《微积分A2》第十三讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年03月30日

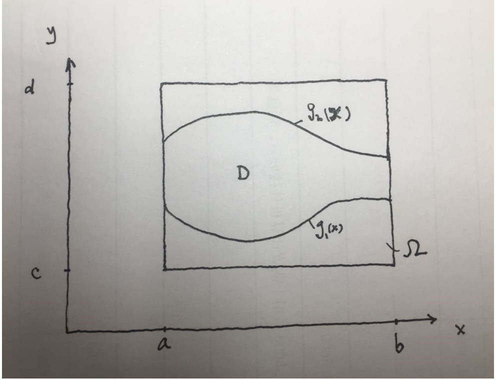
定理一 (Fubini): 设二元函数 $f(x,y)$ 在第一类平面简单闭域 D : $g_1(x)\le y\le g_2(x), x\in[a,b]$ 上可积, 其中 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为 $[a,b]$ 上连续函数, 并且对任何 $x\in[a,b]$, 积分

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

存在, 记作 $A(x)$, 则函数 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int_a^b A(x)dx$ $=\iint_D f(x,y)dxdy$, 即

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

证明: 取一个闭矩形 $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ 包含域 D, 如图所示.



记 f_D 为 f 的扩张函数. 由假设 f 在 D 上可积, 依定义就是 f_D 在闭矩形 Ω 上可积, 且 $\iint_D f = \iint_\Omega f_D$. 对任意 $x \in [a,b]$, 易见积分 $\int_c^d f_D(x,y)dy$ 存在, 因为以下三个积分均存在

$$\int_c^{g_1(x)} f_D, \quad \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_D, \quad \int_{g_2(x)}^{d} f_D,$$

且

$$\int_c^d f_D(x,y)dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy =: A(x).$$

根据闭矩形情形的Fubini定理(二重积分化为累次积分)可知, 函数 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

证明续二

$$\int_a^b A(x)dx = \iint_\Omega f_D(x,y)dxdy.$$

此即

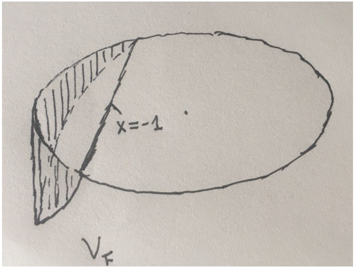
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

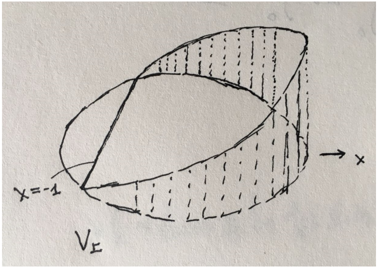
证毕. $\square$

例一

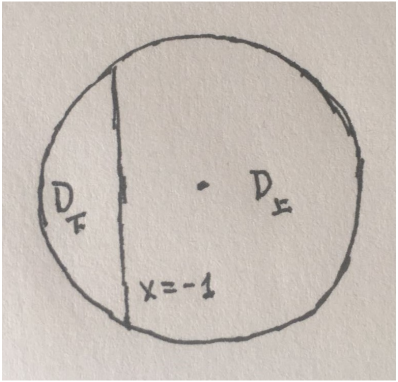
课本第132页例3.3.4：求由平面 $z = x + 1$ 和 $z = 0$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的两个空间区域的体积.

解：分别记这两个空间区域为 $V_{上}$ 和 $V_{下}$. 如图所示.





记立体 $V_{上}$ 和 $V_{下}$ 在 x, y 平面的投影区域分别为 $D_{上}$ 和 $D_{下}$. 如图所示.



于是立体 $V_上$ 的体积为

$$|V_上| = \iint_{D_上} z\,dxdy = \iint_{D_上} (x+1)\,dxdy$$

$$= \int_{-1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x+1)\,dy$$

$$= 2\int_{-1}^{2} (x+1)\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= \cdots = 3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}.$$

立体 $V_{下}$ 的体积为

$$|V_{下}| = \iint_{D_{下}} |z| dxdy = \iint_{D_{下}} |x+1| dxdy$$

$$= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [-(x+1)] dy$$

$$= -2\int_{-2}^{-1} (x+1)\sqrt{4-x^2} dx$$

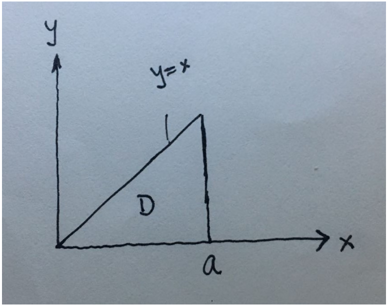
$$= \cdots = 3\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}.$$

解答完毕.

<u>例</u>: 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 证明

$$\int_0^a dx\int_0^x f(y)dy=\int_0^a (a-x)f(x)dx,\quad a>0.$$

<u>证</u>: 左边积分是函数 $f(y)$ 在域 $D: 0\le y\le x, 0\le x\le a$ 上的累次积分. 如图.



与之相等的另一个累次积分为

$$J = \int_0^a dy \int_y^a f(y)dx = \int_0^a (a-y)f(y)dy = \int_0^a (a-x)f(x)dx.$$

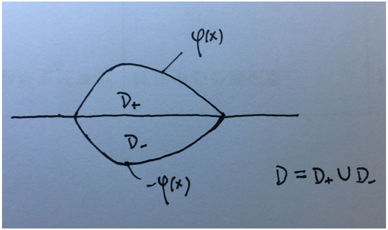
命题得证. □

Definition

定义: 称平面区域 D 关于 x 轴对称, 如果域 D 满足条件

$$(x, y) \in D \iff (x, -y) \in D$$

类似可定义关于 y 轴对称的区域. 如图所示.



Theorem

定理: 设闭区域 D 为关于 x 轴对称, 且可表示为 $D = D_+ \cup D_-$,

$$D_+ = \{(x, y), 0 \le y \le \phi(x), a \le x \le b\};$$

$$D_- = \{(x, y), -\phi(x) \le y \le 0, a \le x \le b\},$$

其中 $\phi(x) \ge 0$ 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数. 设 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数.

(i) 若函数 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数, 则 $\iint_D f = 0$;

(ii) 若函数 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数, 则 $\iint_D f = 2\iint_{D_+} f$.

Definition

定义: 设平面区域 D 关于 x 轴对称.

(i) 称函数 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数, 如果 $f(x,-y)=-f(x,y)$, $\forall (x,y)\in D$;

(ii) 称函数 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数, 如果 $f(x,-y)=f(x,y)$, $\forall (x,y)\in D$.

证: 根据 Fubini 定理知

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{-\phi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy.$$

(i) 当 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数时,

$$\int_{-\phi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy = 0.$$

故 $\iint_D f = 0$. (ii) 当 $f(x,y)$ 关于 y 为偶函数时,

$$\int_{-\phi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy = 2\int_0^{\phi(x)} f(x,y)dy.$$

故 $\iint_D f = 2\iint_{D_+} f$. 证毕.

两个注记

注一: 利用对称性化简积分的两个条件: (i) 区域对称; (ii) 函数有相应的奇偶性.

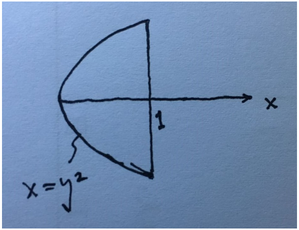
注二: 当区域关于 y 轴对称时, 我们有平行的结论.

例子

<u>例</u>: 考虑积分

$$\iint_D f(x, y)dxdy,$$

其中闭区域 D: $y^2 \leq x,\ 0 \leq x \leq 1$, 关于 x 轴对称(如图).



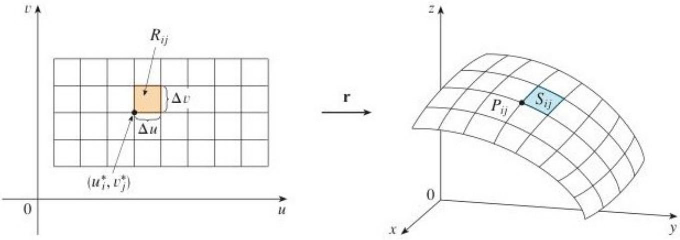
函数 $f(x, y) = x^2\sin(y^3)$ 关于 y 是奇函数. 因此根据上述定理可知 $\iint_D x^2\sin(y^3)dxdy = 0$.

设 S 为一曲面. 考虑如何定义以及如何计算 S 的面积. 设 S 有参数表示 r: $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, 映射 r 的分量形式为

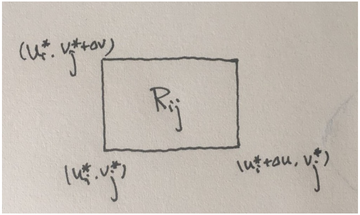
$$(u,v) \mapsto r(u,v) = \Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\Big),$$

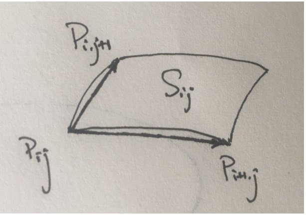
即 $S = \{r(u,v), (u,v) \in D\}$. 假设 $r: D \to S$ 是一一对应且正则, 即 $r(u,v)$ 是连续可微的, 且叉积 $r_u \times r_v$ 在区域 D 上处处非零. 对区域 D 作分割: $D = \cup_{ij} R_{ij}$, 这里 R_{ij} 代表小矩形, 相应地曲面 S 有分割 $S = \cup_{ij} S_{ij}$, 这里 $S_{ij} = r(R_{ij})$. 如下图所示.

分割图示



曲面块 S_{ij} 的面积近似





$$\overrightarrow{P_{i+1,j}P_{ij}} = r(u_i^* + \triangle u, v_j^*) - r(u_i^*, v_j^*)$$

$$= r_u(u_i^*, v_j^*)\triangle u + o(|\triangle u|),$$

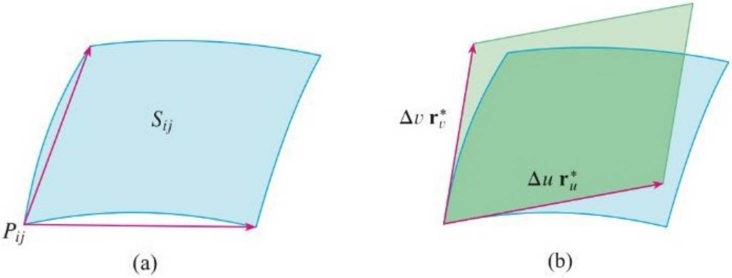
$$\overrightarrow{P_{i,j+1}P_{ij}} = r(u_i^*, v_j^* + \triangle v) - r(u_i^*, v_j^*)$$

$$= r_v(u_i^*, v_j^*)\triangle v + o(|\triangle v|).$$

曲面块 S_{ij} 的面积近似，续

考虑小曲面块 S_{ij} 的面积. 小曲面 S_{ij} 角点 $P_{ij} = r(p_{ij})$ 两个曲边可由向量 $r_u(p_{ij})\triangle u_i$, $r_v(p_{ij})\triangle v_j$ 近似. 于是 S_{ij} 的面积可由这两个向量所确定的平行四边形面积

$$|S_{ij}| \approx |r_u(p_{ij})\triangle u_i \times r_v(p_{ij})\triangle v_j| = \triangle u_i \triangle v_j |r_u \times r_v|_{p_{ij}}.$$



于是整个曲面 S 的面积有近似

$$|S| = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|S_{ij}| \approx \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|r_u \times r_v|_{p_{ij}}\triangle u_i \triangle v_j.$$

曲面面积定义

Definition

定义：设 S 有参数表示 $\mathbf{r}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$(u,v) \mapsto \mathbf{r}(u,v) = \Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\Big),$$

即 $S = \{\mathbf{r}(u,v), (u,v) \in D\}$. 假设 D 是有界闭域(有面积),
$\mathbf{r} : D \to S$ 是一一对应且正则的, 即 $\mathbf{r}(u,v)$ 是连续可微的, 且
$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$, $\forall (u,v) \in D$, 其面积定义如下

$$|S| = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du dv,$$

其中 $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$.

注一：上述定理关于参数表示 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 的假设，即正则性和一一对应，可适当减弱，只要不影响函数 $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|$ 的可积性以及积分值即可. 例如 $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ 可以在若干个点处为零，$\mathbf{r}: D\subset \mathbb{R}^2\to S\subset\mathbb{R}^3$ 的一一对应关系，可以再有限个点处不成立.

注二：在引入曲面面积定义时，我们曾导出了近似关系 $|S_{ij}|\approx |\mathbf{r}_u\triangle u_i\times\mathbf{r}_v\triangle v_j|_{p_{ij}}=|R_{ij}||\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|_{p_{ij}}$. 由此可见

$$\frac{|S_{ij}|}{|R_{ij}|}\approx|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|_{p_{ij}}.$$

因此 $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|_{(u,v)}$ 可以理解为映射 $\mathbf{r}: D\to S$ 在点 (u,v) 的面积放缩比.

公式一：由 $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$，$\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$ 知 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = (A, B, C)$，其中

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

因此我们得到计算 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ 的第一个公式

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

根据向量叉积的几何意义可知

$$|\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}| = |\mathbf{r_u}||\mathbf{r_v}|\sin\theta,$$

其中 θ 表示向量 $\mathbf{r_u}$ 和 $\mathbf{r_v}$ 的夹角. 于是

$$|\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}|^2 = |\mathbf{r_u}|^2|\mathbf{r_v}|^2\sin^2\theta = |\mathbf{r_u}|^2|\mathbf{r_v}|^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$= |\mathbf{r_u}|^2|\mathbf{r_v}|^2 - (|\mathbf{r_u}||\mathbf{r_v}|\cos\theta)^2 = |\mathbf{r_u}|^2|\mathbf{r_v}|^2 - (\mathbf{r_u} \cdot \mathbf{r_v})^2.$$

Gauss 引入记号 $\mathbf{E} = |\mathbf{r_u}|^2$, $\mathbf{G} = |\mathbf{r_v}|^2$, $\mathbf{F} = \mathbf{r_u} \cdot \mathbf{r_v}$, 则得到计算 $|\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}|$ 的第二个计算公式

$$|\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}| = \sqrt{\mathbf{EG} - \mathbf{F}^2}.$$

设曲面 S 是函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ 的函数图像, 即 S 为显式曲面, 其中 $z(x, y)$ 在有界闭域 D 上连续可微. 回忆显式曲面是一个正则参数曲面, 其参数表示为 $r : (x, y) \to (x, y, z(x, y))$. 于是 $r_x = (1, 0, z_x)$, $r_y = (0, 1, z_y)$,

$$r_x \times r_y = (-z_x, -z_y, 1), \quad |r_x \times r_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

由此得显式曲面的面积公式为

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy.$$

回忆函数曲线 $\Gamma: y = y(x),\ x \in [a,b]$ 的弧长公式为

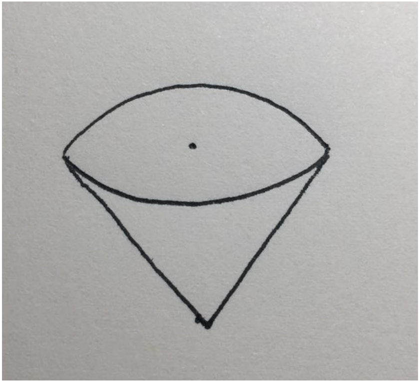
$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + y_x^2}\,dx.$$

可见曲线 $y = y(x)$ 的弧长公式，与曲面 $S: z = z(x,y)$ 的面积公式

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy.$$

何其相似！

例: 求圆锥曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 位于平面 $z = 0$ 和 $z = 1$ 之间的那部分 S 的面积. 如图所示.



例一，续

解：曲面 S 有显式表示 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in D: x^2+y^2\le 1$.

简单计算得

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

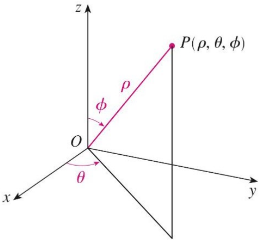
于是所求曲面 S 的面积为

$$|S|=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}\iint_D dxdy=\sqrt{2}\pi.$$

解答完毕.

<u>例二</u>：求球面面积.

<u>解</u>：为了能使用曲面面积公式，我们需要球面的一个参数方程. 为此我们引入球坐标. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中任意一点 $\mathsf{P} \neq \mathsf{O}$ 可由 ρ, θ, ϕ 唯一确定，其中 $\rho = |\mathsf{OP}|$，角度 θ，ϕ，分别称作纬度和经度. 如图所示. 这三个数 ρ, θ, ϕ 称作球坐标.



球面面积，续一

利用球坐标不难得到半径为 $R > 0$，球心位于原点球面球坐标方程为

$$x = R\sin\phi\cos\theta,\ \ y = R\sin\phi\sin\theta,\ \ z = R\cos\phi,$$

其中 $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. 往下根据一般曲面面积公式来计算半径为 R 的球面面积. 由上述球坐标方程得

$$r_\phi = R(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi),$$

$$r_\theta = R(-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0).$$

$$E = |r_\phi|^2 = R^2\left(\cos^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\right) = R^2,$$

$$G = |r_\theta|^2 = R^2\left(\sin^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\theta\right) = R^2\sin^2\phi,$$

$$F = r_\phi r_\theta = R^2\Big(\cos\phi\sin\phi\cos\theta\sin\theta - \cos\phi\sin\phi\cos\theta\sin\theta\Big) = 0.$$

根据一般曲面面积公式可知，球面 S_R 的面积为

$$|S_R| = \iint_{0\le\phi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi} \sqrt{EG - F^2}d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} R^2 \sin\phi d\phi = 4\pi R^2.$$

考虑 S 位于平面的特殊情形. 不妨设 S 位于空间直角坐标系中的 x, y 平面. 此时 S 有参数表示 $r: D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$,

$$(u, v) \mapsto r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), 0).$$

于是 $r_u = (x_u, y_u, 0)$, $r_v = (x_v, y_v, 0)$, $r_u \times r_v = (0, 0, C)$, 其中

$$C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

于是曲面(平面域) S 的面积为

$$|S| = \iint_D |C| dudv = \iint_D \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

上式可看作平面坐标变换 $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ 的面积公式.

例子

<u>例</u>: 求椭圆盘 $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ 的面积, 其中 $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $a, b > 0$.

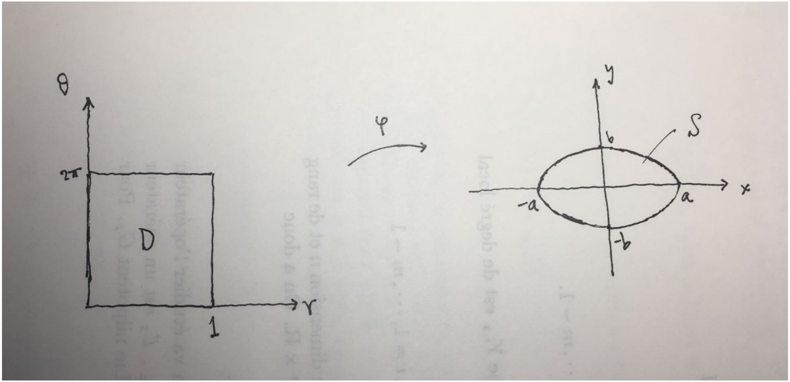
<u>解</u>: 上述椭圆盘 S 可看作是平面映射 $\phi : D \to S$ 的象, $(r, \theta) \to (x, y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$, 其中 $D : 0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, 即映射 ϕ 将 (r, θ) 平面中的矩形 D, 映射为 (x, y) 平面中的椭圆盘 S. 于是根据平面区域变换的面积公式可知椭圆盘的面积为

$$|S| = \iint_D \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta$$

$$= \iint_D abr dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr dr d\theta = ab\pi.$$

解答完毕.

平面变换图示



Theorem

定理: 设 $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^2$ 为两个平面闭域 D 和 S 的变换, 其分量形式为 $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$. 假设变换 ϕ 连续可微, 正则且一一对应的, 则对域 S 上的任意连续函数 $f(x,y)$,

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

例: 设 S 由曲线 $y^2=px$, $y^2=qx$, $xy=a$, $xy=b$ 所围成的平面闭域, 其中 $0<p<q$, $0<a<b$. 计算积分

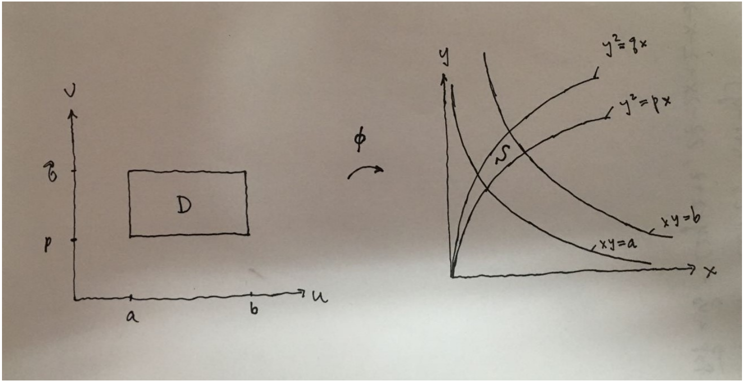
$$J=\iint_S \frac{y^2}{x}\sin(xy)dxdy$$

解: 作变换 $u=xy$, $v=\frac{y^2}{x}$, 其逆变换为 $\phi: D\to S$,

$$x=\sqrt[3]{u^2v^{-1}},\quad y=\sqrt[3]{uv},$$

其中 D 为矩形 $D=[a,b]\times[p,q]$. 不难验证变换 ϕ 满足二重积分变量代换中的条件.

平面区域变换图示



于是

$$J=\iint_S \frac{y^2}{x}\sin(xy)dxdy=\iint_D v\sin(u)\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

简单计算得

$$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}. \end{bmatrix}=\frac{3y^2}{x}=3v.$$

因此

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left[\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1} = \frac{1}{3v}.$$

于是所求积分为

$$J = \iint_D v \sin(u) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

$$= \frac{1}{3}\iint_D \sin(u) dudv = \frac{1}{3}\int_p^q dv \int_a^b \sin(u) du$$

$$= \frac{1}{3}(q-p)(\cos a - \cos b).$$

解答完毕.

一个注记

注: 在二重积分变量代换定理中, 变换

$$\phi : \mathsf{D} \to \mathsf{S} \text{ 正则且一一对应,}$$

的要求可以减弱为

$$\phi : \mathsf{D} \backslash \mathsf{D}_0 \to \mathsf{S} \backslash \mathsf{S}_0 \text{ 正则且一一对应,}$$

其中 D_0 和 S_0 为平面零测集. 详见卓里奇《数学分析》下册, 第125-135页.

记

$$D = \{(r, \theta), 0 \le r \le R, 0 \le \theta \le \theta_0\},$$

$$S = \{(x, y), x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, (r, \theta) \in D\},$$

其中 $R > 0$, $\theta_0 \in (0, 2\pi)$. 再记

$$D_0 = \{(0, \theta), 0 \le \theta \le \theta_0\}, \quad S_0 = \{(0, 0)\}$$

显然 D_0 和 S_0 均为平面零测集. 不难验证变换 $\phi : D \backslash D_0 \to S \backslash S_0$ 正则且一一对应. 进一步

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r.$$

以下利用二重积分技术再证 Euler-Poisson 积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

证明：记

$$J_R = \int_0^R e^{-x^2} dx,$$

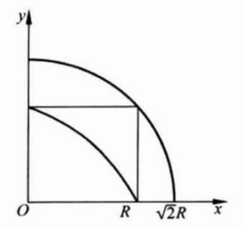
则

$$\lim_{R \to +\infty} J_R = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

考虑

$$J_R^2 = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \iint_{0 \le x, y \le R} e^{-x^2 - y^2} dxdy.$$

记 D_R: $x^2+y^2\le R^2$, $x,y\ge 0$, S_R: $0\le x,y\le R$, 则 $D_R\subseteq S_R$ $\subseteq D_{\sqrt{2}R}$.



由二重积分的性质可知

$$\iint_{D_R}\le\iint_{S_R}\le\iint_{D_{\sqrt{2}R}}.$$

对二重积分

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

作极坐标变换 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ 得

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \iint_{0\le r\le R, 0\le\theta\le\pi/2} e^{-r^2} rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R e^{-r^2} rdr = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}).$$

用 $\sqrt{2}R$ 替换将上式中的 R 得

$$\iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

于是由不等式 $\iint_{D_R} \le \iint_{S_R} \le \iint_{D_{\sqrt{2}R}}$ 得

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \le J_R^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}).$$

于上式中，令 $R \to +\infty$ 即得

$$\frac{\pi}{4} \le \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 \le \frac{\pi}{4}.$$

由此得到 Euler-Poisson 公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

证毕. □

Theorem

定理: 设 $\phi: D \to S$ 为两个平面有界闭域 D 和 S 的变换, 其分量形式为 $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$. 假设变换 ϕ 连续可微, 正则且一一对应的, 则对 S 上的任意连续函数 $f(x,y)$,

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

证明大意: 为方便, 记

$$F(u,v) \triangleq f(x(u,v),y(u,v)),\ J(u,v) \triangleq \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|.$$

考虑

$$\sigma \triangleq \iint_D F(u,v)J(u,v)dudv - \iint_S f(x,y)dxdy.$$

对域 D 作分割 $D = \cup_{k\geq 1} D_k$. 相应地域 S 有分割 $S = \cup_{k\geq 1} S_k$, 其中 $S_k = \phi(D_k)$. 于是

$$\sigma = \sum_{k\geq 1}\left\{\iint_{D_k} F(u,v)J(u,v)dudv - \iint_{S_k} f(x,y)dxdy\right\}$$

证明续一

$$= \sum_{k\geq 1}\left[F(u_k,v_k)\iint_{D_k} J(u,v)dudv - f(x_k,y_k)\iint_{S_k} dxdy\right]$$

$$= \sum_{k\geq 1}[F(u_k,v_k) - f(x_k,y_k)]\,|S_k|,$$

这里两次应用了二重积分的中值定理，分别在子域 D_k 和 S_k 上，并且 $(u_k,v_k)\in D_k$，$(x_k,y_k)\in S_k$. 由于 $S_k=\phi(D_k)$，故存在(唯一) 点 $(u'_k,v'_k)\in D_k$，使得 $x_k=x(u'_k,v'_k)$，$y_k=y(u'_k,v'_k)$. 于是

$$f(x_k,y_k) = f\big(x(u'_k,v'_k),y(u'_k,v'_k)\big) = F(u'_k,v'_k).$$

因此

$$|\sigma| = \left| \sum_{k\geq 1} \left[F(u_k, v_k) - f(x_k, y_k) \right] |S_k| \right|$$

$$\leq \sum_{k\geq 1} \left| F(u_k, v_k) - F(u_k', v_k') \right| |S_k|.$$

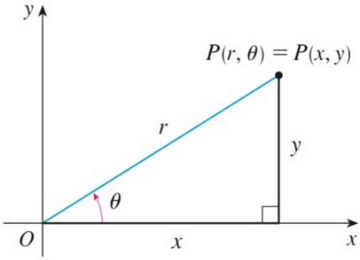
由于 $F(u, v)$ 在有界闭域 D 上连续，从而一致连续．记 $d_k = \sup \{\|p - q\|, p, q \in D_k\}$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，当 $d_k < \delta$ 时，成立 $|F(u_k, v_k) - F(u_k', v_k')| < \varepsilon$．于是

$$|\sigma| \leq \sum_{k\geq 1} |F(u_k, v_k) - f(x_k, y_k)||S_k| \leq \varepsilon \sum_{k\geq 1} |S_k| = \varepsilon |S|.$$

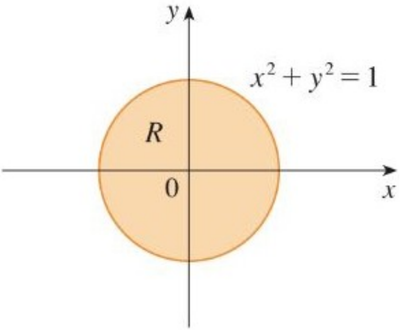
注意 $|\sigma|$ 是常数，$\varepsilon > 0$ 是任意正数，故 $\sigma = 0$．命题得证．

平面上任意一点 P 在直角坐标系下的坐标 (x, y) 与其在极坐标系下的坐标 (r, θ) 的关系如图所示.

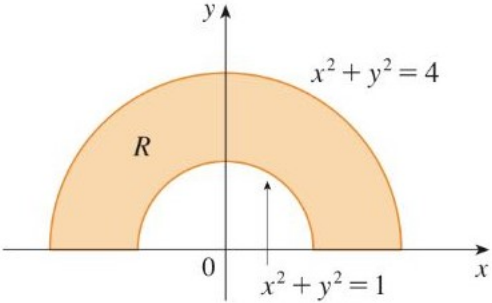
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$



极坐标的优越性，例一



(a) $R=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$



(b) $R=\{(r,\theta)\mid 1\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$

回忆二重积分在变量替换 $\phi:(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v))$ 下的积分公式

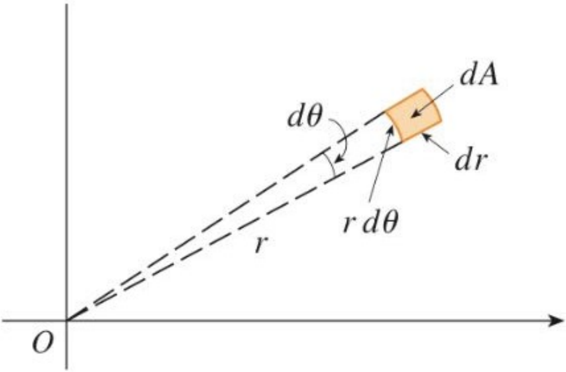
$$\iint_S f(x,y)dxdy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

对于极坐标变换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 而言

$$\iint_S f(x,y)dxdy=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta,$$

这里 S 为直角坐标区域, D 为极坐标区域.

微元面积 dA 在直角坐标系下为 $\mathsf{dA} = \mathsf{dxdy}$, 而在极坐标下为 $\mathsf{dA} = \mathsf{rdrd}\theta$.



例一：之前我们利用球面的球坐标参数方程，推导出球面面积公式．往下我们用显式曲面的面积公式，导出相同的球面面积公式．考虑球面方程 $S: x^2+y^2+z^2=R^2$．据球面的对称性知其面积 $|S|=2|S_上|$，其中 $S_上$ 表上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le R^2$．由显式曲面的面积公式得

$$|S_上|=\iint_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

例一，续

$$= R\iint_{x^2+y^2\le R^2}\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

对上述积分作极坐标变换 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$ 即得

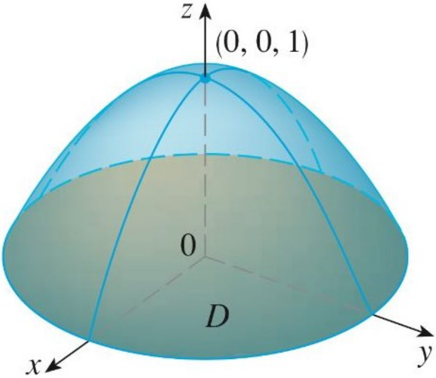
$$|S_{上}| = R\iint_{0\le r\le R, 0\le\theta\le 2\pi}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$= R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}} = 2\pi R^2.$$

故球面面积为 $|S| = 2|S_{上}| = 4\pi R^2$. 这就得到球面面积公式的另一个证明.

例二

<u>例</u>: 求由抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 和平面 $z = 0$ 所围成的有界闭区域 V 的体积 $|V|$. 如图所示.



解: 显然立体 V 是抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 在闭圆盘 $D: x^2+y^2 \leq 1$ 上所盖住的立体. 故所求立体的体积为

$$|V| = \iint_D (1-x^2-y^2)dxdy.$$

区域 D 在极坐标下变换的原象为 $D': 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

于是

$$|V| = \iint_{D'} (1-r^2)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)rdr$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r-r^3)dr = \frac{\pi}{2}.$$

解答完毕.

作业

习题3.3 (page 144-145) 8, 9, 10, 11, 12(1)(3)(5), 13, 14.

习题3.5 (page 169-170) 1.