《微积分A2》第四讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2019年02月26日

定义: 设二元函数 $f(x,y)$ 在开区域 $D\subset \mathbb{R}^2$ 上定义. 假设它的一阶偏导数 $f_x(x,y)$ 在 D 上处处存在.

(i) 若函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数存在, 即 $[f_x]_x(x_0,y_0)$ 存在, 则称这个导数为函数 f 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的二阶偏导数, 常记作 $f_{xx}(x_0,y_0)$;

(ii) 若函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数存在, 即 $[f_x]_y(x_0,y_0)$ 存在, 则称这个导数为函数 f 在点 (x_0,y_0) 处先 x 后 y 的二阶混合偏导数, 常记作 $f_{xy}(x_0,y_0)$;

(iii) 类似可定义点 (x_0, y_0) 处关于 y 的二阶偏导数 $f_{yy}(x_0, y_0)$, 先 y 后 x 的二阶混合偏导数 $f_{yx}(x_0, y_0)$, 以及三阶更高阶偏导数.

高阶偏导数的个数

对于二元函数 $f(x,y)$

阶数	偏导数个数	偏导数
1 阶	2	f_x, f_y
2 阶	2^2	$f_{xx}, f_{yx}, f_{yx}, f_{yy}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n 阶	2^n	$f_{x^n}, f_{x^{n-1}y}, \cdots, f_{y^n}$

高阶偏导数记号

如同一阶偏导数，高阶偏导数也有许多不同记号. 例如以二元函数 $f(x,y)$ 为例，f_{xx}，f_{xy}，f_{xxy} 也常常记为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2},$$

或者

$$D_{xx}f, \quad D_{xy}f, \quad D_{xxy}f.$$

Example

例: 设 $f(x,y)=e^x\sin y$, 则

$$
\begin{aligned}
&1\text{ 阶} \quad f_x=e^x\sin y, \quad && f_y=e^x\cos y\\
&2\text{ 阶} \quad f_{xx}=e^x\sin y, \quad && f_{xy}=e^x\cos y\\
&\qquad\quad\; f_{yx}=e^x\cos y, \quad && f_{yy}=-e^x\sin y
\end{aligned}
$$

Theorem

定理: 设 $f(x,y)$ 在开区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上定义. 假设两个二阶混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 在 D 上处处存在, 并且在点 (x_0,y_0) 处连续, 则 $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.

如上例, $f(x,y) = e^x \sin y$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^x \cos y$.

定理证明

证明: 依定义二阶混合偏导数 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 可表为

$$f_{xy}(x_0,y_0)=[f_x]_y(x_0,y_0)=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\left\{f_x(x_0,y_0+k)-f_x(x_0,y_0)\right\}$$

$$=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\left\{\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)\right]\right.$$

$$\left.-\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[f(x_0+h,y_0)-f(x_0+h,y_0)\right]\right\}$$

$$=\lim_{k\to0}\lim_{h\to0}\frac{1}{hk}\left[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)\right.$$

$$\left.-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)\right]=\lim_{k\to0}\lim_{h\to0}\frac{J(h,k)}{hk},$$

即

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{J(h,k)}{hk},$$

其中

$$J(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0).$$

同理可证

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{J(h,k)}{hk}.$$

这表明两个混合偏导数 $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yx}(x_0, y_0)$ 是函数 $\frac{J(h,k)}{hk}$ 的两个累次极限. 往下考虑 $J(h,k)$.

为方便，记

$$\phi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y),$$

则 $J(h,k)$ 可表为 $J(h,k) =$

$$= [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)].$$

$$= \phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = \phi'(x_0 + \lambda h)h, \quad \lambda \in (0,1),$$

$$= \Big[f_x(x_0 + \lambda h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \lambda h, y_0)\Big]h$$

$$= f_{xy}(x_0 + \lambda h, y_0 + \mu k)hk, \quad \mu \in (0,1).$$

同理, $J(h,k)$ 可表为 $J(h,k)=\psi(y_0+k)-\psi(y_0)$. 于是

$$J(h,k)=\psi(y_0+k)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\beta k)k$$

$$=[f_y(x_0+h,y_0+\beta k)-f_y(x_0,y_0+\beta k)]k$$

$$=f_{yx}(x_0+\alpha h,y_0+\beta k)hk$$

即 $\quad J(h,k)=f_{yx}(x_0+\alpha h,y_0+\beta k)hk,\quad \alpha,\beta\in(0,1).$

证明续四

于是

$$\frac{J(h,k)}{hk} = f_{xy}(x_0+\lambda h, y_0+\mu k) = f_{yx}(x_0+\alpha h, y_0+\beta k).$$

由假设两个混合偏导数 f_{xy}, f_{yx} 在点 (x_0, y_0) 处的连续性可知，函数 $\frac{1}{hk}J(h,k)$ 在点 $(0,0)$ 处的重极限存在. 再考虑到 $\frac{J(h,k)}{hk}$ 的两个累次极限均存在，因此这三个极限相等. 特别两个累次极限相等. 此即 $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$. □

Clairaut 定理的条件可稍微减弱

Clairaut 定理断言，如果

(i) 两个混合偏导数 f_{xy}, f_{yx} 在开区域 D 上存在；

(ii) f_{xy} 和 f_{yx} 在点 (x_0, y_0) 处均连续，

则 $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

不难证明，条件(ii) 可减弱为 (ii)' f_{xy} 或 f_{yx} 在点(x_0, y_0) 处连续.

证明大意：根据等式

$$\frac{J(h,k)}{hk} = f_{xy}(x_0 + \lambda h, y_0 + \mu k) = f_{yx}(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k),$$

可知如果混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 的其中之一在点 (x_0, y_0) 处连续，则重极限 $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{J(h,k)}{hk}$ 存在. 于是两个累次极限相等，即 $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

例：课本例1.4.16, page 40. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

考虑 $f(x,y)$ 的二阶混合偏导数，特别求出它们在 $(0,0)$ 处的值.

解：在开区域 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上，$f(x,y)$ 是分式函数，故它的各阶偏导数均连续. 经过一些繁琐的计算，可得它的一阶和二阶混合偏导数如下

$$f_x(x,y)=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} = f_{yx}(x,y).$$

不难看出 f_{xy}, f_{yx} 在点 $(0,0)$ 处的极限不存在. 因此二阶混合偏导在点 $(0,0)$ 处均不连续. 但这并不意味着 $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ 不存在. 以下考虑它们的存在性与计算. 由于

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0 \to 0, \quad (x \to 0),$$

故依定义知 $f_x(0,0)$ 存在, 且 $f_x(0,0) = 0$. 同理可证 $f_y(0,0)$ 存在, 且 $f_y(0,0) = 0$.

例子续二

由于

$$\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\frac{\frac{-y^5}{y^4}-0}{y}=-1\to-1,\quad (y\to 0),$$

这说明 $f_{xy}(0,0)$ 存在，且 $f_{xy}(0,0)=-1$. 类似地，由于

$$\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\frac{\frac{x^5}{x^4}-0}{x}=1\to 1,\quad (x\to 0),$$

故 $f_{yx}(0,0)$ 存在，且 $f_{yx}(0,0)=1\neq -1=f_{xy}(0,0)$. 解答完毕.

关于混合偏导数的注记

注一: 对于一般 n 元函数 $f(x)$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 假设它的每个二阶偏导数在其定义域(开集)上连续, 则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad i,j=1,\cdots,n.$$

注二: 假设二元函数 $f(x,y)$ 的各阶偏导数均连续, 则它的每个混合偏导数域求导次序无关. 例如 $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$, 即两次关于 x 求导, 以及一次关于 y 求导的结果, 与求导的次序无关.

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开区域, (i) 若函数 f 在 D 上连续, 则称 f 在 D 上是 C^0 类函数; (ii) 若函数 f 的每个 k 阶偏导数在 D 上连续, 则称 f 为 D 上的 C^k 类函数; (iii) 符号 $C^k(D)$ 记 D 上 C^k 类函数的全体; (iv) 若函数 f 对任意正整数 k, 都是 C^k 类的, 则称 f 是 C^∞ 类函数; (v) 符号 $C^\infty(D)$ 记 D 上 C^∞ 类函数的全体. 显然

$$C^k(D) \supset C^{k+1}(D), \quad k = 0, 1, \cdots,$$

$$\text{且} \quad C^\infty(D) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k(D).$$

Definition

定义: 设 $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数, D 为开区域, $x_0 \in D$. 若 f 在 x_0 处的增量可表为

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(\|h\|), \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

其中 A 为 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为线性映射(可看作 $m \times n$ 矩阵), 则称 f 在点 x_0 处可微, 线性映射(矩阵) A 称为 f 在点 x_0 处的导算子(或导数, 或切映射), 并记作 $f'(x_0)$, 或 $Df(x_0)$.

注: 传统教材(如本教材), 称导算子 $f'(x_0)$ 作用于 h 的象 $f'(x_0)h$ 称为 f 在点 x_0 处的微分, 并记作 $df(x_0) = f'(x_0)h$.

定理: 设 $f = (f_1, \cdots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数, D 为开区域, $x_0 \in D$, 则

(i) f 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 每个分量函数 f_i 在点 x_0 处可微;

(ii) 当 f 在点 x_0 处可微时, $f'(x_0)$ 可表为

$$f'(x_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0}.$$

注: 上述矩阵 $f'(x_0)$ 称为 f 在点 x_0 处的 Jacobian 矩阵, 其行列式称为 Jacobian 行列式.

Proof.

证明：映射 f 在点 x_0 处可微，当且仅当存在唯一矩阵 $A=[a_{ij}]$，使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(\|h\|),$$

其中 $h=(h_1,\cdots,h_n)^T\in\mathbb{R}^n$. 将上式写作分量形式即为

$$f_i(x_0+h)-f_i(x_0)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_j+o(\|h\|),\quad i=1,\cdots,m.$$

由函数的可微性定义及其性质可知，每个分量函数 f_i 在点 x_0 处可微，且 $a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{x_0}$. 定理得证. □

例一，极坐标映射

Example

例一：称二维映射 $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, 为极坐标映射，其中 $D = \{(r,\theta), r > 0, \theta \in (0, 2\pi)\}$. 极坐标映射点 (r,θ) 处的Jacobian 矩阵为

$$f'(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix},$$

其 Jacobian 行列式为 $\det f'(r,\theta) = r > 0.$

注：极坐标映射也称极坐标变换.

例：考虑二维到三维的映射 $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$，

$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

其中 D 通常为开区域．映射 f 的象集

$$S = \Big\{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D\Big\} \subset \mathbb{R}^3,$$

通常称为三维空间中的一个曲面，而映射 f 称为曲面 S 的一个参数表示．设 $p_0 = (u_0, v_0) \in D$，记

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))\Big|_{p_0}.$$

例二续1

假设 f 在点 p_0 处可微，即

$$\begin{bmatrix} x(u,v)-x(u_0,v_0) \\ y(u,v)-y(u_0,v_0) \\ z(u,v)-z(u_0,v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}_{p_0} \begin{bmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{bmatrix} + o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}$. 若去掉高阶项 $o(\rho)$，并记 $s=u-u_0$，$t=v-v_0$，则得到线性映射 $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，即

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}_{(u_0,v_0)} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix},$$

上述线性映射 L 的象集代表三维空间的一个平面. 这个平面常称作曲面 S 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面.

回忆一元情形的复合函数的求导规则(链规则)：设 $y = f(u)$，$u = g(x)$，假设它们可以复合，且均可导，则复合函数 $f(g(x))$ 也可导，且

$$[f(g(x))]' = f'(u)g'(x),$$

其中 $u = g(x)$.

Theorem

定理: 设二元函数 $f(x,y)$, 以及两个一元函数 $x(t)$, $y(t)$ 均可微, $t \in J$, 且它们可以复合, 则复合函数 $f(x(t),y(t))$ 也可微, 且

$$[f(x(t),y(t))]' = f_x(x,y)x'(t) + f_y(x,y)y'(t),$$

其中 $(x,y) = (x(t),y(t))$, $t \in J$.

Example

例: 设函数 $z(t)=(\cos t)^{(\sin t)}$, $|t|<\pi/2$. 求 $z'(t)$.

解: $z(t)$ 可写作 $z(t)=f(x,y)=x^y$, $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$.

由上述定理得

$$\begin{aligned} z'(t) &= f_x(x,y)x'(t)+f_y(x,y)y'(t) \\ &= yx^{y-1}(\cos t)'+x^y\ln(x)(\sin t)' \\ &= -\sin^2 t(\cos t)^{\sin t-1}+(\cos t)^{1+\sin t}\ln(\cos t). \end{aligned}$$

解答完毕.

Lemma

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微 $\Longleftrightarrow$ f 在点 (x_0,y_0) 处的增量可表为

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\lambda h+\mu k+\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k,$$

其中 $\varepsilon_i=\varepsilon_i(h,k)$ 满足条件 $\varepsilon_i(h,k)\to 0$, 当 $(h,k)\to(0,0)$ 时, $i=1,2$.

回忆按定义, 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微的, 如果 $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\lambda h+\mu k+o(\rho)$.

$\Leftarrow$: 设 f 在点 (x_0, y_0) 处的增量为 $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$
$= \lambda h + \mu k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$, 其中 $\varepsilon_i = \varepsilon_i(h,k)$ 满足 $\varepsilon_i(h,k) \to 0$,
当 $(h,k) \to (0,0)$ 时, $i = 1, 2$, 则

$$\frac{|\varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k|}{\rho} \leq |\varepsilon_1|\frac{|h|}{\rho} + |\varepsilon_1|\frac{|k|}{\rho} \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \to 0,$$

这说明 $\varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k = o(\rho)$. 由此可见 f 在点 x_0 处可微.

$\Rightarrow$: 设 f 在点 x_0 处可微, 即

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \lambda h + \mu k + o(\rho).$$

由于

$$o(\rho) = \frac{o(\rho)(h^2+k^2)}{\rho^2} = \frac{o(\rho)}{\rho}\frac{h}{\rho}h + \frac{o(\rho)}{\rho}\frac{k}{\rho}k.$$

记

$$\varepsilon_1 = \frac{o(\rho)}{\rho}\frac{h}{\rho}, \quad \varepsilon_2 = \frac{o(\rho)}{\rho}\frac{k}{\rho},$$

则 $o(\rho) = \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$, 且 $|\varepsilon_i| \leq \frac{o(\rho)}{\rho} \to 0$, 当 $\rho \to 0$ 时. 必要性得证.

证明：记 $z(t) \triangleq f(x(t), y(t))$. 固定 $t = t_0$，任取独立变量 t 的增量 $\triangle t \neq 0$，函数 $z(t)$ 在点 t_0 处的增量为

$$\triangle z = z(t_0 + \triangle t) - z(t_0)$$

$$= f(x(t_0 + \triangle t), y(t_0 + \triangle t)) - f(x(t_0), y(t_0))$$

$$= f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)) - f(x_0, y_0),$$

这里 $\triangle x = x(t_0 + \triangle t) - x(t_0)$，$\triangle y = y(t_0 + \triangle t) - y(t_0)$，$x_0 = x(t_0)$，$y_0 = y(t_0)$.

再根据可微性的等价定义得

$$\triangle z = f_x(x_0, y_0)\triangle x + f_y(x_0, y_0)\triangle y + \varepsilon_1 \triangle x + \varepsilon_2 \triangle y,$$

这里 $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\triangle x, \triangle y) \to 0$, 当 $(\triangle x, \triangle y) \to (0, 0)$ 时. 于上式两边同除以 $\triangle t$ 得

$$\frac{\triangle z}{\triangle t} = f_x(x_0, y_0)\frac{\triangle x}{\triangle t} + f_y(x_0, y_0)\frac{\triangle y}{\triangle t} + \varepsilon_1 \frac{\triangle x}{\triangle t} + \varepsilon_2 \frac{\triangle y}{\triangle t}.$$

于上式令 $\triangle t \to 0$ 可知 $z(t)$ 于 $t = t_0$ 处可导, 且

$$z'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0).$$

定理得证.

Theorem

定理：设 n 元函数 $f(u_1,\cdots,u_n)$ 在开集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上为 C^1 类的，$u=(u_1,\cdots,u_n):J\subset\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^n$ 也是 C^1 的，这里 J 为一个开区间，则复合函数 $f(u(t))$ 也是 J 上 C^1 函数，且

$$[f(u_1(t),\cdots,u_n(t))]'=f_{u_1}(u)u_1'(t)+\cdots+f_{u_n}(u)u_n'(t),$$

或简写为 $[f(u(t))]'=\nabla f(u)\cdot u'(t)$，其中 $u=u(t)$，$t\in J$.

Proof.

证明：证明方法基本同 $n=2$ 情形. 细节略. □

Theorem

定理：设 $f(u)$ 是开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ 上的 C^1 函数，$g : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ 是 C^1 的向量值函数，其中 Ω_1 是开集，则复合函数 $f(g(x))$ 也是 Ω_1 上 C^1 函数，且

$$D[f(g(x))] = Df(u) \cdot Dg(x), \quad (*)$$

其中 $u = g(x)$, $x \in \Omega_1$,

注：式(*)中 $Df(u)$ 记函数 $f(u)$ 的 Jacobian $1 \times k$ 矩阵(行向量)，$Dg(x)$ 记 $g(x)$ 的 Jacobian 矩阵，即为 $k \times n$ 矩阵.

例子

例子: 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ 为 C^1 二元函数, 映射 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 定义如下

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2 \end{bmatrix}.$$

记 $h(x,y,z)=f(g(x,y,z))=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, 根据上述定理知复合函数 $h(x,y,z)$ 也是 C^1 的, 且

$$Dh(x,y,z)=Df(u,v)Dg(x,y,z).$$

将上式展开即为

$$[h_x, h_y, h_z] = [f_u, f_v]\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

$$= [f_u, f_v]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

$$= [f_u + 2xf_v, f_u + 2yf_v, f_u + 2zf_v].$$

例子完毕.

证明: 记 $h(x) \triangleq h(x_1, \cdots, x_n) = f(g(x)) = f(g_1, \cdots, g_k)$. 根据多元函数复合一元函数的链规则知

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = Df(u) D_{x_j} g, \quad j = 1, \cdots, n,$$

这里 $Df(u)$ 为行向量, $D_{x_j} g$ 为列向量. 于是

$$Dh(x) = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]$$

$$= Df(u) \left[D_{x_1} g, \cdots, D_{x_n} g \right] = Df(u) Dg(x).$$

证毕.

Theorem

定理：设(i) 映射 $f:\Omega_1\subset \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ 是 C^1 的，Ω_1 开；(ii) 映射 $g:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 也是 C^1 的，Ω 开；(iii) $g(\Omega)\subset\Omega_1$ (可复合条件)，则复合映射 $h(x)=f(g(x))$ 是 C^1 的，且

$$D[f(g(x))]=Df(u)Dg(x),\ \text{即}\ \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{m\times k}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{k\times n},$$

其中 $u=g(x)$，$x\in\Omega$.

定理证明

证明: 设 $h=(h_1,\cdots,h_m)$. 要证明 h 是 C^1 的, 只要证明每个分量函数 h_i 是 C^1 的. 由于 $h_i(x)=f_i(g(x))=f_i(g_1,\cdots,g_k)$, $g_j=g_j(x_1,\cdots,x_n)$, 且 f_i 和 g 都是 C^1 的, 根据前述定理可知 $h_i(x)$ 也是 C^1 的, 且 $Dh_i(x)=Df_i(u)Dg(x)$, $i=1,\cdots,m$, 其中 $u=g(x)$. 于是

$$Dh(x)=\begin{bmatrix} Dh_1(x) \\ Dh_2(x) \\ \vdots \\ Dh_m(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Df_1(u) \\ Df_2(u) \\ \vdots \\ Df_m(u) \end{bmatrix}Dg(x)=Df(u)Dg(x).$$

定理得证.

作业

一. 习题1.4 (page 43-44): 13, 14, 15.

二. 习题1.5 (page 53-54): 1(1)(3), 2, 3(1)(3)(5).

三. 补充习题: 设

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\arctan\frac{y}{x} - y^2\arctan\frac{x}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

证明(i) 二阶混合偏导数 f_{xy}, f_{yx} 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处存在; (ii) f_{xy}, f_{yx} 在 $(0,0)$ 处不连续; (iii) $f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yx}(0,0) = 1$.