讨论题涉及以下几个方面的内容

一． 函数级数的收敛域

二． 一致收敛性

三． 幂级数的半径

四． 逐项求导与逐项求积分, 级数求和

一． 函数级数的收敛域

题1. 求如下函数级数的收敛域.(课本第292页习题第6章总复习题1(1))

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}. \tag{1}$$

题2. 求如下函数级数的收敛域

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n. \tag{2}$$

题3. 求如下函数级数的收敛域(课本第291习题第6章总复习题1(4)).

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^x. \tag{3}$$

二． 一致收敛性

题1. 讨论如下级数在区间 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}. \tag{4}$$

题2. 证明级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-kx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

题3. 设函数 $u_k(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续, $\forall k \geq 1$. 假设级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \tag{5}$$

在开区间 (a,b) 上处处收敛, 但两数项级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(a) \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(b)$$

中至少有一个发散. 证明函数级数(5)在闭区间 (a,b) 上非一致收敛.
(注：这是课本第293页习题第6章总复习题4. 这道题可与课本第103页习题2.1 题6作比较. 由此可见函数项级数与含参数的广义积分有许多相似概念和结论.)

三. 幂级数的收敛半径

题1. 假设幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(k+2)}(x-a)^k \tag{6}$$

在点 $x=2$ 处条件收敛, 则幂级数(6)在点$x=\frac{1}{2}$ 的收敛情况是 (A)绝对收敛; (B)条件收敛; (C) 发散; (D)不能确定.

题2. 假设幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}(x-a)^k \tag{7}$$

在点 $x=2$ 处收敛. 讨论实参数 a 的取值范围.

题3. 假设级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x-1)^k \tag{8}$$

在 $x=-1$ 处条件收敛. 判断级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \tag{9}$$

的收敛性: (A) 绝对收敛; (B) 条件收敛; (C) 发散; (D) 不定.

题4. 记幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k+1)x^k \tag{10}$$

的半径收敛为 R. 若设幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k \tag{11}$$

的收敛半径为 1. 问以下哪个结论正确? (A) $R=1$; (B) $R\leq 1$; (C) $R\geq 1$.

四．级数逐项求导与逐项积分, 级数求和

题1. 证明 Riemann-Zeta 函数

$$\zeta(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \tag{12}$$

在区间 $(1,+\infty)$ 上连续, 并且具有各阶连续的导数. (课本第293 页第6章总复习题7)

题2．求如下级数的和

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}. \tag{13}$$

题3．求幂级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1}$$

的和函数.

题4. 求级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{2^k} \tag{14}$$

的和. (课本第235页习题5.1题6(8))

题5. 设常数 $a>1$, 求级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{a^k}$$

的和.