《微积分A2》第三十讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年06月01日

Corollary

定理: 对任意 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数 $f(x)$, 成立如下不等式(称 Bessel 不等式)

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

其中 a_0,a_k,b_k 是函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

证明：在最佳均方逼近定理的证明过程，对任意正整数 N，我们得到如下等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_N(x)]^2dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{N}(a_k^2+b_k^2).$$

由此可见，对任意正整数 N

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{N}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

令 $N\to+\infty$，即得 Bessel 不等式。推论得证。 □

Corollary

推论：设 a_0, a_k, b_k 是任意可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数，则当 $k \to +\infty$ 时，$a_k \to 0$，$b_k \to 0$.

Proof.

证明：根据 Bessel 不等式可知，级数

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

收敛，从而 $a_k^2 + b_k^2 \to 0$，$k \to +\infty$. 命题得证. □

根据 Bessel 不等式，如果三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是某个可积函数的 Fourier 级数，无论收敛与否，其由其系数所构成的级数

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

收敛．因此虽然如下两个三角级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{k}},\qquad \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\cos kx}{\ln k},$$

均收敛，但它们都不是任何可积函数的 Fourier 级数．

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 记 $S_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx=0.$$

证明: 这里只证 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数情形. 此时根据 Fejér 定理可知在 $[-\pi,\pi]$ 上, $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x)$, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in [-\pi,\pi],$$

其中 $\sigma_n(x)$ 是部分和序列 $\{S_k(x)\}$ 的前 $n+1$ 项的算术平均, 即

$$\sigma_n(x) \triangleq \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1},$$

证明续

故 $\sigma_n(x)$ 也是至多 n 次三角多项式. 因此根据 Fourier 级数的最佳均方逼近定理可知, $\forall n \geq N$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \sigma_n(x)]^2 < 2\pi\varepsilon^2,$$

定理得证. $\square$

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则如下等式成立

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx, \qquad (*)$$

其中 $\{a_0,a_k,b_k\}_{k\geq 1}$ 为函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

注: 等式 (*) 常称作 Parseval 等式. 将 Bessel 不等式中的不等号该为等号即是 Parseval 等式. 实际上 Bessel 不等式在更大的范围内成立, 而 Parseval 等式成立的范围相比而言较小.

Proof.

证: 之前已证

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-S_n(x)\Big]^2dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

根据 Fourier 平方收敛性可知，上述等式左边当 $n\to+\infty$ 时的极限为零. 这就证明 Parseval 等式成立. □

例: 之前已证

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{k^2},\quad \forall x\in[-\pi,\pi],$$

即函数 x^2 的 Fourier 系数为 $a_0=\frac{2\pi^2}{3}$, $a_k=\frac{4(-1)^k}{k^2}$, $b_k=0$. 于是由 Parseval 等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

我们得到

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2\pi^2}{3}\right]^2+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{4(-1)^k}{k^2}\right]^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)^2dx.$$

例子续

即

$$\frac{2\pi^4}{9}+16\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{2\pi^4}{5}.$$

由此我们得到 Euler 于 1734 年所证明的公式

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

注: 对任意正整数 m, Euler 已证明级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}}$$

可以表示为 π^{2m} 的有理数倍数. 人们期待但至今无人能证明

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}\pi^3,$$

其中 p, q 均为正整数.

习题一 (第5章总复习题第4题)：证明级数

$$\sum_{n\geq 1} x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \qquad (*)$$

当 $x \in (0, e^{-1})$ 时收敛，当 $x \geq e^{-1}$ 时发散.

证明：回忆调和级数的前 n 部分和可表示为

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln n + \gamma + a_n,$$

其中 $\gamma = 0.577\cdots$，称为 Euler 常数，$a_n \to 0$，$n \to +\infty$. 因此级数 (*) 与 $\sum_{n\geq 1} x^{\ln n}$ 的收敛性相同. 这是因为对于 $x > 0$，

$$\frac{x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}{x^{\ln n}} = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n} = x^{\gamma+a_n} \to x^{\gamma} > 0.$$

考虑级数 $\sum_{n\geq 1} x^{\ln n}$. 注意该级数的一般项可写作

$$x^{\ln n} = e^{(\ln n)(\ln x)} = n^{\ln x}.$$

由此可见，当 $x \in (0, e^{-1})$ 时，$\ln x < -1$，故级数 $\sum_{n\geq 1} x^{\ln n}$ 收敛. 当 $x \geq e^{-1}$ 时，$\ln x \geq -1$，故级数 $\sum_{n\geq 1} x^{\ln n}$ 发散. 命题得证.

例二 (第5章总复习题第3题(11)): 判断如下级数的收敛性

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots.$$

解: 记

$$u_1=\sqrt{2},$$
$$u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},$$
$$u_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$\vdots$$

再记 $v_1 = u_1$, $v_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$, $\forall n \geq 1$, 则所考虑的级数可写作 $\sum_{n\geq 1} v_n$. 易证序列 u_n 严格单调上升. 由归纳法不难证明 $u_n \leq 2$, $\forall n \geq 1$. 因此序列 u_n 收敛. 设 $u_n \to u^*$. 注意到 u_n 满足关系式 $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. 令 $n \to +\infty$ 得 $u^* = \sqrt{2 + u^*}$. 由此不难解得 $u^* = 2$. 考虑一般项 v_n.

$$v_{n+1}^2 = 2 - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{2 + u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2 + u_n}$$

$$= \frac{4 - (2 + u_{n-1})}{2 + u_n} = \frac{2 - u_{n-1}}{2 + u_n} < \frac{2 - u_{n-1}}{2} = \frac{v_n^2}{2}.$$

由此可见

$$v_{n+1} < \frac{v_n}{\sqrt{2}} < \cdots < \frac{v_1}{(\sqrt{2})^n}.$$

因此级数 $\sum_{n\geq 1} v_n$ 收敛. 解答完毕.

注记：法93严君啸同学向我指出成立估计式 $v_{n+1}^2 < \frac{v_n^2}{2}$. 这改进了整个证明. 在此感谢严君啸同学.

工物90艾克热木在微信群里提供了如下精妙的证明. 在此感谢艾克热木同学与大家分享他的解法. 记$\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则

$$u_1 = \sqrt{2} = 2\cos\alpha,$$

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1} = 2\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)} = 2\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cdots, \quad u_n = 2\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} \to 2.$$

再记 $v_1 = u_1 = \sqrt{2} = 2\cos\alpha = 2\sin\alpha$, 则

$$v_2 = \sqrt{2 - u_1} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

由归纳法不难证明

$$v_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} = \sqrt{2(1 - \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}})}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}})} = 2\sin\frac{\alpha}{2^n}, \quad \forall n \geq 1.$$

由于

$$\frac{v_n}{\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\frac{\alpha}{2^{n-1}}} \to 4,$$

且正项级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha}{2^n}$ 显然收敛，根据比较判别法的极限形式可知，级数 $\sum_{n\geq 1} v_n$ 收敛. 证毕.

习题三 (课本第258页习题5.3题10, 土木97李洛琪推荐): 讨论 p 为何值时, 级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n^p+\sin n}$$

绝对收敛, 条件收敛和发散.

解: 记 $u_n=\frac{\sin n}{n^p+\sin n}$. 显然当 $p\leq 0$ 时, 级数发散, 因为一般项不趋向于零. 设 $p>0$. 将 u_n 写作如下形式

$$u_n=\frac{\sin n}{n^p+\sin n}=\frac{\sin n}{n^p}\left(1+\frac{\sin n}{n^p}\right)^{-1}$$

$$=\frac{\sin n}{n^p}\left(1-\frac{\sin n}{n^p}+O(\frac{1}{n^{2p}})\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_n = \frac{\sin n}{n^p} - \frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\left(1 + O(\frac{1}{n^p})\right). \quad (*)$$

(i) 情形 $0 < p \leq 1/2$. 由于级数 $\sum \frac{\sin n}{n^p}$ 对任意 $p > 0$ 均收敛(D 判别法)，且易证 $\sum \frac{\sin^2 n}{n^{2p}}$ 发散. (证明方法与证明 $\sum \frac{\cos^2 n}{n}$ 发散类似. 参见May09讲义第42页.) 从而级数 $\sum \frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\left(1 + O(\frac{1}{n^p})\right)$ 发散(比较判别法). 因此级数 $\sum_{n\geq 1} u_n$ 当 $0 < p \leq 1/2$ 时发散.

(ii) 情形 $1/2 < p \leq 1$. 此时级数 $\sum \frac{\sin n}{n^p}$ 条件收敛，正项级数 $\sum \frac{\sin^2 n}{n^{2p}}$ 绝对收敛，从而级数 $\sum \frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\left(1 + O(\frac{1}{n^p})\right)$ 绝对收敛(比较判别法). 再根据等式(*)知级数 $\sum_{n\geq 1} u_n$ 当 $1/2 < p \leq 1$ 时条件收敛.

(iii) 情形 $p > 1$. 显然此时级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^p+\sin n}$ 绝对收敛. 解答完毕.

<u>习题四</u> (法93严君啸推荐并提供了如下两个解答): 求级数

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

$$+\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}+\cdots,$$

的和, 级数的排列规则如下, 顺序按 $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ 的顺序, 符号按 $+,-,-,+$, 不断循环.

<u>解法一</u>: 利用已知结论

$$\sum_{k\geq 1}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2},\qquad \forall x\in(0,2\pi),$$

取 $x=\frac{\pi}{2}$ 即得

$$\sum_{k\geq 1}\frac{\sin k\pi/2}{k}=\frac{\pi-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

左边级数可写作

$$\sum_{k\geq 1}\frac{\sin k\pi/2}{k}=\sum_{k\geq 0}\frac{\sin(k\pi+\pi/2)}{2k+1}=\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

由此得如下著名的级数之和

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}. \quad (*)$$

再回忆一个已知结论

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2. \quad (**)$$

由级数(*)减级数(**)得

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

<u>解法二</u>：考虑幂级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)},$$

其和函数记作 $S(x)$. 易求得其收敛半径为 1，收敛域为 $[-1,1]$. 显然这个幂级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛. 根据连续性守恒定理知 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续. 以下我们来求 $S(x)$. 对等式

$$S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

两边两次求导得

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$S''(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\Rightarrow \quad S'(x) = \arctan x + C_1.$$

注意到 $S'(0) = 0$，故 $C_1 = 0$，从而 $S'(x) = \arctan x$. 同理由 $S(0) = 0$ 可知

$$S(x) = \int_0^x \arctan t dt = t \arctan t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t dt}{1+t^2}$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2), \quad \forall x \in [-1,1].$$

取 $x = 1$ 得

$$S(1) = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2,$$

$$\text{即} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

注意 $\frac{1}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$，故

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

不难证明上述等式左边级数的括号可以去掉(见下注)，因此我们就证明了

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

注：不难证明，若两个级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 均收敛，且收敛于 A 和 B，则级数

$$a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3+\cdots \quad (*)$$

收敛，且收敛于 $A+B$. 记级数(*)为 $\sum c_n$，记级数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 和 $\sum c_n$ 的前 n 项部分和为 A_n, B_n 和 C_n，则显然

$$C_{2n} = A_n + B_n \to A + B,$$

$$C_{2n+1} = A_n + B_n + a_{n+1} \to A + B.$$

因此 $C_n \to A + B$. 命题得证.

Theorem

Dini 定理级数版: 假设

(i) 函数 $u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $u_k(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, $\forall k \geq 1$;

(ii) 级数 $\sum_{k\geq 1} u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛, 其和函数记作 $S(x)$;

(iii) 函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,

则函数级数 $\sum_{k\geq 1} u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

Theorem

Dini 定理序列版: 设

(i) 函数 $f_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛;

(ii) 极限函数 $f(x) \triangleq \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;

(iii) 对每个 $x \in [a,b]$, 序列 $\{f_n(x)\}$ 为单调的,

则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

(法93严君啸推荐)

Dini 定理序列版的证明: 不妨设函数列 $\{f_n(x)\}$ 单调下降，且极限函数 $f(x)\equiv 0$. 若不然考虑函数列 $\{f_n(x)-f(x)\}$ 即可. 以下我们来证明 $f_n(x)\rightrightarrows 0$ on $[a,b]$，即对于任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N=N(\varepsilon)$，使得 $0\le f_n(x)<\varepsilon$, $\forall x\in[a,b]$, $\forall n\ge N$. 反证. 若不然，则存在 $\varepsilon_0>0$，对任意 j，存在 $m_j\ge j$，以及存在点 $x_j\in[a,b]$，使得 $f_{m_j}(x_j)\ge\varepsilon_0$. 由假设 $f_n(x)$ 单调下降，故

$$f_j(x_j)\ge f_{m_j}(x_j)\ge\varepsilon_0.$$

根据 Bolzano-Weierstrass 定理知有界序列 $\{x_j\}$ 存在收敛子列 $\{x_{j_n}\}$. 设 $x_{j_n}\to x^*\in[a,b]$, $n\to+\infty$.

Dini 定理证明, 续一

对任意正整数 m, 由于 $j_n \to +\infty$, $n \to +\infty$, 故当 n 充分大时, $j_n > m$. 于是由函数列 $\{f_m(x)\}$ 的单调下降性质得

$$f_m(x_{j_n}) \geq f_{j_n}(x_{j_n}) \geq \varepsilon_0.$$

于不等式 $f_m(x_{j_n}) \geq \varepsilon_0$ 中, 令 $n \to +\infty$ 即得 $f_m(x^*) \geq \varepsilon_0 > 0$, $\forall m$. 此与假设 $\lim_{m\to+\infty} f_m(x^*) = 0$ 相矛盾. 定理得证.

Lemma

引理：设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为一个子集，则 D 为闭集，当且仅当 D 包含它的每个收敛点列的极限，即若点列 $\{x_k\} \subset D$ 收敛，且 $x_k \to x^*$，则 $x^* \in D$.

Theorem

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集，$f(z)$ 是定义在 D 上的连续函数，则

(i)(有界性) 存在 $M > 0$，使得 $|f(z)| \leq M, \forall z \in D$;

(ii)(最值性) 存在 $z_1, z_2 \in D$，使得 $f(z_1) \leq f(z) \leq f(z_2), \forall z \in D$，换言之，连续函数 $f(z)$ 在有界闭集 D 上，分别在点 z_1 和 z_2 处取得最小值和最大值.

连续可微，可微，偏导存在性与连续之关系

$$\text{偏导数连续性} \quad \Rightarrow \quad \text{可微性} \quad \Rightarrow \quad \text{连续性}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{偏导存在性}$$

行列式求导规则

<u>定理</u>: 设 $a_{ij} = a_{ij}(t)$ 可导, $t \in J$, $i,j = 1,2,\cdots,n$, 则行列式 $\det[a_{ij}(t)]$ 可按行或按列求导. 以 $n = 3$ 为例, $(\det[a_{ij}])' =$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{31} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

或者 $(\det[a_{ij}])' =$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Lemma

行列式函数 $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n^2} \mapsto \det A$ 的偏导数由下式给出

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = A_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \quad (*)$$

其中 A_{ij} 表示行列式 $\det A$ 的元素 a_{ij} 所对应的代数余子式.

<u>定理</u>(二维情形): 设二元函数 $F(x,y)$ 在平面开集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上是 C^1 的. 假设 $F(x_0,y_0)=0$, $(x_0,y_0)\in D$ 且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, 则存在唯一的(隐) 函数 $f\colon J_\alpha \to J'_\beta$, 其中 $J_\alpha \triangleq (x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, $J'_\beta \triangleq (y_0-\beta, y_0+\beta)$, 使得

(i) $y_0 = f(x_0)$, $F(x,f(x)) \equiv 0$, $\forall x \in J_\alpha$;

(ii) 对于 $(x,y)\in J_\alpha \times J'_\beta$, $F(x,y)=0$ 当且仅当 $y=f(x)$,

(iii) 隐函数 $f(x)$ 是 C^1 的, 且

$$f'(x) = -\left.\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\right|_{y=f(x)}, \quad \forall x \in J_\alpha.$$