2. $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\,dx\right]$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}\,dx+\cdots+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2\cdot 6}}^{\frac{\pi}{2\cdot 3}}\tan\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2}+\int_{\frac{\pi}{2^2\cdot 6}}^{\frac{\pi}{2^2\cdot 3}}\tan\frac{x}{2^2}\,d\frac{x}{2^2}+\cdots+\int_{\frac{\pi}{2^n\cdot 6}}^{\frac{\pi}{2^n\cdot 3}}\tan\frac{x}{2^n}\,d\frac{x}{2^n}$$

$$=-\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{2\cdot 6}}^{\frac{\pi}{2\cdot 3}}-\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{2^2\cdot 6}}^{\frac{\pi}{2^2\cdot 3}}-\cdots-\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{2^n\cdot 6}}^{\frac{\pi}{2^n\cdot 3}}$$

$$=-\ln\left|\frac{\cos\frac{\pi}{2\cdot 3}}{\cos\frac{\pi}{2\cdot 6}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2^2\cdot 3}}{\cos\frac{\pi}{2^2\cdot 6}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 3}}{\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 6}}\right|=\ln\left|\frac{\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left|\frac{\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\right|=\ln\left|\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|=\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. $\int_0^1 x^x\,dx=\int_0^1 e^{x\ln x}\,dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\ln^n x\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx$

设 $J(n)=\frac{1}{n!}\int x^n\ln^n x\,dx$

利用分部积分：

$$J(n)=\frac{1}{n!(n+1)}x^{n+1}\ln^n x-\frac{n}{n!(n+1)}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln^{n-1}x-\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln^{n-2}x-\cdots\right)\right.$$

$$=\frac{x^{n+1}}{(n+1)n!}\left[\ln^n x-\frac{n}{n+1}\ln^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\ln^{n-2}x-\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)^3}\ln^{n-3}x+\cdots\right]$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n!(n+1)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!(n+1)^i}\ln^{n-i}x$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{n+1}}{(n-i)!(n+1)^{i+1}}\ln^{n-i}x$$

$$\therefore\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i x^{n+1}}{(n-i)!(n+1)^{i+1}}\ln^{n-i}x\Big|_{x=0^+}^{x=1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i x^{n+1}\ln^{n-i}x}{(n-i)!(n+1)^{i+1}}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{0!(n+1)^{n+1}}\right]\Big|_{x=0^+}^{x=1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\cdots$$

4. ~~对~~ $\forall [a,b] \subset (1,+\infty)$

~~$x\in[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n} < \sum_{n=1}^{n}\frac{n}{a^n}$~~ . 且 $\sum_{n=1}^{n}\frac{n}{a^n}$ 收敛 $\left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{a^{n+1}}}{\frac{n}{a^n}} = \frac{1}{a} < 1\right)$

$\left|\frac{n}{x^n}\right| \le \frac{n}{a^n}$, $n=1,2,\cdots$ $x\in[a,b]$

由 Weierstrass 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 在 $\forall x\in[a,b]$ 上一致收敛

$\Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ $x\in C[a,b]$ ，且 $\forall n\in N^+$, ~~$u_n(x)$~~ $\frac{n}{x^n}$ 在 $[a,b]$ 上连续 .

由 $[a,b] \subset (1,+\infty)$ 的任意性知， ~~$S(x)\in C(1,+\infty)$~~

$S(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续.

5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0 \quad (x\ne0),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 0 \quad (x=0)$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 对任意x, 绝对收敛.

以下证明在 $(-\infty\ +\infty)$ 上非一致收敛：

. $\forall N\in N^+$, 取 $n_0 = N+1$, $P_0 = N+1$ ~~$x_0=\sqrt{N}$~~ $x_0=\sqrt{N}$,

取 $\varepsilon_0 = \frac{N}{(1+N)^{2N}}$ ，且易知$\varepsilon_0>0$ 。

~~$\Rightarrow |u_{n_0}(x_0)+\cdots+u_{n_0+p_0-1}(x_0)|$~~

~~$= \left|\frac{x^2}{(1+x^2)^{N+1}} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{N+1+(N+1)-1}}\right| > \frac{N+1}{(1+x^2)^{2N+}}$~~

$$|u_{n_0}(x_0)+\cdots+u_{n_0+p_0-1}(x_0)|$$

$$= \left|\frac{x^2}{(1+x^2)^{N+1}} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{N+1+(N+1)-1}}\right| > \frac{(N+1)\ x^2}{(1+x^2)^{2N+1}} = \frac{(N+1)\ N}{(1+N)^{2N+1}}$$

$= \frac{N}{(1+N)^{2N}} = \varepsilon_0 > 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛 .

7\. 证明：函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2}$ 是 $(0,+\infty)$ 上连续，进一步证明在 $(0,+\infty)$ 上可微.

① $u_n'(x) = -\frac{e^{-nx}}{n}$ 在对 $\forall n\in N^+$，在 $(0,+\infty)$ 上连续.

② $\left|-\frac{e^{-nx}}{n}\right| \le \frac{e^{-an}}{n}$ $\forall x\in[a,b]\subset(0,+\infty)$，$n=1,2,\cdots$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{e^{-a(n+1)}}{n+1}}{\frac{e^{-an}}{n}} = \frac{n}{e^{a}(n+1)} < 1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-an}}{n}$ 收敛.

由 Weierstrass 判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{e^{-nx}}{n}$ 在 $\forall x\in[a,b]$ 上一致收敛.

③ $\exists\, x_0\in[a,b]$，使得 $\left|\frac{e^{-nx_0}}{n^2}\right| \le \frac{e^{-na}}{n^2}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-na}}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx_0}}{n^2}$ 收敛.

~~由 $[a,b]\subset(1,+\infty)$~~

综合 ①②③ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

且 $\forall n\in N^+$，$\frac{e^{-nx}}{n^2}$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

由 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 的任意性可知，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续

由定理 6.2.3（课本）知，$f(x)\in C^1(0,+\infty)$，且

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微.