一、数列的极限.

1. 定义：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists N\in N^*$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-A|<\varepsilon$.

例1. ① 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$.

② 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$.

2. 收敛数列的性质

① 有界.

② 任一子列收敛，且极限相等.

③ 保序性（保号性）.

④ 四则运算

⑤ 夹逼原理.

例2. $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，若 $\{b_n\}$ 收敛，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$.

例3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{(n^k+1)^{\frac{1}{k}}}+\dfrac{1}{(n^k-1)^{\frac{1}{k}}}\right)$.

$$\frac{1}{n+1}<(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}<\frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{n}<(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}<\frac{1}{n-1}$$

例4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\cdots+a_m\sqrt{n+m}\right)$ 其中 $a_1+a_2+\cdots+a_m=0$.

3. 单调有界定理与 Stolz 定理

例5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$.

例6. 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $a_1=a>0$，$b_1=b>0$，$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，求证 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 极限存在且相等.

例7. $a_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $a_2=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_1}$, …, $a_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_n}$.

①. 求证. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

②*. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_1a_2\cdots a_n$.

令 $a_n=\cos\theta_n$. $a_{n+1}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta_n}{2}}=\cos\frac{\theta_n}{2}$

$a_1=\cos\frac{\pi}{4}$.

$$a_1\cdots a_n=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2^n}\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{2}{\pi}.$$

4. 实数系的几个基本定理.

① 确界原理.
② 单调收敛原理.
③ 有界数列必有收敛子列
④ Cauchy 收敛原理.
⑤ 闭区间套定理
⑥ 有限覆盖定理.

例8. 证明: $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}$ $(0<\alpha\leq 1)$. 收敛.

例9. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$. $a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$ 求证. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

二、函数的极限和连续、

1、函数极限定义、

①. $x \to x_0$　$(x \to x_0^+, x \to x_0^-)$

② $x \to \infty$　$(x \to +\infty, x \to -\infty)$.

例10. 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

① 求证. $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$　$(A > 0)$

② 求证 $\lim_{x \to x} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{A}$.

2、函数极限的性质.

①.唯一性.

② 局部的有界性.

③.保序性.

④ 四则运算

⑤.复合运算　$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \to u_0} f(u) = A$.

且 $x \neq x_0$ 时 $g(x) \neq u_0$. 则 $\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A$.

(主要为了防止 f 不连续 (在 u_0 处)).

⑥.夹逼原理.

⑦.柯西收敛准则.

⑧. $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \exists A \in R$. 对任意 $x_n \to x_0$, 有 $f(x_n) \to A$.

重要极限. $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

例11. 求下列极限.

$$\lim_{x\to 0}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)^{\frac{1}{x}}$$

例12. 若 $\forall x\in(-1,1)$ 有 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\le|\sin x|$，求证 $\left|\sum_{k=1}^{n}ka_k\right|\le 1$.

例13. 设 $f(x)$ 在R上有定义，且 $f(2x)=f(x)$. 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(0)$.

求证 $f(x)$ 为常数.

3、无穷大量与无穷小量

等价无穷小. $\sin x\sim x\sim\tan x$.

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

$\ln(1+x)\sim x\sim e^x-1$.

$(1+x)^a-1\sim ax$.

例14. 求下列极限.

① $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos nx}{x^2}.$$

② $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{x^m-1}-\frac{n}{x^n-1}\right).$$

③ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}.$$

4、连续函数及其性质.

① 定义. $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例15 证明：$$R(x)=\begin{cases}0, & x\notin\mathbb{Q}\text{ 或 }x=0\\ \frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n},(m,n)=1\end{cases}$$ 在 $x=0$ 或 $x\notin\mathbb{Q}$ 连续.

（科目：　　　　）清华大学数学作业纸

编号：　　　　班级：　　　　姓名：　　　　第　　页

② 间断点的类形

③ 四则运算，复合运算，反函数 均连续。

④ 闭区间上连续函数的性质，

a. 介值定理

b. 最大值、最小值均存在。

例四. $f\in C(R)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. 求证，$f$ 在 R 上有最小值。

例五.（压缩映射定理）

$f(x)$ 在 R 上有定义. $\exists L\in(0,1)$. $\forall x, y\in R$，$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$

（Lipschitz条件）

求证.（1）$\{a_n\}$ 收敛.

（2）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，则 a 为 $f(x)$ 唯一不动点（$f(x)=x$ 的点）

三、函数的导数

定义．$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

微分．$df(x)=f'(x)dx$.

求导法则．① $(f+g)'=f'+g'$.

② $(fg)'=fg'+gf'$.

③ $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$.

④ $[f(\varphi(x))]'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

⑤ $[f^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{f'(x)}$.

⑥ 隐函数求导

⑦ 参数方程，

高阶导数．$(fg)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

$f\in C^{(n)}(a.b)$. f 在 (a,b) 上 n 阶导数连续.

例：(1) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 求 $x=0$ 处各阶导数.

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

例2. 证明：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 任一点的切线介于两根坐标轴之间的线段长等于a.

例3. 设参数方程 $\begin{cases} x=5t+4|t| \\ y=2t^2+t|t| \end{cases}$ 讨论$x=0$处的可导性.

四 导数的应用

1. 极值点.

$f'(x_0)=0$（费马定理）.

2. 微分中值定理.

① 罗尔定理.

② 柯西中值定理.

③ 拉格朗日中值定理.

④ 导函数达布定理.

3. 洛必达法则

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

例1. $f(x)$ 在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导且严格单调. $f(0)=0$. $f(1)=1$. 求证.
$\forall n\in N^*$. $\exists$ n个不同的$\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n\in(0,1)$. s.t.

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{1}{f'(\xi_n)}=n.$$

6. $f\in C[a,b]$ $f(a)=f(b)=0$ 且.

$(\lim\limits_{x\to a^+}f'(x))(\lim\limits_{x\to b^-}f'(x))>0$

则 f 在 (a,b) 至少有一个零点

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ $a_0=1$ 求证. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

$f(x)$ 在 (a,b) 无第二类间断点

且 $f(\frac{x+y}{2})\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$. $\forall (x,y)\in(a,b)$

求证 $f(x)\in C(a,b)$.

$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导. $|f''(x)|\le M$.

$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值.

$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$

---

f 在 $[a,+\infty)$ 连续 $f(+\infty)$ 有限.

求证 f 一致连续

---

f 在 $(a,+\infty)$ 可导. 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.