微积分A2第七次习题课讨论题　　　　杨利军　Apr 20-25, 2020

本次习题课主要内容有

(i) 通过变量代换或区域分割来计算二重积分(第1,2题);

(ii) 估计二重积分的符号(第3题);

(iii) Poincaré 积分不等式(第4题);

(iv) 广义二重积分(第5题);

(v) 三重积分计算(第6-11题).

1. 计算二重积分 $I := \iint_D \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dxdy$, 其中 $D$ 代表闭单位圆 $x^2+y^2 \le 1$.

2. 计算积分 $I := \iint_D \left|\cos(x+y)\right| dxdy$, 其中 $D$ 为闭正方形：$0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.

3. 不通过计算, 判断如下二重积分 $I$ 的符号

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy.$$

4. 设函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_y(x,y)$ 在平面域 $D$ 上连续, 其中域 $D$ 可表为 $D := \{(x,y), \phi(x) \le y \le \psi(x), x \in [a,b]\}$, 这里 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $\phi(x) \le \psi(x)$, $\forall x \in [a,b]$. 进一步假设 $f(x,\phi(x)) = 0$, $\forall x \in [a,b]$. 证明存在常数 $C > 0$, 使得

$$\iint_D f^2(x,y)dxdy \le C \iint_D f_y^2(x,y)dxdy. \tag{1}$$

(注：不等式 (1) 常称作Poincaré不等式)

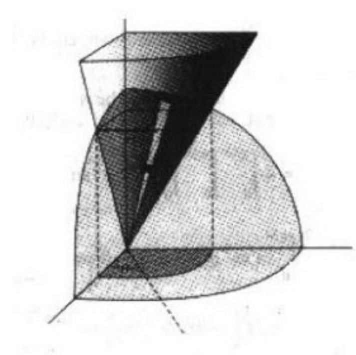
5. 计算下述二重广义积分(课本第171页第三章总复习题题7(2))

$$I = \iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2)dxdy.$$

6．计算如下三重积分

$$I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)dxdydz,$$

其中 $\Omega$ 为由上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 和上半锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体. 如图所示.



7． 求由曲面 $S$: $z = (x^2+y^2)^2 + z^4$ 所围立体 $\Omega$ 的体积.

8．设 $A = (a_{ij})$ 为三阶实对称正定矩阵. 证明

$$\iiint_{\sum_{ij=1}^{3} a_{i,j}x_i x_j \le 1} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}.$$

(这是第三章总复习题题14, 第172页.)

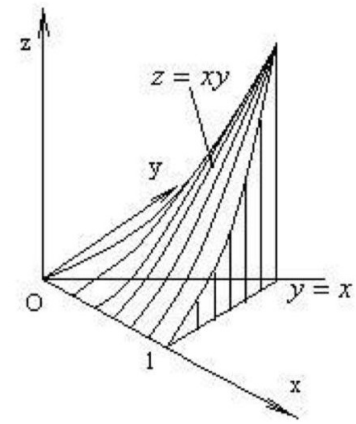
9. 计算如下广义三重积分, 其中 $\Omega := \{(x,y,z), 0 \le x, y \le 1, z \ge 0\}$.

$$\iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}.$$

10. 计算三重积分

$$I = \iiint_{\Omega} xy^2z^3 dxdydz,$$

其中 $\Omega$ 由曲面 $z = xy$ 和上个平面 $z = 0$, $y = x$, $z = 0$ 所围成的空间有界闭域. 如图所示.




11. 计算由锥面 $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$ 与抛物面 $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ 所围空间立体 $V$ 的体积 $|V|$.