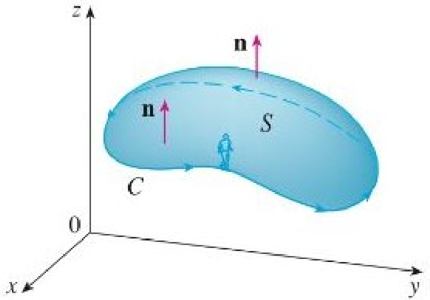
《微积分A2》第二十一讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年04月29日

设 S^+ 为一个定向曲面，其边界 ∂S^+ 为一条定向的空间闭曲线. 称曲面 S^+ 和 ∂S^+ 的定向协调，如果行人头顶方向为正法向，并沿着边界 ∂S^+ 的正向行走，则曲面位于行人的左手边. 约定: 若无特殊说明，符号 S^+ 和 ∂S^+ 表示它们定向协调. 如图所示.



空间向量场的旋度

Definition

定义: 设 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 为空间域 Ω 上的向量场, 连续可微. 定义如下一个相关的向量场, 记作 $\mathrm{rot}(\mathbf{F})$ 或 $\mathrm{curl}(\mathbf{F})$, 并称之为 $\mathbf{F}$ 的旋度(场).

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \mathrm{rot}(P, Q, R) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

为方便记忆，可将旋度场 $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ 形式地写作

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (P, Q, R)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y \right).$$

Theorem

定理: 设 $\mathbf{F}$ 为空间开域 Ω 上 C^1 向量场, 设 S^+ 是 Ω 内的一个定向曲面, 分片正则, 其边界 ∂S^+ 为分段正则的空间闭曲线, S^+ 与 ∂S^+ 定向协调, 则

$$\int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S^+} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad \text{(Stokes 公式)}$$

注: 设 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 则 Stokes 公式的分量形式为

$$\int_{\partial S^+} P dx + Q dy + R dz$$

$$= \iint_{S^+} (R_y - Q_z) dy dz + (P_z - R_x) dz dx + (Q_x - P_y) dx dy.$$

当 S^+ 为平面有界闭域，其单位正法向为 $n = (0, 0, 1)$. 设 $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ 为 S 上的向量场，连续可微，(F 实际上是平面场)，则

$$\mathrm{rot}(F) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (0, 0, Q_x - P_y).$$

此时 Stokes 公式即为

$$\int_{\partial S^+} P dx + Q dy = \iint_{S^+} (Q_x - P_y) dx dy.$$

这正是 Green 公式的旋度形式.

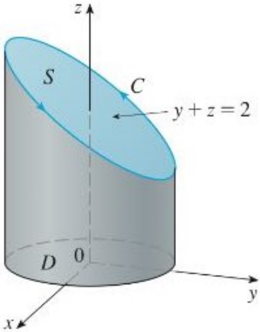
Stokes 公式的意义

与 Newton-Leibniz 公式, Green 公式(旋度形式和散度形式), 以及 Gauss 公式一样, Stokes 公式表达同样的事实:

向量场的某种导数在曲面上的积分

= 向量场本身在曲面边界上的积分.

例一：计算线积分 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$，其中 $\mathbf{F} = (-y^2, x, z^2)$，曲线 C 为平面 $y + z = 2$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线，在点 $(0, 0, 3)$ 处看 C 的正向为逆时针. 如图所示.



解: 我们可以写出曲线(椭圆周) C 的方程, 再根据线积分计算公式算出积分. 但是利用 Stokes 公式计算更简单. 为此我们需要寻找一个曲面 S, 其边界为曲线 C. 这样的曲面有许多选择. 最方便的就是取平面 $y+z=2$ 上以 C 的边界的椭圆盘, 其正法向规定为 $(0,1,1)$ (即朝上). 这样它们的定向协调. 简单计算知

$$\mathrm{rot}\, F = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (-y^2, x, z^2) = (0, 0, 1+2y).$$

于是由 Stokes 公式得

例一续二

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S^+} (\mathrm{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$$

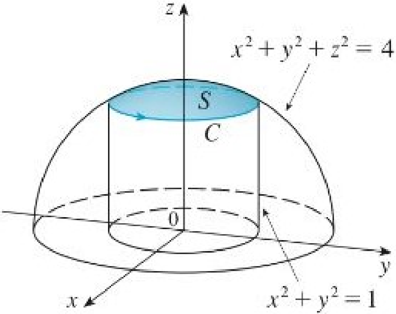
$$= \iint_S [(0, 0, 1 + 2y) \cdot (0, 1, 1)] \frac{1}{\sqrt{2}} dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (1 + 2y) dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D (1 + 2y) \sqrt{2} dxdy$$

$$= \iint_D (1 + 2y) dxdy = \iint_D 1 dxdy = |D| = \pi,$$

其中 D 为单位圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$. 解答完毕.

例二: 计算面积分 $\iint_{S^+} \mathrm{rot}(F)\cdot dS$, 其中 $F=(xz,yz,xy)$, S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 位于柱面 $x^2+y^2=1$ 内部, 且在 x,y 平面上方的部分, 正法向朝上. 如图所示.



解: 我们可计算这个面积分, 但利用 Stokes 公式, 将面积分化为线积分计算更简单. 解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

得曲面 S 边界曲线 $\partial S = C$ 的方程为 $z=\sqrt{3}$, $x^2+y^2=1$. 其参数方程为 $r(\theta)=(\cos\theta, \sin\theta, \sqrt{3})$, $0\le\theta\le 2\pi$. 注意参数 θ 增加的方向与 C^+ 的正向协调, 且 S^+ 与其边界 C^+ 的正向协调. 于是由 Stokes 公式得

$$\iint_{S^+} \mathrm{rot}(F)\cdot dS = \int_{C^+} F\cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(\theta))\cdot r'(\theta)d\theta.$$

例二续二

计算得

$$\mathbf{r}'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0),$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) = \left(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta, \cos\theta\sin\theta\right),$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) \cdot \mathbf{r}'(\theta) = -\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\sin\theta = 0.$$

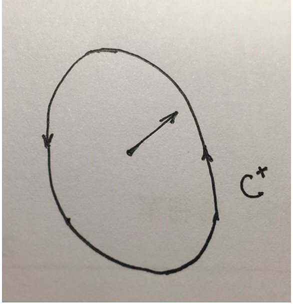
故所求面积分

$$\iint_{S^+} \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

解答完毕.

例三

课本第190页4.4.2: 设 C^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线(空间圆周), 在点 $(1,1,1)$ 处看圆周 C^+ 的逆时针方向为其正向. 如图所示. 求 $J=\int_{C^+} z dx + x dy + y dz$.



例三续一

解: 之前我们曾计算过这个线积分得 $J=\sqrt{3}\pi R^2$, 见讲义 Apr15讲义第24-29页. 解法是写出曲线 C^+ 的参数方程, 然后根据线积分计算公式计算. 计算过程稍显复杂. 以下利用 Stokes 公式来计算这个线积分. 记 $F=(z,x,y)$, 取 S^+ 为圆周 C^+ 在平面 $x+y+z=0$ 上所围成的空间圆盘, 其正法向为 $(1,1,1)$. 注意 S^+ 与其边界 C^+ 的定向协调. 于是由 Stokes 公式得

$$J=\int_{C^+} zdx+xdy+ydz=\iint_{S^+}[\mathrm{rot}(F)\cdot n]dS,$$

这里 $n=(1,1,1)/\sqrt{3}$.

例三续二

计算得

$$\mathrm{rot}(F) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (z, x, y)$$

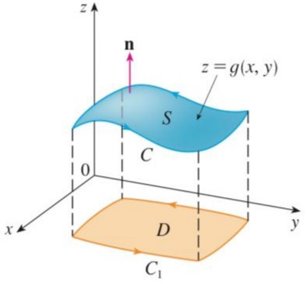
$$= ([y]_y - [x]_z, [z]_z - [y]_x, [x]_x - [z]_y) = (1, 1, 1).$$

$$\Rightarrow \quad J = \iint_S [\mathrm{rot}(F) \cdot n] dS = \iint_S (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) \frac{1}{\sqrt{3}} dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S 3 dS = \sqrt{3}|S| = \sqrt{3}\pi R^2.$$

解答完毕.

<u>Stokes 公式的证明</u>: 特殊情形. 设曲面 S 由 $z = g(x, y)$ 所确定的显式曲面, $(x, y) \in D$, 其中 g 是 C^2 函数, $D \subset \mathbb{R}^2$ 为平面有界闭域. 设 S^+ 的正法向朝上, 即 S^+ 正法向为 $(-g_x, -g_y, 1)$. 记 S^+ 的边界为 $C^+ = \partial S^+$, D 的边界为 $C_1 = \partial D$. 如图所示.



证明续一

以下证 Stokes 公式 $\iint_{S^+}(\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS=\int_{C^+}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. 根据曲面计算公式得 $\iint_{S^+}(\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS=\iint_D \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot(-g_x,-g_y,1)dxdy$

$$=\iint_D\Big[-(R_y-Q_z)g_x-(P_z-R_x)g_y+(Q_x-P_y)\Big]dxdy$$

设平面曲线 C_1 有正则表示 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\le t\le b$, 则对应空间闭曲线 C 有正则表示 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $=g(x(t),y(t))$, $a\le t\le b$. 于是

$$\int_{C^+}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b\Big[P(*)x'(t)+Q(*)y'(t)+R(*)z'(t)\Big]dt,$$

其中 $P(*)=P(x(t),y(t),z(t))$, $Q(*)$, $R(*)$ 的意义类似.

回忆 $z(t)=g(x(t),y(t))$ 得 $z'(t)=g_x(*)x'(t)+g_y(*)y'(t)$.

于是 $\int_{C^+}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=$

$$\int_a^b\Big[P(*)x'(t)+Q(*)y'(t)+R(*)[g_x(*)x'(t)+g_y(*)y'(t)]\Big]dt$$

$$=\int_a^b\Big\{[P(*)+R(*)g_x(*)]x'(t)+[Q(*)+R(*)g_y(*)]y'(t)\Big\}dt$$

$$=\int_{C_1^+}[P(\cdot)+R(\cdot)g_x(\cdot)]dx+[Q(\cdot)+R(\cdot)g_y(\cdot)]dy,$$

其中 $P(\cdot)=P(x,y,g(x,y))$, $g_x(\cdot)=g_x(x,y)$, $Q(\cdot)$, $R(\cdot)$, $g_y(\cdot)$ 的意义类似.

对上述线积分 $\int_{C^+}$，应用 Green 公式的旋度形式得

$$\int_{C_1^+} = \iint_D \Big\{[Q(\cdot) + R(\cdot)g_y(\cdot)]_x - [P(\cdot) + R(\cdot)g_x(\cdot)]_y\Big\} dxdy.$$

$$= \iint_D \Big\{(Q_x + Q_z g_x + R_x g_y + R_z g_x g_y + R g_{yx})$$

$$-(P_y + P_z g_y + R_y g_x + R_z g_y g_x + R g_{xy})\Big\} dxdy$$

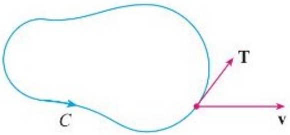
$$= \iint_D \Big\{ - [R_y - Q_z]g_x - [P_z - R_y]g_y + [Q_x - P_y]\Big\} dxdy$$

$$= \iint_{S^+} (\mathrm{rot}\, F \cdot n) dS.$$

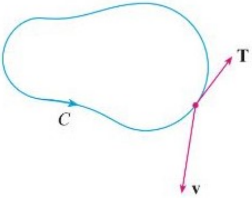
定理得证.

空间向量场的环量

设 $\mathbf{v}$ 为空间域 Ω 上流体运动的速度场, C^+ 为域 Ω 中一条定向的简单闭曲线, 如同平面曲线一样, 线积分 $\oint_{C^+}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{T})ds$ 为流体在单位时间里, 环绕闭路径 C^+ 的流量. 这个积分常称为流体沿着闭路径 C^+ 的环量 (circulation).



(a) $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} > 0$, positive circulation



(b) $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} < 0$, negative circulation

固定一点 $P \in \Omega$, 以及一个方向 $\mathbf{n}$ (单位向量), 考虑 $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\big|_P$ 的物理意义. 记 π 为过点 P 且以 $\mathbf{n}$ 为法方向的平面, 记 S_a^+ 为平面 π 上以 P 为圆心, $a > 0$ 为半径的圆盘. 由 Stokes 公式得

$$\iint_{S_a^+} (\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\partial S_a^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) ds.$$

上式右端为流体沿着圆周 ∂S^+ 环量或旋转强度. 上式两边同除圆盘的面积 $|S_a| = \pi a^2$ 得

$$\frac{1}{\pi a^2} \iint_{S_a^+} (\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{1}{\pi a^2} \int_{\partial S_a^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) ds.$$

上式右端

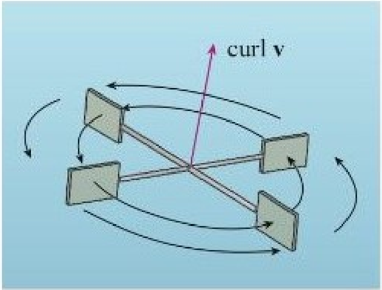
$$\frac{1}{\pi a^2}\int_{\partial S_a^+}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{T})ds$$

可理解为流体在圆盘 S_a 上平均旋转强度. 再对上式左端应用积分中值定理，并于上式两边令 $a\to 0^+$ 得

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\big|_P=\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\pi a^2}\int_{\partial S_a^+}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{T})ds.$$

由此可知 $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\big|_P$ 表示点 P 处流体围绕方向 $\mathbf{n}$ 的旋转强度.

考虑问题：在点 P 处流体围绕什么方向 n，可是得流体的旋转强度 $(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\big|_P$ 最大？答案：沿着旋度 rot v(P) 的方向．这个性质可与函数的梯度性质相比较，即函数沿着梯度方向的方向导数取得最大值．如图所示．



梯度场是无旋场

Theorem

定理: 对任意二次连续可微函数 $f(x, y, z)$, 成立 $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$.

换言之, 梯度场是无旋场.

证: 依定义有

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (f_x, f_y, f_z)$$

$$= (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0, 0, 0).$$

证毕. □

例子

例: 证明向量场 $\mathsf{F} = (xz, xyz, -y^2)$ 不是梯度场.

证明: 直接计算得 $\mathrm{rot}(\mathsf{F}) = (-y(2+x), x, yz)$. 由于 $\mathrm{rot}(\mathsf{F})$ 不是零向量场, 故向量场 F 不是梯度场. 证毕. $\square$

Theorem

定理: 对于任意 C^2 向量场 F, $\text{div}\,(\text{rot}\,F) = 0$.

证: 设 $F = (P, Q, R)$, 则

$$\text{div}\,(\text{rot}\,F) = \text{div}\,[(\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (P, Q, R)]$$

$$= \text{div}\,(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

$$= (R_y - Q_z)_x + (P_z - R_x)_y + (Q_x - P_y)_z$$

$$= R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0.$$

定理得证.

注记

称一个向量场 F 为无源场，如果 $\mathrm{div}\mathsf{F}=0$. 故上述定理是说，任意旋度场 $\mathrm{rot}\mathsf{G}$ 是无源场. 当向量场的定义域是星型域时，其逆也对，即无源场是旋度场. 具体说来，若星型域上的 C^1 向量场 F 无源，即 $\mathrm{div}\mathsf{F}=0$，则存在 C^2 向量场 G，使得 $\mathsf{F}=\mathrm{rot}\mathsf{G}$. 证明详见常庚哲史济怀《数学分析教程》下册第三版第145页.

空间开域 Ω 称为星型(Starshaped) 域(例如全空间)，如果存在点 $\mathsf{P}_0\in\Omega$，使得对任意点 $\mathsf{P}\in\Omega$，直线段 $\overline{\mathsf{P}\mathsf{P}_0}$ 均属于 Ω.

Definition

<u>定义</u>: 空间开域 Ω 称为曲面单连通域(simply connected), 如果 Ω 内任意一个分段光滑的简单闭曲线 Γ, 可以找到一个可定向的分片正则的曲面 S 以 Γ 其边界, 即 $\partial S = \Gamma$.

<u>问题</u>: 如何判断一个空间区域是否为曲面单连通域? 尚不知道是否存在可操作的判别准则.

定理: 设 Ω 为空间曲面单连通开区域, 向量场 $\mathbf{F}$ 在 Ω 上连续可微, 则以下四件事情等价.

(i) 闭路径积分为零; 即对 Ω 中任意闭路径 C^+, $\oint_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$;

(ii) 积分与路径无关; 即对任两点 $A, B \in \Omega$, 以及任意以 A 为起点, 以 B 为终点的简单路径 C_{AB}, 积分 $\oint_{C_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 的值仅与点 A, B 的位置有关, 而与路径 C_{AB} 的选择无关;

(iii) 场 $\mathbf{F}$是梯度场, 即存在 Ω 上 C^1函数 $f(x, y, z)$, 使得 $\nabla f = \mathbf{F}$;

(iv) 场 $\mathbf{F}$ 无旋, 即 $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \mathrm{rot}(P, Q, R) = 0$. 此即空间恰当条件成立: $R_y = Q_z$, $P_z = R_x$, $Q_x = P_y$.

证: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) 的证明同平面情形. 以下证 (iv) $\Rightarrow$ (i): 假设场 $\mathbf{F}$ 无旋, 要证明场对于 Ω 中的任意闭路径 C^+, 积分 $\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. 由于区域 Ω 是曲面单连通, 故在 Ω 中存在一个定向曲面 S^+, 以 C^+ 为边界曲线, 且它们的定向协调. 于是由 Stokes 公式得 $\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S^+} (\mathrm{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = 0$. 定理得证. $\square$

作业

习题4.7 (page 227-228): 5, 6, 7, 8, 12(1)(3).

第4章总复习题(page 229-230): 1, 2(1), 3, 4.