2.1

4.解：(1) $\int_1^{+\infty} x^s e^{-x} dx \quad (a \le s \le b)$

设 $c = \max\{|a|, |b|\}$ 又∵ $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ 在关于 $s \in [a,b]$

∴有 $(x^s) \le x^c$ 上是一致收敛的

且 $\int_1^{+\infty} \frac{x^c}{e^x} dx$ 也是一致收敛的

∴有 $\int_1^{+\infty} x^s e^{-x} dx \quad (a \le s \le b)$ 是一致收敛的

(3) $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-tx^2} dx \quad (0 < t_0 \le t \le +\infty)$

由于 $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx$ 在 $0 < t_0 \le t \le +\infty)$ 上收敛为一致收敛

且 x^{2n} 与 t 无关 则其收敛为一致收敛

注：也可证 $\cancel{\int_0^{+\infty} x^{2n} \cdot e^{-(t-t_0)x^2}}$

$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-t_0 x^2} dx$ 为一致~~连续~~收敛. 再加上 $\int_0^{+\infty} e^{-(t-t_0)x^2} dx$.

(5): $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos tx}{1+x^4} dx \quad (0 \le t < +\infty)$

令 $f(x,t) = \cos tx \le 1 \quad t \in [0, +\infty)$ 为有界

$g(x,t) = \frac{x^2}{1+x^4} \le \frac{1}{x^2}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t) dx$ 为一致连续收敛

∴有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos tx}{1+x^4} dx \quad (0 \le t < +\infty)$ 为一致连续收敛

(7) $\int_1^{+\infty} e^{-tx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx \quad (0\le t<+\infty)$

设 $e^{-tx}\cos x$ 为 $g(x,t)$ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 为 $f(x,t)$

$\because$ 有 $\int_1^{+\infty} g(x,t)dx$ 在 $(0\le t<+\infty)$ 范围内为 $[1,+\infty)$ 上有界

且有 $f(x,t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t)=0$

$\therefore$ 有 反常积分 $\int_1^{+\infty} e^{-tx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ 为收敛

(9) $\int_1^{+\infty} x^{1-y}dx \quad (0<y<+\infty)$

当 $y\in(0,2]$ 有：$\int_1^{+\infty} x^{1-y}dx$ 不收敛 $y\in(2,+\infty)$ 收敛

当 $y\in[b,+\infty)$ 有：$\int_1^{+\infty} x^{1-y}dx$ 一致收敛 $b>2$

2.2

1.(1) $\lim\limits_{a\to0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

$=\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}-x\,dx+\int_0^1 x\,dx$

$=1$

(2) $\lim\limits_{a\to0}\int_0^3 x^2\cos ax\,dx=\int_0^3 x^2dx=9$

2. (1) $F(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$

$F'(x)=\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy^2})dy+e^{-x^5}\cdot 2x-e^{-x^3}$

$=\int_x^{x^2}-y^2e^{-xy^2}dy+2xe^{-x^5}-e^{-x^3}$

(2) $F(y)=\int_{a+y}^{b+y}\frac{\sin yx}{x}dx$

$$F'(y)=\int_{a+y}^{b+y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin yx}{x}\right)dx+\frac{\sin[y(b+y)]}{(b+y)}-\frac{\sin[y(a+y)]}{a+y}$$

$$=\int_{a+y}^{b+y}\frac{\cos yx}{x}\cdot x\,dx+\frac{\sin[yb+y^2]}{b+y}-\frac{\sin[ya+y^2]}{a+y}$$

$$=\int_{a+y}^{b+y}\cos yx\,dx+\frac{\sin(yb+y^2)}{b+y}-\frac{\sin(ya+y^2)}{a+y}$$

$$\frac{1}{y}\sin yx\Big|_{a+y}^{b+y}+\frac{\sin(by+y^2)}{b+y}-\frac{\sin(ya+y^2)}{a+y}$$

$$=\sin(y^2+by)\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{b+y}\right]-\sin(y^2+ay)\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{a+y}\right]$$

(3): ~~F(t)=~~

$$F(t)=\int_0^t\frac{\ln(1+tx)}{x}dx$$

$$F'(t)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\ln(1+tx)}{x}\right]dx+\frac{\ln(1+t^2)}{t}$$

$$=\int_0^t\frac{1}{1+tx}dx+\frac{\ln(1+t^2)}{t}$$

$$=\frac{1}{t}\ln(1+tx)\Big|_0^t+\frac{1}{t}\ln(1+t^2)=\frac{2}{t}\ln(1+t^2)$$

(4) $F(t)=\int_0^t f(x+t,x-t)dx\quad f\in C^1$

$$F'(t)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}[f(x+t,x-t)\,dx+f(2t,0)$$

$$=\int_0^t(f_1'-f_2')dx+f(2t,0)$$

$$=\int_0^t f_1'(x+t,x-t)-f_2'(x+t,x-t)\,dx+f(2t,0)$$