1. (1). 不正确.

由于需同时满足前提 ① $g_i(\hat{x})=0$, $1\le i\le \hat{l}$. $g_i(\hat{x})>0$. $\hat{l}+1\le i\le l$

② $\nabla g_1(\hat{x})$. $\nabla g_2(\hat{x})\cdots g_{\hat{i}}(\hat{x})$ 线性无关

才有结论:存在不全为零的非负数 w_i. 使得 $\nabla f(\hat{x})=\sum_{i=1}^{\hat{l}}\nabla g_i(\hat{x})w_i$ 成立

(2). 正确

由于 $f=c^Tx$ 为凸函数. 且 $Ax\ge b$ 均为凸函数,

故可行集是凸集, 因此 $\hat{x}$ 处 K-T条件成立 $\Rightarrow$ $\hat{x}$ 是全局最优解

2. 拉格朗日函数

$$L(X,u,v)=(x_1+1)^2+x_2^2+v_1(-(x_1-1)^2-x_2^2+1)+v_2((x_1-2)^2+x_2^2-4)$$

$$\frac{\partial L(X,u,v)}{\partial X}=\begin{pmatrix}2(x_1+1)-2v_1(x_1-1)+2v_2(x_1-2)\\ 2x_2-2v_1x_2+2v_2x_2\end{pmatrix}=0$$

互补松弛条件 $\begin{cases}v_1(-(x_1-1)^2-x_2^2+1)=0\\ v_2((x_1-2)^2+x_2^2-4)=0\end{cases}$

分别考虑各种 $v_i>0$. $v_i=0$ 的组合情况

① $v_1=0$. $v_2=0$ $\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=0\end{cases}$ 不满足约束

② $v_1=0$ $v_2>0$ $\Rightarrow\begin{cases}2(x_1+1)+2v_2(x_1-2)=0\\ 2x_2+2v_2x_2=0\\ (x_1-2)^2+x_2^2-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$ 满足约束

此时, 验证KKT定理的前提条件

根据 $\begin{cases}-(x_1-1)^2-x_2^2=-1\\ (x_1-2)^2+x_2^2=4\end{cases}$ $\nabla g_1(\hat{x})=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\nabla g_2(\hat{x})=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$.

线性相关, 不满足KKT定理前提条件. 不是KT解

③ $v_1>0$ $v_2=0$ $\Rightarrow\begin{cases}2(x_1+1)-2v_1(x_1-1)=0\\ 2x_2-2v_1x_2=0\\ -(x_1-1)^2-x_2^2+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=0.\end{cases}$

此时，验证KKT定理的前提条件

根据起作用约束 $-(x_1-1)^2-x_2^2=-1$，

可知线性无关，满足KKT定理前提条件，是KT解

④ $v_1>0 \quad v_2>0 \Rightarrow \begin{cases} -(x_1-1)^2-x_2^2+1=0 \\ (x_1-2)^2+x_2^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$

与②同理，不是KT解

综上可知，该问题的KT解为 $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=0 \end{cases}$，$f(\hat{x})=9$

3. 即 $\min \ -\ln(x_1+x_2)$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1+2x_2-5\leq 0 \\ -x_1\leq 0 \\ -x_2\leq 0 \end{cases}$$

拉格朗日函数

$$L(X,u,v)=-\ln(x_1+x_2)+v_1(x_1+2x_2-5)+v_2(-x_1)+v_3(-x_2)$$

$$\frac{\partial L(X,u,v)}{\partial X}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1+x_2}+v_1-v_2 \\ -\frac{1}{x_1+x_2}+2v_1-v_3 \end{pmatrix}=0$$

互补松驰条件 $\begin{cases} v_1(x_1+2x_2-5)=0 \\ v_2x_1=0 \\ v_3x_2=0 \end{cases}$

分别考虑各种 $v_i>0$，$v_i=0$ 的组合情况

① $v_1=0 \quad v_2=0 \quad v_3=0$

$\left\{ \frac{1}{x_1+x_2}=0 \right. \Rightarrow$ 无解

② $v_1=0$，$v_2=0 \quad v_3>0$

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1+x_2}=0 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow 无解$$

③ $v_1=0 \quad v_2>0 \quad v_3=0$

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1+x_2}=0 \\ x_1=0 \end{cases} \Rightarrow 无解$$

④ $v_1>0 \quad v_2=0 \quad v_3=0$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5=0 \\ -\frac{1}{x_1+x_2}+v_1=0 \\ -\frac{1}{x_1+x_2}+2v_1=0 \end{cases} \Rightarrow 不满足约束$$

⑤ $v_1=0 \quad v_2>0 \quad v_3>0$

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow 不成立$$

⑥ $v_1>0 \quad v_2=0 \quad v_3>0$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5=0 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=\frac{1}{5} \\ v_3=\frac{1}{5} \end{cases}$$

此时. 根据起作用约束 $\begin{cases} x_1+2x_2=5 \\ x_2=0 \end{cases}$. $\nabla g_1(\hat{x})=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\nabla g_2(\hat{x})=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

可知线性无关. 是KT解

⑦ $v_1>0 \quad v_2>0 \quad v_3=0$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5=0 \\ x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2.5 \end{cases}$$. 此时. 解得 $\begin{cases} v_1=0.2 \\ v_2=-0.2 \end{cases}$

不满足约束条件，不成立.

⑧ $v_1>0. \quad v_2>0. \quad v_3>0$

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \text{不成立}.$$

综上可知，该问题的KT解为 $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=0 \end{cases}$，$f(\hat{x})=\ln 5$

4. 转换为标准型

$$\min f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=2 \\ &x_1+5x_2+x_4=5 \\ &x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4 \end{aligned}$$

① 初始可行解 $\hat{x}=(0,0,2,5)$

$$Z_0=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \quad B_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad N_0=\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix} \quad \hat{Y}_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}_0=-N_0^T B_0^{-T}\frac{\partial f(\hat{z}_0,\hat{Y}_0)}{\partial Z}+\frac{\partial f(\hat{z}_0,\hat{Y}_0)}{\partial Y}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$$

可行下降方向 $D_0=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

一维搜索 $\hat{Y}_0+tD_0=\begin{pmatrix}4t\\6t\end{pmatrix}$. t的范围 $\begin{cases} x_1+x_2=10t\leq 2 \\ x_1+5x_2=34t\leq 5 \end{cases} \Rightarrow t_{max}=\frac{5}{34}$

$$\min_{0\leq t\leq\frac{5}{34}} f(x_0+tD_0)$$

$$=\min_{0\leq t\leq\frac{5}{34}} 56t^2-52t$$

因此 $t=\frac{5}{34}$. $\hat{x}_1=x_0+tD_0=(\frac{10}{17},\frac{15}{17},\frac{9}{17},0)$

② $z_1=\begin{pmatrix}\frac{10}{17}\\\frac{15}{17}\end{pmatrix}$ $\quad B_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}$ $\quad N_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad \hat{Y}_1=\begin{pmatrix}\frac{9}{17}\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}_1=-N_1^T B_1^{-T}\frac{\partial f(\hat{z}_1,\hat{Y}_1)}{\partial Z}+\frac{\partial f(\hat{z}_1,\hat{Y}_1)}{\partial Y}=\begin{pmatrix}\frac{57}{17}\\\frac{1}{17}\end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{513}{289} \\ 0 \end{pmatrix}$$

不妨取 $D_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 则 $\begin{cases} x_1 = \frac{16}{17} + \frac{5}{4}t \\ x_2 = \frac{15}{17} - \frac{1}{4}t \end{cases}$ $t_{max} = \frac{9}{17}$

一维搜索

$$\min_{0 \le t \le \frac{9}{17}} f(\hat{x_1} + t\hat{D_1}) = \frac{31}{8}t^2 - \frac{228}{68}t + A.$$

可得 $t = \frac{228}{527} < \frac{9}{17}$

故 $\hat{x_2} = x_1 + tD_1 = \left(\frac{31}{35} \quad \frac{24}{31} \quad \frac{3}{31} \quad 0 \right)$

③ $\hat{Z_2} = \begin{pmatrix} \frac{35}{31} \\ \frac{24}{31} \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\hat{Y_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{31} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}_2 = -N_2^T B_2^{-T} \frac{\partial f(\hat{z_2}, \hat{Y_2})}{\partial Z} + \frac{\partial f(\hat{z_2}, \hat{Y_2})}{\partial Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{31}{32} \end{pmatrix}$$

$D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 故此时已达到KT解.

综上. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{31} \\ \frac{24}{31} \end{pmatrix}$ $f(\hat{x}) = -\frac{222}{31}$

5. 根据罚函数法,

构造加上惩罚项的目标函数

$$F_k(x) = f(x) + k\sum_{i=1}^{l} \varphi(g_i(x))$$
$$= (x-1)^2 + k(\max\{0, (2-x)\})^2$$
$$= \begin{cases} (x-1)^2 + k(2-x)^2 & x \le 2 \\ (x-1)^2 & x > 2 \end{cases}$$

而后求下述无约束问题逼近原问题的解

$$\min_{x \in R^n} F_k(x) \Rightarrow \hat{x}(k) \Rightarrow x^* = \lim_{k \to \infty} \hat{x}(k)$$

特别地，求得本问题 $F_k(x)$ 的极值点 $x = \frac{2k+1}{k+1}$.

$$x^* = \lim_{k \to \infty} \hat{x}(k) = 2.$$

$$f(x)_{min} = f(2) = 1$$