1. 原问题： $\min C^T x$

$s.t.\ Ax \geq B$

其中. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $C^T = (10 \quad 10)$

故对偶问题为： $\begin{cases} \max B^T Y \\ s.t.\ A^T Y = C \\ \quad Y \geq 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} \max\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 4y_4 \\ s.t.\ 5y_1 + y_2 + y_3 + 8y_4 = 10 \\ \quad 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 = 10 \\ \quad y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$

2.

(1)、首先化为标准型： $\min\ x_1 + x_3$

$\begin{cases} s.t.\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ \quad \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 3 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$

单纯形法：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	2	0	1	5
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3
	0	$-\frac{5}{2}$	0	-1	$z-8$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_2	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$z-\frac{7}{4}$

故 P 最优解 $\min = \frac{7}{4}$. $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{5}{2}$ $x_3 = \frac{7}{4}$ $x_4 = 0$

(2). 标准型 $-\max C^T x$.

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

其中 $C^T = (-1 \quad 0 \quad -1 \quad 0)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

对偶问题为 $-\min b^T Y$

$$\text{s.t. } A^T Y \geq C.$$

即 $-\min \quad 5y_1 + 3y_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} y_1 \geq -1 \\ 2y_1 + \frac{1}{2} y_2 \geq 0 \\ y_2 \geq -1 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

(3). 根据互补松弛条件.

$$\begin{cases} \hat{x}(A^T \hat{y} + c) = 0 \\ \hat{y}^T (b - A\hat{x}) = 0 \end{cases}$$

由 $\hat{x} = (0 \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{4})^T$ 得 $\begin{cases} 2y_1 + \frac{1}{2} y_2 = 0 \\ y_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{4} \\ y_2 = -1 \end{cases}$

计算最优值为 $-\frac{1}{4}\cdot 5+3=\frac{7}{4}$. 故 P与D的最优值相等. 验证正确

3. 原问题 $\min\ c^T x$
(1)
$$\text{s.t.}\quad Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix}$

对偶问题:

$$\max\ b^T y$$
$$\text{s.t.}\quad A^T y \leq c$$
$$y \geq 0$$

即:
$$\begin{cases} \max\ b_1 y_1 + y_2 \\ \text{s.t.}\quad y_1 + y_2 \leq 5 \\ -y_1 + y_2 \leq 0 \\ 6y_1 + 2y_2 \leq 21 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

(2). 根据松弛条件:

$\hat{x}(c - A^T \hat{y}) = 0$. 已知 $\hat{x} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})^T$

故 $\begin{cases} \hat{y}_1 + \hat{y}_2 = 5 \\ 6\hat{y}_1 + 2\hat{y}_2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{y}_1 = \frac{11}{4} \\ \hat{y}_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

从而计算得 $b_1 = 2$

因此, 最优解 $y_1 = \frac{11}{4}$, $y_2 = \frac{9}{4}$. 最优值 $\frac{31}{4}$

4. 求 A, B 的对偶问题：

A：

$$\min \quad b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$$

$$\text{s.t.} \quad a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + a_{3j} y_3 \geq c_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

B：

$$\min \quad k_1 b_1 \hat{y}_1 + k_2 b_2 \hat{y}_2 + (k_3 b_1 + b_3) \hat{y}_3$$

$$\text{s.t.} \quad k_1 a_{1j} \hat{y}_1 + k_2 a_{2j} \hat{y}_2 + (a_{3j} + k_3 a_{1j}) \hat{y}_3 \geq c_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\hat{y}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

即：$(k_1 \hat{y}_1 + k_3 \hat{y}_3) a_{1j} + k_2 \hat{y}_2 a_{2j} + \hat{y}_3 a_{3j} \geq c_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$

因而，y_i 与 $\hat{y}_i$ 的关系为：

$$\begin{cases} y_1 = k_1 \hat{y}_1 + k_3 \hat{y}_3 \\ y_2 = k_2 \hat{y}_2 \\ y_3 = \hat{y}_3 \end{cases}$$