清华大学2021春季学期

电路原理C

第8讲

非线性电阻电路分析

目录

1、非线性电阻

2、非线性电阻电路的解析解法

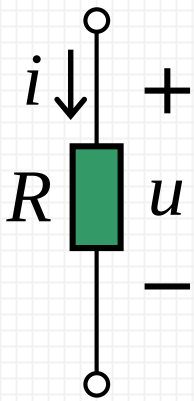
3、非线性电阻电路的分段线性解法　←　重点

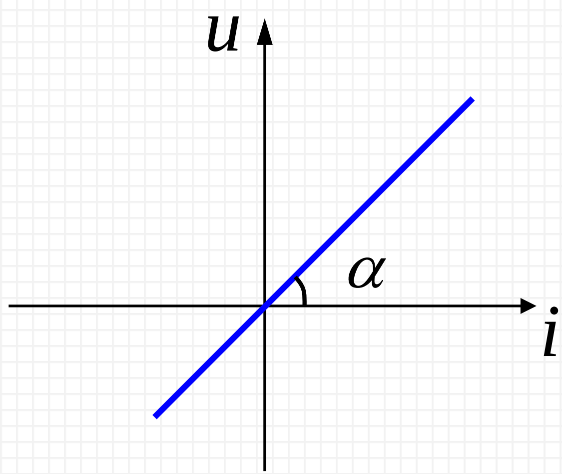
4、非线性电阻电路的图形解法

5、非线性电阻电路解的存在性和唯一性

1、非线性电阻

(1) 线性电阻元件

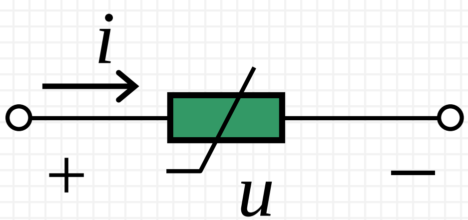




$$R=\frac{u}{i}=\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{const}$$

(2) 非线性电阻元件

电路符号



伏安特性

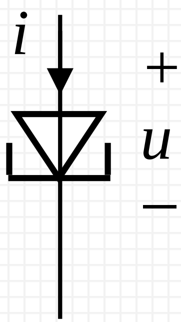
$u=f(i)$

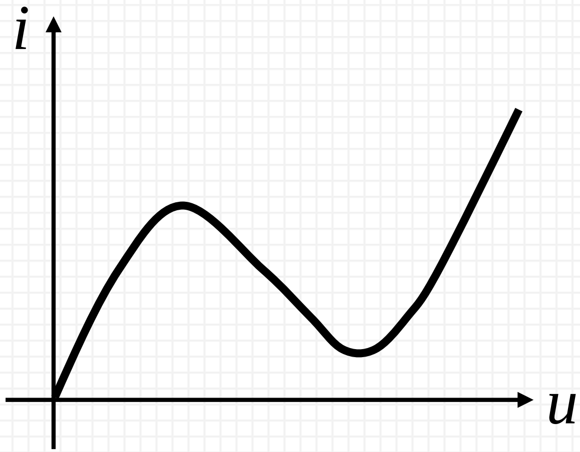
或

$i=g(u)$

过原点

例1 隧道二极管





$$i = g(u) = a_0 u + a_1 u^2 + a_2 u^3$$

称为 “**压控型**” 或 “**N型**”

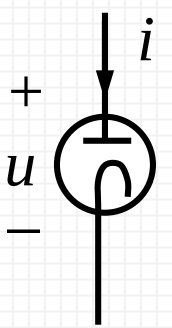
每个电压对应唯一的电流

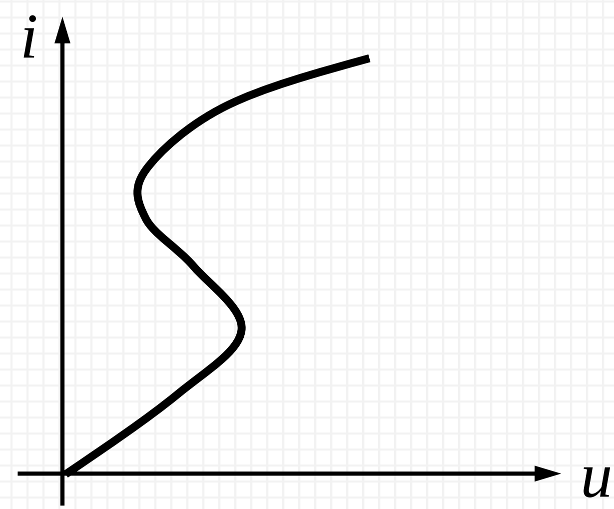
例2 充气二极管

$$u = f(i) = a_0 i + a_1 i^2 + a_2 i^3$$

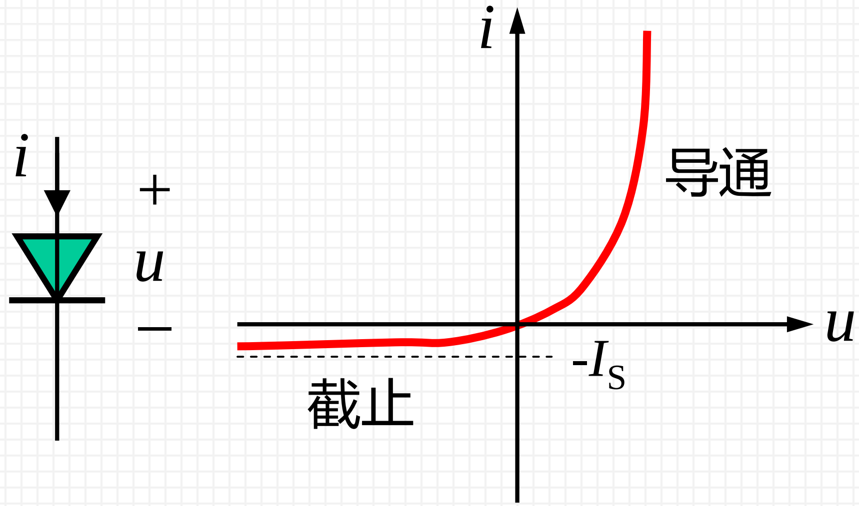
称为 “**流控型**” 或 “**S 型**”

每个电流对应唯一的电压





例3 整流二极管



伏安特性

$$i = I_S(e^{u/U_{TH}} - 1)$$

$I_S > 0$ 反向饱和电流

对于硅二极管来说，典型值为

$$I_S = 10^{-12}\,\text{A} = 1p\text{A},\quad U_{TH} = 0.025\text{V} = 25\text{mV}$$

(部分教材) $I_S = 10^{-7}\,\text{A} = 0.1\mu\text{A},\quad U_{TH} = 0.026\text{V} = 26\text{mV}$

(3) 线性电阻和非线性电阻的区别

例 非线性电阻 $u = f(i) = 50\,i + 0.5\,i^3$

$i_1 = 2\text{A}$　　$u_1 = 100 + 0.5 \times 8 = 104\text{V}$

$i_2 = 10\text{A}$　　$u_2 = 500 + 500 = 1000\text{V}$　$\neq 5 \times 104$

当 $i = i_1 + i_2$ 时　　**齐次性**不满足

$$u = 50(i_1 + i_2) + 0.5(i_1 + i_2)^3$$

$$= 50\,i_1 + 0.5\,i_1^{\,3} + 50\,i_2 + 0.5\,i_2^{\,3} + 1.5\,i_1 i_2 (i_1 + i_2)$$

$$= u_1 + u_2 + 1.5\,i_1 i_2 (i_1 + i_2)$$

$$\neq u_1 + u_2$$

可加性不满足

① 齐次性和可加性不适用于非线性电阻。

例 非线性电阻 $u = f(i) = 50\, i + 0.5\, i^3$

$i_3 = 2\sin 60t \mathrm{A}$

$4\sin^3 t = 3\sin t - \sin 3t$

$u_3 = 50 \times 2\sin 60t + 0.5 \times 8\sin^3 60t$

$= 100\sin 60t + 3\sin 60t - \sin 180t$

$= 103\sin 60t - \sin 180t$ A

出现3倍频

②非线性电阻能产生与输入信号不同的频率（变频作用）。

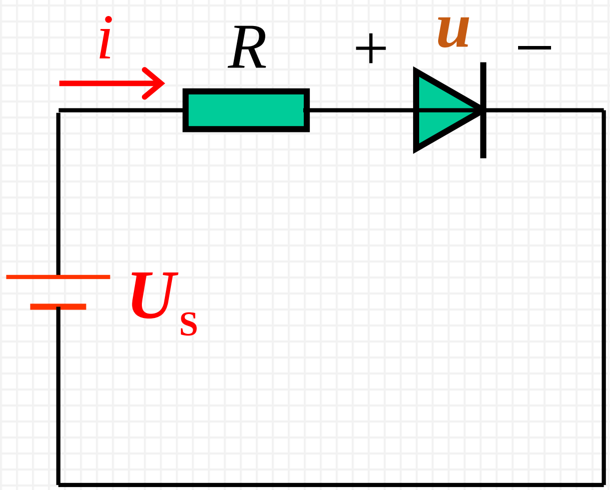
如何看待非线性?

线性元件：分压、分流、滤波等作用。

非线性元件：整流、稳压、放大、振荡、变频、开关等作用。

2、非线性电阻电路的解析解法

例 求电压 u



$$i = I_S\left(e^{u/U_{TH}} - 1\right)$$

KCL + KVL + 元件特性

$$\frac{U_S - u}{R} = I_S\left(e^{u/U_{TH}} - 1\right)$$

超越方程

$$\frac{U_S - u}{R} = I_S\left(e^{u/U_{TH}} - 1\right) \Rightarrow 10^{-9}\left(e^{\frac{u}{0.025}} - 1\right) + u - 2 = 0$$

设 $U_S = 2\text{V}$, $R = 1\text{k}\Omega$, I_S=1pA, U_{TH}=25mV

法1 手算 $$10^{-9}\left(e^{\frac{u}{0.025}} - 1\right) + u = 2$$

trial and error

u	左	右
0	0	2
0.3	0.3	2
0.6	27	2
0.5	0.985	2
0.53	2.14	2
0.525	1.844	2
0.527	1.956	2
0.528	2.015	2

法2 MATLAB

```
function f=diode(x)
f=10^(-9)*(exp(x/0.025)-1)+x-2;

>> a = fzero(@diode, -0.2)
a = 0.5278
```

(1) 节点电压方程的列写

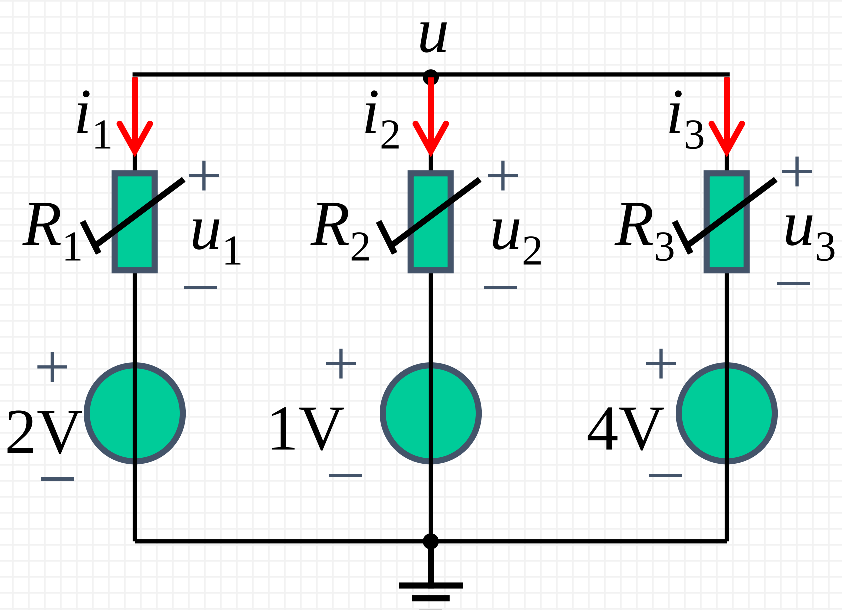
电路方程 $\begin{cases} \text{元件性能} \text{——} \text{非线性} \\ \text{电路的连接} \text{——} \text{KCL，KVL} \end{cases}$

非线性电阻为压控电阻

KCL

非线性电阻电路——非线性代数方程

例1 已知$i_1 = u_1$，$i_2 = u_2^5$，$i_3 = u_3^3$，列写求电压 u所需方程。



由KCL

$$i_1+i_2+i_3=0$$

代入元件性质

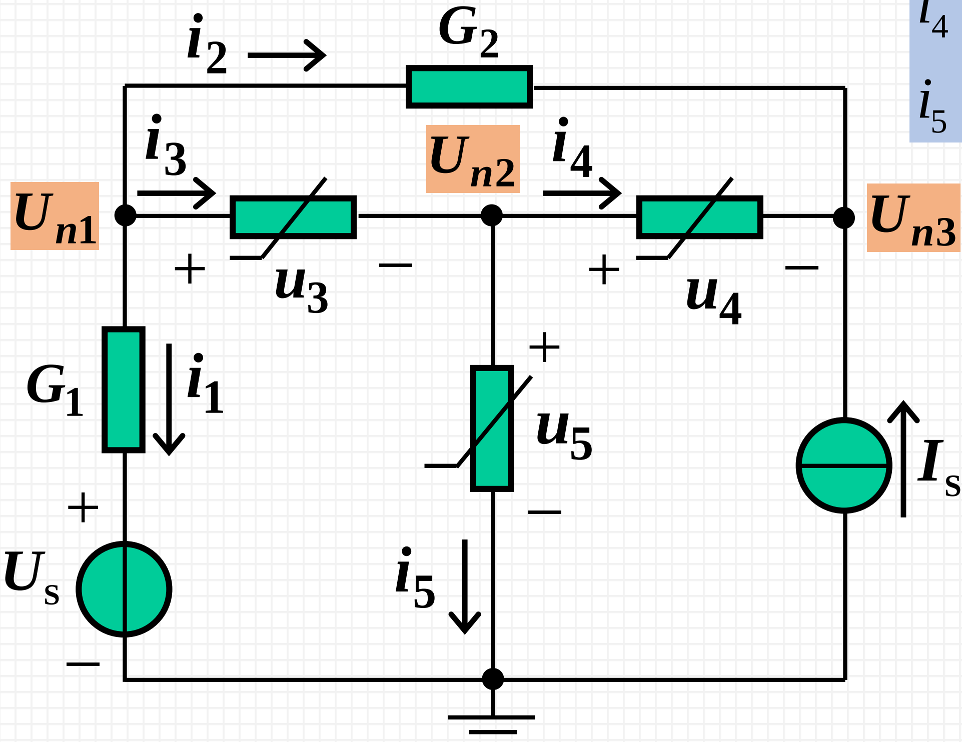
$$u_1+u_2^5+u_3^3=0$$

应用KVL，得

$$u-2+(u-1)^5+(u-4)^3=0$$

非线性代数方程

例2 列写节点电压方程



$$i_3 = 5u_3^3$$
$$i_4 = 10u_4^{1/3}$$
$$i_5 = 15u_5^{1/5}$$

KCL

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\ -i_4 - i_2 - I_s = 0 \end{cases}$$

元件性质 KVL

$$\begin{cases} i_1 = G_1(U_{n1} - U_s) \\ i_2 = G_2(U_{n1} - U_{n3}) \\ i_3 = 5(U_{n1} - U_{n2})^3 \\ i_4 = 10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} \\ i_5 = 15U_{n2}^{1/5} \end{cases}$$

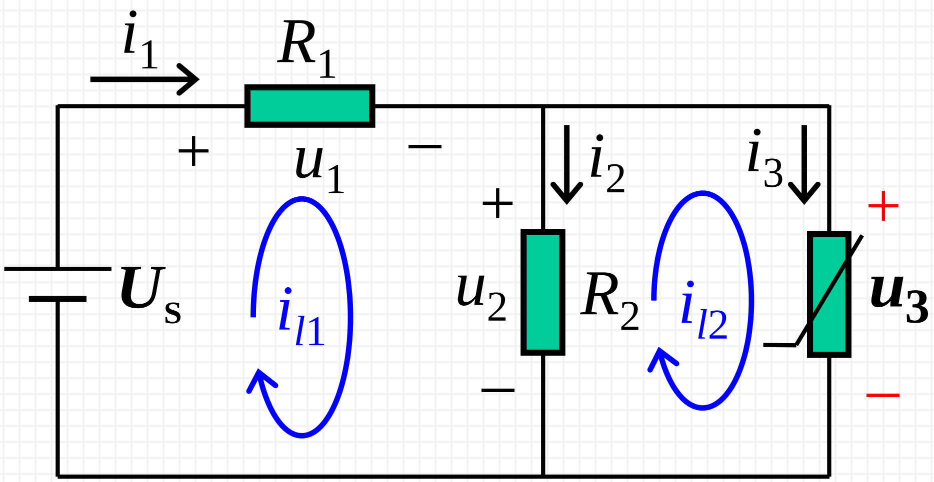
则节点方程为

$$\begin{cases} G_1(U_{n1} - U_s) + G_2(U_{n1} - U_{n3}) + 5(U_{n1} - U_{n2})^3 = 0 \\ -5(U_{n1} - U_{n2})^3 + 10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} + 15U_{n2}^{1/5} = 0 \\ -10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} - G_2(U_{n1} - U_{n3}) - I_s = 0 \end{cases}$$

非线性代数方程组

(2) 回路电流方程的列写

例3 已知 $u_3 = 20\, i_3^{1/3}$，求节点电压 u_3。



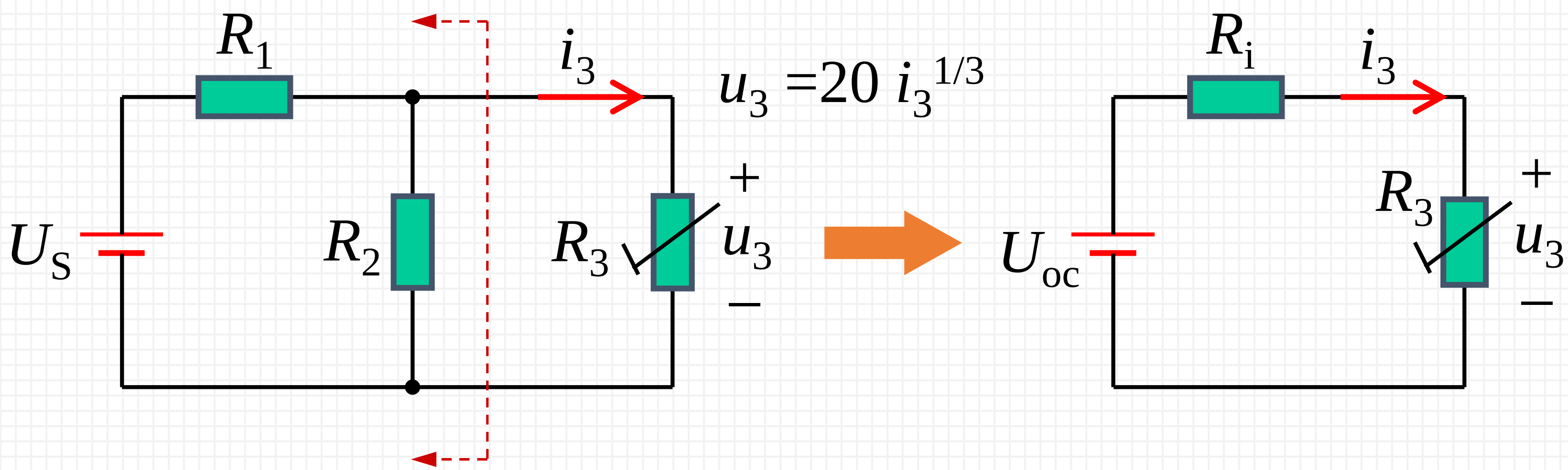
非线性电阻为流控电阻

KVL

$$\begin{cases} R_1 i_{l1} + R_2(i_{l1} - i_{l2}) = U_S \\ 20 i_{l2}^{1/3} - R_2(i_{l1} - i_{l2}) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i_3 \quad \Rightarrow \quad u_3$$

非线性代数方程组

将线性部分做戴维南等效



其中 $U_{oc} = U_S R_2 /(R_1+R_2)$， $R_i = R_1 R_2 /(R_1+R_2)$

由此得 $U_{oc} = R\ i_3 + 20\ i_3^{1/3}$

$\rightarrow$ i_3 $\xrightarrow{\text{非线性特性}}$ u_3 (u)

解析解法的特点

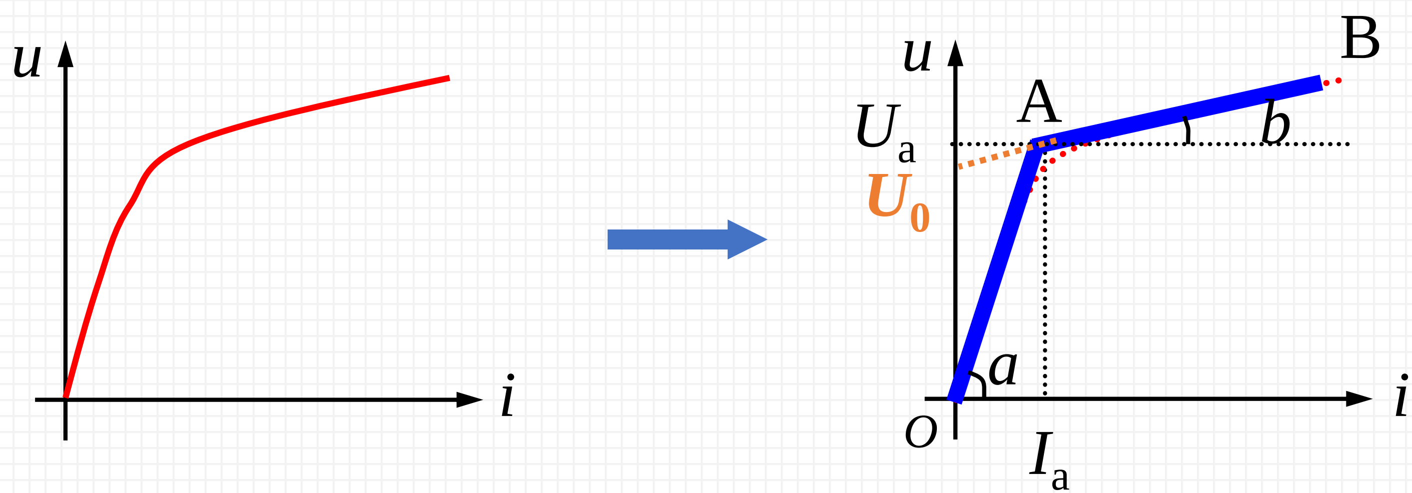
- 步骤
  - 利用所有非线性元件的特性、KCL和KVL列写并求解电路的非线性方程
- 优点
  - 貌似能求出精确解 → 实际上数值解法也带来误差
- 缺点
  - 方程列写可能比较麻烦
  - 方程求解比较麻烦

3 非线性电阻电路的分段线性解法

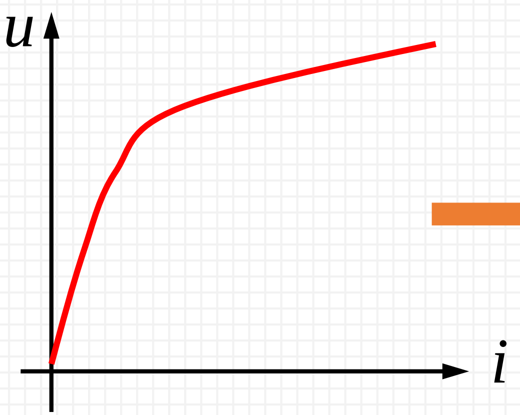
分段线性法：将非线性电阻近似地用折线来表示。

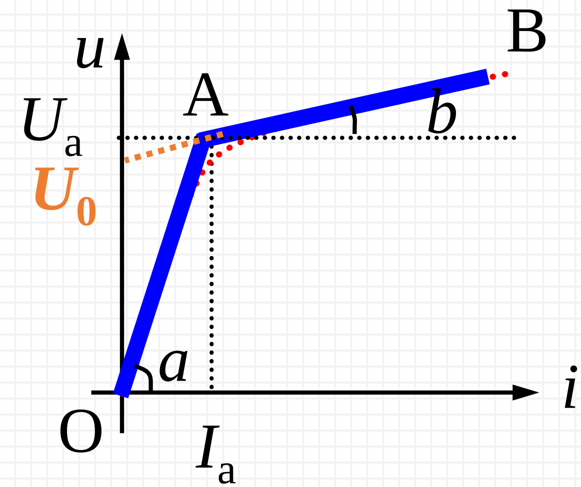
将求解过程分为几个线性段，每段中分析线性电路。

例1



例1



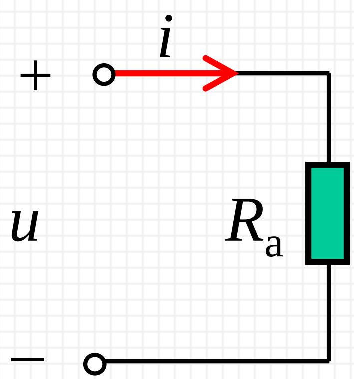


OA段 $R_a = \tan a$

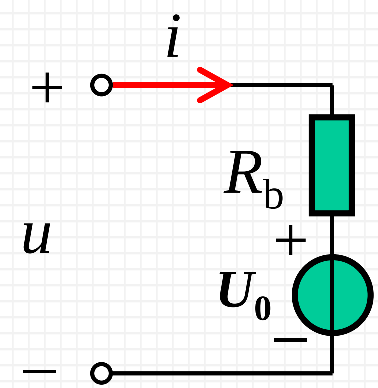
AB段 $R_b = \tan b$

等效电路

OA段

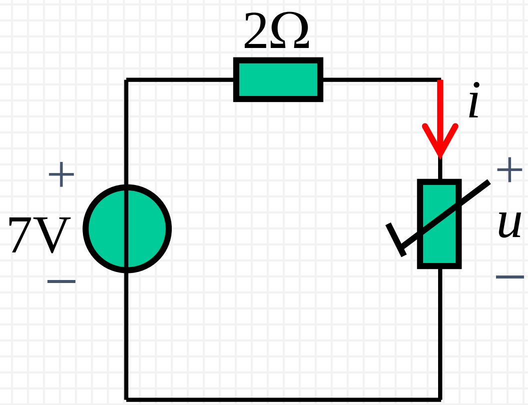


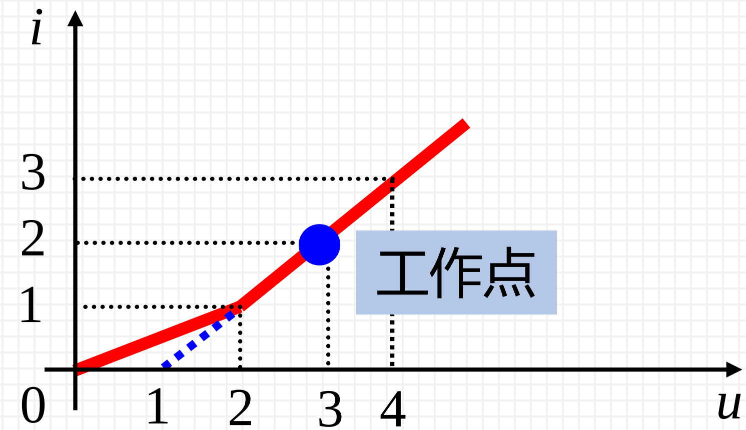
AB段



如何知道在哪段?

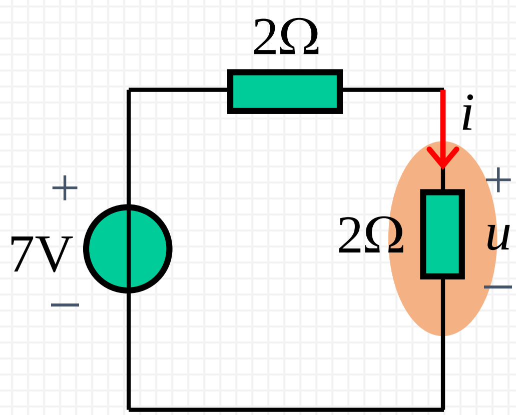
例2　已知 $0<i<1\text{A}$, $u=2i$; $i>1\text{A}$, $u=i+1$。求电压$\boldsymbol{u}$。





假设工作在第1段: $0<i<1\text{A}$

条件



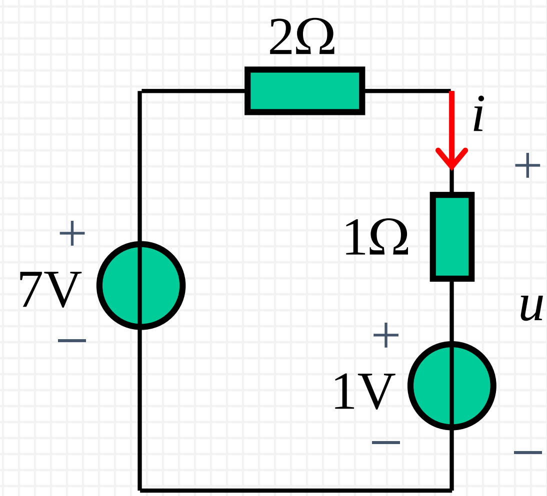
性质

$i=1.75\text{A}$

$u=3.5\text{V}$

$i=1.75\text{A}>1\text{A}$　　假设**错误**

假设工作在第2段： $i>1\text{A}$

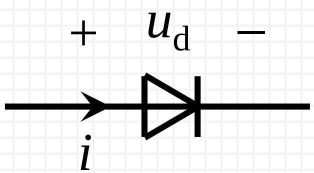


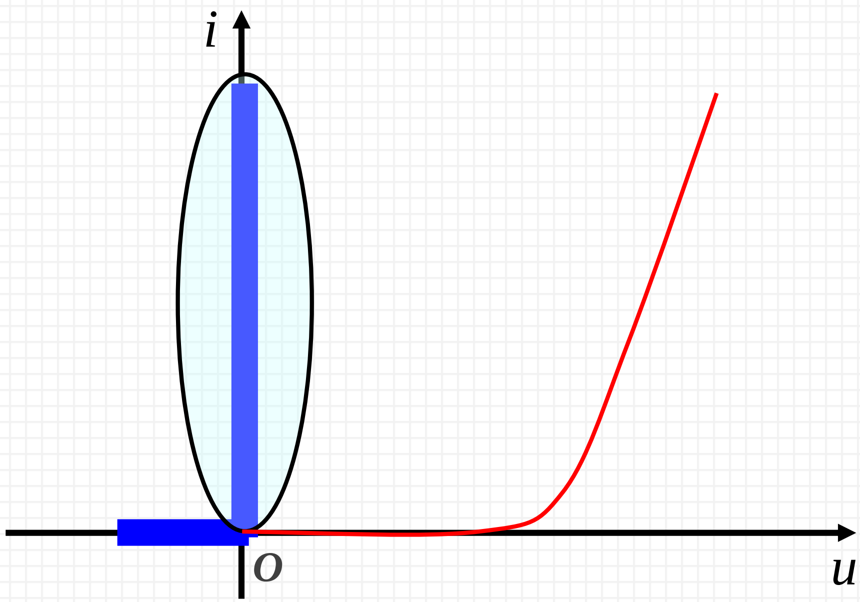
$i=2\text{A}$

$u=3\text{V}$　　假设**正确**

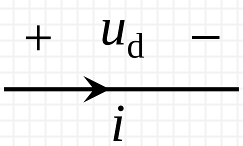
研究二极管的分段线性模型

模型1





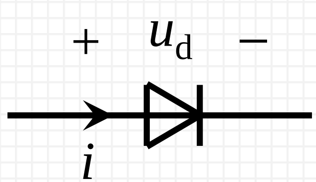
(半个)**短路**

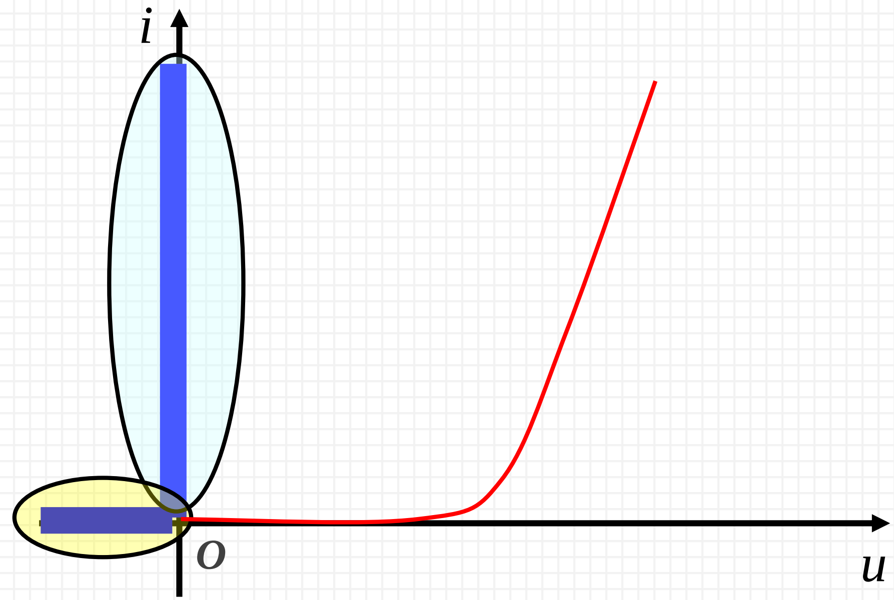


条件是 $i > 0$

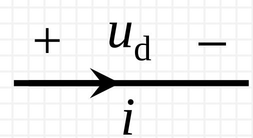
理想二极管模型

模型1



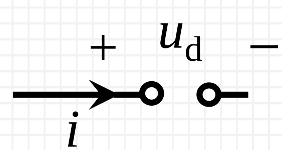


(半个)短路



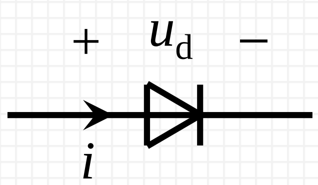
条件是 $i > 0$

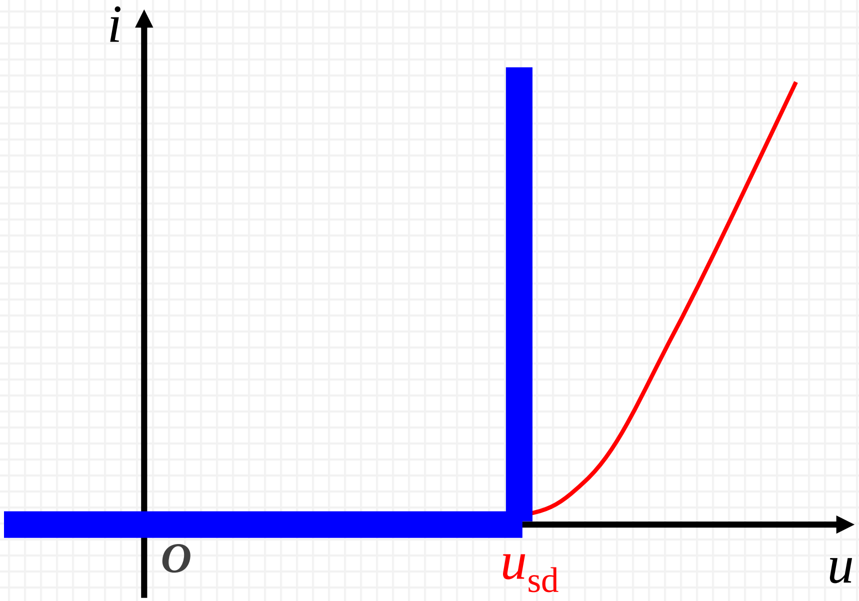
(半个)开路



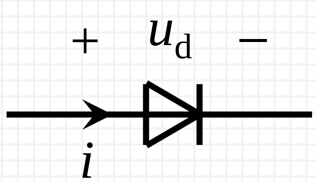
条件是 $u_d < 0$

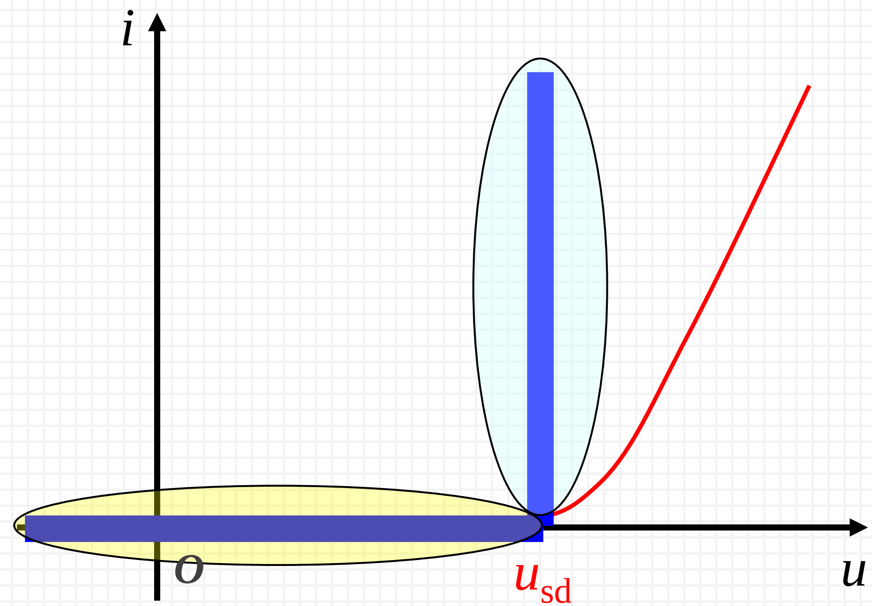
模型2



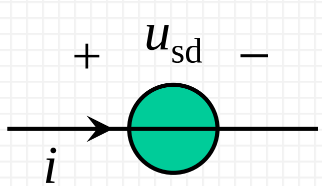


模型2





独立电压源

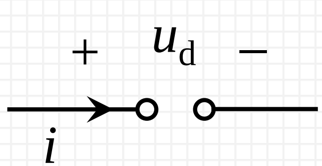


条件是 $i > 0$

硅二极管u_{sd}=0.7V

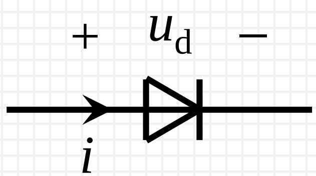
锗二极管u_{sd}=0.2V

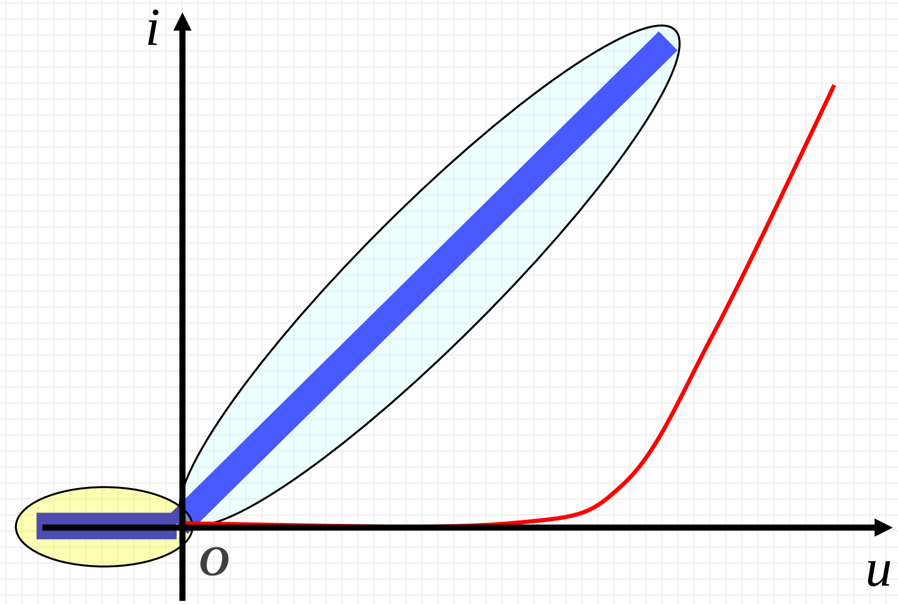
开路



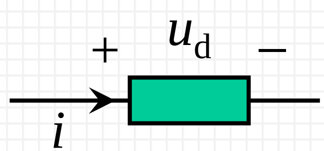
条件是 $u_d < u_{sd}$

模型3



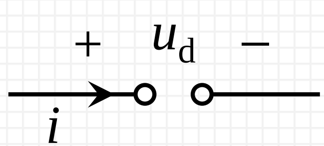


电阻



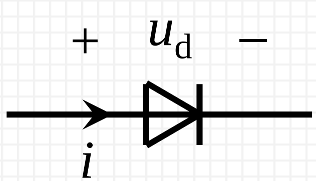
条件是 $i > 0$或$u > 0$

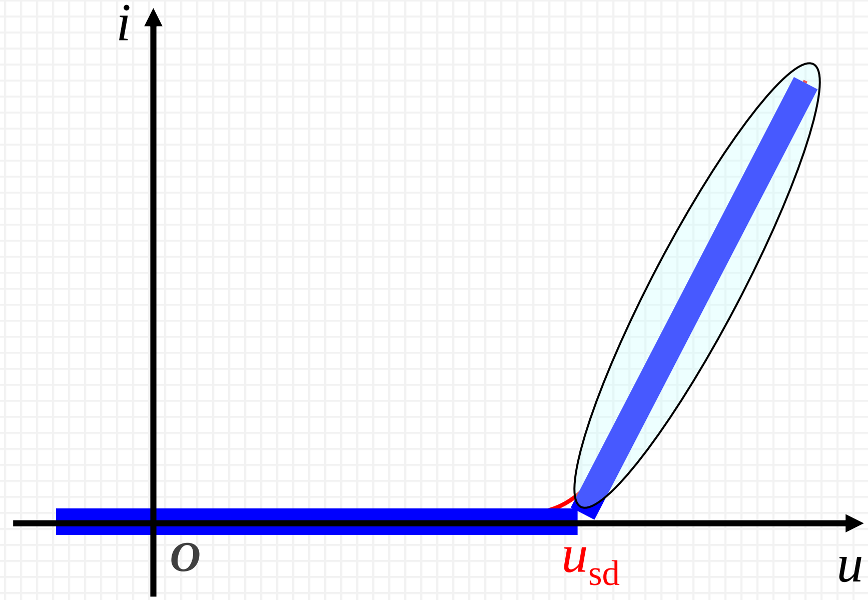
开路



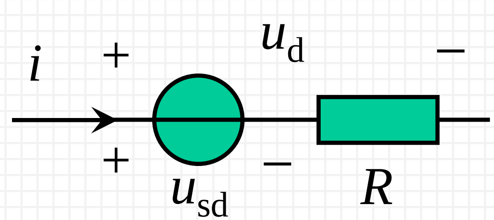
条件是 $u_d < 0$

模型4



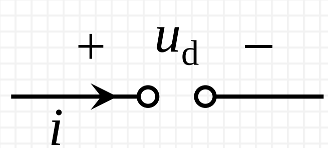


独立电压源串电阻



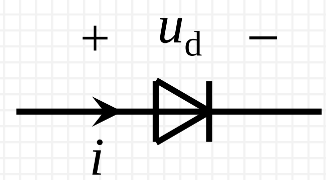
条件是 $i > 0$或$u_d > u_{sd}$

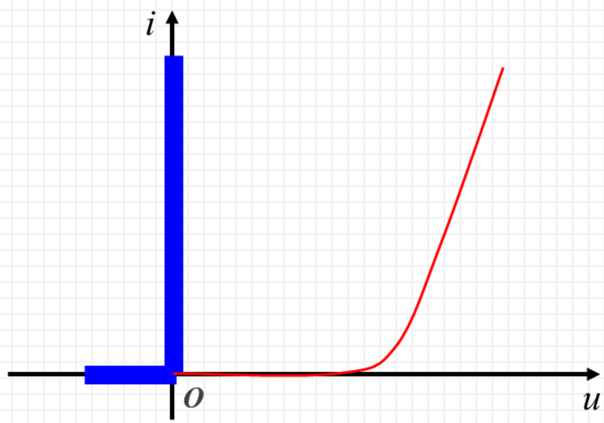
开路

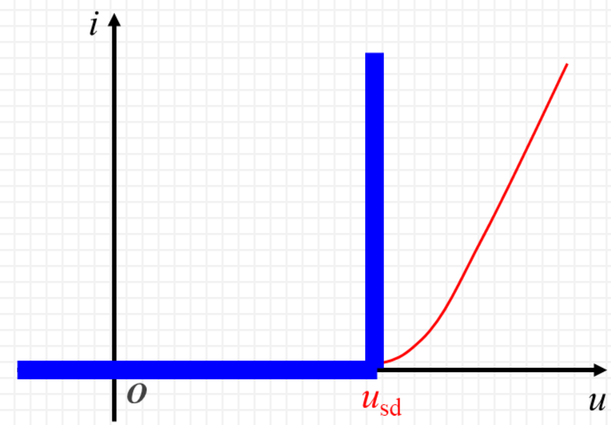


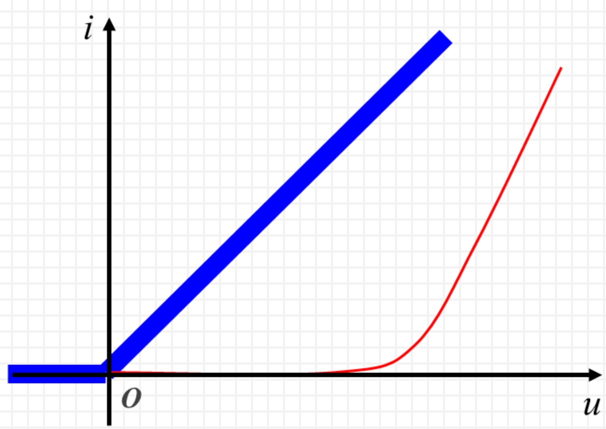
条件是 $u_d < u_{sd}$

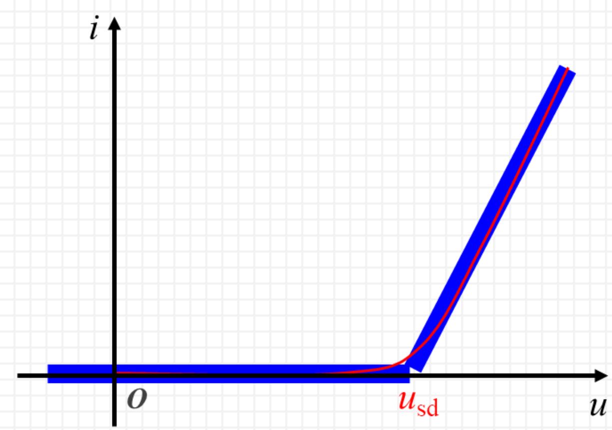
为什么有这么多模型？什么时候用哪个？



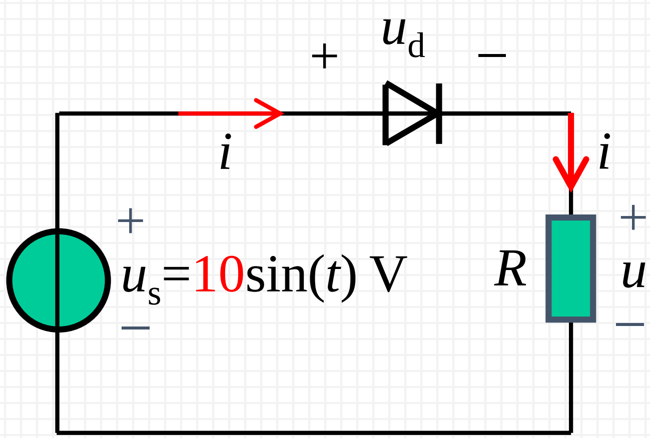








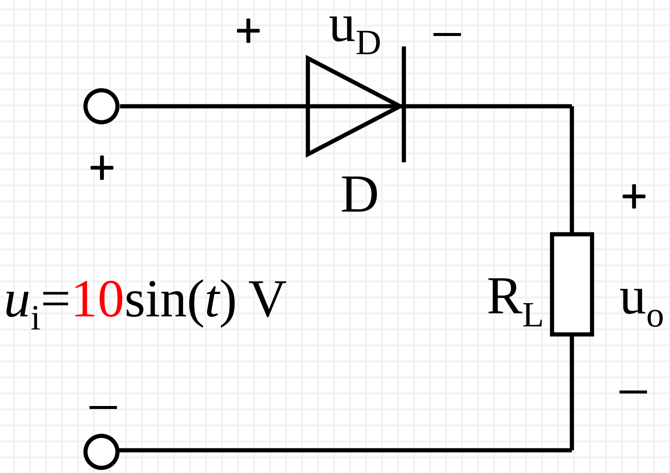
例3 用分段线性法求 u，用**理想二极管**模型。

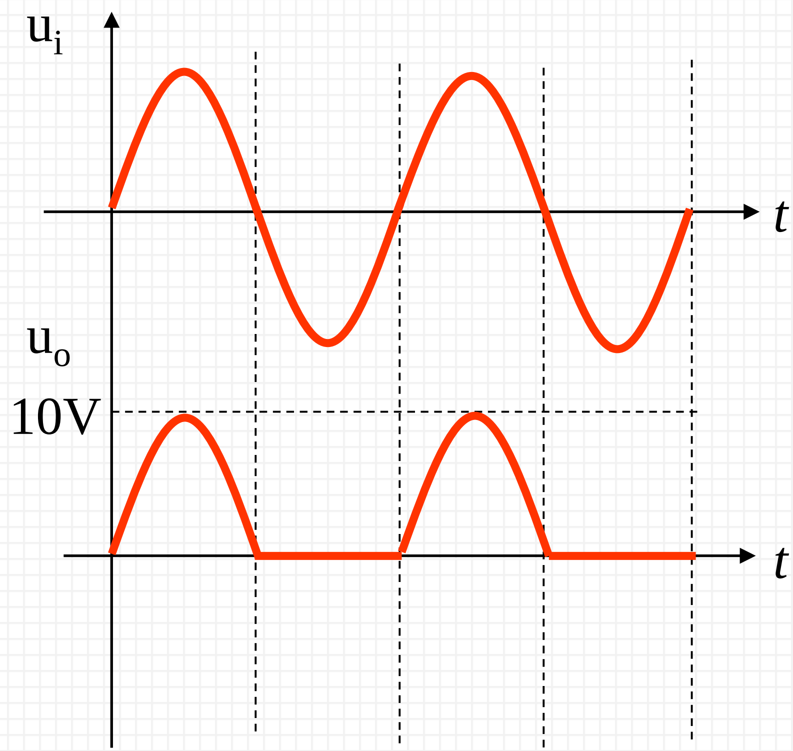


方法：

假设 → 检验

模型1 短路 条件是 $i > 0$	开路 条件是 $u_d < 0$
假设二极管短路，得	假设二极管开路，得
$u = 10\sin(t)$	$u = 0$
$i = \dfrac{10\sin(t)}{R}$	$u_d = 10\sin(t)$
$\sin(t) > 0$ 时成立	$\sin(t) < 0$ 时成立



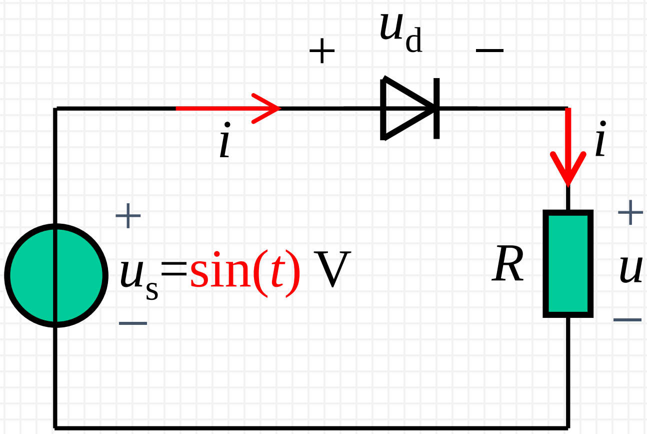


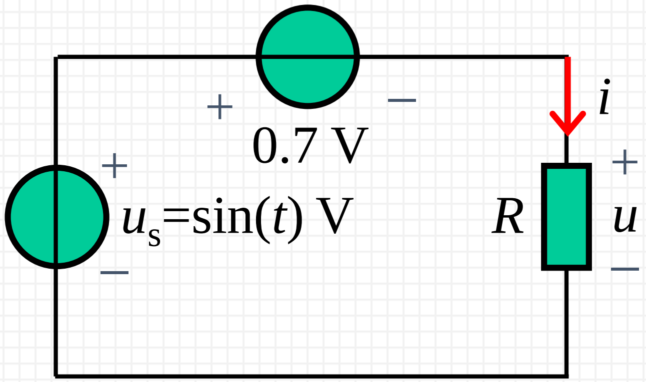
将二极管当作理想二极管处理

二极管半波整流

思考：二极管两端的电压波形？

例3 用分段线性法求u。二极管用**模型2**，硅二极管。





u 的波形怎样?

模型2	**0.7V独立电压源**， 条件是 $i>0$	
	开路， 条件是 $u_d < u_{sd}$	

设 $i>0$

$$u = \sin(t) - 0.7$$

$$i = \frac{\sin(t) - 0.7}{R}$$

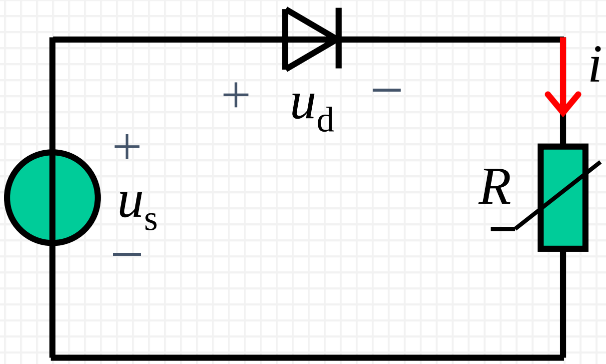
即 $\sin(t)>0.7$ 时成立。

设二极管**开路**，得 $u = 0$

$$u_d = \sin(t)$$

在 $\sin(t)<0.7$ 时成立。

含两个非线性电阻



二极管 $\begin{cases} \text{短路} & \text{条件是 } i > 0 \\ \text{开路} & \text{条件是 } u_d < 0 \end{cases}$

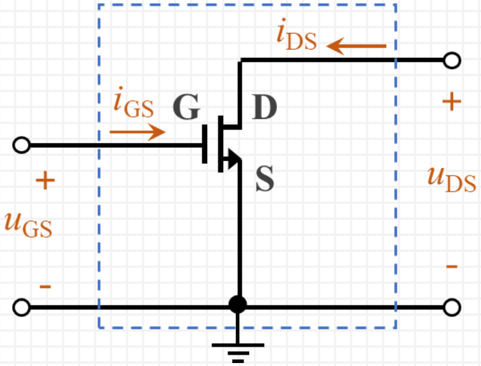
非线性 $\boldsymbol{R}$ $\begin{cases} \boldsymbol{u = 2i\,,\ \ i < 1\text{A}} \\ \boldsymbol{u = i + 1,\ \ i \geq 1\text{A}} \end{cases}$

如果电路中有两个非线性电阻，各分为两段，则要假设四个状态，求解4个相同拓扑结构的电路。

分段线性解法的特点

- **步骤**
  - 将非线性元件根据精度的需要划分为若干段，每段中用线性元件来建模。确定模型和条件
  - 假设非线性元件位于某一段，将模型带入，检验条件是否满足
- **优点**
  - 线性模型的求解比较方便
- **缺点**
  - 精度上有牺牲
  - 非线性元件多的时候需要求解的线性电路数量大大增加

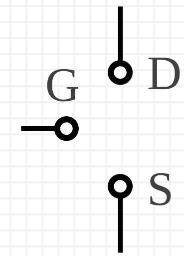
用分段的思想来分析MOSFET电路



1. 截止区

条件 $(u_{GS}-U_T)<0$

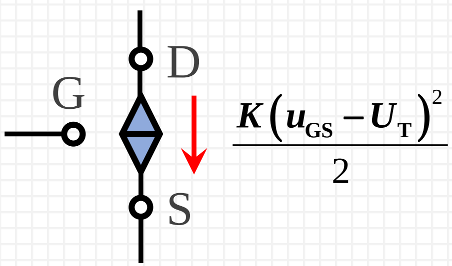
性质 $i_{DS}=0$



2. 恒流源区

条件 $0<(u_{GS}-U_T)<u_{DS}$

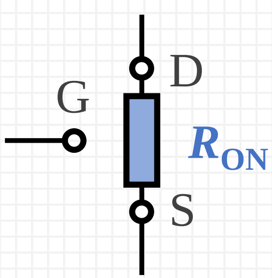
性质 $i_{DS}=\dfrac{K\left(u_{GS}-U_T\right)^2}{2}$



3. 电阻区

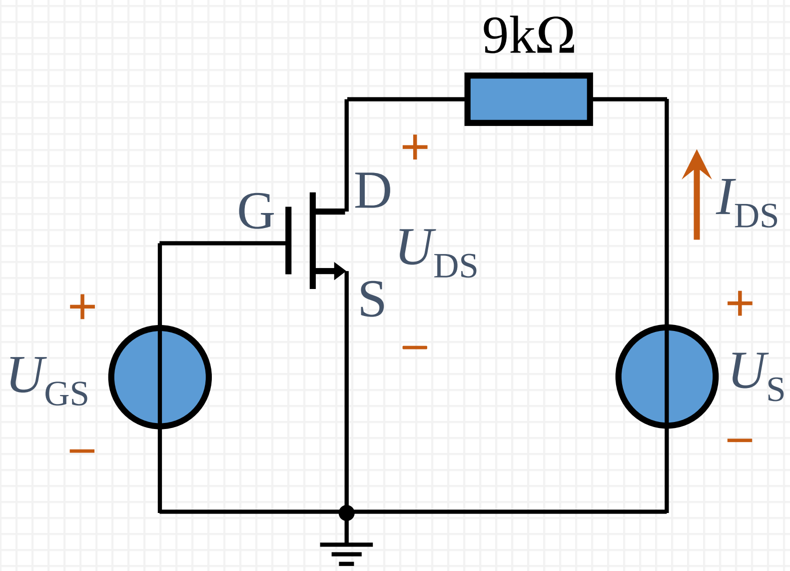
条件 $(u_{GS}-U_T)>u_{DS}$

性质 R_{ON}



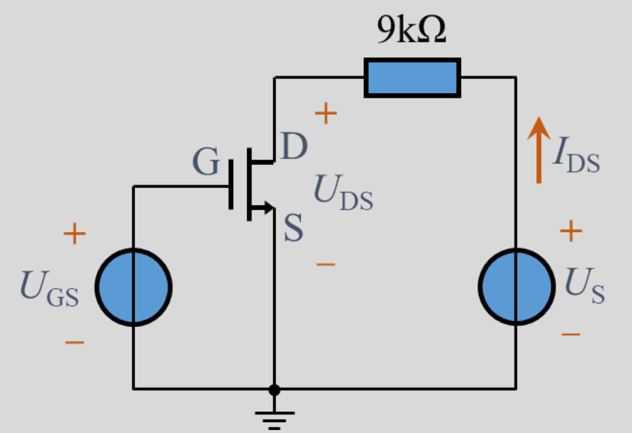
问题： 给定MOSFET元件参数和U_S数值，U_{GS}取不同值时，如何确定MOSFET工作区间？

假设-检验！



例1：$U_S = 5\text{V}$，$U_{GS} = 1.3\text{V}$，$K = 0.5\text{mA/V}^2$，$U_T = 1\text{V}$，$R_L = 9\text{k}\Omega$，$R_{ON} = 1\text{k}\Omega$

$U_{GS} > U_T$ → D、S导通

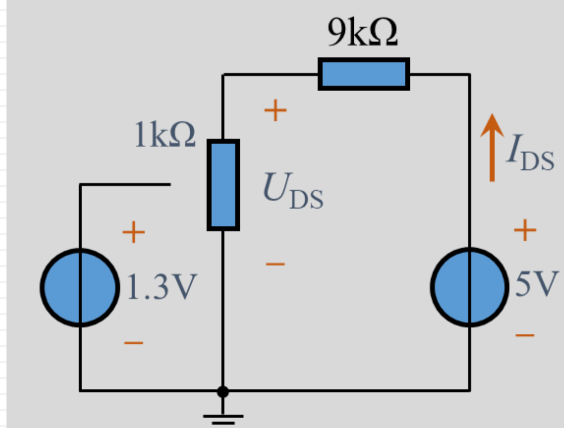


假设“可变电阻区”

$$U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$$

0.5 > (1.3 - 1)

假设**不成立**



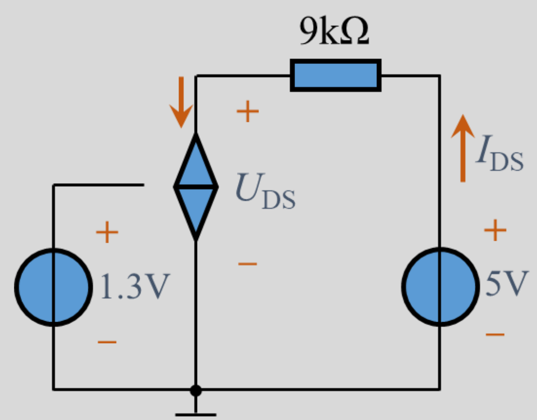
假设“恒流源区”

$$(U_{GS} - U_T) < U_{DS}$$

(1.3 - 1) < 4.80

假设**成立**

$$I_{DS} = \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$



$$U_{DS} = U_S - I_{DS}R_L$$

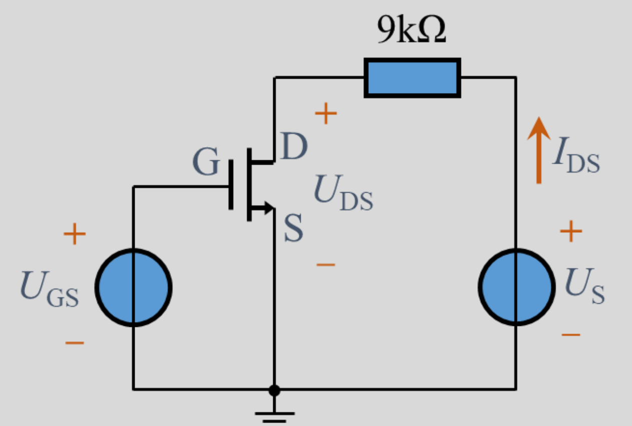
$$U_{DS} = 5 - 9000\frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$

$$= 5 - \frac{0.5\times(1.3-1)^2}{2}\times 9 = 4.80\text{V}$$

输入U_{GS}为“1”时，输出U_{DS}为“0” ⟶ 反相器

例2：$U_S = 5V$，$U_{GS} = 5V$，$K = 0.5mA/V^2$，$U_T = 1V$，$R_L = 9k\Omega$，$R_{ON} = 1k\Omega$

$U_{GS} > U_T$ ⟶ D、S导通

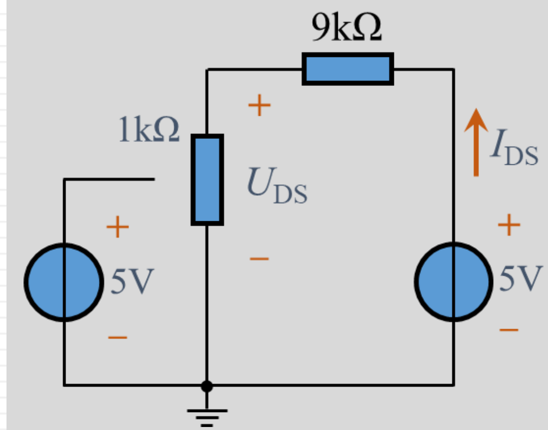


假设“可变电阻区”

$$U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$$

$$0.5 < (5 - 1)$$

假设**成立**



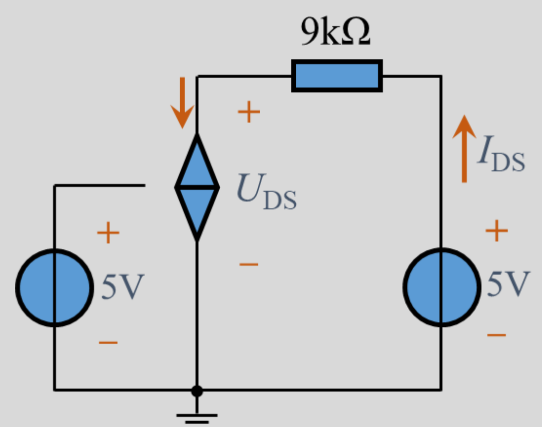
假设“恒流源区”

$$(U_{GS} - U_T) < U_{DS}$$

$$(5 - 1) > -31$$

假设**不成立**

$$I_{DS} = \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$



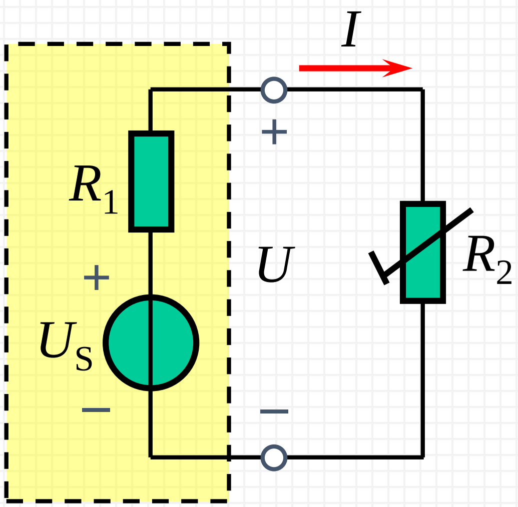
$$U_{DS} = U_S - I_{DS}R_L$$

$$U_{DS} = 5 - 9000\frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$

$$= 5 - \frac{0.5\times(5-1)^2}{2}\times 9 = -31V$$

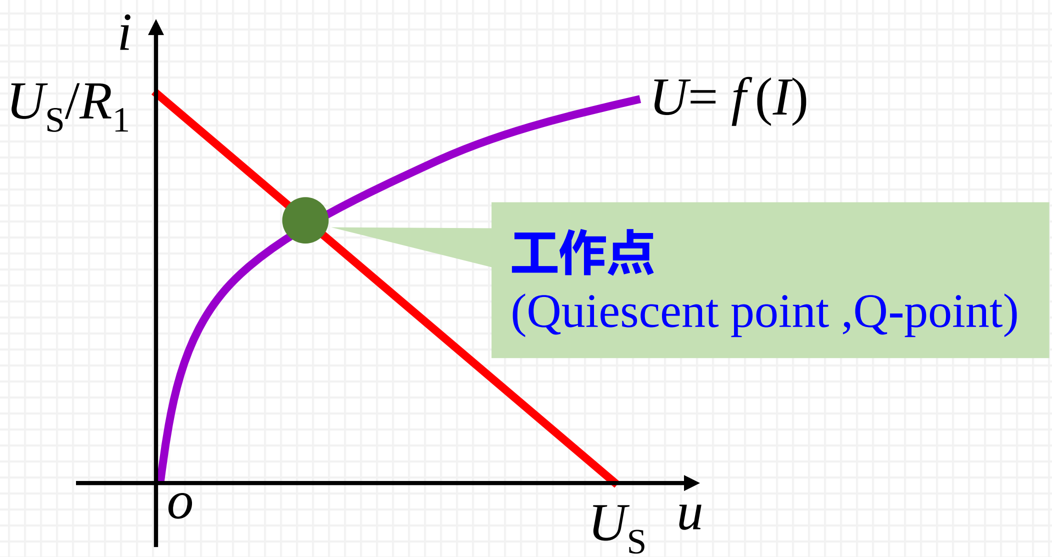
4 非线性电阻电路的图形解法

用**图解法**求解非线性电路



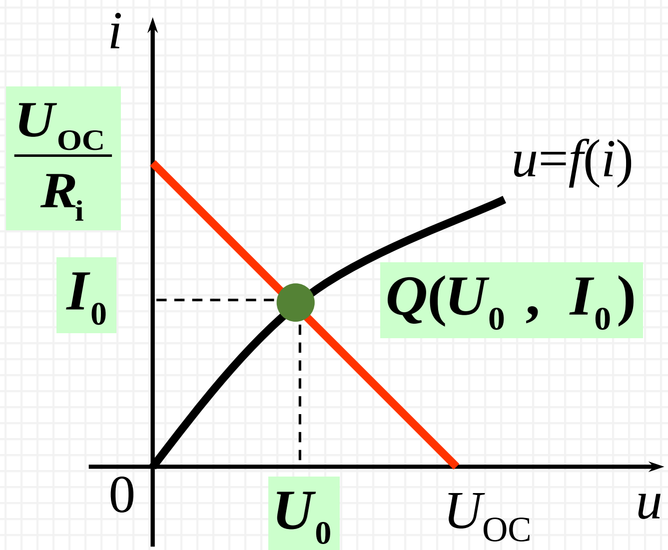
$U = U_S - R_1 I$

R_2: $U = f(I)$



$$u = U_{OC} - R_i i$$

其特性为一直线。



两曲线交点坐标 (U_0, I_0) 即为所求解答。

图形解法的特点

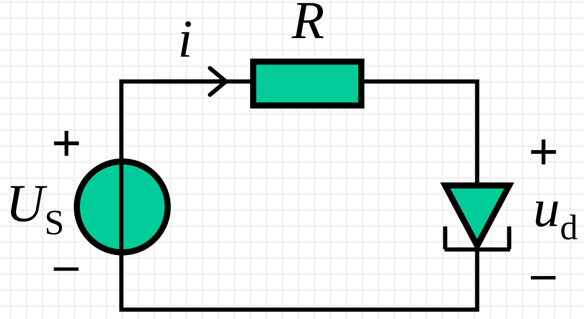
- 步骤
  - 将除非线性元件外的线性电路用戴维南等效
  - 在同一幅图中画出戴维南电路和非线性元件的u-i关系，其交点即为非线性电路的电压和电流（工作点, Q-point）
- 优点
  - 简单
  - 直观，物理意义清晰
- 缺点
  - 精度上有牺牲
  - 适宜求解只在一个端口上含有非线性电阻的电路

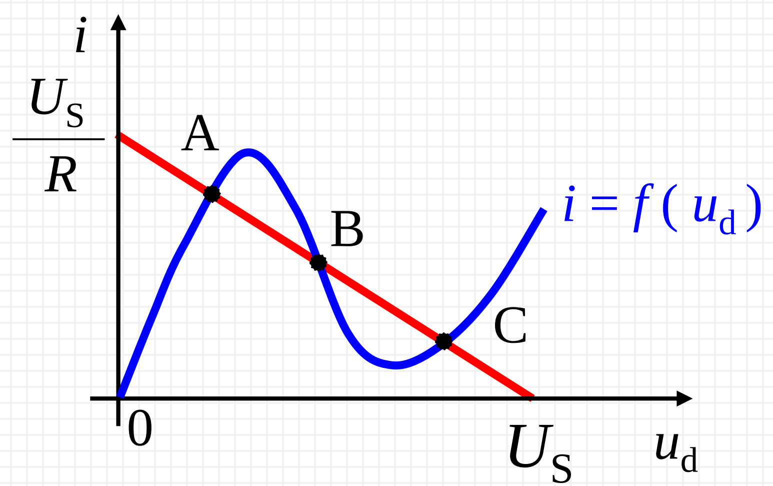
5 非线性电阻电路解的存在性与唯一性

线性电路一般有唯一解。

非线性电阻电路可以有多个解或没有解。

例1

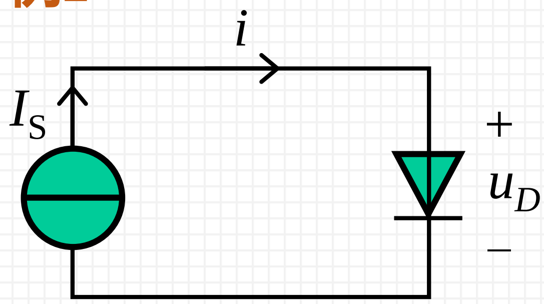


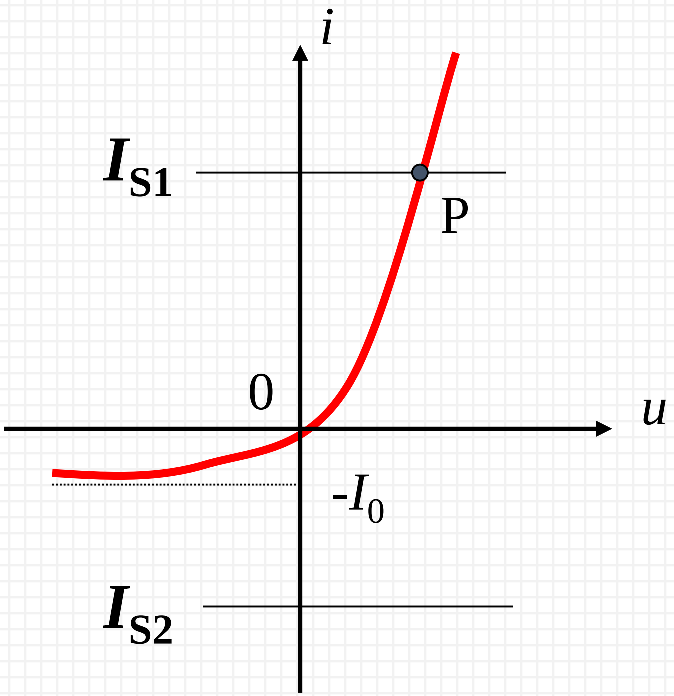


$$R\,i + u_d = U_S$$

$$i = f\,(\,u_d\,)$$

例2





当 $I_S > -I_0$ 时 有唯一解

当 $I_S < -I_0$ 时 无解

非线性电阻电路有唯一解的充分条件请参考教材4.1.2节