Review

- 第一型曲线积分

$$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

$$\int_L f dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

- 第二型曲线积分

$$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \pm \int_\alpha^\beta \{P x'(t) + Q y'(t) + R z'(t)\} dt$$

$$= \int_L P dx + Q dy + R dz.$$

§3. 第一型曲面积分

1. 光滑曲面

Def. 点(x,y,z)在曲面S上变化时,若S的单位法向量 $\vec{n}(x,y,z)$与$-\vec{n}(x,y,z)$都连续变化,则称S为光滑曲面.

Remark: 设曲面$S: z = f(x,y)$,则S的法向量

$$\vec{n}(x,y,z) = \pm\frac{(f_x', f_y', -1)}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}.$$

因此,S为光滑曲面$\Leftrightarrow f$连续可微.

Remark: 设曲面S由隐函数$F(x,y,z)=0$表示，则

$$\vec{n}=\pm\frac{(F'_x,F'_y,F'_z)}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

因此，S为光滑曲面 $\Leftrightarrow F(x,y,z)$连续可微.

Remark: 设曲面$S: x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$,

简记为$S: r=r(u,v)$，则S的法向量为:

$$\vec{n}(x,y,z)=\pm r'_u\times r'_v/\|r'_u\times r'_v\|,$$

其中$r'_u=(x'_u,y'_u,z'_u), r_v=(x'_v,y'_v,z'_v)$. 于是

$$\vec{n}(x,y,z)=\pm\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中, $A=\det\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, B=\det\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, C=\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$

因此,

S为光滑曲面

$\Leftrightarrow x(u,v), y(u,v), z(u,v)$都连续可微.

2.第一型曲面积分的物理背景及定义

曲面S上任一点$P(x,y,z)$处的密度为$\mu(x,y,z)$. 求S的质量. 将S分割成$\Delta S_1,\cdots,\Delta S_n$,在$\Delta S_i$上任取点$P_i(\xi_i,\eta_i,\delta_i)$,仍以$\Delta S_i$表示曲面$\Delta S_i$的面积,则$S$的质量$m\approx\sum_{i=1}^{n}\mu(P_i)\Delta S_i$.记$\lambda=\max_i\{d(\Delta S_i)\}$,若极限$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(P_i)\Delta S_i$存在,则该极限就是$S$的质量.

Def. 设函数$f(x,y,z)$在空间曲面S上有定义,将S任意分割成$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$,记$\lambda$为分割的直径,仍以$\Delta S_i$表示曲面$\Delta S_i$的面积,在$\Delta S_i$上任意取点$P_i$ (ξ_i,η_i,δ_i),若极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$存在,则称该极限为函数$f(x,y,z)$在曲面$S$上的第一型曲面积分,记作$\iint_S f(x,y,z)dS$.即

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i.$$

Remark: 定义中极限值 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$ 与对 S 所做的分割无关, 与 P_i 的选取无关.

Remark: $\iint_S dS$ 表示曲面 S 的面积.

2.第一型曲面积分 $\iint_S f(x,y,z)dS$ 的计算

设曲面 S 有参数方程

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D,$$

简记为

$$S: r = r(u,v), (u,v) \in D.$$

- Step1.分划:

在ouv平面上,用平行于坐标轴的直线

$$u=u_i(i=1,2,\cdots,n),\ v=v_j(j=1,2,\cdots,m)$$

对D进行分划$\left\{\Delta D_{ij}\right\}$. 在映射$r=r(u,v),(u,v)\in D$下,

曲面S上有分划$T=\left\{\Delta S_{ij}\right\}$,其中$\Delta D_{ij}$与$\Delta S_{ij}$对应.

- Step2.取点:

$$P_{ij}=(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j),z(u_i,v_j))\in\Delta S_{ij}.$$

- Step3.求和:

面积$\Delta S_{ij}\approx\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\Delta u_i\Delta v_j$,其中

$$A=\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\bigg|_{(u_i,v_j)},\ B=\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\bigg|_{(u_i,v_j)},\ C=\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\bigg|_{(u_i,v_j)}.$$

于是, $\sum_{i,j} f(P_{ij})\Delta S_{ij}$

$$\approx\sum_{i,j} f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j),z(u_i,v_j))\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\Delta u_i\Delta v_j$$

- Step4.取极限:

$$\iint_S f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

Remark: 若曲面S的方程为$z = f(x,y),(x,y)\in D$,

则$S: x = x, y = y, z = f(x,y),(x,y)\in D$.于是

$$A = \det\begin{pmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{pmatrix} = -f'_x, B = -f'_y, C = 1.$$

$$\iint_S g(x,y,z)dS$$

$$= \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,dxdy.$$

4. 第一型曲面积分的性质

(1) (可积的充分条件) S为光滑曲面, $f(x,y,z)$在S上连续, 则$\iint_S f dS$存在.

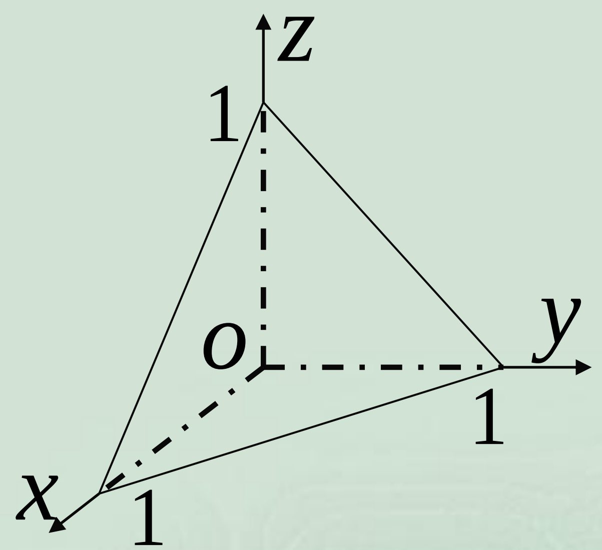
(2)(线性性质)若$\iint_S f dS$与$\iint_S g dS$都存在, 则$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\iint_S (\alpha f + \beta g) dS$存在, 且

$$\iint_S (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_S f dS + \beta \iint_S g dS.$$

(3)(对曲面的可加性) S由$S_1, S_2, \cdots, S_n$拼接而成,则

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \iint_{S_2} f dS + \cdots + \iint_{S_n} f dS.$$

例: $I=\iint\limits_{S}\frac{dS}{(1+x+y)^2}$, 其中$S$为平面 $x+y+z=1$在第一卦限中的部分.



解: S的方程为

$$z=1-x-y,(x,y)\in D.$$

其中$D=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$.

故

$$I=\iint_D\frac{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy}{(1+x+y)^2}=\iint_D\frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+y)^2}$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{\sqrt{3}}{(1+x+y)^2}dy=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\ln 2-1).\square$$

例:设$a^2+b^2+c^2=1$, S是平面$ax+by+cz=d$上的有界区域.求S在三个坐标平面上的投影面积.

解:S的单位法向量为$\vec{n}=(a,b,c)$.设S在oxy平面的投影为D_{xy}.分别以$\sigma(S)$和$\sigma(D_{xy})$表示S和D_{xy}的面积.

- 当$c\neq 0$时, $S: z=(d-ax-by)/c$, $(x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\sigma(S)=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(a/c)^2+(b/c)^2}\,dxdy=\sigma(D_{xy})/|c|,$$

• 当$c=0$时，S所在平面与oxy平面垂直，

$$\sigma(D_{xy})=0.$$

综上，$\sigma(D_{xy})=|c|\sigma(S)$.

同理，S在oyz平面和ozx平面的投影面积分别为

$$\sigma(D_{yz})=|a|\sigma(S),$$

$$\sigma(D_{zx})=|b|\sigma(S).\square$$

例. 求密度均匀的锥面$S: \dfrac{z^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} (0 \le z \le b)$关于直线$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-b}{0}$的转动惯量.

解: 曲面S的参数方程为

$$r = (a\rho\cos t, a\rho\sin t, b\rho), (t, \rho) \in D = [0, 2\pi] \times [0,1].$$

$$r'_t = (-a\rho\sin t, a\rho\cos t, 0)$$

$$r'_\rho = (a\cos t, a\sin t, b)$$

$$A = ab\rho\cos t, B = ab\rho\sin t, C = -a^2\rho,$$

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dtd\rho = a\sqrt{a^2 + b^2}\, \rho dtd\rho$$

转动惯量为

$$\iint_S \left[y^2 + (z-b)^2 \right] dS$$

$$= a\sqrt{a^2+b^2}\iint_D \left[(a\rho\sin t)^2 + (b\rho - b)^2 \right] \rho dt d\rho$$

$$= a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \left[a^2\rho^3\sin^2 t + b^2\rho(\rho-1)^2 \right] dt$$

$$= \frac{a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}\pi}{12}. \square$$

例:设$f(x)\in C[0,1]$,则

$$(1)\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi f(\sin\varphi\sin\theta)d\varphi d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi f(\cos\varphi)d\varphi,$$

(2)计算$I=\iint\limits_{0\le\varphi,\theta\le\pi/2}\sin\varphi e^{\sin\varphi\sin\theta}d\varphi d\theta.$

解:(1)令S为$x^2+y^2+z^2=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0.$

由对称性可得

$$\iint_S f(y)dS=\iint_S f(z)dS.$$

往证上式两边分别等于(1)式两边.

S的参数方程为

$$r=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi),0\le\varphi,\theta\le\pi/2.$$

于是 $r'_\varphi=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi),$

$$r'_\theta=(-\sin\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\theta,0),$$

$$A=\sin^2\varphi\cos\theta,B=\sin^2\varphi\sin\theta,C=\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sin\varphi$$

$$\iint_S f(y)dS=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi f(\sin\varphi\sin\theta)d\varphi d\theta,$$

$$\iint_S f(z)dS=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi f(\cos\varphi)d\varphi d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi f(\cos\varphi)d\varphi.$$

(2)计算$I=\iint\limits_{0\le\varphi,\theta\le\pi/2}\sin\varphi e^{\sin\varphi\sin\theta}d\varphi d\theta.$

解:由(1),

$$I=\iint\limits_{0\le\varphi,\theta\le\pi/2}\sin\varphi e^{\sin\varphi\sin\theta}d\varphi d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi e^{\cos\varphi}d\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{2}e^{\cos\varphi}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}(e-1).\square$$

例. $S:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1,$

求$\oiint_S (x+y+z)\mathrm{d}S.$

解: 作正交变换$u=x-1, v=y-2, w=z-3,$ 则

$$\oiint_S (x+y+z)\mathrm{d}S=\oiint_{u^2+v^2+w^2=1}(u+v+w+6)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_{u^2+v^2+w^2=1} 6\mathrm{d}S \ =24\pi.\square$$

Remark. 物理意义

例: $S=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$.证明*Poisson*公式

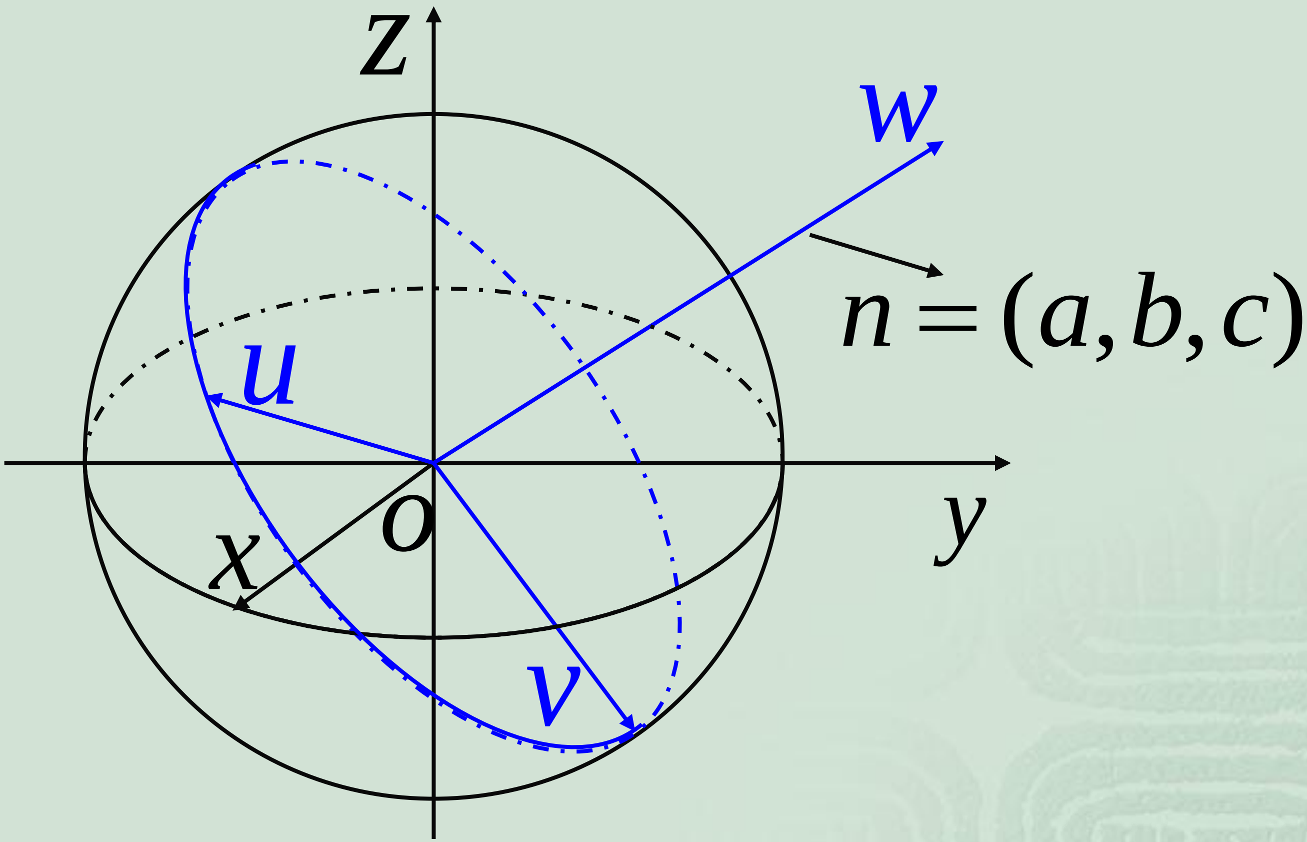
$$\iint_S f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)dt.$$

解: (1)若$a=b=c=0$,则

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS=\iint_S f(0)dS$$

$$=4\pi f(0)=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)dt.$$

(2)若$(a,b,c)\neq(0,0,0)$.作正交变换(旋转+反射),将$oxyz$坐标系变为$ouvw$坐标系,使坐标原点保持不变,并取$\vec{n}=(a,b,c)$为新坐标系的w轴正方向.



在该变换下,$oxyz$坐标系下的单位球面变成$ouvw$坐标系下的单位球面.$oxyz$坐标系下向量(x,y,z)在$ouvw$坐标系下w方向的分量为

$$w=(x,y,z)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

于是, $ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w.$

旋转变换不改变曲面面积的大小,因此在该变换下,面积微元dS保持不变.故

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS$$

$$=\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w)dS$$

(物理解释：不同坐标系下计算曲面质量)

$$= \iint_{\substack{0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\theta\le2\pi}} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi$$

$$= -2\pi\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)d\cos\varphi$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)dt. \square$$

Remark. 正交变换下第一型曲面积分的计算.

$$\mathrm{p} \triangleq (x,y,z)^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}(u,v,w)^{\mathrm{T}} \triangleq \mathrm{Aq}, \quad \mathrm{AA}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}.$$

$$(x,y,z) \in S \quad \leftrightarrow \quad (u,v,w) \in \Sigma \quad \leftrightarrow \quad (t,\tau) \in D$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\tau)} = \mathrm{A}\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(t,\tau)}, \quad \mathrm{p}_t' = \mathrm{Aq}_t', \mathrm{p}_\tau' = \mathrm{Aq}_\tau',$$

$$\|\mathrm{p}_t' \times \mathrm{p}_\tau'\| = \|\mathrm{p}_t'\| \cdot \|\mathrm{p}_\tau'\| \sqrt{1 - \cos^2 \langle \mathrm{p}_t', \mathrm{p}' \rangle_\tau}$$

$$= \|\mathrm{p}_t'\| \cdot \|\mathrm{p}_\tau'\| \sqrt{1 - \frac{(\mathrm{p}_t' \cdot \mathrm{p}_\tau')^2}{\|\mathrm{p}_t'\|^2 \cdot \|\mathrm{p}_\tau'\|^2}} = \sqrt{\|\mathrm{p}_t'\|^2 \cdot \|\mathrm{p}_\tau'\|^2 - (\mathrm{p}_t' \cdot \mathrm{p}_\tau')^2}$$

$$= \sqrt{\|\mathrm{q}_t'\|^2 \cdot \|\mathrm{q}_\tau'\|^2 - (\mathrm{q}_t' \cdot \mathrm{q}_\tau')^2} = \|\mathrm{q}_t' \times \mathrm{q}_\tau'\|$$

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D f(x(t,\tau),y(t,\tau),z(t,\tau))\|\mathrm{p}_t'\times\mathrm{p}_\tau'\|\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

$$=\iint_D f(x(t,\tau),y(t,\tau),z(t,\tau))\|\mathrm{q}_t'\times\mathrm{q}_\tau'\|\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

$$=\iint_\Sigma f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\mathrm{d}S.$$

Question. 正交变换下第一型曲线积分的计算?

作业:习题4.3

No.2,3,6,10.