《微积分A2》第二十三讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年05月09日

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上非负连续, 且单调下降(不必严格), 则如下级数和广义积分

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k) \quad 和 \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

同时收敛或同时发散, 这里 $k_0 \geq a$.

注: 上述定理通常称为Cauchy 积分判别法.

例: 考虑如下级数的收敛性

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}.$$

解: 记上述级数的一般项为 u_n, 即

$$u_n = \frac{1}{n^p (\ln n)^q}.$$

情形一: $p > 1$, $q \in \mathbb{R}$ 任意. 取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $p - \varepsilon > 1$. 令

$$v_n = \frac{1}{n^{p-\varepsilon}},$$

则级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ 收敛, 且

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{\frac{1}{n^p(\ln n)^q}}{\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}}=\frac{1}{n^\varepsilon(\ln n)^q}\to 0,\quad n\to+\infty.$$

由比较判别法的极限形式可知级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}u_n$ 收敛.

情形二: $p<1$, $q\in\mathbb{R}$ 任意. 取 $\varepsilon>0$ 充分小, 使得 $p+\varepsilon<1$.

令 $v_n=\frac{1}{n^{p+\varepsilon}}$, 则级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}v_n$ 发散, 且

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{\frac{1}{n^p(\ln n)^q}}{\frac{1}{n^{p+\varepsilon}}}=\frac{n^\varepsilon}{(\ln n)^q}\to+\infty,\quad n\to+\infty.$$

由比较判别法的极限形式可知级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}u_n$ 发散.

情形三: $p = 1$. 考虑如下广义积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^q} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dy}{y^q}.$$

显然上述广义积分当 $q > 1$ 时收敛, 当 $q \leq 1$ 时发散. 根据 Cauchy 积分判别法可知, 级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q}$$

当 $q > 1$ 时收敛, 当 $q \leq 1$ 时发散.

总结：级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}$$

i) 当 $p>1$，q 任意时，收敛；

ii) 当 $p<1$，q 任意时，发散；

iii) 当 $p=1$，$q>1$ 时，收敛；

iv) 当 $p=1$，$q\le 1$ 时，发散.

解答完毕.

例子

课本第239页例5.2.3: 考虑如下级数的收敛性

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(2\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}-\sqrt{k}\right).$$

若收敛，考虑求其和. (注: 这里级数的一般项与课本相差一个符号)

解: 记级数的一般项为 $u_k = 2\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}-\sqrt{k}$. 不难证明 $u_k > 0$, $\forall k \geq 1$. 故这是一个正项级数. 对 u_k 作如下分解

$$u_k = (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) - (\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) = v_k - v_{k+1},$$

其中 $v_k = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. 考虑级数的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

例子续一

$$S_n = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_4) + \cdots + (v_n - v_{n+1})$$

$$= v_1 - v_{n+1} = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) - (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}), \ \forall n \geq 1.$$

由于

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

故 $S_n \to \sqrt{2} - 1$. 这说明级数收敛, 且其和为 $\sqrt{2} - 1$.

收敛性问题另解: 分析一般项 u_k 的阶. 将 u_k 表示如下

$$u_k = 2\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2} - \sqrt{k} = \sqrt{k}\left[2\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{2}{k}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]$$

回忆展式 $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + O(x^3)$, $|x| < 1$. 因此

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{k}\right)^2 + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

$$\left(1+\frac{2}{k}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{2}{k}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{2}{k}\right)^{2}+o\left(\frac{1}{k^{3}}\right)$$
$$=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^{2}}+o\left(\frac{1}{k^{3}}\right).$$

由此得

$$u_k=\sqrt{k}\left[2\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{2}{k}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$$
$$=\sqrt{k}\left[2\left(1+\frac{1}{2k}-\frac{1}{8k^{2}}\right)-\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^{2}}\right)-1+o\left(\frac{1}{k^{3}}\right)\right]$$

$$= \sqrt{k}\left[\frac{1}{4k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right] = \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\right).$$

若取 $v_k = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$，则级数 $\sum v_k$ 收敛，且

$$\frac{u_k}{v_k} = \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{k}\right) \to \frac{1}{4}, \quad k \to +\infty.$$

由比较判别法的极限形式可知，级数 $\sum u_k$ 收敛．解答完毕．

注：相比较而言，第一种解法要好得多．但能做这种分解的级数属个别情形．

第二种分析方法虽然由点麻烦，但具有普遍意义．

D'Alembert 比值判别法(ratio tests)

Theorem

定理: 设 $\sum u_n$ 为正项级数. 若极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

存在, 记作 ρ (允许 $\rho=+\infty$), 则

1) 若 $0\le\rho<1$, 则级数收敛;

2) 若 $\rho>1$, 则级数发散.

注: 当 $\rho=1$ 时, 级数收敛和发散都可能. 例如对级数 $\sum\frac{1}{n}$ 和级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 而言, 均有极限 $\rho=1$. 它们一个收敛, 一个发散.

例一：考虑如下级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}.$$

解：记级数的一般项为 u_n，则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{n+1}{3} \to +\infty.$$

故根据定理知级数发散. 解答完毕.

例二: 考虑如下级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}. \qquad (*)$$

解: 记级数的一般项为 u_n, 则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

故由比值判别法知级数(*) 收敛. 解答完毕.

证: 情形 $\rho < 1$. 取 $r \in (\rho, 1)$. 由于 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \rho < r$, 故存在正整数 N, 使得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r, \quad \forall n \geq N.$$

于是 $u_{n+1} < ru_n < r^2 u_{n-1} < \cdots < r^{n-N+1} u_N$, $\forall n \geq N$. 由于 $r \in (0, 1)$, 故级数

$$\sum_{n=N}^{+\infty} r^{n-N+1} u_N = u_N r^{1-N} \sum_{n=N}^{+\infty} r^n$$

收敛. 于是级数 $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

情形 $\rho > 1$. 由于 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \rho$, 故存在正整数 N, 使得 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, $\forall n \geq N$. 于是 $u_{n+1} > u_n > \cdots > u_N > 0$, $\forall n \geq N$. 这表明 $u_n \not\to 0$. 因此级数 $\sum u_n$ 不收敛. 证毕. $\square$

比值判别法的加强版

Theorem

定理: 设 $\sum u_n$ 为正项级数.

1) 若 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, 则级数收敛;

2) 若 $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 则级数发散.

证明大意: 只证1). 2) 的证明类似. 记 $q=\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. 当 $q<1$ 时, 取 $q_1\in(q,1)$, 则存在正整数 N, 使得 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<q_1$, $\forall n\geq N$. 之后的证明同比值判别法情形 $\rho<1$ 的证明. 证毕. $\square$

Cauchy 根值判别法(root tests)

Theorem

定理: 设 $\sum u_n$ 为非负级数. 记

$$\rho = \overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}. \quad (允许\,\rho=+\infty).$$

1) 若 $\rho<1$, 则级数收敛.

2) 若 $\rho>1$, 则级数发散.

注意根值判别法结论(2)与比值判别法加强版的结论(2)的区别:

后者: 若 $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 则正项级数 $\sum u_k$ 发散;

前者: 若 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$, 则正项级数 $\sum u_k$ 发散.

Example

例一: 考虑如下级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

解: 记级数的一般项为 u_n, 则

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{1}{3}\sqrt[n]{n^2} \to \frac{1}{3} < 1.$$

由根值判别法知级数收敛. 解答完毕.

注: 上述级数也可以利用比值判别法判断其收敛性.

Example

例二: 讨论级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 的收敛性.

解: 记级数的一般项为u_n, 则

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{2^n}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1.$$

故由 Cauchy 根值判别法知级数 $\sum_{n\geq 1} u_n$ 发散. 解答完毕.

定理证明

证：情形一. $\rho = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$. 取 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $\rho + \varepsilon < 1$. 由上极限性质知，存在 N，使得 $\sqrt[n]{u_n} < (\rho + \varepsilon)$，$\forall n \geq N$，即 $u_n < (\rho + \varepsilon)^n$，$\forall n \geq N$. 由于 $\rho + \varepsilon < 1$，故非负级数 $\sum_{k\geq N} u_k$ 收敛. 于是原级数 $\sum u_k$ 收敛.

情形二. $\rho > 1$. 由上极限性质知存在收敛子列 $\sqrt[n_k]{u_{n_k}} \to \rho > 1$. 取 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $\rho - \varepsilon > 1$. 于是存在正整数 K，使得 $\sqrt[n_k]{u_{n_k}} > \rho - \varepsilon$，$\forall k \geq K$. 即 $u_{n_k} > (\rho - \varepsilon)^{n_k}$，$\forall k \geq K$. 这说明级数 $\sum u_n$ 的一般项不趋向于零. 因此级数发散. 证毕. $\square$

例: 考虑如下级数的收敛性.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots.$$

解: 记上述级数的一般项为 u_n, 则

$$u_{2m-1}=\frac{1}{2^m},\quad u_{2m}=\frac{1}{3^m},\quad \forall m\geq 1.$$

于是

$$\sqrt[2m-1]{u_{2m-1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2m-1}}\to\frac{1}{\sqrt{2}},\quad m\to+\infty,$$

$$\sqrt[2m]{u_{2m}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{m}{2m}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\to\frac{1}{\sqrt{3}},\quad m\to+\infty.$$

这表明序列$\{\sqrt[n]{u_n}\}$有两个聚点，故

$$\rho = \overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

根据根值判别法知级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots.$$

收敛．解答完毕．

注记

注: 对于级数,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots,$$

比值判别法及其加强版应用无效. 因为

$$\frac{u_{2m}}{u_{2m-1}}=\frac{\frac{1}{3^m}}{\frac{1}{2^m}}=\frac{2^m}{3^m}\to 0,$$

$$\frac{u_{2m+1}}{u_{2m}}=\frac{\frac{1}{2^{m+1}}}{\frac{1}{3^m}}=\frac{1}{2}\frac{3^m}{2^m}\to +\infty,$$

故 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$. 一般说来, 根值判别法优于比值判别法. 其中原因可由如下定理看出.

根值判别法优于比值判别法的原因

Theorem

定理: 设 $u_n > 0$, $\forall n \geq 1$, 则

$$\underline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim}\sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

注: 由上述不等式可知, 凡是能用比值判别法的情形, 都能用根值判别法. 之前的例子说明反之不然. 在这两种判别法都能使用的情形下, 比值判别法的计算常常更简单些.

定理证明

<u>证</u>: 由上下极限的定义知中间不等式成立. 第一和第三个不等式的证明类似. 以下只证第三个不等式成立. 记 $q = \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

若 $q = +\infty$, 则不等式当然成立. 设 $q < +\infty$. 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 于是对任意 $n \geq N$,

$$u_n < u_{n-1}(q+\varepsilon) < u_{n-2}(q+\varepsilon)^2 < \cdots < u_N(q+\varepsilon)^{n-N}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{u_n} < \sqrt[n]{u_N(q+\varepsilon)^{-N}}(q+\varepsilon), \quad \forall n \geq N.$$

故 $\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} \leq (q+\varepsilon)$. 由于 $\varepsilon > 0$ 任意, 故 $\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} \leq q$. 即第三个不等式成立. 证毕. $\square$

绝对收敛与条件收敛, 例子

Definition

定义: (i) 级数 $\sum u_k$ 称为绝对收敛, 如果级数 $\sum |u_k|$ 收敛; (ii) 级数 $\sum u_k$ 称为条件收敛, 如果它收敛但不是绝对收敛, 即级数 $\sum u_k$ 收敛, 但 $\sum |u_k|$ 发散.

Example

例: 级数 $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ 绝对收敛; 级数 $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ 条件收敛. (稍后将证明这个级数收敛).

Theorem

定理: 若级数 $\sum u_k$ 绝对收敛, 则它收敛.

Proof.

证: 由假设知 $\sum |u_k|$ 收敛, 故 Cauchy 收敛准则表明, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \ \forall p \geq 1.$$

$$\Rightarrow \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \ \forall p \geq 1.$$

这表明级数 $\sum u_k$ 收敛. □

Definition

定义: 级数 $\sum u_k$ 称为交错级数, 如果它的各项非零且正负相间, 即 $u_k u_{k+1} < 0,\ \forall k \geq 1$.

注: 为方便, 交错级数通常记作

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} u_k = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{k-1} u_k + \cdots,$$

$$\text{或}\quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k} u_k = -u_1 + u_2 - \cdots + (-1)^{k} u_k + \cdots,$$

其中 $u_k > 0,\ \forall k \geq 1$.

Theorem

定理[Leibniz]: 设 $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}b_k$ 为交错级数, 即 $b_k>0$. 若 b_k 单调下降且 $b_k\to 0$, 则

(1) 级数收敛, 且其和 S 满足 $0\le S\le b_1$;

(2) 级数的部分和 S_n 与级数和 S 有误差估计 $|S-S_n|\le b_{n+1}$, $\forall n\ge 1$.

Definition

定义: 满足上述定理条件的交错级数常称为 Leibniz 型级数.

例子

Example

例：下述级数均为 Leibniz 级数，

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\ln k}{k}.$$

由 Leibniz 定理知这三个级数均收敛. 显然它们均条件收敛.

证: 记 S_n 为交错级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}b_k$ 的前 n 项和, 则

$$S_{2m}=(b_1-b_2)+(b_3-b_4)+\cdots+(b_{2m-1}-b_{2m}).$$

由假设 $b_k>0$ 且单调下降, 故 $S_{2m}\geq 0$ 且单调上升. 又

$$S_{2m}=b_1-(b_2-b_3)-\cdots-(b_{2m-2}-b_{2m-1})-b_{2m}.$$

由此可见 $0\leq S_{2m}\leq b_1$. 因此序列 S_{2m} 单调上升且有上界, 故收敛. 设 $S_{2m}\to S$, 则 $0\leq S\leq b_1$. 由假设 $b_k\to 0$ 知 $S_{2m+1}=S_{2m}+b_{2m+1}\to S$. 这表明部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛.

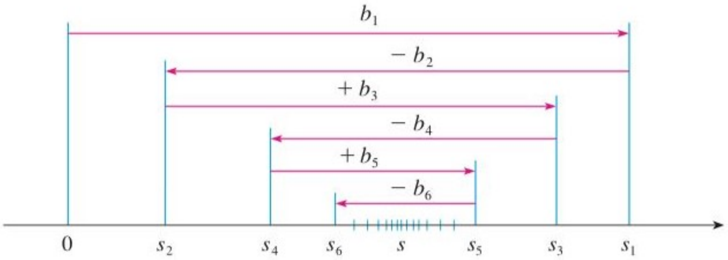
证明续

即交错级数 $\sum(-1)^{k-1}b_k$ 收敛，且其和 S 满足 $0 \le S \le b_1$. 结论(1)得证. 再将结论(1) 应用于级数

$$|S - S_n| = b_{n+1} - b_{n+2} + \cdots$$

立刻得到 $|S - S_n| \le b_{n+1}$. 故结论(2) 得证. 定理得证. $\square$

Leibniz 型级数收敛性，证明图示



广义积分收敛性的 A-D 判别法之回忆

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 则广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

收敛, 如果以下条件之一成立.

1) (Abel 判别法) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界;

2) (Dirichlet 判别法) 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 关于 $b \in [a,+\infty)$ 有界, 且 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调趋向于零.

Theorem

定理: 级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k v_k$$

收敛, 如果以下条件之一成立.

1) (Abel 判别法) 级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ 收敛, 且序列 $\{v_k\}$ 单调有界;

2) (Dirichlet 判别法) 存在 $M > 0$, 使得 $|\sum_{k=1}^{n} u_k| \leq M$, $\forall n \geq 1$, 并且序列 v_k 单调趋向于零.

例一: 证明级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad x \in (0, 2\pi),$$

收敛.

证: 利用 D 判别法. 记 $u_k = \sin kx$, $v_k = \frac{1}{k}$, 则序列 $v_k = \frac{1}{k}$ 单调趋向于零. 记

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx.$$

对任意 $x \in (0, 2\pi)$,

$$2\sin\frac{x}{2}U_n = \sum_{k=1}^{n} 2\sin kx \sin\frac{x}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{(2k-1)x}{2} - \cos\frac{(2k+1)x}{2}\right]$$

$$= \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |U_n| = \frac{\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

即级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx$ 的部分和 U_n 关于 n 有界，$x \in (0, 2\pi)$.

例一续二

于是由 Dirichlet 判别法知级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

收敛. 命题得证. $\square$

例二: 设序列 $\{a_k\}$ 单调下降趋向于零, 证明对于 $x \neq 2k\pi$, 级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx$ 收敛.

解: 根据 Dirichlet 判别法, 只要证明部分和 $U_n = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ 关于 n 有界即可. 考虑

$$2\sin\frac{x}{2}U_n = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\sin(kx+\frac{x}{2}) - \sin(kx-\frac{x}{2})\right] = \sin(nx+\frac{x}{2}) - \sin\frac{x}{2}.$$

于是 $|U_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$, $\forall n \geq 1$. 命题得证. $\square$

例三: 考虑级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k}{k} \qquad (*)$$

绝对收敛性.

解: 在例二中的级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx,$$

中, 取 $a_k = \frac{1}{k}$, $x = 1$ 即可知级数 (*) 收敛. 考虑级数 (*) 的绝对收敛性. 由于

$$\frac{|\cos k|}{k} \geq \frac{\cos^2 k}{k},$$

现断言级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 k}{k} \qquad (**)$$

发散(稍后证明). 由此可知级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\cos k|}{k}$ 发散. 因此级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos k}{k}$ 条件收敛, 而非绝对收敛. 以下证明上述断言. 反证. 假设断言不成立, 即级数 (**) 收敛. 由于

$$\frac{\cos^2 k}{k}=\frac{1+\cos 2k}{2k} \quad 或 \quad \frac{1}{k}=\frac{2\cos^2 k}{k}-\frac{\cos 2k}{k},$$

故调和级数可表示为

例三续二

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(2\cos^2 k-\cos 2k\right)$$

$$=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 k}{k}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2k}{k}.$$

(注意上述两个级数均收敛：第一个级数收敛是根据反证假设；第二个级数收敛是根据例二的结论，即当序列 a_k 单调下降趋向于零，且 $x\neq 2k\pi$ 时，级数 $\sum_{k\geq 1}a_k\cos kx$ 收敛)．由此得到调和级数收敛．矛盾．故断言成立．

解答完毕．

例四：考虑级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{1}{k}\cos k}{k}\qquad(*)$$

绝对收敛性.

解：由于级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos k}{k}$ 收敛，且序列 $\cos\frac{1}{k}$ 单调有界，故根据 Abel 判别法可知级数(*)收敛. 用例三的证明方法，可类似证明级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{1}{k}\cos^2 k}{k}$$

发散，故级数 (*) 为条件收敛. 解答完毕.

Lemma

引理: 对任意两组数 $\{a_1, \cdots, a_n\}$, $\{b_1, \cdots, b_n\}$, 成立

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n,$$

其中 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 此外, 当序列 $\{b_1, \cdots, b_n\}$ 单调时,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le A(|b_1| + 2|b_n|),$$

其中 $A = \max\{|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_n|\}$.

引理证明

证: 记 $A_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.
\end{aligned}$$

第一个结论得证.

证明续

当序列 $\{b_1, \cdots, b_n\}$ 单调时，根据第一个结论得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} |A_k||b_k - b_{k+1}| + |A_n||b_n| \leq A \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| + A|b_n|$$

$$= A(|b_1 - b_n| + |b_n|) \leq A(|b_1| + 2|b_n|).$$

引理得证. $\square$

A-D 判别法证明

证: 为应用 Cauchy 收敛准则来证级数 $\sum u_k v_k$ 的收敛性, 考虑

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k.$$

1). 证 Abel 判别法. 假设级数 $\sum u_k$ 收敛, 即部分和序列 $\{U_n\}$ 收敛, 这里 $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. 从而 $\{U_n\}$ 是 Cauchy 序列, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$|U_{n+p} - U_n| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 1.$$

此即

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 1.$$

证明续一

应用 Abel 引理于和式 $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k$ 得

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le A(|v_{n+1}| + 2|v_{n+p}|),$$

这里 $A = \max\{|u_{n+1}|, |u_{n+2} + u_{n+1}|, \cdots, |u_{n+p} + \cdots + u_{n+1}|\}$ $= \max\{|U_{n+1} - U_n|, |U_{n+2} - U_n|, \cdots, |U_{n+p} - U_n|\} < \varepsilon$, $\forall n \ge N$, $\forall p \ge 1$. 由假设 $\{v_k\}$ 单调有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|v_k| \le M$, $\forall k \ge 1$. 于是

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le 3M\varepsilon, \quad \forall n \ge N, \quad \forall p \ge 1.$$

Cauchy 收敛准则表明级数 $\sum u_k v_k$ 收敛.

2). 证 Dirichlet 判别法. 假设存在 $M > 0$, 使得 $|U_n| \leq M$, 其中 $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n \geq 1$. 还假设序列 v_k 单调趋向于零. 由后一个假设知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|v_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 应用 Abel 引理于和式 $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k$ 得

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} u_k v_k \right| \leq A(|v_{n+1}| + 2|v_{n+p}|),$$

这里 $A = \max\{|u_{n+1}|, |u_{n+2}+u_{n+1}|, \cdots, |u_{n+p}+\cdots+u_{n+1}|\}$
$= \max\{|U_{n+1}-U_n|, |U_{n+2}-U_n|, \cdots, |U_{n+p}-U_n|\} < 2M$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$. 于是

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leq A(|v_{n+1}| + 2|v_{n+p}|) \leq 2M \cdot 3\varepsilon = 6M\varepsilon,$$

这里 $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$. 由此可见级数 $\sum u_k v_k$ 收敛. 定理得证. $\square$

作业

习题5.2(page 245-246):　1(1)(3)(5)(7), 2(1)(3)(5), 3(1)(3)(5)(7), 4, 5, 6, 7, 10.