一. 极值问题

1. 证明如下定理: 设 n 元函数 $f(x)$ 在开区域 $D \subset R^n$ 上二阶连续可微. 记 $H(x)$ 为 $f(x)$ 的 Hesse 矩阵. (i) 若 $x_0 \in D$ 是 f 的极小值点, 则 $H(x_0)$ 半正定; (ii) 若 $x_0 \in D$ 是 f 的极大值点, 则 $H(x_0)$ 半负定.

<u>证明</u>: 只证结论(i). 设 $x_0 \in D$ 是 f 的极小值点, 要证 $H(x_0)$ 半正定, 即对称矩阵 $H(x_0)$ 的每个特征值均非负. 反证. 假设 $H(x_0)$ 有一个负特征值 $\lambda_0 < 0$. 取特征值 λ_0 对应的一个特征向量 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 考虑 $f(x_0 + \varepsilon\xi)$ 在 x_0 处的二阶 Taylor 展式, 带 Peano 余项

$$f(x_0 + \varepsilon\xi) = f(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\xi^T H(x_0)\xi + o(\varepsilon^2)$$
$$= f(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\lambda_0\|\xi\|^2 + o(\varepsilon^2) = f(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big(\lambda_0\|\xi\|^2 + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\Big).$$

注意当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, $\lambda_0\|\xi\|^2 + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} < 0$. 此与 x_0 是函数 f 的极小值点相矛盾. 命题得证. (注: 第三次习题课关于无约束极值问题第3题的解答中已经使用过上述证明方法.)

2. 设 n 元函数 $f(x)$ 在全空间 $\mathbb{R}^n$ 上二阶连续可微. 若 f 的 Hesse 矩阵 $H(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处正定. 证明函数 $f(x)$ 至多有一个临界点.

<u>证明</u>: (i) 先证明, 当 Hesse 矩阵 $H(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处正定时, f 的每个临界点 x_0 均为全局严格最小值点, 即 $f(x) > f(x_0), \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{x_0\}$. 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是 f 的临界点, 考虑 $f(x)$ 在点 x_0 处, 带 Lagrange 余项的二阶 Taylor 展式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}h^T H(\xi)h, \quad h = x - x_0.$$

由于 $H(x)$ 处处正定, 故对任意 $x \neq x_0$, $f(x) > f(x_0)$, 即临界点 x_0 是函数 f 的全局严格最小值点.

(ii) 假设 f 有两个临界点 x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$, 则根据结论(i)知, $f(x_1) < f(x_2)$ 且 $f(x_2) < f(x_1)$. 矛盾. 命题得证.

3. 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数. 用线性三角函数 $g(x) = A + B\cos x + C\sin x$ 平均逼近 $f(x)$ 逼近函数 $f(x)$, 是得误差

$$\sigma(A, B, C) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big[A + B\cos x + C\sin x - f(x)\Big]^2 dx$$

达到最小.

注：上述结论的进一步推广就是 Fourier 级数的最佳均方逼近性质. 可参见课本7.2节.

解：这是实际上是一个无约束的极值问题. 我们将目标函数写成方便求导的形式, 即将上述积分的被积函数展开计算得

$$\sigma(A, B, C) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big[(A + B\cos x + C\sin x)^2 - 2f(x)(A + B\cos x + C\sin x) + f^2(x)\Big] dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \Big[A^2 + B^2\cos^2 x + C^2\sin^2 x\Big] dx$$

$$+2\int_{-\pi}^{\pi}(AB\cos x + AC\sin x + BC\cos x\sin x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(A + B\cos xdx + C\sin x)dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi(2A^2 + B^2 + C^2) - 2\pi(Aa_0 + Ba_1 + Cb_1),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos xdx, \quad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx.$$

求解驻点方程组 $\frac{\partial\sigma}{\partial A} = \frac{\partial\sigma}{\partial B} = \frac{\partial\sigma}{\partial C} = 0$, 可立刻得到函数 $\sigma(A, B, C)$ 唯一一个驻点

$$(A, B, C) = (\frac{a_0}{2}, a_1, b_1).$$

令一方面, 易见函数 $\sigma(A, B, C)$ 满足

$$\lim_{A^2+B^2+C^2 \to +\infty} \sigma(A, B, C) = +\infty.$$

根据熟知结论知函数 $\sigma(A,B,C)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上必有最小值. 因此最小值点必是 $(A,B,C)=(\frac{a_0}{2},a_1,b_1)$. 解答完毕.

4. 设正数 $p,q>0$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 求函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x,y>0$ 里满足约束条件 $xy=1$ 的最小值. 由此进一步证明 Young 不等式

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy,\quad \forall x,y>0. \tag{1}$$

注：这是课本第97页第一章总复习题的第16题. 在一元微分学里, 我们已经学习过利用极值理论证明一些不等式. 利用多元函数的极值理论, 我们同样可以得到一些的不等式. 本题就是一个很好的例子.

解：考虑条件极值问题

$$\begin{cases} \min \quad \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}, \quad x,y>0 \\ s.t. \quad xy=1. \end{cases} \tag{2}$$

作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-\lambda(xy-1).$$

考虑驻点方程组 $L_x=L_y=L_\lambda=0$, 即方程组

$$\begin{cases} x^{p-1}-\lambda y=0, \\ y^{q-1}-\lambda x=0, \\ xy-1=0. \end{cases}$$

不难解得方程组在第一象限有唯一解 $(x,y,\lambda)=(1,1,1)$. 由于函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 上的函数值趋于正无穷, 当 $x\to 0^+$, 或 $y\to 0^+$ 时. 因此函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 上可取得最小值. 因此最小值点就是 $(1,1)$, 最小值为 1.

以下我们来证明 Young 不等式(1). 显然不等式(1)等价于如下不等式

$$\frac{1}{p}\frac{x^p}{xy}+\frac{1}{q}\frac{y^q}{xy}\geq 1,\quad \forall x,y>0. \tag{3}$$

记

$$a = \frac{x}{(xy)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{y}{(xy)^{\frac{1}{q}}},$$

则

$$ab = \frac{xy}{(xy)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} = \frac{xy}{xy} = 1.$$

根据第一部分条件极值的结论可知不等式 (3) 成立. 于是 Young 不等式得证. 证毕. ∎

5. 证明高维 Rolle 定理：设 n 元函数 $f(x)$ 在开球域 $B_r(x_0)$ 上可微, 在闭球 $\overline{B_r}(x_0)$ 上连续. 若 $f(x)$ 在边界 $\partial B_r(x_0)$ 即在球面 $\|x - x_0\| = r$ 上的函数值为常数, 则在开球域 $B_r(x_0)$ 内存在一点 $\xi \in B_r(x_0)$, 使得 $\nabla f(\xi) = 0$. (注: 上述 Rolle 定理可推广如下: 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为平面有界凸区域, 函数 $f(x)$ 在闭区域 $\bar{D}$ 上连续, 在开区域 D 上二阶连续可微. 若 $f(x)$ 在边界 ∂D 上恒为常数, 即 $f(x) = C, \forall x \in \partial D$, 则函数 $f(x)$ 在开区域 D 内存在临界点.)

证明：如果函数 $f(x)$ 在整个闭域 $\overline{B_r}(x_0)$ 为常数函数, 则结论显然成立. 假设 $f(x)$ 在整个闭域 $\overline{B_r}(x_0)$ 不是常数函数, 则函数 $f(x)$ 在有界闭域 $\overline{B_r}(x_0)$ 上的最大值或者最小值在开域 $B_r(x_0)$ 某一点 $\xi \in B_r(x_0)$ 达到. 于是根据极值的必要条件有 $\nabla f(\xi) = 0$. 证毕.

6. 设 n 元函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域 $B_r(x_0)$ 上可微.
(i) 若 $(x - x_0) \cdot \nabla f(x) > 0, \forall x \in B_r(x_0) \backslash \{x_0\}$, 证明 x_0 是 f 的严格极小点;
(ii) 若 $(x - x_0) \cdot \nabla f(x) < 0, \forall x \in B_r(x_0) \backslash \{x_0\}$, 证明 x_0 是 f 的严格极大点.

证明：只证 (i). 对 $\forall x \in B_r(x_0) \backslash \{x_0\}$, 记 $\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x)$, $\Delta x = x - x_0$, 则 $\phi(0) = f(x_0)$, $\phi(1) = f(x)$, 并且

$$\phi'(t) = \nabla f(x_0 + t\Delta x) \cdot \Delta x = \frac{1}{t} \nabla f(x_0 + t(x - x_0)) \cdot [t(x - x_0)] > 0, \quad \forall t \in (0, 1).$$

这表明 $\phi(t)$ 严格单调上升的. 因此 $\phi(1) > \phi(0)$, 即 $f(x) > f(x_0)$. 故x_0 是 f 的严格极小点. 证毕. ∎

二．关于多元函数的一致连续性

1. 证明一元函数 $\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续. 进一步证明二元函数 $\sin(x^2+y^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上非一致连续。 (课本第103页习题2.1题1中, 遗漏了一个关键的否定字“不”. 本题是对这道题目的更正)

证：反证. 假设函数 $\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则依定义知对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-y|<\delta$ 时, $|\sin(x^2)-\sin(y^2)|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $x=\sqrt{2n\pi}$, $y=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, 则当 n 充分大时,

$$|x-y|=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}<\delta$$

此时 $|\sin(x^2)-\sin(y^2)|=1>\frac{1}{2}$. 矛盾.
再来证明二元函数 $\sin(x^2+y^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上非一致连续性. 反证. 假设函数在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续, 那么将函数限制在 x 轴上也应该一致连续, 即函数 $\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 矛盾. 因此二元函数 $\sin(x^2+y^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上非一致连续. 证毕.

注： 用相同的方法，我们可以立刻解答课本第115页第二章总复习题第一题: 证明函数 $\sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上非一致连续. 反证. 假设函数 $\sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续. 那么函数限制在直线 $y=x$ 上仍一致连续, 即函数 $\sin(x^2)$ 于 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 矛盾. 证毕.

三. 关于含参变量积分

1． 利用 Dirichlet 积分公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2},$$

以及广义含参积分的连续性定理证明, 积分

$$I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{t}dt$$

关于 $x\in[-a,a]$ 非一致收敛, $\forall a>0$. (注: 这是课本习题2.1第8题, page 104)

证明：显然 $I(0)=0$. 当 $x>0$ 时,

$$I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{tx}d(tx)=\frac{\pi}{2}.$$

又易见 $I(x)$ 是奇函数。因此，当 $x<0$ 时, $I(x)=-\pi/2$. 因此如果积分在区间 $[-a,a]$ 上一致收敛, 则根据连续性定理知函数 $I(x)$ 应该在区间 $[-a,a]$ 上连续. 但很明显 $I(x)$ 在 $x=0$ 处有间断. 这就得到了一个矛盾. 证毕. ∎

2. 利用积分号下求导方法, 计算积分

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx,$$

其中 $a\in[0,1)$ 为参变量.

解：显然 $I(0)=0$. 可以证明, 对于上述积分，积分号下求导定理的条件满足。于是我们有

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}.$$

以下我们尝试算出这个积分. 当 $a>0$ 时，做变换 $u=a\tan x$ 得

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{adu}{(1+u^2)(a^2+u^2)}.$$

对上述积分中的被积函数作分式分解

$$\frac{a}{(1+u^2)(a^2+u^2)}=\frac{a}{1-a^2}\left(\frac{1}{a^2+u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right).$$

注意 $a\in[0,1)$. 由此得

$$I'(a)=\frac{a}{1-a^2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{du}{a^2+u^2}-\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}\right)=\frac{a}{1-a^2}\Big(\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+a}.$$

注意到 $I(0)=0$. 于是我们得到 $I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, $a\in(0,1)$ 解答完毕.

3. 利用等式

$$\frac{\ln(1+a\cos x)}{a\cos x}=\int_0^1\frac{dy}{1+ay\cos x},\quad 0\le x\le 2\pi,$$

计算积分

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x},\quad a\in(-1,1).$$

解：显然积分 $I(a)$ 是一个正常积分. 也就是说, 当 $|a|<1$ 时, 被积函数

$$\frac{\ln(1+a\cos x)-\ln(1-a\cos x)}{\cos x}$$

在闭区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续. (注意端点 $x=\frac{\pi}{2}$ 是被积函数的可去间断点). 显然 $I(0)=0$. 考虑 $a\neq 0$ 情形. 在等式

$$\frac{\ln(1+a\cos x)}{a\cos x}=\int_0^1\frac{dy}{1+ay\cos x}$$

中用 $-a$ 替换 a 得

$$\frac{\ln(1-a\cos x)}{-a\cos x}=\int_0^1\frac{dy}{1-ay\cos x}.$$

将上述两个等式相加得

$$\frac{1}{a\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x},\quad 0\leq x\leq\pi/2.$$

据此我们可以将 $I(a)$ 改写为

$$I(a)=2a\int_0^{\pi/2}dx\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x}.$$

注意到被积函数在闭域 $0\leq x\leq\pi/2$, $0\leq y\leq 1$ 上连续。 故可以交换上述积分次序而不改变积分值. 于是

$$I(a)=2a\int_0^1dy\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}.$$

再对内层积分作变换 $u=\tan x$ 得

$$I(a)=2a\int_0^1dy\int_0^{+\infty}\frac{du}{1-a^2y^2+u^2}=a\pi\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-a^2y^2}}=\pi\arcsin a.$$

解答完毕.

4. 求出由积分

$$\int_0^x dt\int_t^x e^{-s^2}ds$$

所定义的函数及其导函数.

解： 由于函数 e^{-s^2} 的优良性质，并且所考虑的积分是常义积分(即非广义积分), 故只要有需要，可放心大胆地进行积分号下求导或交换积分次序。因为这些做法都是有理论根据的。 记

$$f(x)=\int_0^x dt\int_t^x e^{-s^2}ds.$$

为了方便，我们再记 $g(x,t)=\int_t^x e^{-s^2}ds$。 则 $g(x,x)=0$, $g_x(x,t)=e^{-x^2}$. 于是函数 $f(x)$ 可表为 $f(x)=\int_0^x g(x,t)dt$。根据积分号下求导定理可知

$$f'(x)=g(x,x)+\int_0^x g_x(x,t)dt=\int_0^x g_x(x,t)dt=xe^{-x^2}.$$

于是

$$f(x)=\int_0^x se^{-s^2}ds=\frac{1-e^{-x^2}}{2}.$$

解答完毕.

5． 设

$$f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}}dy,$$

求 $f'(x)$.

解：根据变上下限的积分号下求导公式我们有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int_{\sin x}^{\cos x}\left(e^{x\sqrt{1-y^2}}\right)_x' dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2 x}}(\cos x)_x'-e^{x\sqrt{1-\sin^2 x}}(\sin x)_x'\\&=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-y^2}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy-e^{x|\sin x|}\sin x-e^{x|\cos x|}\cos x.\end{aligned}$$

解答完毕.

6． 求极限

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{dx}{1+x^2+a^2}.$$

解: 记
$$f(a,u,v)=\int_u^v \frac{dx}{1+x^2+a^2}.$$
$u=a$, $v=1+a$, 则复合函数 $f(a,u(a),v(a))$ 连续. 于是
$$\lim_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{dx}{1+x^2+a^2}=\lim_{a\to 0}f(a,u(a),v(a))=f(0,0,1)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$
解答完毕.

7. 记
$$f(x)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+t^2}dt.$$
证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数 $f'_+(0)$ 存在, 并求出 $f'_+(0)$.

解：记 $g(x,t)=\ln\sqrt{x^2+t^2}$。则 $f(x)=\int_0^1 g(x,t)dt$. 注意函数 $g(x,t)$ 及其偏导数 $g_x(x,t)=\frac{x}{x^2+t^2}$ 原点 $(0,0)$ 点不连续， 不能直接在积分号下求导. 我们尝试按照右导数的定义来求. 以下我们可以利用分部积分计算出 $f(x)$, $x>0$.
$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(x^2+t^2)dt=\frac{1}{2}t\ln(x^2+t^2)\Big|_{t=0}^{t=1}-\int_0^1\frac{t^2dt}{x^2+t^2}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-1+\int_0^1\frac{x^2dt}{x^2+t^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-1+x\arctan(1/x).$$
于是对于 $x>0$
$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+x\arctan(1/x)}{x}=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+x^2)}{x}+\arctan\frac{1}{x}\to\frac{\pi}{2},$$
当 $x\to 0^+$ 时. 这表明函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的右导数 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=\pi/2$.
解答完毕.