第一章　控制系统的状态空间表达式

基本概念

状态、状态空间、系统的状态空间描述$\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$

状态变量的线性变换，系统的代数等价性、系统的特征值、特征向量，

能控标准型、能观标准型、特征值规范型（对角标准型、约当标准型）

问题求解

一．连续系统状态空间表达式的建立

(1) 从一般时域描述（高阶微分方程或传递函数）化状态空间表达式

给定 n 阶微分方程：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu$$

$$\text{传递函数：}\ G(s)=\frac{b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\qquad (b_0=0)$$

- **能控标准 I 型：**

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&\cdots&0&1\\ -a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}u$$

$$y=\underbrace{\begin{bmatrix}b_n&b_{n-1}&\cdots&b_1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{x}$$

- **能观标准 II 型：**

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\ 1&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\ 0&1&\cdots&0&-a_{n-2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&-a_1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}+\underbrace{\begin{bmatrix}b_n\\b_{n-1}\\ \vdots\\b_1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}u$$

$$y=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&\cdots&1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{x}$$

- **对角标准型：**

$$g(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{\alpha_1}{s-\lambda_1}+\frac{\alpha_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-\lambda_n}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\ 0&\lambda_2&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

- **约当标准型：**

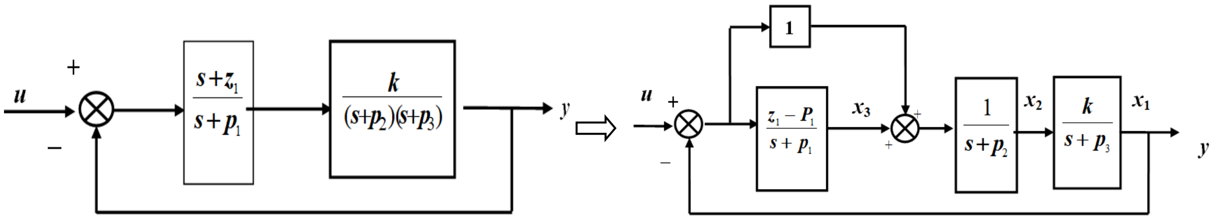
$$g(s)=\frac{\alpha_{11}}{s-\lambda_1}+\frac{\alpha_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{\alpha_{13}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{\alpha_4}{s-\lambda_4}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-\lambda_n}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1&1&&&&\\ &\lambda_1&\ddots&&&\\ &&\ddots\ 1&&&\\ &&\lambda_1&&&\\ \hline &&&\lambda_4&&\\ &&&&\ddots&\\ &&&&&\lambda_n\end{array}\right]\boldsymbol{x}+\left[\begin{array}{c}0\\ \vdots\\0\\1\\ \hline 1\\ \vdots\\1\end{array}\right]u$$

$$y=\begin{bmatrix}\alpha_{13}&\alpha_{12}&\alpha_{11}&\alpha_4&\cdots&\alpha_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

(2) 从模拟结构图写出状态空间表达式

第 1 步：把各环节的传递函数化为基本单元的串联或并联组合；



第 2 步：在图上设置状态变量并列出状态方程和输出方程；

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -p_3x_1 + kx_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - p_2x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 = (p_1 - z_2)x_1 - p_1x_3 + (z_1 - p_1)u\end{cases} \quad y = x_1 \Rightarrow \begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -p_3 & k & 0 \\ -1 & -p_2 & 1 \\ p_1 - z_1 & 0 & -p_1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_1 - p_1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

二．化状态空间表达式为特征值规范型

(1) 化对角标准型：

给定系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$，若 $\boldsymbol{A}$ 阵的特征值两两相异，则可通过线性非奇异变换 $\boldsymbol{T}$（$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}$ 或 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$）化为对角标准型 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z} + \hat{\boldsymbol{b}}u \\ y = \hat{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\end{cases}$，其中 $\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n]$，$\boldsymbol{p}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 阵属于特征值 λ_i 的特征向量（$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$），且有

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}, \qquad \hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},\ \hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b},\ \hat{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$$

(2) 化约当标准型：

给定系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$，若 $\boldsymbol{A}$ 阵有重根，则通过线性变换 $\boldsymbol{T}$ 可化为约当标准型，且

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{J}_k \end{bmatrix},\ \boldsymbol{J}_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

三．由状态方程求传递函数矩阵

给定系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$，其传递函数为 $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$

注：（1）预解矩阵的计算：$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|}$（二阶方阵求逆公式要牢记）

（2）传递函数的极点即为状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

四．组合系统的状态空间表达式及传递函数矩阵

子系统并联、串联组合，以及输出反馈、动态反馈的情况。

第二章　线性系统状态方程的解

基本概念

零输入响应、零初态响应、矩阵指数函数、状态转移矩阵及其性质

问题求解

一．矩阵指数 $\phi(t)=e^{At}$ 的计算

(1) 定义式（级数展开）：$e^{At}\triangleq \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}$

(2) 拉氏反变换法：$e^{At}=L^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\}$

(3) 变换成对角标准型或约当标准型进行计算

二．线性定常系统状态方程的解

(1) 给定系统的非齐次方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，初始状态为 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，给定输入 $\boldsymbol{u}(t)$，则其解为：

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

若初始时刻 $t_0=0$，其解为：

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+\int_{0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

(2) 采用拉氏反变换方法求解非齐次方程：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=L^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0\right\}+L^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\right\}\\&=\phi(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\phi(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

第三章　状态变量的能控性与能观测性

基本概念

能控性与能达性、能观性与能重构性、能控（能观）子系统、系统的结构分解、能控（能观）标准型、对偶原理、等价系统的能控性与能观性、最小实现

问题求解

一．线性定常系统能控性、能观性判据，以及对偶原理：

完全能控条件	完全能观条件
$\boldsymbol{Q}_k=\left[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\right]$ “胖”矩阵行满秩	$\boldsymbol{Q}_g=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\\\vdots\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}$ “瘦”矩阵列满秩
系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的特征值两两相异，其变换后的对角标准形的 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 中无全零行	系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$ 的特征值两两相异，其变换后的对角标准形的 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ 中无全零列
（一个特征值只有一个约当块的情况） 系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 有重特征值，变换后的约当标准形中每个约当块末行对应的 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 中无全零行	**（一个特征值只有一个约当块的情况）** 系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$ 有重特征值，变换后的约当标准形中每个约当块首列对应的 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ 中无全零列

（一个特征值有多个约当块的情况）	**（一个特征值有多个约当块的情况）**
系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 有重特征值，变换后的约当标准形中同一特征值的约当块末行对应的 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 中的行线性无关。	系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$ 有重特征值，变换后的约当标准形中同一特征值的约当块首列对应的 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ 中的列线性无关。

注：(1) 要根据给定系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$ 具体形式，灵活应用模态判据/代数判据（不要上来闷头写能控性/能观性矩阵）；

(2) 线性变换不改变系统状态的能控性和能观性；

(3) 反馈的引入对能控性和能观性的影响。

二．线性定常系统状态空间的结构分解

- **能控状态分解**

若系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 不完全能控， $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{Q}_k = r < n$， 则可找到变换阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\tilde{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{12} \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} = [\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \quad \tilde{\boldsymbol{C}}_2]$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{B}}_1$ 不全为零，则 $\Sigma(\tilde{\boldsymbol{A}}_{11},\tilde{\boldsymbol{B}}_1,\tilde{\boldsymbol{C}}_1)$ 为能控子系统；

$\boldsymbol{T}$ 的求解：(1) 选择能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_k$ 的 r 个线性无关的列构成 $\boldsymbol{T}$ 的前 r 列；

(2) 任选 $\boldsymbol{T}$ 的其它 n-r 列，使得 rank $\boldsymbol{T} = n$。

- **能观状态分解**

若系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 不完全能观， $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{Q}_g = r < n$， 则可找到变换阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 使得

$$\tilde{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{11} & 0 \\ \tilde{\boldsymbol{A}}_{21} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{B}}_2 \end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} = [\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \quad 0]$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{C}}_1$ 不全为零，则 $\Sigma(\tilde{\boldsymbol{A}}_{11},\tilde{\boldsymbol{B}}_1,\tilde{\boldsymbol{C}}_1)$ 为能观子系统；

$\boldsymbol{T}^{-1}$ 的求解：(1) 选择能观性矩阵 $\boldsymbol{Q}_g$ 的 r 个线性无关的行构成 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的前 r 行；

(2) 任选 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的其它 n-r 行，使得 rank $\boldsymbol{T}^{1} = n$。

- **Kalman 分解的标准结构**

三．化单入单出（SISO）系统状态方程为能控标准型和能观标准型

- **能控标准型**

若系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 完全能控，$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{Q}_k = n$，则可找到变换阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 将其化为能控标准型：

$\boldsymbol{T}^{-1}$ 的求解：(1) 求出原系统能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_k$， 并计算 $\boldsymbol{Q}_k^{-1}$

(2) 取出 $\boldsymbol{Q}_k^{-1}$ 的最后一行为 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} = [0,0,\cdots,1]\boldsymbol{Q}_k^{-1}$， 计算 $\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix}$。

- **能观标准型**

若系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 完全能观，$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{Q}_g = n$，则可找到变换阵 $\boldsymbol{T}$ 将其化为能观标准型：

$\boldsymbol{T}$ 的求解： (1) 求出原系统能观性矩阵 $\boldsymbol{Q}_g$， 并计算 $\boldsymbol{Q}_g^{-1}$；

(2) 取出$\boldsymbol{Q}_g^{-1}$的最后一列为$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{Q}_g^{-1}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，计算

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{p}_1]$$

四．SISO 系统传递函数零极点相消、能控性/能观性、最小实现之间的关系

(1) SISO 系统完全能控且完全能观的充分必要条件：

$g(s)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$不能有零极点相消。

(2) SISO 系统传递函数存在零极点相消

- 按照传递函数写出的能控标准型不完全能观。
- 按照传递函数写出的能观标准型不完全能控。

(3) SISO 系统零极点相消和最小实现间的关系

"无零极点相消"⇔"系统既完全能控又完全能观"⇔"最小实现"

第四章　线性定常系统的综合

基本概念

状态反馈、输出反馈、极点配置定理、闭环可镇定性

问题求解

一．SISO 系统的极点配置方法（能控标准型方法）

(1) 判断给定系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$是否完全能控，若是，则计算$\boldsymbol{T}^{-1}$，化能控标准型$\Sigma(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}})$，

(2) 导出原系统的特征多项式：　$f(s)=\left|s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}\right|=s^n+p_n s^{n-1}+\cdots+p_2 s+p_1$

(3) 根据给定的期望极点$\{\lambda_i\}$导出期望的闭环特征多项式：$f^*(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+a_n^* s^{n-1}+a_{n-1}^* s^{n-2}+\cdots+a_1^*$

(4) 确定能控标准型$\Sigma(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}})$状态$\tilde{\boldsymbol{x}}$的反馈向量：$\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1^*-p_1, & a_2^*-p_2, & \cdots, & a_n^*-p_n\end{bmatrix}$

(5) 计算原系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$的状态$\boldsymbol{x}$的反馈向量：$\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}=\tilde{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{-1}$。

二．SISO 系统的极点配置方法（直接计算方法）

(1) 判断给定系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$是否完全能控，若是则可计算；

(2) 导出闭环系统的特征多项式：$f(s)=\left|s\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\right)\right|=s^n+\alpha_1(\boldsymbol{k})s^{n-1}+\cdots+\alpha_n(\boldsymbol{k})$

(3) 根据给定的期望极点$\{\lambda_i\}$导出期望的闭环特征多项式：$f^*(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+a_n^* s^{n-1}+a_{n-1}^* s^{n-2}+\cdots+a_1^*$

(4) 根据两式对应项系数相等，联立方程求解得到状态反馈向量$\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$。

注：(1) 给定期望极点组，SISO 系统$\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$阵唯一；MIMO 系统$\boldsymbol{K}$阵一般不唯一；

(2) 系统完全能控，则可以任意配置全部n个闭环极点；系统不完全能控，则不能任意配置全部n个闭环极点（只能任意配置可控的$r<n$个极点）；

(3) 若系统不完全能控，但期望极点组包含了系统所有不能控极点，则可以配置一些特定的极点。

三．不完全能控的系统配置特定极点组的方法

(1) 找出不能控的极点（按能控性结构分解），判断特定的极点组是否包含系统所有

的不能控极点，若是则可计算；（即判断原系统是否状态反馈能镇定）

(2) 极点配置的步骤：对能控子系统进行配置极点，不能控极点不用配置；或者，采用直接计算法进行配置。

四．判别系统闭环可镇定性（状态反馈能镇定的条件）

- 线性系统$\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$状态反馈能镇定的充分必要条件为：系统的不能控部分是渐近稳定的（**极点有负实部**）。
- 判别系统闭环可镇定的方法

  (1) 判断原系统是否完全能控，若原系统完全能控，则可镇定；

  (2) 若原系统不完全能控，则进行能控性结构分解，找出系统的不能控部分；若系统不能控部分的极点有负实部，则原系统可镇定。

第五章　状态观测器

基本概念

状态重构、全维观测器、重构状态反馈控制系统、可分离性原理

问题求解

一．全维观测器的设计方法（能观标准型方法）

(1) 判断原系统$\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$是否完全能观，若是，则计算$\boldsymbol{T}$，化能观标准型$\sum(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}})$

(2) 计算原系统的特征多项式：$f(s)=\left|s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}\right|=s^n+p_1s^{n-1}+\cdots+p_{n-1}s+p_n$

(3) 根据给定的观测器期望极点$\{\lambda_i\}$计算期望的特征多项式：$f^*(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+\alpha_1^*s^{n-1}+\alpha_2^*s^{n-2}+\cdots+\alpha_n^*$

(4) 确定能观标准型$\sum(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}})$的观测器增益阵：$\tilde{\boldsymbol{m}}=\begin{bmatrix}p_n-\alpha_n^* & p_{n-1}-\alpha_{n-1}^* & \cdots & p_1-\alpha_1^*\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

(5) 计算原系统$\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$的状态观测阵$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{m}}$，写出观测器方程：$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}\tilde{y}$（形式一，注意$\hat{\boldsymbol{x}},\tilde{y}$符号不要写错！）

(6) 画出观测器的模拟结构图。

二．全维观测器的设计方法（直接计算方法）

(1) 判断给定系统$\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$是否完全能观，若是，则可计算；

(2) 计算观测器的特征多项式：$f_M(s)=\left|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{m}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})\right|=s^n+\alpha_1(\boldsymbol{m})s^{n-1}+\cdots+\alpha_n(\boldsymbol{m})$

(3) 根据给定的观测器极点$\{\lambda_i\}$计算希望的特征多项式：$f^*(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+a_1^*s^{n-1}+a_2^*s^{n-2}+\cdots+a_n^*$

(4) 根据两式对应项系数相等，联立方程求解得到状态观测阵$\boldsymbol{m}$，写出观测器方程：

$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}\tilde{y}$（形式一，注意$\hat{\boldsymbol{x}},\tilde{y}$符号不要写错！）

(5) 画出观测器的模拟结构图。

第六章　李雅普诺夫稳定性

基本概念

标量函数的定号性：正定，半正定，负定，半负定，不定

平衡点的稳定性：稳定→渐近稳定→全局渐近稳定（要求越来越高），不稳定

问题求解

一．判断平衡状态的稳定性（在原点的稳定性）

1. 第一方法（间接法）

设原点是系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的平衡点，**线性化模型**是：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}$$

（1） 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均具有负实部，则原点是渐近稳定的。

（2） 若 $\boldsymbol{A}$ 至少存在一个特征值有正实部，则原点不稳定。

（3） 其它情形，第一方法失效。

（4） 间接法只能得到局部稳定的结论；当然，如果存在多个平衡点，则原点必然不是全局渐近稳定的。

2. 第二方法（直接法）

（1） $V(\boldsymbol{x})$ 正定，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 正定，则原点是不稳定的。

（2） $V(\boldsymbol{x})$ 正定，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负定，则原点是渐近稳定的。

（3） $V(\boldsymbol{x})$ 正定，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 半负定，则原点是稳定的；进一步，若 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 除原点外沿状态轨线不恒为零，则原点是渐近稳定的。

（4） 在根据 V 和 $\dot{V}$ 判断出原点渐近的情况下，若它们的**定号性在全空间成立**，才能够进一步推断：

若 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

当然，如果存在多个平衡点，则原点必然不是全局渐近稳定的。

3. $V(\boldsymbol{x})$ 的构造方法

（1） 二次型函数法：$V(\boldsymbol{x}) = ax_1^2 + bx_2^2$　　a>0, b>0,

消去不定号项， 选取参数 a,b，使得 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$

（2） 偶函数法：$V(\boldsymbol{x}) = a(x_1) + b(x_2)$，取 a 为 x_1、b 为 x_2 的偶正定函数

消去不定号项， 选取函数 a,b，使得 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$

（3） 克拉索夫斯基法：

$$V(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2 = \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \dot{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$F(x) \triangleq \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

注意！这里的 Jacobi 矩阵 $F(x)$ 定义与第一方法不同。

判定法则：若 $F(x)+F^{\mathrm{T}}(x)$ 负定，则原点是渐近稳定的。如果 $F(x)+F^{\mathrm{T}}(x)$ 的定号性在全空间成立，才能够进一步推断：

若 $\|x\| \to \infty$ 时，$\|f(x)\|^2 \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

当然，如果存在多个平衡点，则原点必然不是全局渐近稳定的。

（4） 变量梯度法： $\dot{V}(x) < 0 \implies V(x) > 0$

先设定 $\mathrm{grad}V$，计算 $\dot{V}(x) = [\mathrm{grad}V]^T \dot{x} = \nabla_1 f_1(x) + \nabla_2 f_2(x)$

选取 $\mathrm{grad}V$ 的参数，满足 $\frac{\partial \nabla_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla_j}{\partial x_i}$，$i \neq j$ ，使得 $\dot{V}(x) < 0$

计算 $V(x) = \int_0^x [\mathrm{grad}V]^T \mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \mathrm{d}x_i$

4. **非零平衡点**的稳定性判定

作状态变换 $z = x - x_e$，把平衡点转换为零点 $z = 0$，然后判定稳定性判定。

二. 判断线性定常系统的稳定性

（1） 渐近稳定的充要条件：A 的特征根全部在左半开平面内；或对任意正定阵 Q 总存在正定阵 P 满足 $A^T P + PA = -Q$。

注意事项 ！！！！！

（1） 判定原点稳定性时，（1）$V(x) \geq 0$，（2）$V(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 即可说明正定性。

（2） 系统有多个平衡点时，任何一个都不是全局渐近稳定的。
（只有存在唯一一个平衡点的系统可能是全局渐近稳定的。）

（3） 第一方法（线性化方法）不能判断平衡点的全局性质。

（4） 李雅普诺夫判据为充分条件，不满足时，不能下结论。
（$V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 不定号，不能下任何结论。）