c_j$ ，$\forall 1\le j\le n$ 时可知 $Y^TB\ge C_B^T$ ，则当原问题的可行性条件 $B^{-1}\vec{b}\ge 0$ 满足时，必然有：

$$Y^TB\left(B^{-1}\vec{b}\right)\ge C_B^T\left(B^{-1}\vec{b}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$Y^T\vec{b}\ge C_B^TB^{-1}\vec{b}=Y_B^T\vec{b}$$

可见，如果设定目标函数为 $\min\ Y^T\vec{b}$ 时，$Y_B^T=C_B^TB^{-1}$ 是下述线性规划问题的最优解

$$\min\ Y^T\vec{b}$$

$$\text{s.t.}\quad Y^TP_j\ge c_j,\ \forall 1\le j\le n$$

可见，由相同参数确定的如下两个线性规划问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b}$$

$$x_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\min \ \vec{b}^T Y$$

$$\text{s.t.} \ P_j^T Y \geq c_j, \ \forall 1 \leq j \leq n$$

求最优解都是要找到一个 $B = \left(P_{j(1)}, P_{j(2)}, \cdots, P_{j(m)}\right)$ 满足

$$B^{-1}\vec{b} \geq 0, \quad C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \geq c_{j(i)}, \quad \forall i > m$$

这两个条件对于如上两个线性规划问题的意义？

对于线性规划问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b}$$

$$x_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq n$$

$B^{-1}\vec{b} \geq 0$ 可行条件

$C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \geq c_{j(i)}$, $\forall i > m$ 最优条件

对于线性规划问题

$$\min \ \vec{b}^T Y$$

$$\text{s.t.} \quad P_j^T Y \geq c_j, \forall 1 \leq j \leq n$$

$C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \geq c_{j(i)}$, $\forall i > m$ 可行条件

$B^{-1}\vec{b} \geq 0$ 最优条件

定义：标准线性规划问题的对偶问题

原问题 对偶问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b}$$

$$x_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow$$

$$\min \ \vec{b}^T Y$$

$$\text{s.t.} \quad P_j^T Y \geq c_j \ , \ \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\max \ C^T X$$

$$\text{s.t.} \quad AX = \vec{b}$$

$$X \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\min \ \vec{b}^T Y$$

$$\text{s.t.} \quad A^T Y \geq C$$

要点：一般形式线性规划的对偶问题

规范形式线性规划问题的对偶问题

原问题

$$\begin{aligned} \min\ & C^T X \\ \text{s.t.}\ & AX \ge \vec{b} \\ & X \ge 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

标准线性规划问题

$$\begin{aligned} -\max\ & \left(-C^T, 0^T\right)\begin{pmatrix} X \\ \tilde{X} \end{pmatrix} \\ \text{s.t.}\ & \left(A, -I_m\right)\begin{pmatrix} X \\ \tilde{X} \end{pmatrix} = \vec{b} \\ & X \ge 0,\ \tilde{X} \ge 0 \end{aligned}$$

标准线性规划对偶问题

$$\begin{aligned} -\min\ & \vec{b}^T \tilde{Y} \\ \text{s.t.}\ & \begin{pmatrix} A^T \\ -I_m \end{pmatrix} \tilde{Y} \ge \begin{pmatrix} -C \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \max\ & \vec{b}^T \left(-\tilde{Y}\right) \\ \text{s.t.}\ & A^T\left(-\tilde{Y}\right) \le C \\ & -\tilde{Y} \ge 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

原问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max\ & \vec{b}^T Y \\ \text{s.t.}\ & A^T Y \le C \\ & Y \ge 0 \end{aligned}$$

标准线性规划问题对偶问题的对偶问题

原问题的对偶

$$\min\ \vec{b}^T Y$$
$$\text{s.t.}\quad A^T Y \ge C$$

$$\Rightarrow$$

$$\min\ \left(\vec{b}^T, -\vec{b}^T\right)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$
$$\text{s.t.}\quad \left(A^T, -A^T\right)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \ge C$$
$$Y_1 \ge 0, Y_2 \ge 0$$

其对偶问题为

$$\max\ C^T X$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} X \le \begin{pmatrix} \vec{b} \\ -\vec{b} \end{pmatrix}$$
$$X \ge 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\max\ C^T X$$
$$\text{s.t.}\quad AX = \vec{b}$$
$$X \ge 0$$

对偶问题的对偶问题是原问题

考虑一般形式的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max\ & C^T X \\
\text{s.t.}\ & \vec{a}_i^T X = b_i, \quad \forall 1 \le i \le p \\
& \vec{a}_i^T X \le b_i, \quad \forall p+1 \le i \le m \\
& x_j \ge 0,\ \forall 1 \le j \le q \\
& -\infty < x_j < +\infty,\ \forall q+1 \le j \le n
\end{aligned}
$$

矩阵形式

$$
\begin{aligned}
\max\ & C_1^T X_1 + C_2^T X_2 \\
\text{s.t.}\ & A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = \vec{b}_1 \\
& A_{21} X_1 + A_{22} X_2 \le \vec{b}_2 \\
& X_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow$$

对偶问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & Y_1^T \vec{b}_1 + Y_2^T \vec{b}_2 \\
\text{s.t.}\ & Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} \ge C_1^T \\
& Y_1^T A_{12} + Y_2^T A_{22} = C_2^T \\
& Y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

考虑一般形式的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max\ & C_1^T X_1 + C_2^T X_2 \\ \text{s.t.}\ & A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = \vec{b}_1 \\ & A_{21} X_1 + A_{22} X_2 \le \vec{b}_2 \\ & X_1 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & Y_1^T \vec{b}_1 + Y_2^T \vec{b}_2 \\ \text{s.t.}\ & Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} \ge C_1^T \\ & Y_1^T A_{12} + Y_2^T A_{22} = C_2^T \\ & Y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

规律总结：

1、每个对偶变量对应原问题的一个约束条件

2、原问题是等式约束则对偶变量无不等式约束（非负约束）

3、原问题是不等式约束则对偶变量有不等式约束

4、原问题变量和对偶问题约束条件同样具有如上规律

任何原问题和对偶问题之间都存在下述相互关系

弱对偶性：原对偶问题任何可行解的目标值都是另一问题最优目标值的界（推论：原对偶问题目标值相等的一对可行解是各自的最优解）

强对偶性：原对偶问题只要有一个有最优解，另一个就有最优解，并且最优目标值相等

互为对偶的线性规划问题解之间关系

原 \ 对偶	有最优解	问题无界	无可行解
有最优解		×	×
问题无界	×	×	
无可行解	×		

原问题（无可行解）

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \ge 1 \\ & -x_1 - x_2 \ge 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

对偶问题（无可行解）

$$\begin{aligned} \max\ & y_1 + y_2 \\ \text{s.t.}\ & y_1 - y_2 = 1 \\ & y_1 - y_2 = 0 \\ & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

原问题（无可行解）

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \ge 1 \\ & -x_1 - x_2 \ge 1 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

对偶问题（问题无界）

$$\begin{aligned} \max\ & y_1 + y_2 \\ \text{s.t.}\ & y_1 - y_2 \le 1 \\ & y_1 - y_2 \le 0 \\ & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

要点：原问题与对偶问题的互补松弛性

互补松弛性定理

原问题 $\max\ C^T X$

$$\text{s.t.}\quad AX \le \vec{b}$$
$$X \ge 0$$

对偶问题 $\min\ \vec{b}^T Y$

$$\text{s.t.}\quad A^T Y \ge C$$
$$Y \ge 0$$

设 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则它们分别是各自问题最优解的充要条件是满足互补松弛性等式

$$\hat{Y}^T\left(\vec{b} - A\hat{X}\right) = 0,\quad \hat{X}^T\left(A^T\hat{Y} - C\right) = 0$$

含义：如果原问题某个不等式是松的（不等于0），则其相应的对偶变量必须是紧的（等于0），反之亦然

证明充分性 $\hat{Y}^T\left(\vec{b}-A\hat{X}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b}^T\hat{Y}=\hat{Y}^T A\hat{X}$

$$\hat{X}^T\left(A^T\hat{Y}-C\right)=0 \quad \Rightarrow \quad C^T\hat{X}=\hat{Y}^T A\hat{X}$$

由以上两式可得 $C^T\hat{X}=\vec{b}^T\hat{Y}$ ，根据弱对偶性的推论可知两者分别是各自问题的最优解

证明必要性　当 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 是原、对偶问题的最优解时

由强对偶性可知 $C^T\hat{X}=\vec{b}^T\hat{Y}$ 再利用可行性条件

$\vec{b}-A\hat{X}\geq 0, \hat{X}\geq 0, A^T\hat{Y}-C\geq 0, \hat{Y}\geq 0$ 可得

$$0\leq \hat{Y}^T\left(\vec{b}-A\hat{X}\right)=C^T\hat{X}-\hat{Y}^T A\hat{X}=\left(C^T-\hat{Y}^T A\right)\hat{X}\leq 0$$

所以 $\hat{Y}^T\left(\vec{b}-A\hat{X}\right)=0,\ \hat{X}^T\left(A^T\hat{Y}-C\right)=0$

一般形式的线性规划互补松弛定理

$$\begin{aligned} \max\ & C_1^T X_1 + C_2^T X_2 \\ \text{s.t.}\ & A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = \vec{b}_1 \\ & A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \le \vec{b}_2 \\ & X_1 \ge 0 \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} \min\ & Y_1^T \vec{b}_1 + Y_2^T \vec{b}_2 \\ \text{s.t.}\ & Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} \ge C_1^T \\ & Y_1^T A_{12} + Y_2^T A_{22} = C_2^T \\ & Y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

原问题可行解 $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ 和对偶问题可行解 $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ 都是最优解的充要条件是

$$\left(Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} - C_1^T\right)\hat{X}_1 = 0,\quad \hat{Y}_2^T\left(\vec{b}_2 - A_{21}X_1 - A_{22}X_2\right) = 0$$

理由 $\quad Y_1^T \vec{b}_1 + Y_2^T \vec{b}_2 - \left(C_1^T X_1 + C_2^T X_2\right)$

$$= \left(Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} - C_1^T\right)\hat{X}_1 + \hat{Y}_2^T\left(\vec{b}_2 - A_{21}X_1 - A_{22}X_2\right)$$

$$\min \ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, 4, 5$$

原问题最优解为$X^* = (1, 0, 0, 0, 1)^T$，求对偶问题最优解

$$\max \ 4y_1 + 3y_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} y_2 \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2$$

$$\min \ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}x_5 \ge \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,2,3,4,5$$

原问题最优解为 $X^*=(1,0,0,0,1)^T$，求对偶问题最优解

$$\max \ 4y_1+3y_2$$

$$X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\\3\end{pmatrix}y_1+\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\\1\end{pmatrix}y_2 \le \begin{pmatrix}2\\3\\5\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$y_i \ge 0,\ i=1,2$$

$$y_1+2y_2=2$$

$$3y_1+y_2=3$$

$$y_1\ge 0,\ y_2\ge 0$$

已知下述优化问题的一个最优解为 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{13}{3}$

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + x_2 - 4x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \le -4 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\
& x_i \ge 0,\quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

求其对偶问题的最优解。

原问题

$$\begin{aligned} &\min\ C^T X \\ &\text{s.t.}\quad AX \le \vec{b} \\ &\qquad\quad X \ge 0 \end{aligned}$$

标准线性规划问题

$$\begin{aligned} &-\max\ \left(-C^T, 0^T\right)\begin{pmatrix} X \\ \tilde{X} \end{pmatrix} \\ &\text{s.t.}\quad \left(A, I_m\right)\begin{pmatrix} X \\ \tilde{X} \end{pmatrix} = \vec{b} \\ &\qquad\quad X \ge 0, \tilde{X} \ge 0 \end{aligned}$$

标准线性规划对偶问题

$$\begin{aligned} &-\min\ \vec{b}^T Y \\ &\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix} A^T \\ I_m \end{pmatrix} Y \ge \begin{pmatrix} -C \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

原问题对偶问题

$$\begin{aligned} &\max\ -\vec{b}^T Y \\ &\text{s.t.}\quad A^T Y \ge -C \\ &\qquad\quad Y \ge 0 \end{aligned}$$

原问题的对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + x_2 - 4x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \le -4 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\
& x_i \ge 0,\quad i = 1,2,3
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\max\ & -9y_1 + 4y_2 - 4y_3 \\
s.t.\ & y_1 + y_2 - y_3 \ge -1 \\
& y_1 + y_2 + y_3 \ge -1 \\
& 2y_1 - y_2 + y_3 \ge 4 \\
& y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

设其最优解为 y_1^*, y_2^*, y_3^*

$$
-9y_1^* + 4y_2^* - 4y_3^* = \frac{1}{3} + 0 - 4 \times \frac{13}{3} = -17
$$

$$
y_1^* + y_2^* - y_3^* = -1
$$

$$
2y_1^* - y_2^* + y_3^* = 4
$$

$$
\begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

只能解得 $y_1^* = 1, y_3^* = y_2^* + 2$

$$y_1^* = 1, y_2^* = \alpha, y_3^* = \alpha + 2$$

带入对偶问题的约束条件

$$\begin{cases} 1+\alpha-(\alpha+2)\geq -1 \\ 1+\alpha+(\alpha+2)\geq -1 \\ 2-\alpha+(\alpha+2)\geq 4 \\ \alpha\geq 0 \\ \alpha+2\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -1\geq -1 \\ \alpha\geq -2 \\ 2\geq 4 \\ \alpha\geq 0 \\ \alpha\geq -2 \end{cases}$$

对偶问题的最优解 $y_1^* = 1, y_2^* = \alpha, y_3^* = \alpha + 2, \forall \alpha \geq 0$

要点：影子价格

例：生产I、II两种家电产品，要占用A、B设备及调试时间，每件产品机时利润如表所示

	产品I	产品II	每天可用时间
占用A机时	0	5	15
占用B机时	6	2	24
调试时间	1	1	5
利润	2	1	

如何生产使每天利润最大?

确定变量：生产两种产品的件数 x_1, x_2

每天利润：$2x_1 + x_2$

约束条件：$5x_2 \leq 15$ A机时约束

$6x_1 + 2x_2 \leq 24$ B机时约束

$x_1 + x_2 \leq 5$ 调试时间约束

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 非负约束

原问题 $\max\ C^T X$

$$\text{s.t.}\quad AX \le \vec{b}$$

$$X \ge 0$$

将原问题不等式约束写成行向量表示式，即

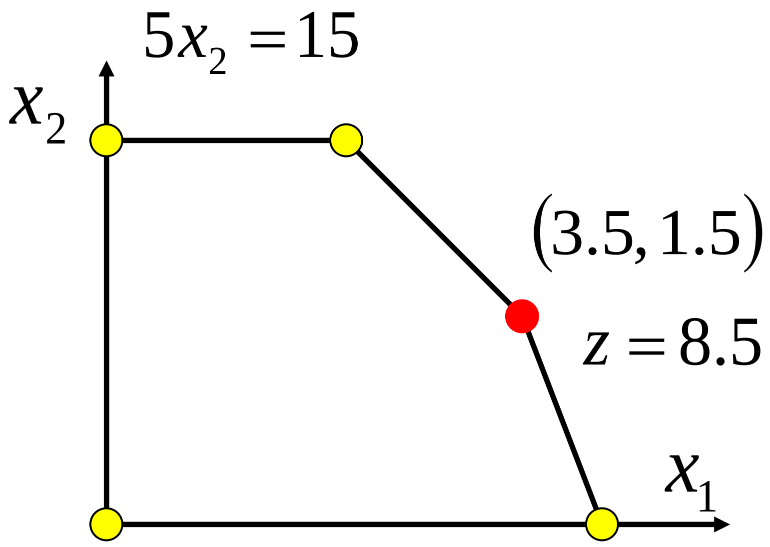
$$AX \le \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}_i^T X \le b_i\ ,\ \forall 1 \le i \le m$$

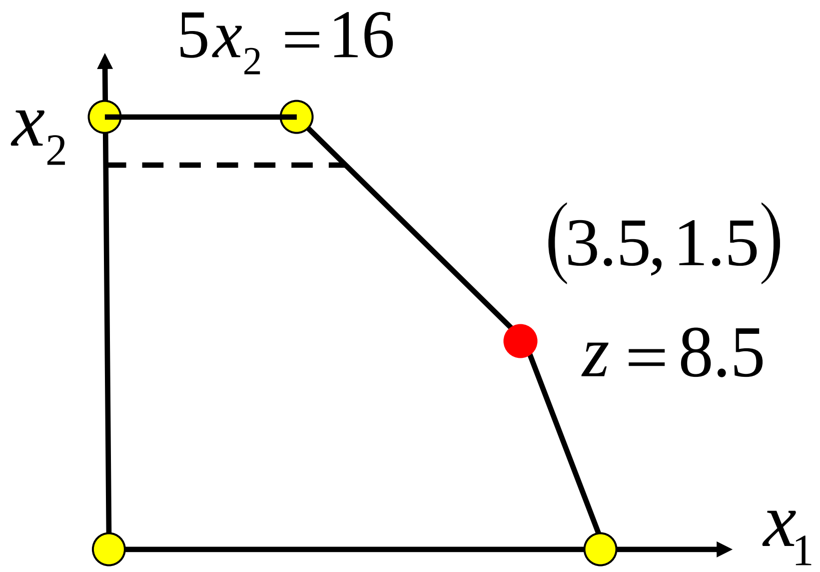
如果增加某些 $b_i, 1 \le i \le m$ 的数值，原问题的最优目标值应该增加，能否定量地刻划增加不同的 b_i 对最优目标值的影响？

例1 $\max\ z = 2x_1 + x_2$

$$\text{s.t.}\quad 5x_2 \le 15,\ 6x_1 + 2x_2 \le 24,\ x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

第一个约束的常数项加1: $5x_2 \le 15 \ \Rightarrow\ 5x_2 \le 16$

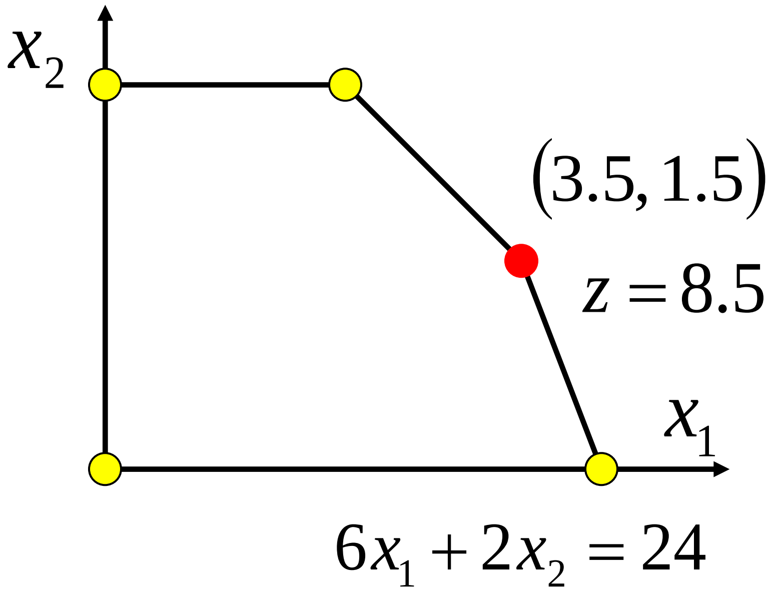


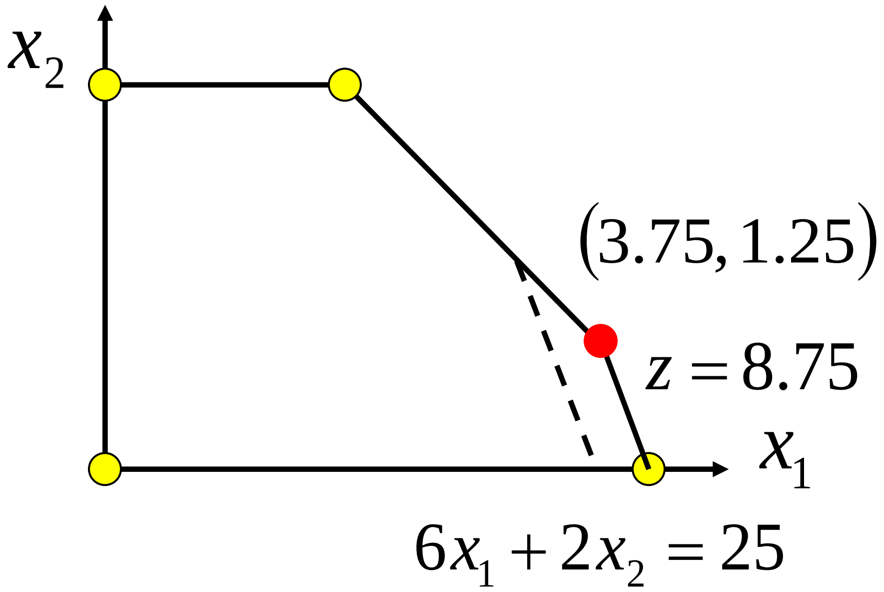


最优目标值增量 $\Delta z = 8.5 - 8.5 = 0$

第二个约束的常数项加1

$$6x_1 + 2x_2 \le 24 \quad \Rightarrow \quad 6x_1 + 2x_2 \le 25$$

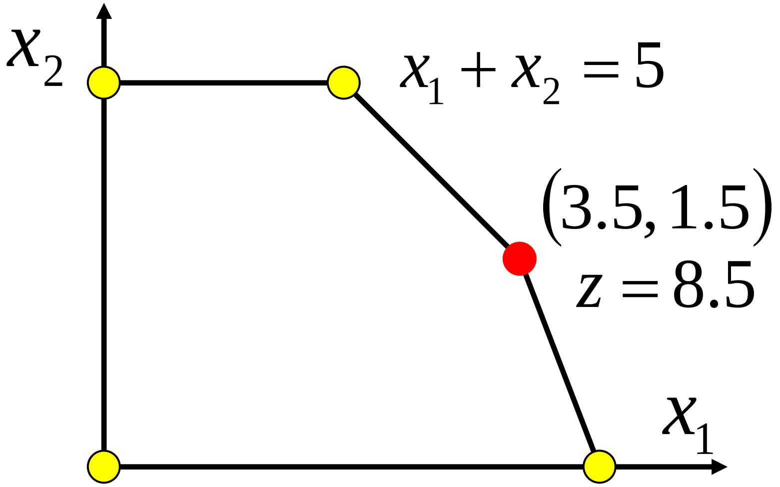


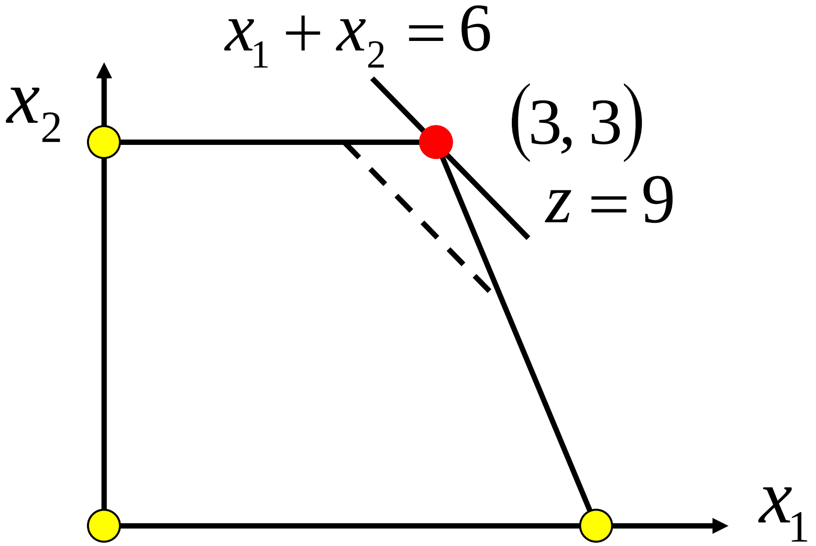


最优目标值增量 $\Delta z = 8.75 - 8.5 = 0.25$

第三个约束的常数项加1

$$x_1 + x_2 \le 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 6$$





最优目标值增量 $\Delta z = 9 - 8.5 = 0.5$

不同约束常数项对最优目标值的影响

$$5x_2 \le 15 \quad \Rightarrow \quad 5x_2 \le 16 \qquad \Delta z = 0$$

$$6x_1 + 2x_2 \le 24 \quad \Rightarrow \quad 6x_1 + 2x_2 \le 25 \qquad \Delta z = 0.25$$

$$x_1 + x_2 \le 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 6 \qquad \Delta z = 0.5$$

例1对偶问题

$$\begin{aligned} \min\ & 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t.}\ & 6y_2 + y_3 \ge 2 \\ & 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\ & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

最优解 $\hat{y}_1 = 0, \hat{y}_2 = 0.25, \hat{y}_3 = 0.5$ （可用对偶性验证）

对偶问题最优解正好是最优目标函数的增量

一般情况

原问题 $\max\ C^T X$

$\text{s.t.}\quad AX \le \vec{b}$

$X \ge 0$

对偶问题 $\min\ b^T Y$

$\text{s.t.}\quad A^T Y \ge C$

$Y \ge 0$

设对偶问题最优解为$\hat{Y}$，由强对偶性知，原问题的**最优目标值**为

$$\vec{b}^T\hat{Y} = \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i b_i$$

所以，原问题最优目标值关于$b_i, 1 \le i \le m$ 的**梯度**分别是 $\hat{y}_i, 1 \le i \le m$，说明增加单位b_i 可望增加$\hat{y}_i$的最优目标值，故称其为b_i 的**影子价格**

原问题 $\max\ C^T X$

$$\text{s.t.}\quad AX \le \vec{b}$$

$$X \ge 0$$

对偶问题 $\min\ \vec{b}^T Y$

$$\text{s.t.}\quad A^T Y \ge C$$

$$Y \ge 0$$

设 $\hat{X}$ 是原问题的最优解，$\hat{Y}$ 是对偶问题的最优解

根据互补松弛性等式

$$\hat{y}_i\left(b_i - \vec{a}_i^T \hat{X}\right) = 0,\ \forall 1 \le i \le m$$

如果某个约束在最优解处不是等式，其对应的对偶变量等于 0 ，此时在充分小的邻域增加该约束右边常数项不会增加目标值，影子价格当然为零

$$\max \ 2x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 5x_2 \le 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 1.5 \\ 7.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$5x_2 = 7.5 < 15 \qquad y_1 = 0$$

$$6x_1 + 2x_2 = 24 \qquad y_2 > 0$$

$$x_1 + x_2 = 5 \qquad y_3 > 0$$

如果原问题为标准型

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; s.t.\ \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b},\ x_j \geq 0,\ \forall 1 \leq j \leq n\right\}$$

B 是最优基矩阵，在推导强对偶性时已说明其对偶问题的最优解为$\hat{Y} = B^{-T} C_B$，于是，非基变量x_j的检验数可写成

$$c_j - C_B^T B^{-1} P_j = c_j - \hat{Y}^T P_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i$$

物理意义为生产单位 j 产品的利润减去按影子价格计算的资源的总成本，如果差值大于零，应继续生产，所以最优解必须满足所有检验数非正

注意

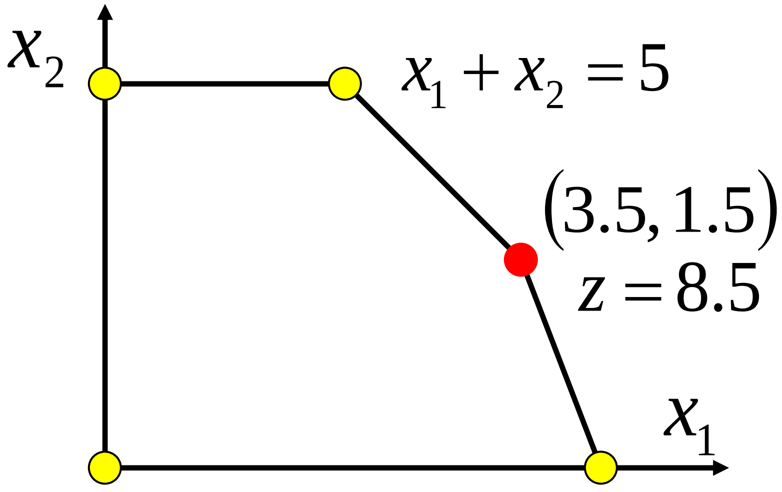
影子价格只能在局部范围内反映资源增长（即增加约束的右边常数）可以产生的目标函数的增值，一旦资源增长导致最优基矩阵改变，原来的最优对偶变量值一般情况下不等于单位资源增长带来的目标函数的增值，从而失去影子价格的意义

$\vec{b}$ 改变，但 B 不变，影子价格 $\hat{Y} = B^{-T}C_B$ 不变

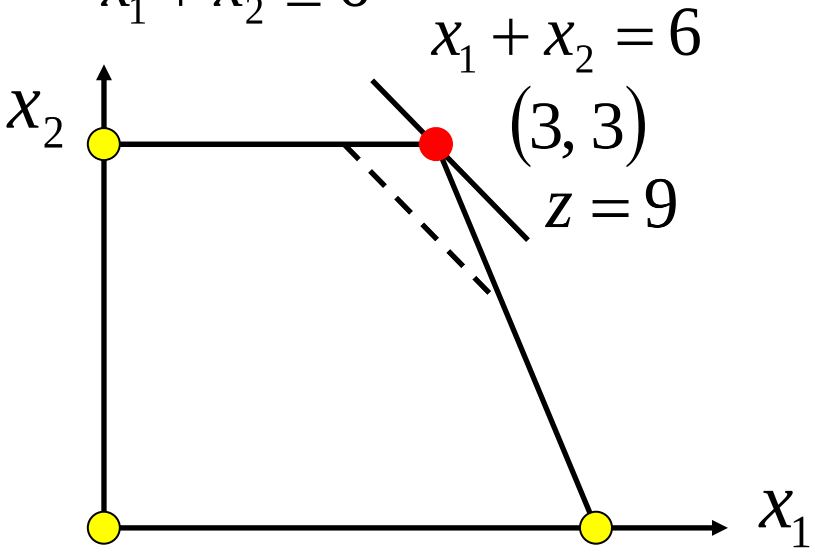
$\vec{b}$ 改变导致 B 改变，影子价格 $\hat{Y} = B^{-T}C_B$ 改变

例如：例1中第三个约束的常数项加1

$x_1 + x_2 \le 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 6$



$\Rightarrow$



影子价格不变，最优目标值增量等于$0.5 \times (6-5)$

如果 $x_1 + x_2 \le 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 6.001$

最优基改变，最优目标值增量不等于$0.5 \times (6.001-5)$

要点：对偶单纯形法

对偶单纯形法与单纯形法的区别

原问题

$$\max \ C^T X$$

$$\text{s.t.} \quad AX = \vec{b}$$

$$X \geq 0$$

对偶问题

$$\min \ \vec{b}^T Y$$

$$\text{s.t.} \quad A^T Y \geq C$$

当 B 是原问题**最优基阵**时，$Y_B^T = C_B^T B^{-1}$ 是**对偶问题可行解**，其目标函数值等于

$$Y_B^T \vec{b} = C_B^T B^{-1} \vec{b} = C_B^T \left(B^{-1} \vec{b} \right) = C^T X_B$$

可知 Y_B 就是对偶问题的最优解

对例1 $\max\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{s.t.}\ \begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}x_4 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}x_5 = \begin{pmatrix}15\\24\\5\end{pmatrix}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\cdots,5$$

如果取 $B=\left(P_2, P_1, P_5\right)$，用 B^{-1} 左乘等式约束两边，可将其变换成以下等价的标准线性规划模型

$$\max\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}1/5\\-1/15\\-2/15\end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix}0\\1/6\\-1/6\end{pmatrix}x_4 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}x_5 = \begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\cdots,5$$

如果取 $\hat{x}_3=0, \hat{x}_4=0$，则由等式约束

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1/5\\-1/15\\-2/15\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}0\\1/6\\-1/6\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}x_5=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$$

得 $\hat{x}_1=3, \hat{x}_2=3, \hat{x}_5=-1$，不满足变量非负约束，所以 $B=(P_1,P_2,P_5)$ 不是原问题的可行基矩阵，将 x_2, x_1, x_5 的表达式代入原目标函数，可将原目标函数等价变换成：

$$9-\frac{1}{15}x_3-\frac{1}{3}x_4$$

变换后的等价问题对应的单纯形表为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	$1/5$	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	$1/6$	0	3
x_5	0	0	$-2/15$	$-1/6$	1	-1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

该单纯形表的检验数均为非正数，如果右边常数没有负数，已经得到原问题的最优解

能否在保持检验数非正的前提下消除负的右边数？

用-1乘第三个等式得到下述单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	1/6	0	3
x_5	0	0	2/15	1/6	-1	1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

上述做法消除了右边常数中的-1，但使 x_5 出基，因此需要选一个非基变量进基，此时可以选 x_3 或 x_4 进基，需要考虑的问题是选谁能保持检验数非正？

回到前面的表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	$1/5$	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	$1/6$	0	3
x_5	0	0	$-2/15$	$-1/6$	1	-1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

如果选 x_3 进基，首先将第三行除以 $-2/15$ 得到

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{-1/6}{-2/15} \quad \frac{1}{-2/15} \quad \frac{-1}{-2/15}$$

再将所得行乘以 $-(-1/15)$ 加到最后一行得到检验数

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad -(-1/15)\times\frac{-1/6}{-2/15}+(-1/3) \quad -(-1/15)\times\frac{1}{-2/15}$$

同理，对于表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	$1/5$	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	$1/6$	0	3
x_5	0	0	$-2/15$	$-1/6$	1	-1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

如果选 x_4 进基，首先将第三行除以 $-1/6$ 得到

$$0 \quad 0 \quad \frac{-2/15}{-1/6} \quad 1 \quad \frac{1}{-1/6} \quad \frac{-1}{-1/6}$$

再将所得行乘以 $-(-1/3)$ 加到最后一行得到检验数

$$0 \quad 0 \quad -(-1/3)\times\frac{-2/15}{-1/6}+(-1/15) \quad 0 \quad -(-1/3)\times\frac{1}{-1/6}$$

选 x_3 和 x_4 进基得到的检验数分别为

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad -(-1/15)\times\frac{-1/6}{-2/15}+(-1/3) \quad -(-1/15)\times\frac{1}{-2/15}$$

$$0 \quad 0 \quad -(-1/3)\times\frac{-2/15}{-1/6}+(-1/15) \quad 0 \quad -(-1/3)\times\frac{1}{-1/6}$$

从以上数据及其产生过程可以看出，出基变量检验数一定为负数，其它基变量和进基变量检验数一定为 0，而其它非基变量检验数可分别写成

$$-(-1/6)\times\left(\frac{-1/15}{-2/15}-\frac{-1/3}{-1/6}\right),\quad -(-2/15)\times\left(\frac{-1/3}{-1/6}-\frac{-1/15}{-2/15}\right)$$

由于 $\frac{-1/15}{-2/15}\le\frac{-1/3}{-1/6}$，选 x_3 进基能保持检验数非正

对照单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	−1/15	1/6	0	3
x_5	0	0	−2/15	−1/6	1	−1
	0	0	−1/15	−1/3	0	$z-9$

和 $-(-1/6)\times\left(\dfrac{-1/15}{-2/15}-\dfrac{-1/3}{-1/6}\right)$ （x_3 进基后 x_4 的检验数）

$-(-2/15)\times\left(\dfrac{-1/3}{-1/6}-\dfrac{-1/15}{-2/15}\right)$ （x_4 进基后 x_3 的检验数）

可得规律：选等于 $\min\left\{\dfrac{-1/15}{-2/15},\dfrac{-1/3}{-1/6}\right\}$ 的变量进基

对比原单纯形表

$$\min\left\{\frac{15}{0},\frac{24}{6},\frac{5}{1}\right\} \rightarrow$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	5	1	0	0	15
x_4	6	2	0	1	0	24
x_5	1	1	0	0	1	5
	2	1	0	0	0	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	−1/15	1/6	0	3
x_5	0	0	−2/15	−1/6	1	−1
	0	0	−1/15	−1/3	0	$z-9$

$$\min\left\{\frac{-1/15}{-2/15},\frac{-1/3}{-1/6}\right\}$$

开始的单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	1/6	0	3
x_5	0	0	$-2/15$	$-1/6$	1	-1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

选 x_3 进基，将第三行除以 $-2/15$ 得到

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1.25 \quad -7.5 \quad 7.5$$

将其乘以 $-1/5$ 加到第一行，再乘以 $1/15$ 加到第二行，再乘以 $1/15$ 加到第四行就得到新单纯形表

新的单纯形表为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	0	–0.25	1.5	1.5
x_1	1	0	0	0.25	–0.5	3.5
x_3	0	0	1	1.25	–7.5	7.5
	0	0	0	–0.25	–0.5	$z-8.5$

由于右边常数全部非负，下面的检验数全部非正，已经得到最优解 $X_* = (3.5,1.5,7.5,0,0)^T$，最优目标值为 8.5 ，下面分析前面的结果哪些具有一般性？

要点：对偶单纯形法

先考虑选择进基变量规则的一般性

一般情况下要处理的等式约束和目标约束可写成

$$\boxed{x_{j(t)} + \hat{a}_{t\,j(m+1)} x_{j(m+1)} + \cdots + \hat{a}_{t\,j(n)} x_{j(n)} = \hat{x}_{j(t)}}$$

$$\sigma_{j(m+1)} x_{j(m+1)} + \sigma_{j(m+2)} x_{j(m+2)} + \cdots + \sigma_{j(n)} x_{j(n)} = z - \hat{z}$$

其中 $x_{j(t)}$ 是出基变量，$t < m$，$\hat{x}_{j(t)} < 0$，所有检验数满足 $\sigma_{j(l)} \le 0, \forall m+1 \le l \le n$

可以断定，在系数 $\hat{a}_{t\,j(m+1)}, \hat{a}_{t\,j(m+2)}, \cdots, \hat{a}_{t\,j(n)}$ 中一定有负数，否则由于所有变量非负，该等式不可能被满足

因此存在 $\dfrac{\sigma_{j(k)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} = \min\left\{ \dfrac{\sigma_{j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(l)}} \,\middle|\, \text{s.t. } \hat{a}_{t\,j(l)} < 0, m+1 \le l \le n \right\}$

用 $x_{j(k)}$ 把 $x_{j(t)}$ 换出基的行变换等价于把等式约束

$$x_{j(t)}+\hat{a}_{t\,j(m+1)}x_{j(m+1)}+\cdots+\hat{a}_{t\,j(k)}\boxed{x_{j(k)}}+\cdots+\hat{a}_{t\,j(n)}x_{j(n)}=\hat{x}_{j(t)}$$

变成

$$\boxed{x_{j(k)}}+\sum_{m+1\le l\le k-1}\frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(l)}+\frac{1}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(t)}+\sum_{k+1\le l\le n}\frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(l)}=\frac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}$$

再将该式乘以 $-\sigma_{j(k)}$ 并和下面目标约束式相加

$$\sigma_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\sigma_{j(m+2)}x_{j(m+2)}+\cdots+\sigma_{j(k)}x_{j(k)}\cdots+\sigma_{j(n)}x_{j(n)}=z-\hat{z}$$

就得到新的目标约束式

$$\sum_{m+1\le l\le k-1}\sigma'_{j(l)}x_{j(l)}+\sigma'_{j(t)}x_{j(t)}+\sum_{k+1\le l\le n}\sigma'_{j(l)}x_{j(l)}=z-\hat{z}'$$

其中各 $\sigma'_{j(l)}$ 就是新的检验数

由

$$-\sigma_{j(k)}\left(x_{j(k)}+\sum_{m+1\le l\le k-1}\frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(l)}+\frac{1}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(t)}+\sum_{k+1\le l\le n}\frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(l)}\right)$$

$$+$$

$$\sigma_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\sigma_{j(m+2)}x_{j(m+2)}+\cdots+\sigma_{j(n)}x_{j(n)}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{m+1\le l\le k-1}\sigma'_{j(l)}x_{j(l)}+\sigma'_{j(t)}x_{j(t)}+\sum_{k+1\le l\le n}\sigma'_{j(l)}x_{j(l)}$$

可得

$$\sigma'_{j(t)}=\frac{-\sigma_{j(k)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}},\quad \sigma'_{j(l)}=\sigma_{j(l)}-\sigma_{j(k)}\frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}},\forall l\neq k$$

由于 $\sigma_{j(l)} \le 0, \forall m+1 \le l \le n$，$\hat{a}_{t\,j(k)} < 0$，显然成立

$$\sigma'_{j(t)} = \frac{-\sigma_{j(k)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} \le 0$$

如果 $\hat{a}_{t\,j(l)} \ge 0$，显然也有 $\sigma'_{j(l)} = \sigma_{j(l)} - \sigma_{j(k)} \dfrac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} \le 0$

如果 $\hat{a}_{tj(l)} < 0$，由于

$$\frac{\sigma_{j(k)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} = \min\left\{ \frac{\sigma_{j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(l)}} \;\middle|\; \text{s.t. } \hat{a}_{t\,j(l)} < 0, m+1 \le l \le n \right\}$$

也可得 $\sigma'_{j(l)} = \sigma_{j(l)} - \sigma_{j(k)} \dfrac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} = \hat{a}_{t\,j(l)} \left(\dfrac{\sigma_{j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(l)}} - \dfrac{\sigma_{j(k)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} \right) \le 0$

结论：前面的进基变量选择规则可保证检验数非正

其次要指出，对例 1 消除负的右边常数后没有产生新的负的右边常数，这个没有一般性，在原表中将第三行除以 $-2/15$ 后得到下表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	1/6	0	3
x_5	0	0	1	1.25	-7.5	7.5
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

前两个右边常数变换后的数值取决于 x_3 所在列的前两个数据，它们完全可能使新的右边数小于0

由于不能保证每次迭代一定能够减少负的右边常数的数目，必须考虑上述迭代方法的收敛性问题

由于每次迭代是从一个不可行的基矩阵转到另一个不可行的基矩阵（一旦遇到可行的基矩阵就得到了最优解），而基矩阵的总数是有限的，如果不出现循环，算法一定在有限步内停止于最优解

所以，关键问题是，迭代过程是否不会出现循环？

为回答前面的问题，先确定一步迭代后的目标

$$\sum_{m+1\le l\le k-1}\sigma'_{j(l)}x_{j(l)}+\sigma'_{j(t)}x_{j(t)}+\sum_{k+1\le l\le n}\sigma'_{j(l)}x_{j(l)}=z-\hat{z}'$$

中的 $\hat{z}'$，由于上式来自用 $-\sigma_{j(k)}$ 乘以

$$x_{j(k)}+\sum_{m+1\le l\le k-1}\frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(l)}+\frac{1}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(t)}+\sum_{k+1\le l\le n}\frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(l)}=\frac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}$$

再加上 $\sigma_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\sigma_{j(m+2)}x_{j(m+2)}+\cdots+\sigma_{j(n)}x_{j(n)}=z-\hat{z}$

所以 $z-\hat{z}'=-\sigma_{j(k)}\times\dfrac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}+z-\hat{z}$ 即 $\hat{z}'=\hat{z}+\sigma_{j(k)}\times\dfrac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}$

如果 $\sigma_{j(k)} < 0$（相当于非退化条件），因为

$$\hat{x}_{j(t)} < 0, \hat{a}_{t\,j(k)} < 0$$

所以

$$\hat{z}' = \hat{z} + \sigma_{j(k)} \times \frac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} < \hat{z}$$

由于 $\hat{z}$ 和 $\hat{z}'$ 都是由对应的基矩阵决定的，$\hat{z}' < \hat{z}$ 说明在 $\hat{z}$ 以后产生的基矩阵不可能等于 $\hat{z}$ 对应的基矩阵，因此，在非退化条件下可以保证算法收敛于最优解，在退化情况下，只要采取辅助措施避免在具有相同 $\hat{z}$ 值的几个基矩阵中循环就可以保证收敛

为什么叫对偶单纯形法？

$$\begin{aligned} \max \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n = \vec{b} \\ & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = z \\ & x_j \ge 0,\ \forall 1 \le j \le n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & Y^T\vec{b} \\ \text{s.t.} \quad & Y^TP_j \ge c_j,\ \forall 1 \le j \le n \end{aligned}$$

已知 $B=\left(P_{j(1)},\cdots,P_{j(m)}\right)$ 满足$\sigma_j = c_j - C_B^TB^{-1}P_j \le 0,\ \ \forall 1 \le j \le n$

令 $Y_B^T = C_B^TB^{-1}$ 是对偶问题的可行解，目标值 $\hat{z} = C_B^TB^{-1}\vec{b}$

一次迭代后得到 B' 仍满足$\sigma_j' = c_j - C_B^TB'^{-1}P_j \le 0,\ \ \forall 1 \le j \le n$

$Y_{B'}^T = C_{B'}^TB'^{-1}$ 还是对偶问题可行解，目标值 $\hat{z}' = C_{B'}^TB'^{-1}\vec{b}$

非退化时 $\hat{z}' < \hat{z}$ ，可保证收敛到对偶问题的最优解

对于线性规划问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b}$$

$$x_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq n$$

$B^{-1}\vec{b} \geq 0$ 可行条件

$C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \geq c_{j(i)}$，$\forall i > m$ 最优条件

对于线性规划问题

$$\min \vec{b}^T Y$$

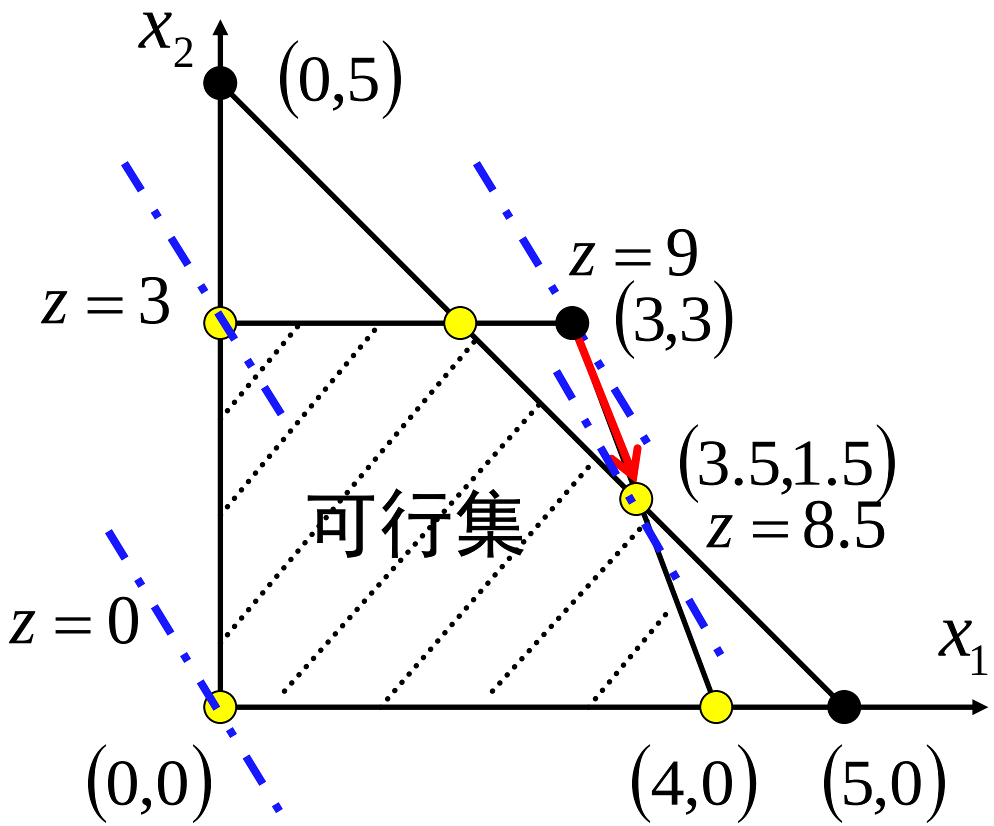
$$\text{s.t.} \quad P_j^T Y \geq c_j, \forall 1 \leq j \leq n$$

$C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \geq c_{j(i)}$，$\forall i > m$ 可行条件

$B^{-1}\vec{b} \geq 0$ 最优条件

对偶单纯形法的几何意义

例 1 的可行集和目标函数等值线如下图所示，其中黄点是基本可行解，黑点是不可行基矩阵确定的点



对偶单纯形法是从不可行区域逐渐减少目标函数值逼近最优解，如右图从 $(3,3)$ 到最优解 $(3.5,1.5)$

什么时候用对偶单纯形算法？

例

$$\begin{aligned} \min\ & 15x_1 + 24x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.}\ & 6x_2 + x_3 \ge 2 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

标准型

$$\begin{aligned} \max\ & (-15, -24, -5, 0, 0)X \\ \text{s.t.}\ & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & X \ge 0 \end{aligned}$$

没有初始可行基，需要引入人工变量

原问题等价于

$$\max\ (-15,-24,-5,0,0)X$$

$$\text{s.t.}\ \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X \ge 0$$

该问题有一个明显的对偶可行基，用对偶单纯形算法不需要引入人工变量

对偶单纯形法适用于$C \ge 0$的下述线性规划问题

$$\min\left\{ C^T X \mid \text{s.t. } AX \ge \vec{b},\ X \ge 0 \right\}$$

要点：灵敏度分析

对于标准线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \ & C^T X \\ \text{s.t.} \ & AX = \vec{b} \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

假定已求得最优可行基 B ，并获得 B^{-1} 等有关数据

如果某些参数发生变化，如：

$$C \to C + \Delta C, \quad \vec{b} \to \vec{b} + \Delta\vec{b}$$

如何利用已知数据确定新的最优解？

对于例1 $\max\ z = 2x_1 + x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 5x_2 + x_3 = 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 5 \qquad x_i \ge 0,\ \forall 1 \le i \le 5
\end{aligned}
$$

已知最优解对应的单纯形表为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	0	-0.25	1.5	1.5
x_3	0	0	1	1.25	-7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	-0.5	3.5
	0	0	0	-0.25	-0.5	$z-8.5$

如果目标函数由 $z=2x_1+x_2$ 变为 $z=1.5x_1+2x_2$ 将前述单纯形表的目标系数行变成 $(1.5, 2, 0, 0, 0)$，再利用行变换将基变量前面的目标函数系数变成0，即可得到新的目标函数的单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	0	-0.25	1.5	1.5
x_3	0	0	1	1.25	-7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	-0.5	3.5
	0	0	0	0.125	-2.25	$z-8.25$

在此基础上可继续进行单纯形迭代

如果右边常数向量由$(15, 24, 5)^T$变为$\vec{b}' = (15, 32, 5)^T$

此时只需将下面原来最优解的单纯形表中的右边常数换成$B^{-1}\vec{b}'$，如果$B^{-1}\vec{b}' \geq 0$，已经得到新问题的最优解，否则可用对偶单纯形法继续迭代

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
x_2	0	1	0	-0.25	1.5	1.5	-0.5
x_3	0	0	1	1.25	-7.5	7.5	$\Rightarrow$ 17.5
x_1	1	0	0	0.25	-0.5	3.5	5.5
	0	0	0	-0.25	-0.5	$z-8.5$	

如果增加一个变量，即将 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = \vec{b}$ 分别

变成 $\sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n+1} P_i x_i = \vec{b}$

此时首先要确定 B^{-1}，然后可算出

$$\hat{P}_{n+1} = B^{-1} P_{n+1}, \quad \sigma_{n+1} = c_{n+1} - C_B^T \hat{P}_{n+1}$$

如果 $\sigma_{n+1} \le 0$ ，原最优解不变，令 $\hat{x}_{n+1} = 0$

否则将 $\hat{P}_{n+1}$ 和 σ_{n+1} 加入最终单纯形表继续迭代

等式约束的系数矩阵发生变化，例如由

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = \vec{b} \quad \text{变成} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{n} P_i x_i + P_r' x_r = \vec{b}$$

如果 P_r 不在基中，计算 $\hat{P}_r' = B^{-1} P_r'$， $\sigma_r = c_r - C_B^T \hat{P}_r'$

然后类似增加一个变量的方法处理

否则要重新计算 B^{-1} ，根据基是否是原问题的可行基、是否是对偶问题的可行基、是否两者都不是进行适当处理，在第三种情况下要引入人工变量重新寻找可行基。

如果增加约束条件，例如由

$$AX \le \vec{b} \quad 变成 \quad AX \le \vec{b},\ \vec{a}_{m+1}^T X \le b_{m+1}$$

或者由

$$AX \ge \vec{b} \quad 变成 \quad AX \ge \vec{b},\ \vec{a}_{m+1}^T X \ge b_{m+1}$$

如果当前最优解满足新增加的约束，那么仍然是新问题的最优解

否则要引入辅助变量或人工变量重新寻找可行解

要点：参数线性规划

分析下述线性规划问题最优值随参数 λ 变化情况

$$\begin{aligned} \max\ & \left(C+\lambda C'\right)^T X \\ \text{s.t.}\ & AX=\vec{b} \\ & X\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max\ & C^T X \\ \text{s.t.}\ & AX=\vec{b}+\lambda\vec{b}' \\ & X\geq 0 \end{aligned}$$

处理方法

1）固定 λ 的数值解线性规划问题

2）确定保持当前最优基不变的 λ 的区间

3）确定 λ 在上述区间附近的最优基，回2）

例3 $\max\ z=(2+\lambda)x_1+(1+2\lambda)x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 5x_2+x_3=15 \\
& 6x_1+2x_2+x_4=24 \\
& x_1+x_2+x_5=5 \qquad x_i\ge 0,\ i=1,2,\cdots,5
\end{aligned}
$$

取 $\lambda=0$ 得到下述最优基

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	-7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	-0.5	3.5
x_2	0	1	0	-0.25	1.5	1.5
	0	0	0	-0.25	-0.5	$z-8.5$

带入参数

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	–7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	–0.5	3.5
x_2	0	1	0	–0.25	1.5	1.5
	$2+\lambda$	$1+2\lambda$	0	0	0	z

行变换

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	–7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	–0.5	3.5
x_2	0	1	0	–0.25	1.5	1.5
	0	0	0	$0.25(\lambda-1)$	$-0.5-2.5\lambda$	$z-8.5-6.5\lambda$

由上表知最优目标值 $z(\lambda)=8.5+6.5\lambda, \forall -0.2\le\lambda\le 1$

对于$\lambda>1$，从下面的单纯形表可以看出，x_4的检验数大于0，因此应该让其进基

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	-7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	-0.5	3.5
x_2	0	1	0	-0.25	1.5	1.5
	0	0	0	$0.25(\lambda-1)$	$-0.5-2.5\lambda$	$z-8.5-6.5\lambda$

比较各行RHS和 x_4 的系数的比值，可以确定出基变量为 x_3

用单纯形迭代实现 x_4 进基、x_3 出基，得到下面新的单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_4	0	0	0.8	1	-6	6
x_1	1	0	-0.2	0	1	2
x_2	0	1	0.2	0	0	3
	0	0	$0.2(1-\lambda)$	0	$-2-\lambda$	$z-7-8\lambda$

由上表知最优目标值 $z(\lambda)=7+8\lambda,\ \forall\lambda>1$

对于$\lambda < -0.2$，从以下单纯形表可以看出，x_5 的检验数大于0，因此应该让其进基

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1.25	-7.5	7.5
x_1	1	0	0	0.25	-0.5	3.5
x_2	0	1	0	-0.25	1.5	1.5
	0	0	0	$0.25(\lambda-1)$	$-0.5-2.5\lambda$	$z-8.5-6.5\lambda$

比较各行RHS和x_5的系数的比值，可以确定出基变量为x_2

用单纯形迭代实现 x_5 进基、x_2 出基，得到下面新的单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	5	1	0	0	15
x_1	1	$1/3$	0	$1/6$	0	4
x_5	0	$2/3$	0	$-1/6$	1	1
	0	$(1+5\lambda)/3$	0	$-(2+\lambda)/6$	0	$z-8-4\lambda$

由上表知最优目标值 $z(\lambda)=8+4\lambda,\ \forall -2\le\lambda<-0.2$

对于$\lambda < -2$，从以下单纯形表可以看出，x_4 的检验数大于0，因此应该让其进基

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	5	1	0	0	15
x_1	1	1/3	0	1/6	0	4
x_5	0	2/3	0	−1/6	1	1
	0	$(1+5\lambda)/3$	0	$-(2+\lambda)/6$	0	$z-8-4\lambda$

比较各行RHS和 x_4 的系数的比值，可以确定出基变量为 x_1

用单纯形迭代实现 x_4 进基、x_1 出基，得到下面新的单纯形表

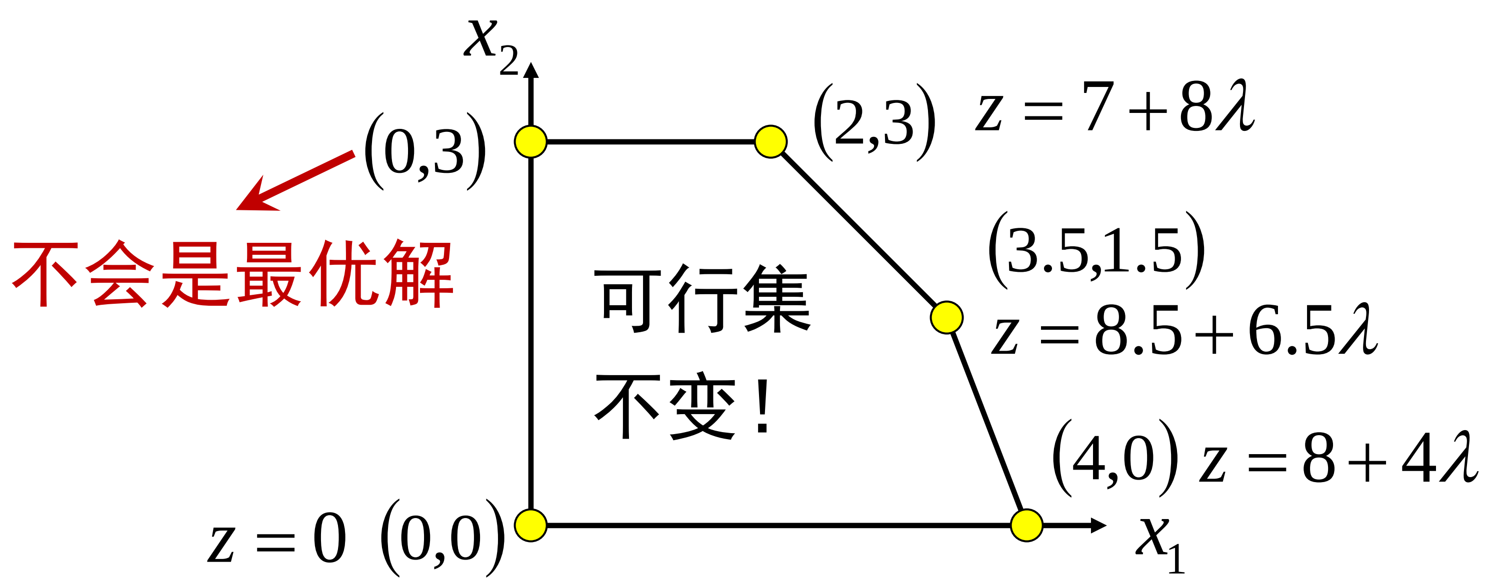
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	5	1	0	0	15
x_4	6	2	0	1	0	24
x_5	1	1	0	0	1	5
	$2+\lambda$	$1+2\lambda$	0	0	0	z

由上表知最优目标值 $z(\lambda)=0,\ \forall\lambda<-2$

总结前面分析，最优目标函数值和 λ 的关系如下

$$z(\lambda)=\begin{cases}0, & \forall\ \lambda<-2\\ 8+4\lambda, & \forall\ -2\le\lambda<-.2\\ 8.5+6.5\lambda, & \forall\ -0.2\le\lambda\le 1\\ 7+8\lambda, & \forall\ \lambda>1\end{cases}$$

由于 $z=(2+\lambda)x_1+(1+2\lambda)x_2$，由下图容易理解 $z(\lambda)$



对于右边常数向量带参数的情况

$$
\begin{aligned}
\max\ & C^T X \\
\text{s.t.}\ & AX = \vec{b} + \lambda \vec{b}' \\
& X \geq 0
\end{aligned}
$$

其对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\min\ & \left(\vec{b} + \lambda \vec{b}'\right)^T Y \\
\text{s.t.}\ & A^T Y \geq C
\end{aligned}
$$

由于对偶问题的可行集不变，因此可用对偶单纯型法确定最优目标函数值和参数 λ 的关系