# 《微积分A2》第1周第3课

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年02月17–21日

**Theorem**

(i) 唯一性. 若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 处有极限, 则极限值唯一.

(ii) 保号性. 若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 处有极限, 且极限值大于零, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $f(z) > 0$, $\forall z \in B^\circ(z_0, \delta)$.

(iii) 保序性. 若 $f(z) \le g(z)$, $\forall z \in B^\circ(z_0, r)$, 且 $f(z) \to A$, $g(z) \to B$, $(z \to z_0)$, 则 $A \le B$.

(iv) 有界性. 若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 处有极限, 则 $f(z)$ 在 $z_0$ 的某个去心邻域有界, 即存在 $M > 0$, $\delta > 0$, 使得 $|f(z)| \le M$, $\forall z \in B^\circ(z_0, \delta)$.

证明同一元函数情形. 略.

**Theorem**

设 $f(z) \to A$, $g(z) \to B$, $(z \to z_0)$, 则当 $z \to z_0$ 时,

(i) $[f(z) \pm g(z)] \to A \pm B$;

(ii) $[f(z)g(z)] \to AB$;

(iii) $\frac{f(z)}{g(z)} \to \frac{A}{B}$ (补充假设 $B \neq 0$).

证明同一元函数情形. 略.

# 复合函数极限

**Theorem**

定理: 设 (i) f: $B^\circ(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, 且 $f(x) \to y_0$, $(x \to x_0)$,

(ii) g: $B^\circ(y_0, r) \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, 且 $g(y) \to L$, $(y \to y_0)$,

(iii) $f(x) \neq y_0$, $\forall x \in B^\circ(x_0, r)$,

则当 $x \to x_0$ 时, $g(f(x)) \to L$.

证明同一元函数情形. 略.

注: 条件 (iii) 是为了为了保证复合函数 $g(f(x))$ 在 $x_0$ 的去心邻域有意义.

例：课本第16页例1.3.5. 判断函数

$$f(x,y)=\frac{e^{x^3+y^3}-1}{x^2+y^2}$$

在原点 $(0,0)$ 处极限的存在性. 极限存在时，求这个极限值.

解：记 $h=h(x,y)=x^3+y^3$，则 $h(x,y)\to 0$，$(x,y)\to(0,0)$，并且函数 $f$ 可写作

$$f(x,y)=\frac{e^h-1}{h}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

熟知 $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$. 进一步由不等式

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le|x|\frac{x^2}{x^2+y^2}+|y|\frac{y^2}{x^2+y^2}\le|x|+|y|,$$

由此可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left[\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}\right]\left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right]$$

$$= 1\cdot 0 = 0.$$

解答完毕.

例: 课本第16页例1.3.6. 求极限 $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$, 其中

$$f(x,y)=(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}.$$

解: 记 $\delta=x+y-1$, 则当 $(x,y)\to(1,0)$ 时, $\delta\to 0$. 进一步

函数 f 可写作 $f(x,y)=(1+\delta)^{\frac{\delta+2}{\delta}}$. 于是

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=\lim_{\delta\to 0}\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{\delta+2}=e^2.$$

解答完毕.

例一：求极限

$$\lim_{x\to 0,|y|\to+\infty}(1+x)^{\frac{1+y}{xy}}.$$

解：由于

$$(1+x)^{\frac{1+y}{xy}}=\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1+y}{y}},$$

且 $(1+x)^{\frac{1}{x}}\to e$, $(x\to 0)$ 以及 $\frac{1+y}{y}\to 1$, $(|y|\to+\infty)$，因此所求极限存在，且等于 e. 也通过取对数的方法证明. 记

$$f(x,y)=(1+x)^{\frac{1+y}{xy}}.$$

取对数得

$$\ln f(x,y) = \frac{1+y}{y}\frac{1}{x}\ln(1+x).$$

于是

$$\lim_{x\to 0,|y|\to+\infty} \ln f(x,y) = \left[\lim_{|y|\to+\infty}\frac{1+y}{y}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]$$

$$= 1\cdot 1 = 1.$$

故

$$\lim_{x\to 0,|y|\to+\infty} f(x,y) = \lim e^{\ln f(x,y)} = e^{\lim \ln f(x,y)} = e^{1} = e.$$

解答完毕.

回忆极限 $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 的定义中，要求函数 $f(z)$ 的定义域 $D$ 包含点 $z_0$ 的某个去心邻域. 这个要求可以减弱为，仅要求 $z_0$ 是 $D$ 的聚点 (accumulation points)，即 $D$ 中存在点列 $z_k \in D$ 收敛于 $z_0$，即 $z_k \to z_0$. 聚点也称为极限点. 注意聚点 $z_0$ 不必属于 $D$.

**Definition**

定义: 设函数 $f(z)$ 的定义域为 $D$, $z_0$ 是 $D$ 的一个聚点. 若存在数 $L$, 使得对任意正数 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|f(z) - L| < \varepsilon$, $\forall z \in B^\circ(z_0, \delta) \cap D$, 则同样称函数 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时有极限值 $L$, 记作 $f(z) \to L$, 当 $z \to z_0$, 或 $\lim_{z\to z_0, z\in D} f(z) = L$.

<u>例</u>: 课本第23页习题1.3题1(10). 设

$$f(x,y)=\frac{xy-\sin(xy)}{xy-xy\cos(xy)}.$$

判断函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处是否存在极限. 若存在, 试求出极限值.

<u>解</u>: 易见函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D$ 可表为 $D\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, xy\neq 2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. 显然 $D$ 不包含原点的任何去心邻域, 但原点是 $D$ 的聚点. 下面考虑函数 $f$ 在原点极限的存在性. 记 $g(u)=\frac{u-\sin u}{u-u\cos u}$, 则 $f(x,y)=g(xy)$.

# 例子续

对函数 $g(u)$ 的分子分母在 $u=0$ 处作 Taylor 展开

$$u-\sin u=u-\left(u-\frac{u^3}{3!}+O(u^5)\right)=\frac{u^3}{3!}+O(u^5),$$

$$u-u\cos u=u-u\left(1-\frac{u^2}{2!}+O(u^4)\right)=\frac{u^3}{2!}+O(u^5).$$

于是

$$g(u)=\frac{\frac{u^3}{3!}+O(u^5)}{\frac{u^3}{2!}+O(u^5)}=\frac{\frac{1}{3!}+O(u^2)}{\frac{1}{2!}+O(u^2)}\to\frac{1}{3},\quad u\to 0.$$

由此可见 $f(x,y)=g(xy)\to\frac{1}{3}$，当 $(x,y)\to(0,0)$. 解答完毕.

**Definition**

定义: 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的一个去心邻域有定义. 若任意固定 $y \neq y_0$, 且 $|y-y_0|$ 很小, 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 其极限值是 $y$ 的函数, 记作 $\phi(y)$. 进一步假设 $\lim_{y\to y_0}\phi(y)$ 存在, 极限值记作 $A$, 则称函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处先 $x$ 后 $y$ 的累次极限存在且等于 $A$, 记作 $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A$. 类似可定义先 $y$ 后 $x$ 的极限 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=B$, 假设它存在.

# 重极限, 累次极限个数

**Definition**

为区别计, 之前定义的极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 称为重极限或全面极限.

注: 类似可以定义三元函数的累次极限, 以及更多变元的累次极限. 显然

$$2 \text{ 元函数有 } 2! \text{ 个累次极限;}$$
$$3 \text{ 元函数有 } 3! \text{ 个累次极限;}$$
$$\vdots$$
$$n \text{ 元函数有 } n! \text{ 个累次极限.}$$

**Example**

例一：设

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0, \\ 0, & y=0. \end{cases}$$

不难证明累次极限 $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}$ 存在且极限值为零．但另一累次极限 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$ 不存在．进一步全面极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在且为零．这个例子表明，一个累次极限存在 $\not\Rightarrow$ 其他累次极限存在.

例二: 设 $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, 其定义域为 $D=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. 之前已证, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的全面极限不存在. 现考察累次极限. 不难证明

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1.$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

这个例子表明

两个累次极限都存在 $\not\Rightarrow$ 它们的极限值相等,

$\not\Rightarrow$ 重极限存在.

例三: 设

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$

易证函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处, 两个累次极限都不存在, 但重极限存在. 这不难根据估计式 $|f(x,y)|\leq|x|+|y|$ 看出. 这个例子表明, 重极限存在 $\not\Rightarrow$ 累次极限存在.

**Theorem**

定理: (i) 若以下三个极限均存在

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),\quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y),$$

则它们的极限值均相等;

(ii) 若两个累次极限存在, 但极限值不等, 则重极限不存在.

结论(i)的证明留作习题, 见课本第23页习题1.3题4(2).

结论(ii)显然是结论(i)的直接推论.