《微积分A2》第十九讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年04月22日

平面梯度场(即保守场)的必要条件

Theorem

定理: 若 $F = (P, Q)$ 是 C^1 平面梯度场, 则 $P_y = Q_x$.

证: 当 F 梯度场时, 则存在连续可微函数 $f(x, y)$, 使得 $\nabla f = F$, 即 $f_x = P$, $f_y = Q$. 由于 P, Q 连续可微, 故函数 $f(x, y)$ 二阶连续可微. 于是

$$P_y = [f_x]_y = f_{xy} = f_{yx} = [f_y]_x = Q_x.$$

证毕. $\square$

Definition

可微向量场 $F = (P, Q)$ 的旋度定义为 $\mathrm{rot}(P, Q) \triangleq Q_x - P_y$. 如果 $\mathrm{rot}(P, Q) = 0$ 即 $P_y = Q_x$, 则称场 $F = (P, Q)$ 为无旋场.

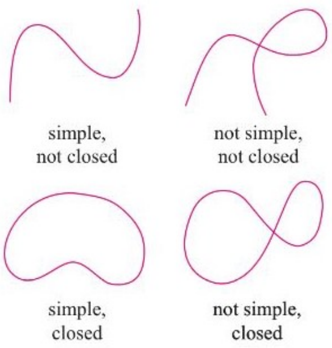
故上述定理可表述为：梯度场必为无旋场.

闭路径积分为零，保守场，梯度场与无旋场的关系总结

闭路径积分为零 $\Leftrightarrow$ 保守场(积分与路径无关) $\Leftrightarrow$ 梯度场 $\Rightarrow$ 无旋场(平面情形)

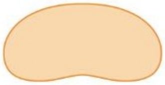
Definition

<u>定义</u>: 不自相交的平面曲线称为简单曲线 (simple curves). 不自相交的平面闭曲线称为简单闭曲线 (simple closed curves).



Definition

定义: 一个平面开区域(连通开集) D 称为单连通的 (simply connected), 如果 D 中的任意简单闭曲线所包围有界闭区域全部属于 D. 换言之没有洞的区域称为单连通域.



simply-connected region

regions that are not simply-connected

单连通域上的无旋场是保守场

Theorem

<u>定理</u>: 设平面向量场 $\mathbf{F} = (P, Q)$ 在平面域 D 上的连续可微. 若 $\mathbf{F}$ 无旋, 且 D 为单连通, 则场 $\mathbf{F}$ 是保守场.

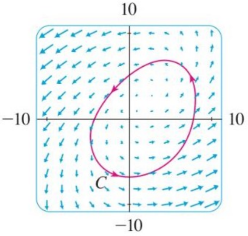
<u>注一</u>: 上述结论是即将介绍的 Green 定理的推论.

<u>注二</u>: 由上述定理可知, 在平面单连通区域上, 无旋场 $\Leftrightarrow$ 保守场 $\Leftrightarrow$ 梯度场 $\Leftrightarrow$ 闭路径积分为零.

<u>注三</u>: 无旋条件容易验证, 而其他三个条件一般不易验证.

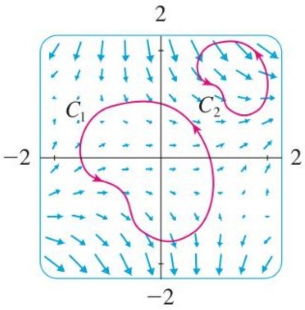
例: 判断平面向量场 $\mathbf{F}(x,y) = (x-y, x-2)$ 是否为保守场?

解: 场 $\mathbf{F}$ 的定义域是全平面, 单连通. 因此 $\mathbf{F}$ 为保守场, 当且仅当 $\mathbf{F}$ 无旋. 由于 $P_y = (x-y)_y = -1$, $Q_x = (x-y)_x = 1$, 故 $Q_x \neq P_y$. 因此 $\mathbf{F}$ 不是保守场. 下图是向量场关于一个闭路径积分的示意图. 由图可知场 $\mathbf{F}$ 沿着闭路径的积分 > 0.



例：判断平面场 $F(x,y)=(3+2xy, x^2-3y^2)$ 是否为保守场？

解：场 F 的定义域是全平面，单连通，且 $P_y=(3+2xy)_y=2x$，$Q_x=(x^2-3y^2)_x=2x$. 可见 $Q_x=P_y$. 故场 F 无旋，从而保守. 由图可知场关于切方向的投影有正有负，不同于例一情形.



例：前例中已说明平面场 $F(x,y)=(3+2xy, x^2-3y^2)$ 保守，即场为梯度场．往下我们来求场 F 的原函数，即求 $f(x,y)$，使得 $\nabla f=F$.

解：要求 f 使得

$$f_x(x,y)=3+2xy,\quad f_y(x,y)=x^2-3y^2.$$

对第一个方程两边关于 x 积分，可知 $f(x,y)=3x+x^2y+g(y)$，其中 $g(y)$ 为待定的可微函数．再将 $f(x,y)=3x+x^2y+g(y)$ 带入第二个方程得 $x^2+g'(y)=x^2-3y^2$，即 $g'(y)=-3y^2$．两边积分得 $g(y)=-y^3+K$．故所求函数 $f=3x+x^2y-y^3+K$．解答完毕．

例二

例: 已知空间向量场 $F(x,y,z)=(y^2,2xy+e^{3z},3ye^{3z})$ 是梯度场(以后证明). 求场 F 的原函数, 即求 C^1 函数 $f(x,y,z)$, 使得 $\nabla f=F$.

解: 所求函数 f 满足下面三个方程

$$f_x=y^2,$$
$$f_y=2xy+e^{3z},$$
$$f_z=3ye^{3z}.$$

对上述第一个方程两边关于 x 积分得 $f(x,y,z)=xy^2+g(y,z)$, 其中 $g(y,z)$ 关于 y,z 连续可微.

将 $f=xy^2+g(y,z)$ 带入第二个方程得 $2xy+g_y=2xy+e^{3z}$ 或 $g_y(y,z)=e^{3z}$. 再对等式 $g_y(y,z)=e^{3z}$ 两边关于 y 积分得 $g(y,z)=ye^{3z}+h(z)$, 即 $f=xy^2+ye^{3z}+h(z)$, $h(z)$ 待定. 再将其带入第三个方程得 $3ye^{3z}+h'(z)=3ye^{3z}$. 故 $h'(z)=0$. 由此可见 $h(z)$ 为常数. 所求函数为 $f(x,y,z)=xy^2+ye^{3z}+K$. 解答完毕.

设在力场 $\mathbf{F}$ 的作用下, 质点沿路径 C 由起点 A 运动到终点 B. 设路径 C 有正则的参数表示 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $a\le t\le b$, 且 $\mathbf{r}(a)=A$, $\mathbf{r}(b)=B$. 根据 Newton 第二运动定律 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 可知

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))=m\mathbf{r}''(t),\quad a<t<b,$$

这里 m 代表质点的质量. 于是力场 $\mathbf{F}$ 关于质点沿着路径 C 所做的功为

$$W=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt=\int_a^b m\mathbf{r}''(t)\cdot\mathbf{r}'(t)dt$$

$$= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\Big[r'(t)\cdot r'(t)\Big]dt = \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}|r'(t)|^2 dt$$

$$= \frac{m}{2}\Big(|r'(b)|^2 - |r'(a)|^2\Big).$$

即所作的功为

$$W = \frac{m}{2}\Big(|v(b)|^2 - |v(a)|^2\Big),$$

这里 $v(t) = r'(t)$ 代表质点的运动速度. 量 $\frac{1}{2}m|v(t)|^2$ 通常称作质点的动能 (kinetic energy). 因此所考虑的功可表为

$$W = K(B) - K(A).$$

这表明, 力场 $\mathbf{F}$ 关于质点沿着路径 C 由起点 A 运动到终点 B 所做的功, 等于质点在起点和终点处动能的改变量. 进一步假设力场 $\mathbf{F}$ 是梯度场, 即 $\mathbf{F} = \nabla f$. 力学里函数 $-f(x, y, z)$ (注意负号) 定义为质点在点 (x, y, z) 处的势能 (potential energy), 并记作 $P = -f$. 于是所考虑的功还可以表为

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r}$$

$$= P(\mathbf{r}(a)) - P(\mathbf{r}(b)) = P(A) - P(B).$$

因此当 F 是梯度场, 即保守力场时, 根据功 W 的动能和势能的两个表示得

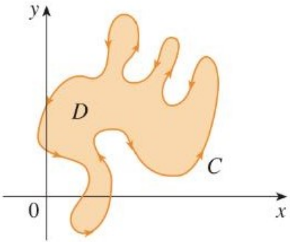
$$\mathsf{W} = \mathsf{K}(\mathsf{B}) - \mathsf{K}(\mathsf{A}) = \mathsf{P}(\mathsf{A}) - \mathsf{P}(\mathsf{B}).$$

将上式写作

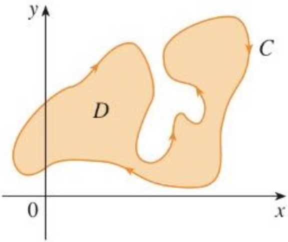
$$\mathsf{K}(\mathsf{A}) + \mathsf{P}(\mathsf{A}) = \mathsf{K}(\mathsf{B}) + \mathsf{P}(\mathsf{B}).$$

这表明在保守力场的作用下, 质点在运动过程中保持总能量不变, 即动能和势能之和保持常数不变. 这就是非常重要的能量守恒定律 (the Law of conservation of energy).

假设 D 为平面单连通有界闭区域，规定其边界 $C^+ = \partial D$ 的正向为逆时针方向．如图所示．



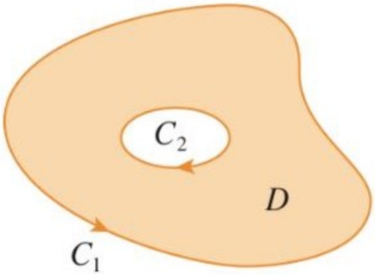
(a) Positive orientation



(b) Negative orientation

平面多连通有界域的定向

多连通区域的正定向定义如下：当行人在边界上朝着正向行走时，区域 D 位于行人的左手下方．如图所示．



Theorem

定理: 设 D 为平面有界闭区域, 其边界 ∂D 为分段光滑曲线, 则对 D 上任意连续可微向量场 $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ 成立

$$\iint_D (\mathrm{rot}\, F)\,dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy.$$

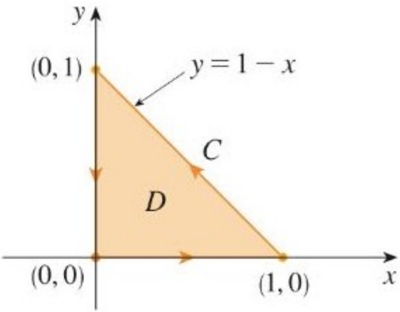
即
$$\iint_D (Q_x - P_y)\,dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy.$$

注: 上述等式称为 Green公式. 它可看作一维空间的 Newton - Leibniz公式 $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ 在二维空间上的推广.

例: 计算线积分

$$\int_C x^4 dx + yxdy,$$

其中 C 是三角形域 D 的边界, 其中定向为逆时针, 如图所示.



例一续

解: 我们可以通过分别计算三个边上的积分来计算这个线积分，但利用Green公式计算更简单. 对本例而言，$P = x^4$, $Q = xy$, 于是由Green公式得

$$\int_C x^4 dx + yxdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy = \iint_D ydxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} ydy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

解答完毕.

例：计算线积分

$$J=\int_C (3y-e^{\sin x})dx+\left(7x+\sqrt{y^4+1}\right)dy,$$

其中 C 是圆周 $x^2+y^2=9$，正向为逆时针.

解一：熟知圆周 $x^2+y^2=9$ 有参数表示 $x=3\cos t$，$y=3\sin t$，$0\le t\le 2\pi$，且参数与定向协调. 由线积分的计算公式得

$$J=\int_0^{2\pi}\left[\left(3\cdot 3\sin t+e^{\sin(3\cos t)}\right)(-3\sin t)\right.$$

$$\left.+\left(7\cdot 3\cos t+\sqrt{3^4\sin^4 t+1}\right)(3\cos t)\right]dt.$$

但如何计算积分

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin(3\cos t)} \sin t dt \quad ?$$

解二: 利用 Green 公式来计算

$$\int_C (3y - e^{\sin x})dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right)dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 9} \left[\left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)_x - (3y - e^{\sin x})_y\right] dxdy$$

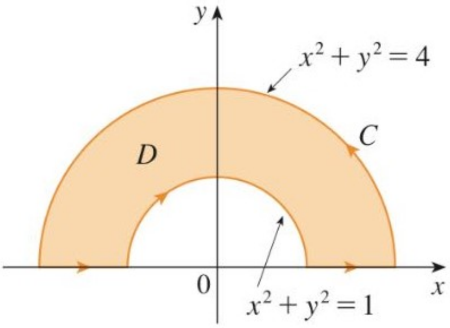
$$= \iint_{x^2+y^2 \le 9} (7-3)dxdy = 4 \cdot \pi 3^2 = 36\pi.$$

解答完毕.

例: 计算线积分

$$\int_C y^2 dx + 3xydy,$$

其中 C 为半环域 D 的边界，定向如图所示.



解: 由 Green 公式得

$$J = \int_C y^2 dx + 3xydy = \iint_D (3y - 2y) dxdy = \iint_D ydxdy.$$

对上述二重积分作极坐标变换 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 其中

$1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$, 故

$$J = \int_1^2 dr \int_0^\pi (r\sin\theta) r d\theta = \int_1^2 r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{14}{3}.$$

解答完毕.

例：设平面向量场

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

证明对于任意包含原点 $(0,0)$ 的正定向(逆时针)的闭路径 C，线积分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=2\pi$.

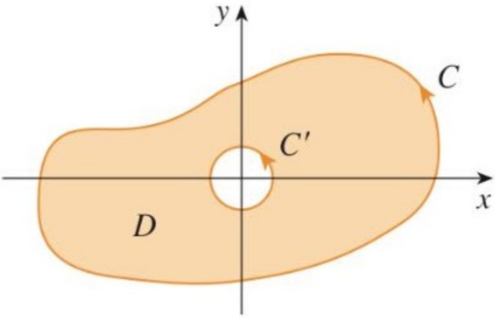
证：记 $\mathbf{F}=(P,Q)$，即

$$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

简单计算得

$$Q_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=P_y.$$

对任意包含原点 $(0,0)$ 的正定向(逆时针)的闭路径 C, 作一个小圆周 C', $x^2+y^2=\varepsilon^2$, $\varepsilon>0$ 充分小, 逆时针定向. 记由 C 和 C' 所围成的区域为 D. 如图所示.



对区域 D 应用 Green 公式得

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy = 0.$$

由此可知

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

圆周 C' 有参数方程 $x = \varepsilon\cos\theta$, $y = \varepsilon\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, 且参数方向与 C' 的正向协调. 于是

例子续三

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta))\cdot \mathbf{r}'(\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon\sin\theta(\varepsilon\cos\theta)' + \varepsilon\cos\theta(\varepsilon\sin\theta)'}{\varepsilon^2\cos^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

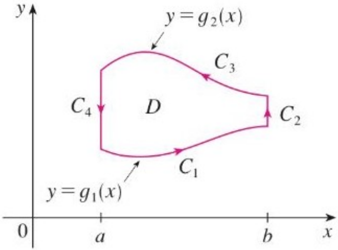
命题得证. $\square$

要证 Green定理, 即要证对任意 C^1 函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 成立

$$\int_{C^+} P dx = -\iint_D P_y dxdy, \quad \int_{C^+} Q dy = \iint_D Q_x dxdy.$$

往下我们只证明第一个等式. 另一个等式的证明完全类似.

<u>情形一</u>: 平面域 D 为如图所示的特殊情形.



根据区域 D 的形状可知

$$\iint_D P_y(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P_y(x,y)dy$$

$$= \int_a^b \Big[P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))\Big]dx.$$

再考虑线积分．边界 C^+ 由四条定向曲线 C_k^+, $k=1,2,3,4$ 构成．我们依次考虑在这些曲线上的积分：

$$\int_{C_1^+} P(x,y)dx = \int_a^b P(x,g_1(x))dx,$$

定理证明，续二

$$\int_{C_3^+} P(x,y)dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))dx.$$

显然

$$\int_{C_2^+} P(x,y)dx = 0 = \int_{C_4^+} P(x,y)dx.$$

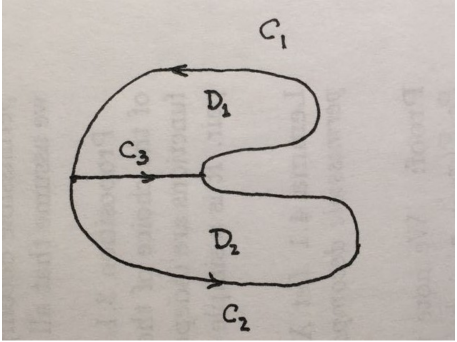
因此

$$\int_{C^+} P(x,y)dx = \sum_{k=1}^{4} \int_{C_k^+} P(x,y)dx$$

$$= \int_a^b \left[P(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x))\right] dx = -\iint_D P_y dxdy.$$

即等式成立.

情形二: 平面域 D 为一般单连通区域，例如如图所示的单连通域 D. 此时区域 D 可以分解为两个形如情形一的区域 D_1 和 D_2 的并.



区域 D_1 的边界为 $C_1 \cup C_3$, 区域 D_2 的边界为 $C_2 \cup \{-C_3\}$. 对这两个区域应用情形一的结论得

$$\int_{C_1 \cup C_3} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} (Q_x - P_y) dxdy,$$

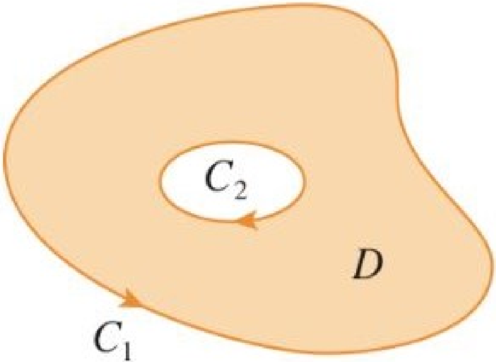
$$\int_{C_2 \cup \{-C_3\}} Pdx + Qdy = \iint_{D_2} (Q_x - P_y) dxdy.$$

注意到 C_3 和 $-C_3$ 上的线积分之和为零. 由此得

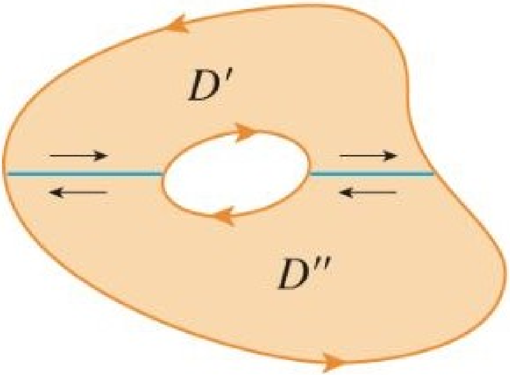
$$\int_{C_1 \cup C_2} Pdx + Qdy = \iint_{D} (Q_x - P_y) dxdy.$$

Green公式成立.

<u>情形三</u>：区域 D 为非单连通情形，如图所示.



此时将区域 D 可分解为单连通区域的并，即$D = D' \cup D''$. 如图所示.



对单连通区域 D' 和 D'', 应用 Green 定理关于单连通区域的结论得

$$J = \iint_D (Q_x - P_y) dxdy$$
$$= \iint_{D'} (Q_x - P_y) dxdy + \iint_{D''} (Q_x - P_y) dxdy$$
$$= \int_{\partial D'} Pdx + Qdy + \int_{\partial D''} Pdx + Qdy$$

注意到在两条绿色直线段上, 来去线积分之和为零. 因此

$$J = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

至此 Green 定理得证.

习题4.6 (page 214-215)

1(1)(3), 2(1)(3), 3(1)(3), 4(1)(3), 5, 6, 8, 9.

注1: 题6的第二等式右边的系数2应该去掉.

注2: 题8的第二个等式右边的两个二重积分似应该相加.