《微积分A2》第二十五讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年05月13日

D'Alembert 判别法和 Cauchy 根值判别法，本质上将正项级数与某个收敛的几何级数相比较．换言之，如果能用这两个判别法判定正项级数 $\sum a_n$ 收敛的话，那么级数 $\sum a_n$ 收敛至少与某个几何级数 $\sum q^n$ $(0 < q < 1)$一样快．以下介绍的 Raabe 判别法，则可用于判别一类正项级数的收敛性，其收敛速度大致与级数 $\sum \frac{1}{n^\rho}$ $(\rho > 1)$ 相当．

一个引理

Lemma

对于两个正项级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$，如果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \forall n \ge n_0,$$

其中 n_0 为某个正整数，那么以下结论成立：

(i) 若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛；

(ii) 若 $\sum a_n$ 发散，则 $\sum b_n$ 发散.

参见课本第246页习题5.2题4.

Raabe 判别法的导入

考虑正项级数 $\sum a_n$. 已知对任意 $\rho > 1$, 级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\rho}$ 收敛. 因此根据上述引理知级数 $\sum a_n$ 收敛, 如果存在正数 $\rho > 1$, 且对于充分大的正整数 $n \geq n_0$, 如下条件成立

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\frac{1}{(n+1)^\rho}}{\frac{1}{n^\rho}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\rho$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\rho - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\rho - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Theorem

定理: 考虑正项级数 $\sum a_n$.

(i) 假设存在正数 $\rho > 1$, 使得

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \rho, \quad \forall n \geq n_0,$$

则正项级数 $\sum a_n$ 收敛.

(ii) 若

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \quad \forall n \geq n_0,$$

则正项级数 $\sum a_n$ 发散.

注: Raabe, Joseph Ludwig, 1801-1859, 瑞士人.

例子

例: 设 $\alpha > 0$, 判断如下级数的收敛性

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(n-n+1)|}{n!}.$$

解: 记上述级数的一般项为 a_n, 即

$$a_n = \frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(n-n+1)|}{n!},$$

则 $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)|}{(n+1)!}}{\frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)|}{n!}} = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \to 1.$$

故 D'Alembert 判别法或 Cauchy 判别法失效.

例子，续

考虑应用 Raabe 判别法．当 $n > \alpha$ 时，

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right)$$

$$= n\left(\frac{n+1-(n-\alpha)}{n-\alpha}\right) = \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha} > 1+\alpha > 1.$$

故由 Raabe 判别法可知级数 $\sum a_n$ 收敛．解答完毕．

证明：假设

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq\rho>1,\quad \forall n\geq n_0.$$

取 $r\in(1,\rho)$. 熟知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1}{\frac{1}{n}}=r<\rho.$$

故存在 $n_1\geq n_0$, 使得

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1}{\frac{1}{n}}<\rho,\quad \forall n\geq n_1.$$

于是

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq\rho>\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1}{\frac{1}{n}},\quad \forall n\geq n_1,$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^r,\quad \forall n\geq n_1,$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{\frac{1}{(n+1)^r}}{\frac{1}{n^r}},\quad \forall n\geq n_1.$$

由于级数 $\sum\frac{1}{n^r}$ 收敛，故由引理知 $\sum a_n$ 收敛. 结论(i)得证. 当下列条件成立时

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1,\quad \forall n\geq n_0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq n_0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}, \quad \forall n \geq n_0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \geq n_0,$$

由于级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散, 故由引理知正项级数 $\sum a_n$ 发散. 证毕.

Raabe 判别法的极限形式

Theorem

定理: 考虑正项级数 $\sum a_n$. 假设极限

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

存在, 记作 a.

(i) 若 $a > 1$, 则级数 $\sum a_n$ 收敛;

(ii) 若 $a < 1$, 则级数 $\sum a_n$ 发散;

(iii) 若 $a = 1$, 则级数 $\sum a_n$ 的收敛性尚不能确定.

证明: 直接由 Raabe 判别法得到上述结论. □

以下举例说明，当

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=1$$

时，正项级数 $\sum a_n$ 的收敛性不能确定．考虑正项级数 $\sum_{n\geq 2} a_n$，其中 $a_n=\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$．已证当 $\alpha>1$ 时，级数收敛，当 $\alpha\leq 1$ 时，级数发散．考虑

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^\alpha}}-1\right)$$

$$=n\left(\frac{(n+1)[\ln(n+1)]^\alpha}{n(\ln n)^\alpha}-1\right)=(n+1)\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^\alpha-n.$$

例子，续

由于

$$\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^{\alpha}=\left[\frac{\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right]^{\alpha}$$

$$=\left[1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right]^{\alpha}=\left[1+\frac{1}{n\ln n}+O(\frac{1}{n^2\ln n})\right]^{\alpha}$$

$$=1+\frac{\alpha}{n\ln n}+O(\frac{1}{n^2\ln n}),$$

$$\text{故 } n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=(n+1)\left[1+\frac{\alpha}{n\ln n}+O(\frac{1}{n^2\ln n})\right]-n$$

$$=1+\frac{\alpha}{\ln n}+O(\frac{1}{n\ln n})\to 1.$$

这说明当极限为 1 时，级数的收敛性尚不确定.

例: 判断如下正项级数的收敛性

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.$$

解: 先尝试用 D'Alembert 判别法. 记级数的一般项为 u_n, 则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2(n+1))!!(2n+3)}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}\to 1.$$

故 D'Alembert 比值判别法或 Cauchy 根值判别法失效. 考虑

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{(2n+3)(2n+2)}{(2n+1)^2}-1\right)$$

例子续

$$= \frac{n[(2n+3)(2n+2)-(2n+1)^2]}{(2n+1)^2}$$

$$= \frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2} \to \frac{3}{2} > 1.$$

根据 Raabe 判别法知所考虑的级数收敛. 解答完毕.

无穷乘积(可略去)

Definition

定义: 给定数列 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$, (i) 称符号

$$\prod_{n\geq 1} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots \text{ 或 } \prod_{n=1}^{+\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$$

为一个无穷乘积; (ii) 称 $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n$ 为前 n 项部分乘积; (iii) 若部分乘积序列 $\{P_n\}$ 有有限极限 P, 且 $P \neq 0$, 则称无穷乘积 $\prod_{n\geq 1} p_n$ 收敛, 并记作 $\prod_{n\geq 1} p_n = P$; (iv) 若部分乘积序列 $\{P_n\}$ 发散, 或者收敛于零, 则称无穷乘积 $\prod_{n\geq 1} p_n$ 发散.

注: 之所以无穷乘积收敛排除了部分乘积 $\{P_n\}$ 收敛于零的情形, 是因为这样有利于表述无穷乘积与无穷级数的对应关系. 收敛于零的情形将单独讨论.

例一: 考虑无穷乘积 $\prod_{n\geq 2}(1-\frac{1}{n^2})$. 它的部分乘积为

$$P_{n-1}=\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})=$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}.$$

因此无穷乘积 $\prod_{n=2}^{+\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ 收敛, 且 $\prod_{n=2}^{+\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}$.

Example

例二: 记 $p_n = \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$, 则无穷乘积 $\prod_{n\geq 1} p_n$ 发散到零. 因为部分乘积

$$P_n = p_1 p_2 \cdots p_n = \frac{1}{2^n} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

例三: 证明如下无穷乘积收敛

$$\prod_{n\geq 1}\cos\frac{x}{2^n},\quad 0<x<\pi.$$

证明: 记

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}.$$

于上式两边同乘以 $\sin\frac{x}{2^n}$ 得

$$P_n\sin\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}=\cdots=\frac{1}{2^n}\sin x.$$

由此可得

$$P_n = \frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \to \frac{\sin x}{x},\ n \to +\infty.$$

这就证明了无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{2^n}$ 收敛，其中 $0 < x < \pi$，且

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

Viete 无穷乘积公式

于公式

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$$

中取 $x = \frac{\pi}{2}$ 得 $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots = \frac{2}{\pi}$. 由于 $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos a}$, 故得到如下 Viete 无穷乘积公式

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

这是最早的两个重要的无穷乘积之一. 另一个是以下要介绍的Wallis 无穷乘积公式.

注: Francois Viete, 1540-1603, 法国人.

回忆 Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}.$$

往下我们将 Wallis 公式写作无穷乘积形式. 由于

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdots(2n)\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$= \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

注: Wallis John, 1616-1703, 英国人.

$$= 2\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$$

$$\cdots\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{2n}{2n+1}$$

$$= 2\left[\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k-1)^2}\right)\right]\frac{2n}{2n+1}.$$

因此Wallis 公式也可写作

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{(2k-1)^2}\right).$$

Wallis 公式还可以写作另外一种无穷乘积. 由公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}.$$

可知

$$\frac{2}{\pi}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2(2n+1)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

$$\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right).$$

无穷乘积收敛的必要条件

Theorem

定理: 无穷乘积 $\prod_{n\geq1} p_n$ 收敛的必要条件是 $p_n \to 1,\ n \to +\infty.$

Proof.

证: 假设无穷乘积 $\prod_{n\geq1} p_n$ 收敛. 依定义 $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k \to P$, 且 $P \neq 0$. 于是 $p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1.$ □

注一: 由上述定理知, 在无穷乘积 $\prod_{n\geq1} p_n$ 收敛的情况下, 对于充分大的 n, $p_n > 0$. 因此若仅考虑无穷乘积 $\prod_{n\geq1} p_n$ 收敛性, 可假设 $p_n > 0,\ \forall n \geq 1.$

注二: 常记 $p_n = 1 + a_n$, 且 $a_n > -1$, 则无穷乘积 $\prod_{n\geq1}(1 + a_n)$ 收敛的必要条件是 $a_n \to 0.$

Theorem

定理: (i) 无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ $(a_n > -1)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 无穷级数 $\sum_{n\geq 1}\ln(1+a_n)$ 收敛; (ii) 假设级数 $\sum_{n\geq 1}\ln(1+a_n)$ 收敛于 S, 则无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛于 e^S.

Proof.

证: 记 $P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$, 则 $\ln P_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)$.

(i) 无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛, 即 $P_n\to P(>0)\iff$ $\ln P_n\to\ln P$, 即 $\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)\to\ln P$. 因此无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛 $\iff$ 级数 $\sum_{n\geq 1}\ln(1+a_n)$ 收敛.

(ii) 当级数 $\sum_{n\geq 1}\ln(1+a_n)$ 收敛, 且 $\sum_{n\geq 1}\ln(1+a_n)=S$ 时, 无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛到 $P=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ $=\lim_{n\to+\infty}e^{\sum_{n\geq 1}\ln(1+a_n)}=e^S$. $\square$

Theorem

定理: 设 $a_n > 0$ $(-1 < a_n < 0)$, $\forall n \geq 1$, 则无穷乘积 $\prod_{n\geq1}(1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 级数 $\sum_{n\geq1} a_n$ 收敛.

Proof.

证明: 当 $\prod_{n\geq1}(1+a_n)$ 收敛或 $\sum_{n\geq1} a_n$ 收敛时, $a_n \to 0$. 此时

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

因此正(负)项级数 $\sum_{n\geq1} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \sum_{n\geq1} \ln(1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow \prod_{n\geq1}(1+a_n)$ 收敛. $\square$

例子

Example

例: (i) 由于级数 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ 发散, 故无穷乘积 $\prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 和 $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ 均发散.

(ii) 因为级数 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故无穷乘积 $\prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 和 $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 均收敛, 并且由前例知 $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

Theorem

定理: 假设 $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < +\infty$, 则无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 与无穷级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 同时收敛或发散.

Proof.

证明: 由假设 $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < +\infty$ 知 $a_n \to 0$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

由此可见级数 $\sum_{n\geq 1}[a_n - \ln(1+a_n)]$ 收敛. 故 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛 $\iff \sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$ 收敛 $\iff \prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛. $\square$

注: 当 $\sum_{n\geq 1} a_n^2 = +\infty$ 时, 上述结论不再成立, 即无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 与无穷级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 不再同时收敛. 反例如下.

定义

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & n = 2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & n = 2k. \end{cases}$$

可以证明 $\sum_{n\geq 2} a_n$ 和 $\sum_{n\geq 2} a_n^2$ 均发散, 但 $\prod_{n\geq 2}(1+a_n)$ 收敛.

证明留作补充习题.

Theorem

定理: 假设 $-1 < a_n < 0$, $\forall n \geq 1$, 且 $\sum_{n\geq 1} a_n = -\infty$, 则无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 发散到零.

Proof.

证: 已证当 $-1 < a_n < 0$, $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛. 因此 $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$ 发散 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} a_n$ 发散. 由假设 $-1 < a_n < 0$, 且 $\sum_{n\geq 1} a_n = -\infty$, 故 $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n) = -\infty$. 因此无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 发散到零. $\square$

例: 设$\alpha > -1$, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=0.$$

证明:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$=\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3}\cdots\frac{\alpha-n+1}{n}$$

$$=\left(\frac{\alpha+1}{1}-1\right)\cdot\left(\frac{\alpha+1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{\alpha+1}{3}-1\right)$$

$$\cdots\left(\frac{\alpha+1}{n}-1\right)$$

例子续

$$= (-1)^n \left(1-\frac{\alpha+1}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{\alpha+1}{3}\right)$$

$$\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right) = (-1)^n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right).$$

由于 $\alpha > -1$, 故 $\alpha+1>0$, 从而级数 $\sum_{n\geq 1} -\frac{\alpha+1}{n} = -\infty$. 根据上述定理知无穷乘积 $\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)$ 发散到零. 此即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = 0.$$

证毕. $\square$

无穷乘积发散到零的情形二

Theorem

定理: 若 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ 发散, 则无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 发散到零.

Proof.

证明: 由假设 $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ 发散, 以及$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$ 可知级数 $\sum_{n\geq 1}[a_n - \ln(1+a_n)] = +\infty$. 再根据假设 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛知 $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n) = -\infty$. 故无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 发散到零. □

例子

Example

例: 设 $\alpha > 0$. 讨论无穷乘积 $\prod_{n\geq1}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha})$ 的收敛性.

解: 若记 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, 则级数 $\sum_{n\geq1} a_n$ 为Leibniz 级数, 收敛.

(i) 当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n\geq1} a_n^2 = \sum_{n\geq1} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ 收敛, 由充要条件三知 $\prod_{n\geq1}(1+a_n)$ 与级数 $\sum_{n\geq1} a_n$ 同时收敛或发散. 因此 $\prod_{n\geq1}(1+a_n)$ 收敛.

(ii) 当 $\alpha \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n\geq1} a_n^2 = \sum_{n\geq1} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ 发散. 由无穷乘积发散到零的情形二的结论知 $\prod_{n\geq1}(1+a_n)$ 发散到零.

课本第246习题5.2：8.

课本第260页习题5.4：1，2.

注：题2(6)中 x 应加以限制 $x>0$.

补充习题：定义

$$a_n=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{k}}, & n=2k-1,\\ \frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}, & n=2k.\end{cases}$$

证明 $\sum_{n\geq 2} a_n$ 和 $\sum_{n\geq 2} a_n^2$ 均发散，但 $\prod_{n\geq 2}(1+a_n)$ 收敛.