一致连续性作为函数在整体上的性质，对于函数性态的描述较为重要。首先我们给出定义

定义. f在区间I上一致连续是指 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$ **使得** $x',x''\in I,|x'-x''|<\delta$ **,有** $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$ **.**

容易从定义中看出一致连续保证了f在区间I上每一点处都连续（固定x"即可），从直观上来讲也是自然的，整体上连续性必然保证了局部上的连续。但是若一个f在I上处处连续则未必在I上一致连续，最典型的例子是 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上处处连续但不一致连续，原因是在0处函数变化过快了（曲线很陡）。这导致了在接近0时的任意区间上函数值差值会很大。

此时我们会给出一个重要定理：**Cantor定理**

Cantor定理：若f在有界闭区间I上处处连续，则f在I上一定一致连续。

闭区间作为实数空间上的紧集，其紧致性保证了f在处处连续条件下一定一致连续，证明用有限覆盖定理即可，实际上Cantor定理单纯用有限覆盖定理证明会较为繁琐，可以用有限覆盖定理的一个推论会更方便。

有限覆盖定理的推论（Lebesgue数).设区间 $[a,b]$ **的一个开覆盖** $\{U_\alpha\}$ **，则存在一个正数** $\delta>0$ **使得对于区间** $[a,b]$ **中的任何两个数x',x"，只要** $|x'-x''|<\delta$ **，就存在开覆盖中的一个开区间，它覆盖了x',x".** δ **称为Lebesgue数.**

因为Cantor定理我们已经知道在任一有界闭区间上处处连续的函数必然一致连续，也看到了在 $(0,1)$ 这种开区间上存在处处连续但不一致连续的函数，自然要问在一个连续函数在有界开区间上处处连续的充分必要条件是什么？或者说这样的条件是否存在。

实际上我们有这样的结果：

命题1.设f在 (a,b) **上处处连续，则f在** (a,b) **上一致连续的充分必要条件是f存在两个单侧极限** $f(a^+)$ **和** $f(b^-)$

这个结论实际上与Cantor定理无异，在端点补充定以后即用Cantor定理便证明完毕。接

下来我们在**无限区间**上讨论连续函数的一致连续性并给出一些重要结果。

首先是无限区间上的两个例子

例. $y=\sqrt{x}$ **在区间** $[0,+\infty)$ **上一致连续.**

这个例子可以用这个不等式 $\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|<\sqrt{\left|x_1-x_2\right|}$ 来获得证明。

例. $y=x^2$ **在区间** $(-\infty,+\infty)$ **不一致连续.**

原因是函数在很远增长过快或者说变得很陡，我们可以取数列 $\{\sqrt{n+1}\}$ 和 $\{\sqrt{n}\}$ ，容易知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$ 但 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(\sqrt{n+1})-f(\sqrt{n}))=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1-n)=1\neq 0$

故该函数在整个实轴上不一致连续。

通过以上两个例子可以看出函数在无穷远处的性态对于一致连续性会非常的重要，于是我们会设法加上一些条件来看看这些连续函数是否一直连续。最先想到的是有界性，在无限区间上有界保证了值域具有上下界，但实际上这个条件不能保证一致连续性，下面给出一个反例：

例. $y=sin(x^2)$ **在R上连续有界，但在R上不一致连续**

可以取 $x_1=\sqrt{n\pi}$ 和 $x_2=\sqrt{n\pi+2}$,我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n\pi}-\sqrt{n\pi+2}=0$ 但是 $f(\sqrt{n\pi})-f(\sqrt{n\pi+2})$ 极限不存在，故该函数在R上不一致连续。从图像上可以看出虽然这个函数在R上有界，但是当x充分大时，图像会越来越陡，显得很震荡。容易发现这个函数在x趋于无穷时，极限是不存在的（因为震荡），从而我们会思考若趋于无穷时函数极限存在，那是否一致连续呢？实际上这个肯定的：

命题2.设f是 $[a,+\infty]$ **是的连续函数，且存在有限极限** $f(+\infty)=A$ **,则f在** $[a,+\infty]$ **上一致连续.**

证明：对 $\forall\epsilon>0,\exists M>a$,当 $x>M$ 时有 $|f(x)-A|<\dfrac{\epsilon}{2}$.又利用Cantor定理知道f在 $[a,M+1]$ 上一致连续，因此对上述的 ϵ ，存在 $\delta>0$ ，使得当

道f在 $[a, M+1]$ 上一致连续，因此对上述的 ϵ ，存在 $\delta>0$ ，使得当 $x', x'' \in [a, M+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ ，有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$.

不妨假定上述 $\delta<1$ ，当 $x', x''>M$ 时，则有 $|f(x')-f(x'')| \leq |f(x')-A|+|A-f(x'')|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$ ，由于 $|x'-x''|<\delta<1$ ，故只能发生上述两种情况，这就证明了一致连续性。

一个函数在R上是否一致连续，跟函数变化率情况是密切相关的，有界性并非是必要的，在R上的无界函数也可以是一致连续的，最典型的例子是**直线：** $y=ax+b$ **在R上是一致连续的，但它是无界的。**因为它的变化率是恒定的，不会出现越大越震荡的情形。极限 $f(+\infty)$ 的存在性也并非必要的，同样的**直线**： $y=ax+b$ 当x趋于无穷时极限不存在但它是一致连续的。

实际上，从函数变化率的角度来说，我们可以得到一些条件非常强的命题，例如：

命题3.f在区间I上满足Lipschitz条件，则f在I上必定是一致连续

这个Lipschitz条件也称为Lipschitz连续，这是一个比一致连续更强的条件，关键是限制了函数变化的速率，故函数从图像上来看变化不会出现很陡的情况，值得注意的是 $y=\sqrt{x}$ 是一致连续的但不是Lipschitz连续的。（注意在0的附近）

命题4.f在区间I上有导函数且导函数有界，则f一致连续

由中值定理可以知道f在I上一定满足Lipschitz条件，故其一致连续

命题5.f是R上的连续周期函数，则f在R上一致连续

可以在一个周期区间上用Cantor定理证明然后延拓到整个实数轴上。

进一步我们还想知道区间分割下对于一致连续有什么结果，故我们有如下命题：

命题6.设f分别在 I_1 和 I_2 上一致连续， I_1 右端点为c在 I_1 中， I_2 左端点也是c并在 I_2 中，则f在 $I_1 \cup I_2$ 上也一致连续.

实际上利用命题1的结论可以立马得出该结论。