1. 标准形：

$$\max \ z = 11x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 16$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 4$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

单纯形表：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	-1	2	1	0	0	4
x_4	5	2	0	1	0	16
x_5	2	-2	0	0	1	4
	11	4	0	0	0	z

↓

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	6
x_4	0	$\frac{9}{2}$	0	1	$-\frac{5}{2}$	6
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
	0	$\frac{19}{2}$	0	0	$-\frac{11}{2}$	$z-22$

↓

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	4
x_2	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{3}$
	0	0	0	$-\frac{19}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$z-\frac{104}{3}$

利用等式约束 $x_1 + \frac{1}{9}x_4 + \frac{2}{9}x_5 = \frac{3}{8}$

构造割平面约束 $-\frac{1}{9}x_4 - \frac{2}{9}x_5 \leq -\frac{2}{3}$

单纯形表:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	4
x_2	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{8}{3}$
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	1	$-\frac{2}{3}$
	0	0	0	$-\frac{19}{9}$	$-\frac{2}{9}$	0	$z-\frac{104}{3}$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	-1	0	6	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	3
x_1	1	0	0	0	0	1	2
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{9}{2}$	3
	0	0	0	-2	0	-1	$z-34$

因而 $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=0$, $x_4=0$ $x_5=3$, $x_6=0$ 时, 取最优解34

2. 求解松弛问题 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=14 \\ x_1+0.5x_2=4.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{13}{4} \\ x_2=\frac{5}{2} \end{cases}$. 求得 $z=\frac{59}{4}$

增加条件 $x_1\le 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow z=\frac{43}{3}$ ①

增加条件 $x_1\ge 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow z=14$ ②

选取 ① 分枝, 增加条件 $x_2\le 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \end{cases} \Rightarrow z=13$

增加条件 $x_2\ge 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{5}{2} \\ x_2=3 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{27}{2}$

因此，得原问题最优解 $z=14$． $x_1=4$， $x_2=1$

3．将边界区域用方程表示为：

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-1 \\ 2x_1+x_2=3 \\ x_1+x_2=3 \\ x_1-x_2=1 \end{cases}$$

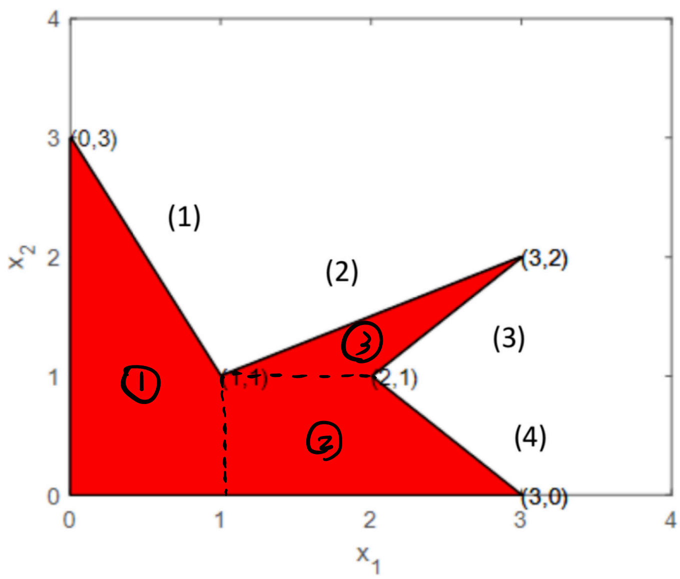
考虑 y_i， $i=1,2,3,4$， 上述方程约束可表示为

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 3+y_1 M & (1) \\ -x_1+2x_2 \le 1+y_2 M & (2) \\ x_1-x_2 \le 1+y_3 M & (3) \\ x_1+x_2 \le 3+y_4 M & (4) \end{cases}$$

其中，$y_i=0,1$． M 为足够大的正数

由等式意义可知，$y_i=0$ 时，约束起作用． $y_i=1$ 时，约束不起作用

划分原可行域：



$x_1 \le 1$ 时， 需满足 $y_1=0$． $y_2=1$

$x_1>1$ 时，需满足 $y_1=1$． $y_2=0$

$x_2 \le 1$ 时，需满足 $y_3=1$． $y_4=0$

$x_2>1$ 时，需满足 $y_3=0$ $y_4=1$

因而上述情况可统一表示为

$$\begin{cases} y_1+y_2=1 \\ y_3+y_4=1 \end{cases}, \quad y_i=0,1$$

综上，混合整数线性规划形式为：

$\max \quad x_1+x_2$

s.t. $\quad 2x_1+x_2 \le 3+y_1 M$

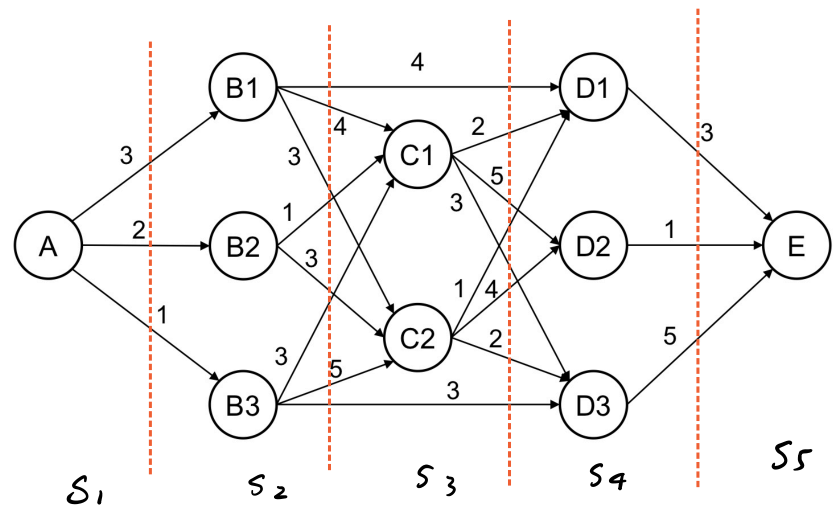
$\quad -x_1+2x_2 \le 1+y_2 M$

$\quad x_1-x_2 \le 1+y_3 M$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 + y_4 m \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_3 + y_4 = 1 \\ x_i \geq 0. \quad i = 1,2 \\ y_i = 0,1. \quad i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

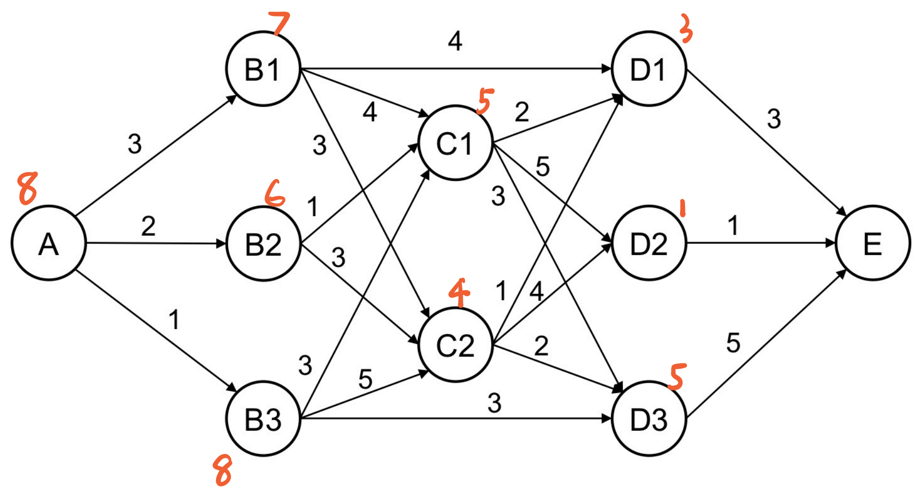
4.

(1).



如上图表示为5个阶段

(2).



根据逆推法，最短路径为 $A \to B_2 \to C_1 \to D_1 \to E$

5. 逆序求解. $f_4(S_4) = 0$. 阶段指标 $8x_1^2$, $4x_2^2$, x_3^3.

$$f_3(s_3) = \max_{0 \le x_3 \le \frac{s_3}{10}} x_3^3 \Rightarrow u_3^*(s_3) = s_3.\quad f_3(s_3) = \frac{s_3^3}{1000}$$

$$f_2(s_2) = \max_{0 \le x_2 \le s_2} 4x_2^2 + \frac{(s_2 - x_2)^3}{1000}$$

考虑函数 $f_2(s_2, x_2) = 4x_2^2 + \frac{(s_2-x_2)^3}{1000}$.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 8x_2 - \frac{3}{1000}(s_2 - x_2)^2.$$

由于目标是凸函数，最大值在边界处取到，

故 $f_2(s_2) = \max\left\{\frac{s_2^3}{1000}, 4s_2^2\right\}$.

由此可得 $f_2(s_2) = \begin{cases} \frac{s_2^3}{1000}, & s_2 \ge 4000 \\ 4s_2^2 & 0 \le s_2 < 4000 \end{cases}$. $u_2(s_2) = \begin{cases} 0 & s_2 \ge 4000 \\ s_2, & 0 \le s_2 < 4000 \end{cases}$

$$f_1(s_1) = \max_{0 \le x_1 \le \frac{b}{2}} 8x_1^2 + f_2(b - 2x_1)$$

$$= \max_{0 \le x_1 \le \frac{b}{2}} \begin{cases} 8x_1^2 + \frac{(b-2x_1)^3}{1000}, & 0 \le 2x_1 \le b - 4000 & ① \\ 8x_1^2 + 4(b-2x_1)^2 & b - 4000 \le 2x_1 \le b & ② \end{cases}$$

当 $b \le 4000$ 时，考虑约束②

同理，可知 $f_1(s_1) = \max\{4b^2, 2b^2\} = 4b^2$.

此时，$x_1 = 0$. $x_2 = b$. $x_3 = 0$

$b > 4000$ 时，考虑约束①.②.

同理可知 $f_1(s_1) = \max\left\{\frac{b^3}{1000}, 2b^2\right\} = \frac{b^3}{1000}$

综上，$z = \begin{cases} 4b^2, & 0 < b < 4000 \\ \frac{b^3}{1000} & b \ge 4000 \end{cases}$ $u = \begin{cases} u_1 = 0 & u_2 = b,\ u_3 = 0 \\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = \frac{b}{10} \end{cases}$