微积分 A2 第四次习题课讨论题　　　　　　　　　　　杨利军　Mar.30 - Apr.3, 2020

一. 关于复合函数求导

1. 考虑偏微分方程

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} = 0, \tag{1}$$

其中 A, B, C 均为实常数. 假设 $B^2 - AC > 0$ 且 $C \neq 0$. 记 α, β 为一元二次方程 $Ct^2 + 2Bt + A = 0$ 的两个互异的实根, 证明

(i) 方程 (1) 在可逆线性变换 $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ 下, 可等价地化为

$$w_{uv} = 0. \tag{2}$$

等价的意思是, 若 $z(x, y)$ 是方程 (1) 的解, 则 $w(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$ 是方程 (2) 的解, 这里 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 是线性变换 $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ 的逆变换; 反之, 若 $w = w(u, v)$ 是方程 (2) 的解, 则 $z(x, y) = w(x + \alpha y, x + \beta y)$ 是方程 (1) 的解.

(ii) 方程(1)的一般解为

$$z(x, y) = f(x + \alpha y) + g(x + \beta y), \tag{3}$$

其中 $f(t)$ 和 $g(t)$ 均为 $\mathbb{R}^1$ 上的任意二次连续可微函数.

2. 设函数 $f(x, y)$ 在平面开区域 Ω 上有连续的偏导数, Ω 包含单位圆周 Γ: $x^2 + y^2 = 1$. 证明在单位圆 Γ 上存在两个点 $P_i \in \Gamma$, 使得

$$(yf_x - xf_y)\Big|_{P_i} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

二. 关于 Taylor 展式

1. 写出函数 $z = \cos(x^2 + y^2)$ 在原点 $(0, 0)$ 处的 Taylor 展式, 带 Peano 余项 $o(\rho^2)$, 以及带二阶 Lagrange 余项. (课本第81-82页, 习题1.8题1(1))

2． 求函数 $\ln(1+x+y+z)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的两个 Taylor 展开式, 一个带 Peano 余项 $o(\rho^2)$, 其中 $\rho^2=x^2+y^2+z^2$, 一个带二阶 Lagrange 余项. (课本第81-82页, 习题1.8题1(3))

3． 由隐函数定理可知, 方程 $x+y+z+xyz^3=0$ 在原点 $(0,0,0)$ 附近确定了一个隐函数 $z=z(x,y)$． 求函数 $z(x,y)$ 在原点处带 Peano 余项 $o(\rho^2)$ 的二阶 Taylor 展式．

三. 关于极值问题

1． 求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 位于第一卦限(即 $x,y,z>0$) 上的最大值. 并由此证明对任意正实数 a, b, c, 下述不等式成立：

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

2． 求函数 $z=xy(4-x-y)$ 在由三条直线 $x=1$, $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围有界闭区域上的最大值．

3. 求函数 $z(x,y)$ 的极值, 其中 $z(x,y)$ 为方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的隐函数. (这是课本第93页习题1.9题2).