3.2　试判断下面系统状态的能控性

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -11 & -6\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

解：这是能控标准型，故能控。 或 $Q_k=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -6\\1 & -6 & 25\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=3$。

3.3 判断下面系统的能控性

（1）　$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

（2）　$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\0 & 2 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

解：(1)　约当型，不完全能控。

或 $Q_k=\begin{bmatrix}1 & -1 & -3 & 3 & 9 & -9\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=2<3$。

(2)　$Q_k=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4\\1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4\\-1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=2<3$，不完全能控。

3.4　设系统方程为

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\0 & \lambda_1 & 1\\0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}u$$

试确定满足状态完全能控条件的 $a$、$b$ 和 $c$。

解：这是个约当型，系统完全能控需要满足条件 $c\neq 0$。

3.5　给定二阶系统

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix} u$$

为使系统具有能控性，试确定常数$a$和$b$所应满足的关系式。

解： $Q_k = \begin{bmatrix} b & ab-1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$，系统完全能控需要满足条件$b^2 + ab - 1 \neq 0$。

3.6　已知如下倒置摆状态方程，试判断其能控性和能观性。

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

解：

$Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix}$，$rank(Q_k) = 4$，系统完全能控。

$Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，$rank(Q_g) = 4$，系统完全能观。

3.7　设系统方程为

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

试确定满足状态完全能控和完全能观条件的$a$、$b$、$c$和$d$。

解：

$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 1 & e+d \end{bmatrix}$，系统完全能控需要满足条件$a+b \neq e+d$。

$Q_g=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & b\end{bmatrix}$，系统完全能观需要满足条件$b\neq 0$。

3.8　设三阶系统

$$\begin{cases}\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

(1)问能不能适当地选择常数 $a$、$b$ 和 $c$，使系统具有能控性；

(2)试问能不能适当地选择常数 $a$、$b$ 和 $c$，使系统具有能观性。

解:

(1)　$Q_k=\begin{bmatrix}a & a\lambda+b & a\lambda^2+2b\lambda\\ b & b\lambda & b\lambda^2\\ c & c\lambda & c\lambda^2\end{bmatrix}$，$\det\left(Q_k\right)\equiv 0$，故不可能使系统完全能控。

(2)　$Q_g=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a\lambda & a+b\lambda & c\lambda\\ a\lambda^2 & 2a\lambda+b\lambda^2 & c\lambda^2\end{bmatrix}$，$\det\left(Q_g\right)\equiv 0$，故不可能使系统完全能观。

3.9 判断下列系统的能观性

（2）$$\begin{cases}\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

解:

(2)　$Q_g=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ -1 & -4 & -1\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_g\right)=3$，系统完全能观。

3.10　设系统的传递函数为

$$\boldsymbol{g(s)=\frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}}$$

试问$a$等于多少时，系统将是不能控或不能观的。

解：分母进行分解得 $(s+1)(s+2)(s+4)$，当出现零极点相消时，系统是不能控或

不能观的，所以$a=1或2或4$时，系统是不能控或不能观的。

3.11　在 3.10 题中，若$a=1$，试选择一组状态变量，将系统的状态方程写成

（1）能控但不能观的；

（2）能观但不能控的。

解：

(1) 写成能控标准型 $\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \hline \boldsymbol{c}^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -8 & -14 & -7 & 1\\ \hline 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$，这时是能控但不能观的。

(2) 写成能观标准型 $\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \hline \boldsymbol{c}^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & -8 & 1\\ 1 & 0 & -14 & 1\\ 0 & 1 & -7 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$，这时是能观但不能控的。

或 $g(s)=\frac{1/2}{s+2}+\frac{-1/2}{s+4}+\frac{0}{s+1}$，

能控不能观的形式为 $\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \hline \boldsymbol{c}^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 1\\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right]$，

能观不能控的形式为 $\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \hline \boldsymbol{c}^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -4 & -\frac{1}{2}\\ \hline 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$。

3.15　已知系统

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

（1）试将系统化为约当标准型；

（2）考察可控状态、可观状态各为多少。

解:

(1) $\lambda = -2, -3, -4$，取 $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$，

变换后得到对角标准型为 $\left[\begin{array}{c:c} \tilde{A} & \tilde{b} \\ \hdashline \tilde{c}^T & \tilde{d} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{1}{2} \\ \hdashline 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$。

(2) 系统完全能控，但不完全能观，能观状态为 2。

3.17 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$为两个能控且能观的单输入单输出系统

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \underline{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_1 \end{cases} \qquad \Sigma_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 + u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

（1）$\Sigma_1$、$\Sigma_2$如图 3.2 所示串联起来，试求串联系统的状态方程。

（2）考察此串联系统的能控性和能观性。

（3）试求此串联系统的传递函数，并验证（2）中的结果。

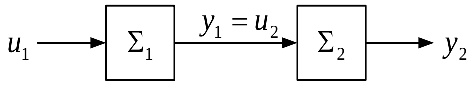



图 3.2

解:

(1)串联系统的状态方程为: $\left[\begin{array}{c:c} A & b \\ \hdashline c^T & d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$。

(2) $Q_k=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & -4 & 13\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=2<3$，系统不完全能控；

$Q_g=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ -7 & -4 & 4\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_g\right)=3$，系统完全能观。

(3) $g_1(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}$，

$g_2(s)=\dfrac{1}{s+2}$，

$g(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$。

系统出现零极点相消的情况，系统是不能控或不能观的。

进一步，$\left(sI-A\right)^{-1}b$ 出现零极点相消，说明系统不完全能控；$c\left(sI-A\right)^{-1}$ 无零极点相消，系统完全能观。

3.19 已知系统

$$\begin{cases}\underline{\dot{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

（1）求此系统的传递函数；

（2）此系统能控否？如不完全能控，试求其能控子系统；

（3）此系统能观否？如不完全能观，试求其能观子系统。

解:

(1) $g\left(s\right)=\dfrac{s+3}{s^2+2s-1}$。

(2) $Q_k=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=2<3$，系统不完全能控。

取 $T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，能控子系统为 $\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{b}_k\\ \hdashline \boldsymbol{c}_k^T & d_k\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ \hdashline 1 & 1 & 0\end{array}\right]$。

(3) $Q_g=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & -6 & -1\end{bmatrix}$, $rank\left(Q_k\right)=3$, 系统完全能观。

3.21 根据图 3.3 系统的结构图，写出其状态方程和输出方程，并判断系统的能控性和能观性。

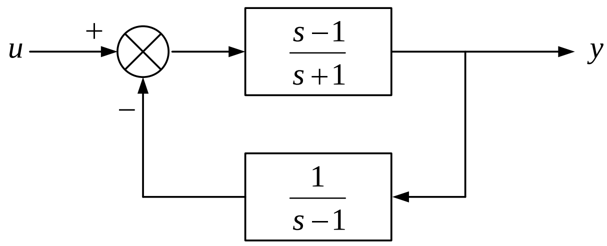
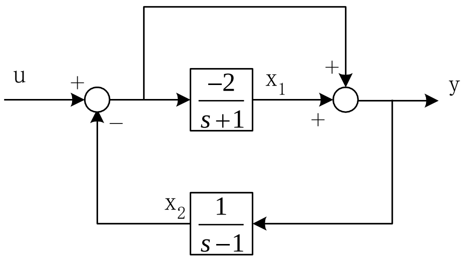


图 3.3

解:




如图定义状态变量。得到系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1-2\left(u-x_2\right)=-x_1+2x_2-2u\\ \dot{x}_2=x_2+\left(u-x_2\right)+x_1=x_1+u\\ y=x_1-x_2+u\end{cases}$$

，得到 $\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \hline \boldsymbol{c}^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ \hline 1 & -1 & 1\end{array}\right]$。

$Q_k=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $rank\left(Q_k\right)=1<2$, 系统不完全能控;

$Q_g=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$, $rank\left(Q_g\right)=1<2$, 系统不完全能观。