微积分A19春第一次习题课讨论题　　　　杨利军　March 2019

题一．求极限

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}$; (极限为 1)

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x-y)\ln\sqrt{x^2+y^2}$; (极限为 0)

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; (极限不存在)

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{|x||y|^p}}{\sqrt{|x|+|y|}}$, 其中 $p>1$. (极限为 0)

5. $\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty}(x^2+y^4)e^{-(x+y)}$; (极限为 0)

6. $\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{y^2}$. (极限为 0)

注记: 求极限一般原则(以二元函数为例)

(i) 在考察极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 是否存在时, 如果观察到动点 (x,y) 沿不同的路径, 例如沿不同射线, 趋向于 (x_0,y_0) 时, 趋向于不同的值, 则可断言极限不存在. 例如上述极限3.

(ii) 当所考虑极限存在时, 常常可以利用一元函数求极限的模式求极限． 例如上述第极限1,2,5. 应牢记一元函数的若干极限公式(模式). 例如

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(iii) 适当放大或缩小, 然后观察是否存在极限．例如上述极限4,5.

(iv) 给出必要的计算过程.

题二. 假设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的重极限以及两个累次极限均存在, 证明这三个极限相等. (课本习题1.3题4(2)).

题三. 设 $f(x,y)=|x-y|\phi(x,y)$, 其中 $\phi(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处连续. 考虑函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处的可微性 (课本习题1.4题1(4)).

注: 研究二元函数 $f(x,y)$ 的可微性之一般准则:

(i) 若两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 的其中之一不存在, 则可断言函数 f 在点 (x_0,y_0) 处不可微.

(ii) 当两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 均存在时, 分别记作 a,b, 若以下极限式

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-a\Delta-b\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,$$

不成立, 则可断言函数在点 (x_0,y_0) 处不可微.

题四. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin x}{|x|+2|y|}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \quad 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微, 并求微分 $df(0,0)$.

题五. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 为平面点集. 定义平面上的点 $z_0=(x_0,y_0)$ 到点集 A 的距离为 $\rho(z_0,A)$ $\triangleq\inf\{\|z-z_0\|,z\in A\}$, 这里 $\|z-z_0\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $z=(x,y)$. 证明

(i) 对于任意两点 $z,w\in\mathbb{R}^2$, 成立 $|\rho(z,A)-\rho(w,A)|\leq\|z-w\|$;

(ii) 点集 A 的闭包可以表示为 $\bar{A}=\{z\in\mathbb{R}^2,\rho(z,A)=0\}$.

注：根据结论(i)可知, 对于给定的平面点集 A, 距离 $\rho(z,A)$ 作为定义在整个 $\mathbb{R}^2$ 上的函数处处连续. 参见课本第一章总复习题第6题(第96页).

题六. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为 n 元函数. 证明函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续, 当且仅当对 $\mathbb{R}$ 中的任何开集 $G\subset\mathbb{R}$ 的原象 $f^{-1}(G)\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n, f(x)\in G\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. (注: 这是第1章总复习题第4题 page 96.)

题七. 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上处处连续且满足条件 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$. 证明函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上可取得最小值, 即存在点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$f(x_0,y_0)\le f(x,y),\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(注: 这是课本习题1.3第8题 page 24).

题八: 假设二元函数 $f(x,y)$ 在平面开区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的两个偏导数恒为零. 证明函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 上为常数.

注1: 熟知, 若开区间上一元函数的导数恒为零, 则这个函数为常数函数. 题七的结论是这个一元情形的结论对于二元情形的推广. 显然这个结论可以推广到一般 n 元情形, 即若一个 n 元函数的 n 个偏导数均恒为零, 则函数必为常数函数. 证明方法同如下二元情形的证明方法.

注2：设二元函数 $f(x,y)$ 在平面开区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上连续可微. 若它的一个偏导数, 比如说 $f_y(x,y)$ 恒为零, 则当 D 为凸域时(区域称为凸的, 如果区域中的任 何两点之间的线段均包含在D中), 函数 $f(x,y)$ 与变量 y 无关. 但当区域D非凸时, 函数 $f(x,y)$ 仍可能与变量 y 有关. 例如设 $D=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y),x\ge0,y=0\}$. 易见 D 非凸. 令

$$f(x,y)=\begin{cases} x^3, & x>0,y>0\\ 0, & \text{others.}\end{cases}$$

显然 $f_y(x,y)=0$, $\forall(x,y)\in D$. 但函数 $f(x,y)$ 的值变量 y 有关. 例如 $f(1,1)=1$, 而 $f(1,-1)=0$.

题九. 考虑偏微分方程的初值问题 $z_t = az_x + bz_y$, $z(x,y,0) = z_0(x,y)$, 其中 a,b 均为常数, $z_0(x,y)$ 为全平面 $\mathbb{R}^2$ 上的连续可微函数. 证明这个初值问题有唯一解, 且这个唯一解可表示为 $z(x,y,t) = z_0(x+at, y+bt)$, $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3$. (这是第一章总复习题第11题 page 96. 方程 $z_t = az_x + bz_y$ 称为运输方程.)

注: 三元函数 $z(x,y,t)$ 称为上述初值问题的解是指, 函数 $z(x,y,t)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续可微, 且满足方程 $z_t = az_x + bz_y$, 即如下恒等式成立,

$$z_t(x,y,t) \equiv az_x(x,y,t) + bz_y(x,y,t), \quad \forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3.$$

此外还满足初值条件, 即

$$z(x,y,0) \equiv z_0(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$