《微积分A2》第九讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年03月16日

Definition

定义: 设 H 为 n 阶实对称矩阵, $T \subset \mathbb{R}^n$ 为子空间.

(i) 称 H 在 T 上是正定的, 如果 $h^T H h > 0,\ \forall h \in T \setminus \{0\}$;

(ii) 称 H 在 T 上是负定的, 如果 $h^T H h < 0,\ \forall h \in T \setminus \{0\}$;

(iii) 称 H 在 T 上是不定的, 如果存在 $p, q \in T$, 使得 $p^T H p < 0 < q^T H q$;

(iv) 类似可定义对称阵 H 在 T 上半正定, 半负定.

一个引理

Lemma

引理: 设 H 为 n 阶实对称矩阵, $T = \mathrm{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子空间, 这里 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$ 为 k 个线性无关的列向量. 记

$$\hat{H} \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_k^T \end{bmatrix} H[\alpha_1, \cdots, \alpha_k] = [\alpha_i^T H \alpha_j],$$

($\hat{H}$ 为 k 阶实对称矩阵) 则 H 在子空间 T 上正定(负定, 不定等), 当且仅当 k 阶实对称矩阵 $\hat{H}$ 在 $\mathbb{R}^k$ 上正定(负定, 不定等).

证明留作补充习题.

Theorem

定理：考虑条件极值问题 $\min(\max)\ f(x)$, s.t. $g(x) = k$, 这里 $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数. 设 (x_0, λ_0) 是 Lagrange 函数 $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda[g(x) - k]$ 的临界点: $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$, $g(x_0) = k$, 且 $\nabla g(x_0) \neq 0$. 再记 $H^0 = H_f(x_0) - \lambda_0 H_g(x_0)$, 这里 H_f 和 H_g 代表函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Hesse 矩阵. 再定义 $n-1$ 维子空间 $T \triangleq \{h \in \mathbb{R}^n, \nabla g(x_0)h = 0\}$, 则以下结论成立.

(i) 若 H^0 在 T 上正(负)定, 则 x_0 是问题的极小(大)值点;

(ii) 若 H^0 在 T 上不定, 则 x_0 不是问题的解.

证明参见卓里奇《数学分析》卷一, 高教出版社, 第四版, 2006年, 第 472 页.

对于盒子问题 $\max xyz$, s.t. $2xz + 2yz + xy = 12$. 已证明 $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = (2, 2, 1, 1/2)$ 是 Lagrange 函数 $L(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2xz + 2yz + xy - 12)$ 的临界点. 以下我们来验证 (x_0, y_0, z_0) 是这个极值问题的极大值点. 记 $f(x, y, z) = xyz$, $g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy$. 简单计算知

$$H_f = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}, \quad H_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

验证续一

于是 $H^0 = H_f^0 - \lambda_0 H_g^0$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

往下确定子空间 $T = \{h \in \mathbb{R}^3, \nabla g^0 h = 0\}$. 简单计算知 $\nabla g = (2z + y, 2z + x, 2(x + y))$, $\nabla g^0 = (3, 3, 8)$. 解方程 $3u + 3v + 8w = 0$, 得子空间 T 的两个线性无关的解向量为 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (8, 0, -3)^T$.

考虑矩阵

$$\hat{\mathbf{H}}^0 = \begin{bmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \mathbf{H}^0[\alpha_1, \alpha_2] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 48 \end{bmatrix}.$$

不难验证(考虑顺序主子式), 二阶实对称矩阵 $\hat{\mathbf{H}}^0$ 负定. 根据条件极值的充分性定理可知, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 1)$ 是盒子问题的极大值点. 验证完毕.

带两个约束的极值问题

Theorem

定理[极值的必要条件]: 考虑带两个约束的条件极值问题

$$\begin{cases} \min(\max) & f(x_1, \cdots, x_n), \\ \text{s.t.} & g(x_1, \cdots, x_n) = k, \\ & h(x_1, \cdots, x_n) = c. \end{cases}$$

假设 $f, g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 均为 C^1 函数, 上述极值问题有解 $x_0 \in \Omega$, 且假设 $\nabla g(x_0)$, $\nabla h(x_0)$ 线性无关, 则存在常数 $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0) + \mu_0 \nabla h(x_0)$.

证明思想基本同带一个约束的情形. 细节略.

带两个约束的极值问题的Lagrange 乘子法

对于上述带两个约束的于极值问题，定义 Lagrange 函数

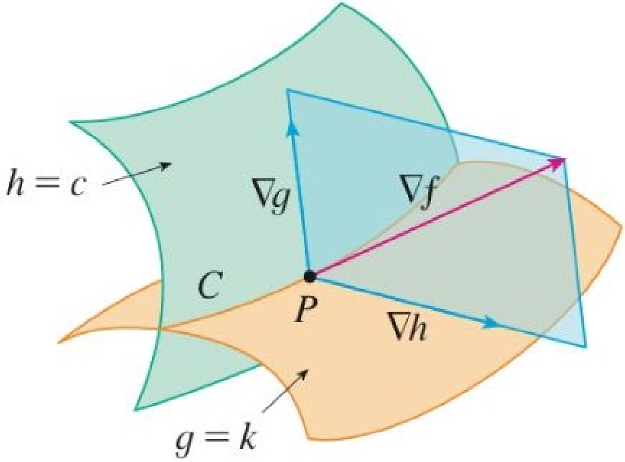
$$L(x,\lambda,\mu)=f(x)-\lambda\Big[g(x)-k\Big]-\mu\Big[h(x)-c\Big],$$

其中参数 λ,μ 称为 Lagrange 乘子. 与一个约束情形的分析类似，我们可以通过求解函数 $L(x,\lambda,\mu)$ 的临界点方程组

$$\begin{cases}\nabla f(x)=\lambda\nabla g(x)+\mu\nabla h(x),\\ g(x)=k\\ h(x)=c\end{cases}$$

来求解带两个约束的极值问题.

图示

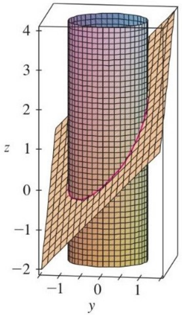


例子

例: 求函数 $f(x,y,z)=x+2y+3z$ 在曲线 Γ (如图)

$$\begin{cases} x-y+z=1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

上的最大值和最小值.



解: 作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x+2y+3z-\lambda(x-y+Z-1)-\mu(x^2+y^2-1),$$

其临界点方程组为

$$\begin{cases} 1=\lambda+2x\mu, \\ 2=-\lambda+2y\mu, \\ 3=\lambda, \\ x-y+z=1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

由第三个方程得 $\lambda = 3$. 将其代入前两个方程得 $x = -1/\mu$, $y = 5/(2\mu)$. 再根据最后一个方程, 即 $x^2 + y^2 = 1$, 解得

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1.$$

由此解得 $\mu^2 = 29/4$ 即 $\mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$. 进一步得

$$x = \frac{\mp 2}{\sqrt{29}}, \quad y = \frac{\pm 5}{\sqrt{29}}.$$

由倒数第二方程, 即 $x - y + z = 1$ 解得

$$z = 1 - x + y = 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}.$$

综上我们得到两个临界点

$$(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{29}}(\mp 2,\pm 5,\pm 7)=:P_{\pm}.$$

计算得函数 $f(x,y,z)=x+2y+3z$ 在这两个临界点的值为 $f(P_{\pm})=3\pm\sqrt{29}$. 由于连续函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭集，即空间椭圆周 $x-y+z=1$, $x^2+y^2=1$ 上可取得最值，并最值点是 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)$ 的临界点. 因此可以断言函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 Γ 上的最大值和最小值分别为 $3+\sqrt{29}$ 和 $3-\sqrt{29}$, 最大值点和最小值点分别为 $P_+=\frac{1}{\sqrt{29}}(-2,5,7)$ 和 $P_-=\frac{1}{\sqrt{29}}(2,-5,-7)$. 解答完毕.

课本第90-92例1.9.5: 求空间椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ lx+my+nz=0 \end{cases}$$

的长半轴和短半轴的长度, 其中 $a, b, c > 0$, $l^2+m^2+n^2=1$.

解: 椭圆的的长半轴和短半轴的长度, 实际上就是原点到椭圆周上的点的距离的最大值和最小值. 因此为求长短半轴的长度, 考虑如下带两个约束的极值问题

$$\begin{cases} \max(\min) x^2+y^2+z^2, \\ \text{s.t.} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ \qquad lx+my+nz=0. \end{cases}$$

例子，续一

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - \mu(lx + my + nz).$$

考虑函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)$ 的临界点方程组

$$\begin{cases} L_x = 2x - \frac{2\lambda x}{a^2} - \mu l = 0, \\ L_y = 2y - \frac{2\lambda y}{b^2} - \mu m = 0, \\ L_z = 2z - \frac{2\lambda z}{c^2} - \mu n = 0, \\ L_\lambda = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1) = 0, \\ L_\mu = -(lx + my + nz) = 0. \end{cases}$$

用 x, y, z 依次乘以上述前三个方程，然后相加即得

$$2(x^2+y^2+z^2)-2\lambda=0 \quad \text{即} \quad \lambda=x^2+y^2+z^2.$$

再次利用前三个方程可解得

$$\begin{cases} 2\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)x=\mu l, \\ 2\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)y=\mu m, \\ 2\left(1-\frac{\lambda}{c^2}\right)z=\mu n. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{\mu a^2 l}{2(a^2-\lambda)},\ y=\frac{\mu b^2 m}{2(b^2-\lambda)},\ z=\frac{\mu c^2 n}{2(c^2-\lambda)}.$$

用 l, m, n 依次乘以上述 x, y, z 的表达式，然后相加并约去因子 μ 即得

$$\frac{a^2l^2}{a^2-\lambda}+\frac{b^2m^2}{b^2-\lambda}+\frac{c^2n^2}{c^2-\lambda}=0.$$

用 $(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)$ 乘以上述等式，并稍加整理即得关于 λ 的一元二次方程 $A\lambda^2-B\lambda+C=0$，其中

$$\begin{cases} A=a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2, \\ B=a^2l^2(b^2+c^2)+b^2m^2(a^2+c^2)+c^2n^2(a^2+b^2), \\ C=a^2b^2c^2. \end{cases}$$

例子，续四

解这个一元二次方程得到两个根

$$\lambda_1 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \lambda_2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

可以证明 $B^2 \geq 4AC$. 故 λ_1 和 λ_2 均为非负实数. 根据连续函数的最值性可知，目标函数 $x^2 + y^2 + z^2 (= \lambda)$ 在椭圆周上必取得最大值和最小值，并且最值点必是 Lagrange 函数的临界点.

由此可断言，所求的长半轴和短半轴的长度分别为 $\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}$.

解答完毕.

椭圆的弧长积分

在实际问题中，我们经常会遇到带参数的积分. 例如考虑椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$ 的弧长. 将椭圆周写作参数方程 $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$. 于是椭圆的弧长课表为

$$L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt.$$

上述积分可作如下化简:

$$\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2(1-\sin^2 t)}$$

$$=\sqrt{b^2-(b^2-a^2)\sin^2 t}=b\sqrt{1-k^2\sin^2 t},$$

其中 $k=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ 为椭圆的离心率. 因此椭圆的弧长为

$$L=4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt$$

上述定积分称为椭圆积分, 含有参数 $k\in(0,1)$. 可以证明椭圆积分积不出来. 含参变量积分的一般形式

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\quad y\in K,$$

这里 K 为某区间, 积分上下限 a,b 可以是无穷. 我们关心函数 $J(y)$ 的分析性质, 如连续性, 可微性等.

Definition

<u>定义</u>：设 $f(x)$ 是 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上定义的函数．若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对任意两点 $x, x' \in \Omega$，只要 $\|x - x'\| < \delta$，就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 Ω 上一致连续 (uniformly continuous).

显然，若 $f(x)$ 在 Ω 上一致连续，则 $f(x)$ 在 Ω 上处处连续．

Example

<u>例</u>：一元函数 $\sin x$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上一致连续．因为 $|\sin x - \sin x'| = |\cos \xi||x - x'| \le |x - x'|$．由此不难看出 $\sin x$ 的一致连续性．

非一致连续的函数，例子

Example

例一：一元函数 x^2 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续．反证如下．假设函数在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，那么对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，比如取 $\varepsilon = 1$，存在 $\delta > 0$，使得 $|x^2 - x'^2| < \varepsilon = 1$，只要 $|x - x'| < \delta$．取 $x = n + \frac{1}{n}$，$x' = n$，当 n 充分大时，必有 $|x - x'| = \frac{1}{n} < \delta$．但

$$|x^2 - x'^2| = |x - x'||x + x'| = \frac{1}{n}\left(2n + \frac{1}{n}\right) > 2 > 1 = \varepsilon.$$

这是一个矛盾．矛盾说明函数 x^2 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续．证毕．

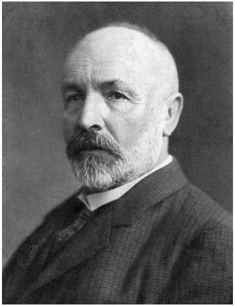
Example

例二：函数 $\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 上非一致连续．证明留作习题．

Theorem

Cantor 定理：紧(有界且闭)集上的连续函数必一致连续.

Georg Cantor (1845 – 1918), 德国数学家, 集合论创始人. 他的杰出贡献包含 Cantor 三分集, Cantor 对角线方法等.



证: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 紧, $f(x)$ 在 Ω 上连续. 要证 $f(x)$ 在 Ω 上一致连续. 假设 $f(x)$ 在 Ω 上非一致连续, 即存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 $x, x' \in \Omega$, 使得 $\|x - x'\| < \delta$, 但 $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0$. 取 $\delta = \frac{1}{n}$, 存在 $x_n, x_n' \in \Omega$, $\|x_n - x_n'\| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon_0$. 由于 Ω 有界且 $\{x_n\} \subset \Omega$, 由 B-W定理知, 点列 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_j}\}$. 设 $x_{n_j} \to x^*$. 进而有 $x_{n_j}' \to x^*$. 由于 Ω 闭, 故极限点 $x^* \in \Omega$. 于是

$$0 < \varepsilon_0 \leq |f(x_{n_j}) - f(x_{n_j}')| \to |f(x^*) - f(x^*)| = 0, j \to +\infty.$$

这是一个矛盾. 定理得证. □

Theorem

定理：设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $\Omega=[a,b]\times[c,d]\subset \mathbb{R}^2$ 上连续，则函数

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在闭区间 $[c,d]$ 上连续.

注：连续性定理表明，对任意 $y_0\in[c,d]$，$\lim_{y\to y_0} J(y)=J(y_0)$，此即

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]dx.$$

换言之，极限运算和积分运算次序可交换.

例子

Example

例: 求极限

$$\lim_{a\to 0}\int_0^1\sqrt{x^6+a^6}dx.$$

解: 根据连续性定理知

$$\lim_{a\to 0}\int_0^1\sqrt{x^6+a^6}dx=\int_0^1\lim_{a\to 0}\sqrt{x^6+a^6}dx=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}.$$

解答完毕.

证: 对任意 $y, y' \in [c,d]$, $|J(y) - J(y')|$

$$= \left| \int_a^b \left[f(x,y) - f(x,y') \right] dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x,y) - f(x,y') \right| dx.$$

由 Cantor 定理可知 $f(x,y)$ 在闭矩形 (紧) Ω 上一致连续. 故对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|y - y'| < \delta$ 且 $y, y' \in [c,d]$ 时, $|f(x,y) - f(x,y')| < \varepsilon$. 此时

$$|J(y) - J(y')| \leq \int_a^b \left| f(x,y) - f(x,y') \right| dx \leq \varepsilon(b-a).$$

这就证明了 $J(y)$ 在闭区间 $[c,d]$ 上连续. 证毕. $\square$

Theorem

定理: 设函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_y(x,y)$ 在 $[a,b]\times(c,d)$ 上连续, 则函数 $J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 在开区间 (c,d) 上连续可微, 且 $J'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx$, 即可积分号下求导

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\left[\frac{d}{dy}f(x,y)\right]dx.$$

换言之, 积分运算和求导运算次序可互换.

例: 计算积分

$$J(y)=\int_0^{\pi/2}\ln(y^2-\sin^2 x)dx,\quad y>1$$

(课本第108页例2.2.1的结论可由本题推出)

解: 直接积分 $J(y)$ 看起来不容易. 先求其导数试试. 根据积分号下求导定理知

$$J'(y)=\int_0^{\pi/2}\frac{2ydx}{y^2-\sin^2 x}.$$

作积分变换 $u=\tan x$, 则 $du=(1+u^2)dx$, $\sin^2 x=\frac{u^2}{1+u^2}$.

于是

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{2y\,du}{(1+u^2)} \frac{1}{\left(y^2 - \frac{u^2}{1+u^2}\right)}$$

$$= 2y \int_0^{+\infty} \frac{du}{y^2 + (y^2-1)u^2}$$

$$= \frac{2y}{y^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + \frac{y^2-1}{y^2}u^2} \qquad \left(v = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}u\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{y^2-1}} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}.$$

即 $J'(y)=\frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}$. 于是

$$J(y)=\pi\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pi\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)+c,$$

其中 c 为某一常数. 为确定常数 c, 观察积分

$$J(y)=\int_0^{\pi/2}\ln(y^2-\sin^2x)dx,\quad y>1.$$

注意 J(y) 可写作

$$J(y)=\int_0^{\pi/2}\left[2\ln y+\ln\left(1-\frac{\sin^2x}{y^2}\right)\right]dx$$

$$J(y) = \pi \ln y + \int_0^{\pi/2} \left[\ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) \right] dx.$$

根据连续性定理知

$$\lim_{y \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \left[\ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) \right] dx = 0.$$

故

$$\lim_{y \to +\infty} \left[J(y) - \pi \ln y \right] = 0$$

再根据 $J(y)$ 另一个表达式

$$J(y) = \pi \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) + c,$$

可知当 $y \to +\infty$ 时，

$$J(y) - \pi \ln y = \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}\right) + c \to 0.$$

由此得 $c = -\pi \ln 2$. 于是

$$J(y) \triangleq \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 x)dx$$

$$= \pi \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) - \pi \ln 2, \quad \forall y > 1.$$

解答完毕.

回忆可微性定理(积分号下求导定理)

Theorem

定理: 设函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_y(x,y)$ 在 $[a,b]\times(c,d)$ 上连续，则函数 $J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 在开区间 (c,d) 上连续可微，且 $J'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx$，此即可积分号下求导

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\left[\frac{d}{dy}f(x,y)\right]dx.$$

换言之，积分运算和求导运算次序可互换.

证: 任取 $y_0, y_0+h \in (c,d)$,

$$\frac{J(y_0+h)-J(y_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^b [f(x,y_0+h)-f(x,y_0)]dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_a^b f_y(x,y_0+\theta h)h dx = \int_a^b f_y(x,y_0+\theta h)dx,$$

上式中的第二个等号成立是根据 Lagrange 中值定理, 其中 $\theta \in (0,1)$. 于是

$$\left|\frac{J(y_0+h)-J(y_0)}{h} - \int_a^b f_y(x,y_0)dx\right|$$

证明续一

$$= \left| \int_a^b f_y(x, y_0 + \theta h) - f_y(x, y_0) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| f_y(x, y_0 + \theta h) - f_y(x, y_0) \right| dx.$$

由于 $y_0, y_0 + h \in (c, d)$，故可取闭子区间 $[c', d'] \subset (c, d)$，使得 $y_0, y_0 + h \in [c', d']$. 于是 $f_y(x, y)$ 在闭矩形 $[a, b] \times [c', d']$ 上连续，从而一致连续. 因此对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $|y - y'| < \delta$，则 $|f_y(x, y) - f_y(x, y')| < \varepsilon$，其中 $x \in [a, b]$，$y, y' \in [c', d']$.

证明续二

于是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|h| < \delta$ 时,

$$\left|\frac{J(y_0+h)-J(y_0)}{h} - \int_a^b f_y(x,y_0)dx\right|$$

$$\leq \int_a^b \Big|f_y(x,y_0+\theta h) - f_y(x,y_0)\Big|dx \leq \varepsilon(b-a).$$

此即

$$\lim_{h\to 0}\frac{J(y_0+h)-J(y_0)}{h} = \int_a^b f_y(x,y_0)dx.$$

这表明 $J(y)$ 在点 $y_0 \in (c,d)$ 可导, 且

$$J'(y_0) = \int_a^b f_y(x,y_0)dx.$$

证明续三

由 y_0 的任意性可知, 函数 $J(y)$ 在开区间 (c, d) 上处处可导, 且

$$J'(y) = \int_a^b f_y(x, y)dx, \quad y \in (c, d)$$

由前述连续性定理知积分 $\int_a^b f_y(x, y)dx$ 关于 y 连续, 即 $J'(y)$ 在 (a, b) 上连续. 可微性定理得证. □

Theorem

<u>定理</u>：设 $f(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在 $[a,b]\times(c,d)$ 上连续，设 $\alpha(y)$, $\beta(y)$ 在 (c,d) 上连续可微，且 $\alpha(y),\beta(y)\in[a,b]$, $\forall y\in(c,d)$, 则函数

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)dx,\quad y\in(c,d).$$

在开区间 (c,d) 上连续可微，且

$$J'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f_y(x,y)dx+f(\beta(y),y)\beta'(\beta)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

定理证明

证：令

$$F(u,y)=\int_a^u f(x,y)dx,\quad (u,y)\in[a,b]\times(c,d),$$

则由 Newton-Leibniz 定理，以及前述的可微性定理知，$F(u,y)$ 在 $(a,b)\times(c,d)$ 上连续可微，且

$$F_u(u,y)=f(u,y),\quad F_y(u,y)=\int_a^u f_y(x,y)dx,$$

其中 $(u,y)\in(a,b)\times(c,d)$. 另一方面函数 $J(y)$ 可以表示为

$$J(y)=F(\beta(y),y)-F(\alpha(y),y),\quad y\in(c,d).$$

由链规则知 $J(y)$ 在 (c,d) 上连续可微，且

$$J'(y)=F_u(\beta,y)\beta'+F_y(\beta,y)-F_u(\alpha,y)\alpha'-F_y(\alpha,y)$$

$$=f(\beta,y)\beta'+\int_a^{\beta}f_y(x,y)dx-f(\alpha,y)\alpha'-\int_a^{\alpha}f_y(x,y)dx$$

$$=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f_y(x,y)dx+f(\beta(y),y)\beta'(\beta)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

定理得证. $\square$

例: 求导数 $J'(y)$, 其中

$$J(y)=\int_y^{y^2}\frac{\sin(xy)}{x}dx.$$

解: 应用上述定理得

$$J'(y)=\int_y^{y^2}\left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_y dx+\frac{\sin(xy)}{x}\bigg|_{x=y^2}[y^2]'-\frac{\sin(xy)}{x}\bigg|_{x=y}[y]'$$

$$=\int_y^{y^2}\cos(xy)dx+\frac{\sin(y^3)}{y^2}2y-\frac{\sin(y^2)}{y}\cdot 1$$

例子续

$$= \frac{\sin(y^3) - \sin(y^2)}{y} + \frac{2\sin(y^3)}{y} - \frac{\sin(y^2)}{y}$$

$$= \frac{1}{y}\left[3\sin\left(y^3\right) - 2\sin\left(y^2\right)\right].$$

解答完毕.

Theorem

定理：设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$$

定理中的等式常简写作

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

上式两边的积分均称作累次积分. 更确切地，称左边积分为先 y 后 x 的累次积分，称右边的积分为先 x 后 y 的累次积分.

例: 求积分 J 的值, 这里

$$J=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx, \quad b>a>0.$$

解: 不难验证被积函数在积分上下限 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限存在, 即

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=0, \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=b-a.$$

因此被积函数可以看作是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数. 故积分 J 是一个正常积分. 直接计算积分 J 不容易困难. 需另寻途径.

重要观察：被积函数可表为积分形式，即

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy.$$

于是利用积分交换次序定理知

$$J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{x^{1+y}}{1+y} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy = \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

例子完毕.

证: 令

$$p(t) \triangleq \int_a^b \left[\int_c^t f(x,y)dy\right] dx, \quad q(t) \triangleq \int_c^t \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$

显然 $p(c) = 0 = q(c)$. 对任意 $t \in (c,d)$,

$$p'(t) = \int_a^b \left[\int_c^t f(x,y)dy\right]_t' dx = \int_a^b f(x,t)dx,$$

$$q'(t) = \frac{d}{dt}\int_c^t \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b f(x,t)dx = p'(t).$$

由此可见 $p(t) \equiv q(t)$, $\forall t \in [c,d]$. 特别 $p(d) = q(d)$. 此即所要证明的结论. 证毕.

作业

习题 2.1 (page 102-103): 1, 2, 3. (注: 题1中的“一致连续”应改为非一致连续)

习题 2.2 (page 109-110): 1, 2(1)(3), 3, 4, 5.

补充习题: 证明函数 $\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上非一致连续.