# 第2章　函数的极限与连续

学习材料（5）-1

## 1　函数

## 2　函数极限

## 3　连续函数的概念及连续函数的性质

**定义1** 设$f$是定义在$x_0$某个邻域上的函数。

1. 如果

$$\underline{\underline{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),}}$$

即

$$\underline{\underline{\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\delta>0,\ \ 当|x-x_0|<\delta时，有|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,}}$$

则称$\underline{f在x_0处连续}$；

2. 如果

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

即

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\delta>0,\ \ 当x_0-\delta<x\le x_0时，有|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称$\underline{f在x_0处左连续}$；

3. 如果

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

即

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\delta>0,\ \ 当x_0\le x<x_0+\delta时，有|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称$\underline{f在x_0处右连续}$。

**例1** 设$f$是初等函数，$x_0\in D(f)$，则$f$在$x_0$处连续。

**例2** 设$f:(a,b)\to R$是下凸函数，$x_0\in(a,b)$，则$f$在$x_0$处连续。

**例3** 设$f(x)$和$g(x)$在$x_0$处连续，$f(x_0)>0$，则

$$\ln f(x),\ e^{g(x)}, f(x)^{g(x)}$$

在$x_0$处连续。

例4 $f$在$x_0$处连续$\Longleftrightarrow f$ 在$x_0$处左连续、右连续.

定义2 设$f$是定义在$x_0$某个邻域上的函数。如果$f$在$x_0$处不连续，则称$x_0$为$f$的间断点。

1. 若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，且$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，但$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，则称$x_0$为$f$的可去间断点。

若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，但$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称$x_0$为$f$的跳跃间断点。

可去间断点和跳跃间断点称为第一类间断点。

2. 若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在，则称$x_0$为$f$的第二类间断点。

注 若$x_0$为$f$的可去间断点，可令

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当} x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{当} x = x_0. \end{cases}$$

则$F$在$x_0$处连续。

例5

(1). 设

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

则极限$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$不存在，故0为$f$的第二类间断点。（画图）

(2). 设

$$f(x) = [x] \quad (x \geq 0).$$

则对$n \in Z_+$，有$\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = n,\quad \lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n-1$，故$n$为$f$的跳跃间断点。（画图）

(3). 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{当} x \neq 0, \\ 3, & \text{当} x = 0. \end{cases}$$

则$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(0)$，故0为$f$的可去间断点。（画图）

在$x_0$处连续。

## 4 区间上连续函数的性质

设$I$是一个开区间。若$f: I \to R$在$I$中每个点都连续，则称$f$在$I$上连续，并记$f \in C(I)$. 记号$f \in C[a,b]$表

示$f$在开区间$(a,b)$内处处连续，在点$a$右连续，在点$b$左连续。

# 定理1（有界-最值定理） 设$f\in C[a,b]$，则

1. $f$有界。

2. $\exists x_*$，$x^*\in[a,b]$，使得对$\forall x\in[a,b]$，有

$$f(x_*)\le f(x)\le f(x^*).$$

证：1. 反证法。若不然，$\forall n\in Z_+$，则$n$不是$f$的界，于是$\exists x_n\in[a,b]$，使得

$$|f(x_n)|>n,$$

从而得到数列$\{x_n\}\subset[a,b]$. 由Bolzano定理知，数列$\{x_n\}\subset[a,b]$有收敛的子列数列$\{x_{n_k}\}$. 记

$$\xi=:\lim_{k\to\infty}x_{n_k}.$$

由数列极限保号性的注释知，$\xi\in[a,b]$；再由$f$在$\xi$处连续知，

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\xi).$$

但这与

$$|f(x_{n_k})|>n_k\ge k,\quad\forall k\in Z_+$$

矛盾。该矛盾说明原假设不对，所以$f$有界。

2. 由1.知，集合$S=\{f(x)|x\in[a,b]\}$有界。因此由确界定理知，$S$有下确界$m$和上确界$M$. $\forall n\in Z_+$，则$M-\frac{1}{n}$不是$f$的上界，于是$\exists x_n\in[a,b]$，使得

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\le M,$$

从而得到数列$\{x_n\}\subset[a,b]$. 由Bolzano定理知，数列$\{x_n\}\subset[a,b]$有收敛的子列数列$\{x_{n_k}\}$. 记

$$x^*=:\lim_{k\to\infty}x_{n_k}.$$

由数列极限保号性的注释知，$x^*\in[a,b]$；再由$f$在$x^*$处连续知，

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x^*).$$

而

$$M-\frac{1}{k}\le M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\le M,\quad\forall k\in Z_+,$$

故由数列极限夹挤性得

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=M,$$

于是

$$f(x^*)=M.$$

同理$\exists x_*\in[a,b]$，使得$f(x_*)=m$. 所以对$\forall x\in[a,b]$，有

$$f(x_*)\le f(x)\le f(x^*).$$

## 定理2（零值定理） 设$f \in C[a,b]$，$f(a)f(b) < 0$，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f(\xi) = 0.$$

证明：不妨设$f(a) < 0,\quad f(b) > 0$. 记$a_1 = a,\quad b_1 = b$.

令$c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$，若$f(c_2) = 0$，则结论已得证。

若$f(c_2) < 0$，则令$a_2 = c_2$，$b_2 = b_1$; 若$f(c_2) > 0$，则令$a_2 = a_1$，$b_2 = c_2$. 即不论是哪种情况，均有$f(a_1) < 0,\quad f(b_1) > 0$，且$b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2}$.

令$c_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$，若$f(c_3) = 0$，则结论已得证。

若$f(c_3) < 0$，则令$a_3 = c_3$，$b_3 = b_2$; 若$f(c_3) > 0$，则令$a_3 = a_2$，$b_3 = c_3$. 即不论是哪种情况，均有$f(a_3) < 0,\quad f(b_3) > 0$，且$b_3 - a_3 = \frac{b_2-a_2}{2}$.

依次下去。若对某个闭区间$[a_i, b_i]$，取其中点$c_i$时使$f(c_i) = 0$，那么结论得证而不再分割下去，否则可得一列闭区间$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$满足

(1). $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n \in Z_+$；

(2). $b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$, $n \in Z_+$；

(3). $f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0\ n \in Z_+$.

由(1)和单调收敛定理知，数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛；由(2)知，数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛于同一极限值。记

$$\xi =: \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

于是$\xi \in [a,b]$. 由$f$在$\xi$处连续知，

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi), \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi).$$

由(3)和数列极限保号性知，

$$f(\xi) \le 0, \quad f(\xi) \ge 0,$$

所以

$$f(\xi) = 0.$$

再由$f(a)f(b) < 0$，知$\xi \ne a,\ \xi \ne b$，从而$\xi \in (a,b)$.

## 例1 设$f \in C[a,b]$. 若$f(a) > a,\quad f(b) < b$，证明$\exists \xi \in [a,b]$，使得$f(\xi) = \xi$.

证：令$g(x) =: f(x) - x,\quad x \in [a,b]$，则$g \in C[a,b]$. 而

$$g(a) = f(a) - a > 0, \quad g(b) = f(b) - b < 0,$$

故由零值定理知，存在$\xi \in [a,b]$，使得$g(\xi) = 0$，即

$$f(\xi) = \xi.$$

# 定理3（介值定理）

设$f \in C[a,b]$，$f(a) \neq f(b)$. 则对于介于$f(a)$和$f(b)$之间的任意一个实数$\mu$，存在$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = \mu$.

证：考察函数$g(x) = f(x) - \mu$. 则$g \in C[a,b]$，$g(a) \cdot g(b) < 0$. 于是根据零值定理知，存在$\xi \in (a,b)$，使得$g(\xi) = 0$，即$f(\xi) = \mu$.

# 例2

设$I$是$R$中的一个区间，$f \in C(I)$. 若$f$是单射，即当$x \neq \hat{x}$时，$f(x) \neq f(\hat{x})$. 证明$f$是严格单调函数。

证：反证法。若不然，则$f$不是严格增函数，也不是严格减函数，即$\exists x_1$，$x_2$，$x_3, x_4 \in I$，使得

$$x_1 < x_2, \quad x_3 < x_4, \text{ 但 } f(x_1) \geq f(x_2), \quad f(x_3) \leq f(x_4).$$

对$\forall t \in [0,1]$，定义$g(t) =: f(tx_1 + (1-t)x_3) - f(tx_2 + (1-t)x_4)$. （画图）。由复合函数连续性知，$g \in C[0,1]$. 而

$$g(1) = f(x_1) - f(x_2) \geq 0, \quad g(0) = f(x_3) - f(x_4) \leq 0,$$

故由零值定理知，存在$t_0 \in [0,1]$，使得$g(t_0) = 0$. 于是由$f$是单射知，

$$t_0 x_1 + (1-t_0)x_3 = t_0 x_2 + (1-t_0)x_4,$$

即

$$\underline{t_0(x_2 - x_1) + (1-t_0)(x_4 - x_3) = 0.}$$

但此式不可能成立，因为

$$x_2 - x_1 > 0, \quad x_4 - x_3 > 0, \quad t_0 \in [0,1].$$

所以$f$是严格单调函数。

# 例3（定理）

设$I$是$R$中的一个区间，$f \in C(I)$.

1. $R(f)$是一个区间，即若$y_1$，$y_2 \in R(f)$，$\mu$是介于$y_1$和$y_2$之间的任意一个实数，则$\mu \in R(f)$.
2. 若$f$是单射，则反函数$f^{-1} : R(f) \to I$连续。

证：1. 由$y_1$，$y_2 \in R(f)$知，存在$x_1$，$x_2 \in I$，使得$f(x_1) = y_1$，$f(x_2) = y_2$. 不妨$x_1 < x_2$. 因$I$是一个区间，故$[x_1, x_2] \subseteq I$；再由$f \in C(I)$知，$f \in C[x_1, x_2]$. 所以$\mu$是介于$f(x_1)$和$f(x_2)$之间的一个实数。由介值定理知，$\exists \xi \in [x_1, x_2]$，使得$\mu = f(\xi)$，因此$\mu \in R(f)$.

2. 由例2知，$f$是严格单调函数。不妨$f$是严格增函数，因此$f^{-1}$也是严格增函数。下证$\forall y_0 \in R(f)$，$f^{-1}$在$y_0$处连续。

记$x_0 = f^{-1}(y_0)$，则$f(x_0) = y_0$. 不妨$\exists \varepsilon_0 > 0$，使得$x_0 - \varepsilon_0$，$x_0 + \varepsilon_0 \in I$.

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$，则有

$$x_0 - \varepsilon_0 \leq x_0 - \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\} < x_0 < x_0 + \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\} \leq x_0 + \varepsilon_0,$$

故由$f$的单调性知，

$$f(x_0 - \varepsilon_0) \leq f(x_0 - \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\}) < f(x_0) < f(x_0 + \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\}) \leq f(x_0 + \varepsilon_0).$$

（画图）。取

$$\underline{\delta = \min\{f(x_0 + \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\}) - f(x_0),\ f(x_0) - f(x_0 - \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\})\}},$$

则$\delta > 0$，$\underline{\text{当}|y - y_0| < \delta\text{时}}$，

$$f(x_0 - \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\}) \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq f(x_0 + \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\}),$$

故由$f^{-1}$的单调性知，

$$x_0 - \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\} < f^{-1}(y) < x_0 + \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\},$$

从而

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon,$$

即

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon,$$

也即

$$\underline{|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon},$$

所以$f^{-1}$在$y_0$处连续。

## 5　一致连续

**例1** 设$I$是$R$中的一个区间，$f \in C(I)$，则$\forall x_0 \in I$，$\underline{f\text{在}x_0\text{处的极限为}f(x_0)}$，即$\forall x_0 \in I$，$\underline{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\text{，当}x \in I\text{且}|x - x_0| < \delta\text{时，有}|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.}$

注意：一般而言，$\delta$不仅依赖于$\varepsilon$，还依赖于$x_0$，记之$\delta(\varepsilon, x_0)$. 例如，设$f(x) = \frac{1}{x}$，$x_0 \in (0,1)$，我们知道$f$在$x_0$处连续。

**问题**: $\forall \varepsilon > 0$，取$\delta = ?$，使得当$|x - x_0| < \delta$时，有$|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| < \varepsilon$.

解：

$$\left\lceil\ |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| \quad = \quad \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} < ?\varepsilon\ \right\rfloor$$

$\forall \varepsilon > 0$，取$\delta = \min\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\}$，当$|x - x_0| < \delta$时，有

$$\begin{aligned} |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| &= \frac{|x - x_0|}{xx_0} \quad (\text{因为}|x - x_0| < \delta \le \frac{x_0}{2}\text{，故}x > \frac{x_0}{2}) \\ &\le \frac{|x - x_0|}{\frac{x_0^2}{2}} \\ &< \frac{\delta}{\frac{x_0^2}{2}} \\ &\le \varepsilon \quad (\text{因为}\delta \le \frac{x_0^2}{2}\varepsilon). \end{aligned}$$

**定义1（一致连续）** 设$I$是$R$中的一个区间，$f$是定义在$I$上的函数。若$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$x_1 \in I$，$x_2 \in I$ 且$|x_2 - x_1| < \delta$时，有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon,$$

则称$f$是<u>一致连续</u>。

**注1** 若$f : I \to R$一致连续，则$f \in C(I)$.

**注2** 一致连续的几何意义？

## 注3 $f: I \to R$不一致连续

$\Longleftrightarrow \exists\ \ \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists\ \ x_{1,\delta}$，$x_{2,\delta} \in I$，使得

$$|x_{1,\delta} - x_{2,\delta}| < \delta,\ \ |f(x_{1,\delta}) - f(x_{2,\delta})| \geq \varepsilon_0.$$

$\Longleftrightarrow \exists\ \ \varepsilon_0 > 0, \forall n, \exists\ \ x_{1,n}$，$x_{2,n} \in I$，使得

$$|x_{1,n} - x_{2,n}| < \frac{1}{n},\ \ |f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})| \geq \varepsilon_0.$$

$\exists\ \ \{x_{1,n}\}$，$\{x_{2,n}\} \subseteq I$，使得$\{x_{1,n} - x_{2,n}\}$收敛于0，但$\{f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})\}$不收敛于0.

## 例2 证明$\sqrt{x}$在$[0, +\infty)$一致连续。

证：

$$\left[\text{函数}\sqrt{x}\text{最陡的地方在哪？在}x = 0!\ \forall \varepsilon > 0\text{，}\delta = ?\ \text{画图，}\sqrt{\delta} = \varepsilon.\right]$$

$\forall \varepsilon > 0$，取$\delta = \varepsilon^2$，当$x_1, x_2 \in [0, +\infty)$且$|x_2 - x_1| < \delta$时，

1. 若$x_1, x_2 \in [0, \delta)$. 不妨设$x_1 \leq x_2$，则

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2} < \sqrt{\delta} = \varepsilon;$$

2. 若$x_1, x_2$至少有一个大于等于$\delta$. 不妨设$x_2 \geq \delta$，则

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}} \leq \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{x_2}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \varepsilon.$$

综上，总有

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| < \varepsilon,$$

所以$\sqrt{x}$在$[0, +\infty)$一致连续。

## 例3 证明$\frac{1}{x}$在$(0, 1)$不一致连续。

证一：

$\left[\text{函数}\frac{1}{x}\text{在}x = 0\text{附近越来越陡。}\exists ? \varepsilon_0 > 0\text{，}\forall \delta > 0\text{，}\exists x_{1\delta}, x_{2\delta} \in (0,1)\text{，使得}|x_{2\delta} - x_{1\delta}| < \delta\text{，但}\left|\frac{1}{x_{2\delta}} - \frac{1}{x_{1\delta}}\right| \geq \varepsilon_0.\right]$

令$\varepsilon_0 = 1$，对$\forall \delta > 0$，取$x_{1\delta} \in (0, 1) \cap (0, \delta)$，$x_{2\delta} = \frac{x_{1\delta}}{2}$. 则$x_{1\delta}, x_{2\delta} \in (0, 1)$，

$$|x_{2\delta} - x_{1\delta}| = \frac{x_{1\delta}}{2} < \delta,$$

但

$$\left|\frac{1}{x_{2\delta}} - \frac{1}{x_{1\delta}}\right| = \frac{1}{x_{1\delta}} \geq 1.$$

所以$\frac{1}{x}$在$(0, 1)$不一致连续。

证二：反证法。假若$f(x) = \frac{1}{x}$在$(0, 1)$一致连续，即$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$x_1, x_2 \in (0, 1)$且$|x_1 - x_2| < \delta$时，则

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

特别当$0<x_1,x_2<\min(1,\delta)$时，则
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$
从而由Cauchy收敛原理知极限
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$
存在，即极限
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$$
存在，但这不可能。所以$\frac{1}{x}$在$(0,1)$不一致连续。

## 定理（Cantor） 设$f\in C[a,b]$，则$f$一致连续。

证：反证法。若不然，$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x_{1\delta},x_{2\delta}\in[a,b]$，使得$|x_{2\delta}-x_{1\delta}|<\delta$，但$|f(x_{2\delta})-f(x_{1\delta})|\geq\varepsilon_0$，特别$\forall n\in Z_+$，$\exists u_n,v_n\in[a,b]$，使得$|u_n-v_n|<\frac{1}{n}$，但$|f(u_n)-f(v_n)|\geq\varepsilon_0$.

从而得到数列$\{u_n\},\{v_n\}\subset[a,b]$. 由Bolzano定理知，数列$\{u_n\}\subset[a,b]$有收敛的子列数列$\{u_{n_k}\}$. 记
$$\xi=:\lim_{k\to\infty}u_{n_k}.$$
由数列极限保号性的注释知，$\xi\in[a,b]$；再由$f$在$\xi$处连续知，
$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\xi).$$
再由$|u_{n_k}-v_{n_k}|<\frac{1}{n_k}\leq\frac{1}{k}$知，
$$\lim_{k\to\infty}v_{n_k}=\xi,$$
从而
$$\lim_{k\to\infty}f(v_{n_k})=f(\xi).$$
故
$$\lim_{k\to\infty}[f(u_{n_k})-f(v_{n_k})]=0,$$
但这与$|f(u_{n_k})-f(v_{n_k})|\geq\varepsilon_0,\quad k\in Z_+$矛盾。该矛盾说明原假设不对，所以$f$一致连续。

## 例4 设函数$f$在有限开区间$(a,b)$连续，则$f$在$(a,b)$一致连续$\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在。

证：充分性。设$f(a+0),\ f(b-0)$存在，定义
$$F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x), & \text{当}x=a,\\ f(x), & \text{当}x\in(a,b),\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x), & \text{当}x=b.\end{cases}$$
则$F$在$[a,b]$处处连续，即$F\in C[a,b]$. 由Cantor定理知，$F$在$[a,b]$一致连续，从而$F$在$(a,b)$一致连续，即$f$在$(a,b)$一致连续。

必要性。设$f$在$(a,b)$一致连续，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x_1,\ x_2\in(a,b)$ 且$|x_2-x_1|<\delta$时，有
$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon,$$
特别当$x_1,\ x_2\in(a,b)\cap(a,a+\delta)$ 时，有
$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$
故由函数极限存在的Cauchy准则'知，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在。同理$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在。