习题 6.3 作业参考解答

《高等微积分教程（下）》

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$.

解： 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} = 0$，知收敛半径 $\rho = +\infty$.
收敛域为 $\mathbb{R}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{3n+1}}{(2n-1)2^n}$.

解：

$$a_{3n+1} = \frac{1}{(2n-1)2^n}, a_{3n+2} = a_{3n+3} = 0.$$

故 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[3n+1]{\dfrac{1}{(2n-1)2^n}} = 2^{-\frac{1}{3}}$.
收敛半径 $\rho = 2^{\frac{1}{3}}$.
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-2^{\frac{1}{3}})^{3n+1}}{(2n-1)2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{2n-1}$ 收敛.
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2^{\frac{1}{3}})^{3n+1}}{(2n-1)2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{2n-1}$ 发散.
故收敛域为 $[-2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n} x^n$.

解：

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\ln n}{n}} = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\ln n}{n}(-1)^n$ 收敛.
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 发散.
故收敛域为 $[-1,1)$.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}(x-1)^n\ (p>0)$.

解:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=1\Rightarrow\rho=1.$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}(-1)^n$ 收敛.
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\in(0,1]$ 时发散.
故当 $p>1$ 时收敛域为 $[0,2]$，当 $p\in(0,1]$ 时收敛域为 $[0,2)$.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n(x+a)^{2n}$

解:

$$a_{2n}=2^n,a_{2n+1}=0.$$

故 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[2n]{2^n}=\sqrt{2}\Rightarrow\rho=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}1$ 发散.
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}1$ 发散.
故收敛域为 $(-a-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-a+\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

2. 求下列幂级数的收敛域与和函数.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$.

解：

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}}=1\Rightarrow\rho=1.$$

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 收敛到 $2\ln 2-1$.
$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1^n}{n(n-1)}$ 收敛到 1.
收敛域为 $[-1,1]$.
记 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)},x\in[-1,1]$.
当 $x\in(-1,1)$ 时，$S'(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n-1},S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}x^{n-2}=\dfrac{1}{1-x}$.
从而 $S'(x)=-\ln(1-x),S(x)=x+(1-x)\ln(1-x)$.

$S(1)=1,S(-1)=2\ln 2-1$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n+1)x^{2n+1}$.

解：

$$a_{2n+1}=2n+1,a_{2n+2}=0.$$

故 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[2n+1]{2n+1}=1\Rightarrow\rho=1$.
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n+1)(-1)^{2n+1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n+1)1^{2n+1}$ 发散.
故收敛域为 $(-1,1)$.
记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n+1)x^{2n+1},x\in(-1,1)$.
当 $x\in(-1,1)$ 时，$\int_0^x\dfrac{S(t)}{t}dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{2n+1}=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.
从而 $S(x)=\dfrac{3x^3-x^5}{(1-x^2)^2}$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$.

解：

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}=1\Rightarrow\rho=1.$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}1^{n-1}$ 发散.
故收敛域为 $(-1,1)$.
记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}x^{n-1}, x\in(-1,1)$.
当 $x\in(-1,1)$ 时，$\int_0^x S(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{2}x^n$.
$\int_0^x(\int_0^y S(t)dt)dy=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{2}=\dfrac{x^2}{2(1-x)}$.
从而 $S(x)=(\dfrac{x^2}{2(1-x)})''=\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

3. 将下列函数在 x_0 点展成幂级数，并求收敛域.

(1) $\cos x, x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

解：

$$|\cos^{(n)}x|=|\cos(x+\frac{n}{2}\pi)|\le 1.$$

$$\cos x=\cos\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(x+\frac{n}{2}\pi)}{n!}(x-\frac{\pi}{4})^n.$$

收敛域为 $\mathbb{R}$.

(3) $\ln(1+x), x_0=2$.

解：

$$\ln(1+x)=\ln 3+\ln(1+\frac{x-2}{3})=\ln 3+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\frac{x-2}{3})^n}{n}, x\in(-1,5).$$

收敛域为 $x\in(-1,5]$.

(5) $\sin x^2, x_0=0$.

解:

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}.$$

收敛域为 $x \in \mathbb{R}$.

(7) $\dfrac{1}{x-1}, x_0 = -1$.

解:

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x+1}{2})^n, x \in (-3,1).$$

收敛域为 $x \in (-3,1)$.

(9) $\dfrac{x}{(x-1)(x+3)}, x_0 = 0$.

解:

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)} = \frac{x}{4}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4}(-1+(-\frac{1}{3})^{n+1})x^{n+1}, x \in (-1,1).$$

收敛域为 $x \in (-1,1)$.

(11) $\ln(x+\sqrt{x^2+1}), x_0 = 0$.

解:

$$(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} x^{2n}, x \in (-1,1).$$

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, x \in (-1,1).$$

收敛域为 $x \in [-1,1]$.

(13) $\int_0^x \dfrac{\arctan t}{t}dt, x_0 = 0$.

解：

$$\frac{\arctan t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1}, x \in (-1,1).$$

$$\int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, x \in (-1,1).$$

收敛域为 $x \in [-1,1]$