# 《微积分A2》第五讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年03月02日

**Theorem**

定理: 设二元函数 $f(x,y)$, 以及两个一元函数 $x(t)$, $y(t)$ 均可微, $t\in J$, 且它们可以复合, 则复合函数 $f(x(t),y(t))$ 也可微, 且

$$[f(x(t),y(t))]' = f_x(x,y)x'(t) + f_y(x,y)y'(t),$$

其中 $(x,y)=(x(t),y(t))$, $t\in J$.

# 例一

课本第50页例1.5.4: 设 $z=u^2v-uv^2$, $u=x\sin y$, $v=x\cos y$, 求偏导数 $z_x$.

解: 记 $f(u,v)=u^2v-uv^2$, 则 $z=f(u,v)$. 根据上述定理可知

$$z_x=f_u(u,v)u_x+f_v(u,v)v_x=(2uv-v^2)u_x+(u^2-2uv)v_x$$

$$=x^2\left[(2\cos y\sin y-\cos^2 y)\sin y+(\sin^2 y-2\sin y\cos y)\cos y\right]$$

$$=x^2\left[(\sin 2y-\cos^2 y)\sin y+(\sin^2 y-\sin 2y)\cos y\right]$$

$$=\frac{3x^2}{2}\sin 2y(\sin y-\cos y).$$

课本第51页例1.5.6: 设 $f(u)$ 可微, 记 $z = \frac{y}{x} + xyf(\frac{y}{x})$, 求偏导数 $z_x$.

解:

$$z_x = \left[\frac{y}{x}\right]_x + yf(y/x) + xy\Big[f(y/x)\Big]_x$$

$$= -\frac{y}{x^2} + yf(y/x) + xyf'(y/x)\left[\frac{y}{x}\right]_x$$

$$= -\frac{y}{x^2} + yf(y/x) - \frac{y^2}{x}f'(y/x).$$

**Theorem**

定理：设 $n$ 元函数 $f(u_1,\cdots,u_n)$ 在开集 $D\subset \mathbb{R}^n$ 上为 $C^1$ 的，映射 $u=(u_1,\cdots,u_n):J\subset\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^n$ 是 $C^1$ 的，这里 $J$ 为一个开区间，则复合函数 $f(u(t))$ 在 $J$ 上也是 $C^1$ 的，且

$$[f(u_1(t),\cdots,u_n(t))]'=f_{u_1}(u)u_1'(t)+\cdots+f_{u_n}(u)u_n'(t),$$

或简写为 $[f(u(t))]'=\nabla f(u)\cdot u'(t)$，其中 $u=u(t)$，$t\in J$.

# 情形三: 多元函数复合多元函数, 回忆

## Theorem

定理: 设 $g:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, $f:\Omega_1\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, 且 $g(\Omega)\subset\Omega_1$, 其中 $\Omega$ 和 $\Omega_1$ 均为开集. 假设 $f$ 和 $g$ 都是 $C^1$ 的, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 $\Omega$ 上也是 $C^1$ 函数, 且

$$D[f(g(x))]=Df(u)\cdot Dg(x),\quad (*)$$

其中 $u=g(x)$, $x\in\Omega$,

注: 式 (*) 中 $Df(u)$ 记函数 $f(u)$ 的 Jacobian 矩阵, 它是 $1\times k$ 矩阵(行向量), $Dg(x)$ 记 $g(x)$ 的 Jacobian 矩阵, 它是 $k\times n$ 矩阵.

例一: 设 $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (u,v)$, $C^1$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $(u,v) \mapsto f(u,v)$, $C^1$, 则复合函数 $h(x,y,z) = f(g(x,y,z)) = f(u(x,y,z), v(x,y,z))$ 也 $C^1$, $Dh(x,y,z) = Df(u,v)Dg(x,y,z)$, 此即

$$[h_x, h_y, h_z] = [f_u, f_v]\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

**Theorem**

定理：设 (i) 映射 $\mathbf{g}:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 是 $C^1$ 的，$\Omega$ 开；(ii) 映射 $\mathbf{f}:\Omega_1\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ 是 $C^1$ 的，$\Omega_1$ 开；(iii) $\mathbf{g}(\Omega)\subset\Omega_1$ (可复合条件)，则复合映射 $\mathbf{h}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ 也是 $C^1$ 的，且

$$D[\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))]=D\mathbf{f}(\mathbf{u})D\mathbf{g}(\mathbf{x}),\ \text{即}\ \Big[\quad\Big]_{m\times n}=\Big[\quad\Big]_{m\times k}\Big[\quad\Big]_{k\times n},$$

其中 $\mathbf{u}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$，$\mathbf{x}\in\Omega$.

# 定理证明

证明：设 $h=(h_1,\cdots,h_m)$. 要证明 $h$ 是 $C^1$ 的，只要证明每个分量函数 $h_i$ 是 $C^1$ 的. 由于 $h_i(x)=f_i(g(x))=f_i(g_1,\cdots,g_k)$，$g_j=g_j(x_1,\cdots,x_n)$，且 $f_i$ 和 $g$ 都是 $C^1$ 的，根据多元函数复合多元情形的结论可知，$h_i(x)$ 是 $C^1$ 的，且 $Dh_i(x)=Df_i(u)Dg(x)$，$i=1,\cdots,m$，其中 $u=g(x)$. 于是

$$Dh(x)=\begin{bmatrix} Dh_1(x)\\ Dh_2(x)\\ \vdots\\ Dh_m(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Df_1(u)\\ Df_2(u)\\ \vdots\\ Df_m(u)\end{bmatrix}Dg(x)=Df(u)Dg(x).$$

定理得证.

<u>例</u>: 设 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, 且 $f(x,x^2)\equiv 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (i) 若 $f_x(x,x^2)\equiv x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 求 $f_y(x,x^2)$ (ii) 若 $f_y(x,y)\equiv x^2+2y$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 求 $f(x,y)$.

<u>解</u>: (i) 对恒等式 $f(x,x^2)\equiv 1$ 两边求导得 $f_x(x,x^2)+f_y(x,x^2)2x\equiv 0$. 若 $f_x(x,x^2)\equiv x$, 则 $x+2xf_y(x,x^2)\equiv 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 由此可得 $f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(ii) 令 $F(x,y)=f(x,y)-(x^2y+y^2)$，则 $F(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微，且 $F_y(x,y)=f_y(x,y)-(x^2+2y)=0$，$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 这说明函数 $F(x,y)$ 在 $R^2$ 上与变量 $y$ 无关，即 $F(x,y)=\phi(x)$，$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $f(x,y)=x^2y+y^2+\phi(x)$. 由假设 $f(x,x^2)\equiv 1$ 可知 $x^2\cdot x^2+x^4+\phi(x)\equiv 1$，即 $\phi(x)=1-2x^4$. 因此 $f(x,y)$ $=x^2y+y^2+1-2x^4$. 解答完毕.

# 例子，行列式求导规则

定理：设 $a_{ij} = a_{ij}(t)$ 可导，$t \in J$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$，则行列式 $\det[a_{ij}(t)]$ 可按行或按列求导．以 $n = 3$ 为例，$(\det[a_{ij}])' =$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{31} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

或者 $(\det[a_{ij}])' =$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

**Lemma**

行列式函数 $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n^2} \mapsto \det A$ 的偏导数由下式给出

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = A_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \quad (*)$$

其中 $A_{ij}$ 表示行列式 $\det A$ 的元素 $a_{ij}$ 所对应的代数余子式.

**Proof.**

证明: 将行列式 $\det A$ 按第 $i$ 行展开得 $\det A = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_{ik}$. 由于 $n$ 个代数余子式 $A_{ik}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 与元素(变量) $a_{ij}$ 无关, 故偏导数公式(*)成立. $\square$

# 行列式求导规则之证明

证明: 根据一般多元函数复合一元函数的求导锁链规则得

$$(\det A)' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det A\right]a'_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}a'_{ij}.$$

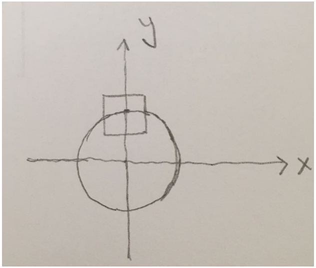
记 $D_i$ 为仅对行列式 $\det A$ 的第 $i$ 行求导, 其余元素保持不变所得的行列式, 即

$$D_i = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

则 $D_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}a'_{ij}$. 这就证明了证明了行列式按行求导规则.

行列式按列求导规则的证明类似. 证毕.

熟知函数方程 $F(x, y) = 0$ 的轨迹，通常代表了一条或几条平面曲线. 例如方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 几何上代表单位圆周. 问题: 这些曲线可否表为函数 $y = f(x)$ 或 $x = g(y)$ 的函数曲线. 例如方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 在点 $(0, 1)$ 附近可写作 $y = \sqrt{1 - x^2}$. 如图.



定理(二维情形): 设二元函数 $F(x,y)$ 在平面开集 $D\subset \mathbb{R}^2$ 上是 $C^1$ 的. 假设 $F(x_0,y_0)=0$, $(x_0,y_0)\in D$ 且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, 则存在唯一的(隐) 函数 $f\colon J_\alpha\to J'_\beta$, 其中 $J_\alpha \triangleq (x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, $J'_\beta \triangleq (y_0-\beta, y_0+\beta)$, 使得

(i) $y_0=f(x_0)$, $F(x,f(x))\equiv 0$, $\forall x\in J_\alpha$;

(ii) 对于 $(x,y)\in J_\alpha\times J'_\beta$, $F(x,y)=0$ 当且仅当 $y=f(x)$,

(iii) 隐函数 $f(x)$ 是 $C^1$ 的, 且

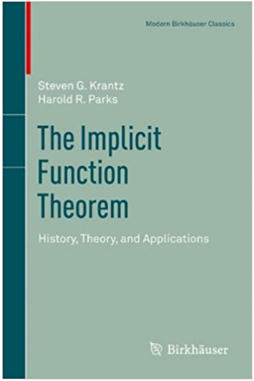
$$f'(x)=-\left.\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\right|_{y=f(x)},\quad \forall x\in J_\alpha.$$

注记: 根据 IFT 中的隐函数导数公式

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\bigg|_{y=f(x)}, \quad x \in J_\alpha, \quad (*)$$

可知隐函数 $f(x)$ 的光滑性, 与函数 $F(x,y)$ 的光滑性相同. 理由如下. 由 IFT 可知, 当 $F(x,y)$ 是 $C^1$ 时, $f(x)$ 也是 $C^1$ 的. 当 $F(x,y)$ 是 $C^2$ 时, 则 $F_x(x,y)$ 和 $F_y(x,y)$ 均为 $C^1$ 的, 于是等式 (*) 右边的函数也是 $C^1$ 的. 此即 $f'(x)$ 是 $C^1$ 的. 这表明 $f(x)$ 是 $C^2$ 的. 进一步由归纳法不难证明, 则当 $F(x,y)$ 是 $C^k$ 时, $f(x)$ 也是 $C^k$ 的.

推荐一本关于隐函数定理的专著: The Implicit Function Theorem, Stephen G. Krantz and Harold R. Parks, 2002, Birkhäuser. 可通过清华图书馆下载.



# 例一

**Example**

例: 考虑方程 $F(x,y)=x^2+y^2-1$. 假设 $F(x_0,y_0)=0$, 也就是说 $x_0^2+y_0^2-1=0$. 因此当 $F_y(x_0,y_0)=2y_0\neq 0$ 时, 则方程 $F(x,y)=0$ 的解, 即单位圆周在点 $(x_0,y_0)$ 附近, 可表示为 $y=f(x)$. 实际上隐函数 $f(x)$ 可知显式写出 $f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$, 其中 $\pm=\mathrm{sgn}(y_0)$.

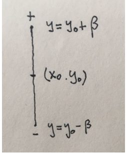
# 例二

例: 证明方程 $\sin x + \ln y - xy^3 = 0$ 在点 $(0,1)$ 附近定义了一个 $C^1$ 函数 $y = f(x)$ 满足方程，即 $\sin x + \ln[f(x)] - xf(x)^3 \equiv 0$, $x \in (-\delta, \delta)$，且 $f(0) = 1$. 进一步求 $f'(0)$.

解: 记 $F(x,y) \triangleq \sin x + \ln y - xy^3$，则 $F(0,1) = 0$，且 $F_y(x,y) = y^{-1} - 3xy^2$, $F_y(0,1) = 1 \neq 0$. 由 IFT 知在点 $(0,1)$ 附近，存在唯一的 $C^1$ 函数 $y = f(x)$，满足 $f(0) = 1$，且 $F(x, f(x)) \equiv 0$，即 $\sin x + \ln[f(x)] - xf(x)^3 \equiv 0$, $x \in (-\delta, \delta)$. 再由导数公式 $f'(0) = -F_x(0,1)F_y(0,1)^{-1}$. 简单计算得 $F_x(x,y) = \cos x - y^3$, $F_x(0,1) = 0$. 因此 $f'(0) = 0$. 解答完毕.

证明分三步: Step 1. 证明隐函数的存在性和唯一性; Step 2. 证明隐函数的连续性; Step 3. 证明隐函数的连续可微性及其导数公式.

Step 1. 证明隐函数的存在性和唯一性. 由假设 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 不妨设 $F_y(x_0, y_0) > 0$. 再根据 $F_y(x, y)$ 的连续性可知, 存在 $\beta > 0$, 使得 $F_y(x_0, y) > 0$, $\forall y \in [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$. 因此函数 $F(x_0, y)$ 关于 $y$ 在闭区间 $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ 上严格单调增.

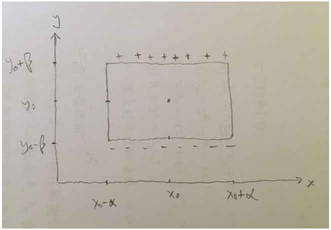


于是

$$F(x_0, y) < 0 \quad \forall y \in [y_0 - \beta, y_0),$$

$$F(x_0, y) > 0 \quad \forall y \in (y_0, y_0 + \beta].$$

特别 $F(x_0, y_0 - \beta) < 0 < F(x_0, y_0 + \beta)$. 再由 $F(x, y_0 \pm \beta)$ 的连续性知，存在 $\alpha > 0$，使得 $F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta)$，$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. 如图所示.

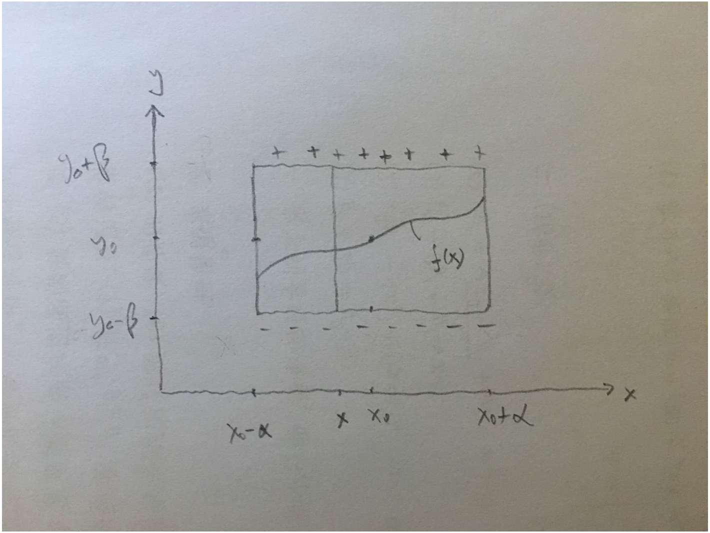


由于 $F_y(x_0, y_0) > 0$，以及 $F_y(x, y)$ 连续，故可设 $F_y(x, y) > 0$，$\forall (x, y) \in R_{\alpha,\beta}$，其中

$$R_{\alpha,\beta} = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta],$$

因为 $\alpha, \beta$ 可以适当缩小．于是对 $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$，$F(x, y)$ 关于 $y$ 严格单调上升．注意到 $F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta)$，故存在唯一 $y = f(x) \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$，使得 $F(x, f(x)) = 0$. 特别 $y_0 = f(x_0)$．如下图所示．故隐函数 $f(x)$ 的存在性和唯一性得证.

# 证明续三



Step 2. 证明隐函数的连续性. 任取 $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, 且 $x+\triangle x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$. 记 $\triangle y = f(x+\triangle x) - f(x)$. 由于 $F(x+\triangle x, f(x+\triangle x)) = 0$, 且 $F(x, f(x)) = 0$, 故

$$0 = F(x+\triangle x, f(x+\triangle x)) - F(x, f(x))$$

$$= F(x+\triangle x, y+\triangle y) - F(x, y) \quad (y = f(x))$$

$$= F(x+\triangle x, y+\triangle y) - F(x, y+\triangle y) + F(x, y+\triangle y) - F(x, y)$$

$$= F_x(x+\lambda\triangle x, y+\triangle y)\triangle x + F_y(x, y+\mu\triangle y)\triangle y,$$

这里两次运用了 Lagrange 中值定理，其中 $\lambda, \mu \in (0,1)$. 于是

$$\triangle y = -\frac{F_x(x+\lambda\triangle x, y+\triangle y)\triangle x}{F_y(x, y+\mu\triangle y)}.$$

记

$$M = \max\{|F_x(x,y)|, (x,y) \in R_{\alpha,\beta})\},$$

$$m = \min\{|F_y(x,y)|, (x,y) \in R_{\alpha,\beta})\}.$$

由连续函数在有界闭集上的最值性可知 $m > 0$. 于是

$$|\triangle y| = |f(x+\triangle x) - f(x)| = \frac{|F_x(\cdots)||\triangle x|}{|F_y(\cdots)|} \le \frac{M|\triangle x|}{m}.$$

上式表明函数 $f$ 在任意点 $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ 处连续.

**Step 3.** 证明隐函数的可微性及其导数公式. 由刚建立的公式

$$\triangle y = -\frac{F_x(x+\lambda\triangle x, y+\triangle y)\triangle x}{F_y(x, y+\mu\triangle y)}$$

得

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{F_x(x+\lambda\triangle x, y+\triangle y)}{F_y(x, y+\mu\triangle y)}.$$

于上式中令 $\triangle x \to 0$, 并利用 $f(x)$ 的连续性即得

# 证明续七

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)},$$

其中 $y=f(x)$. 上式表明函数 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 上可导，并且其导函数连续. 定理得证. $\square$

**Theorem**

定理: 设 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上连续可微. 若 $f'(x_0)\neq 0$, $x_0\in(a,b)$, 则存在 $\varepsilon,\delta>0$, 以及函数 $x=g(y)$, $y\in J$, 其中 $J=(y_0-\delta,y_0+\delta)$, $y_0=f(x_0)$, 使得 (i) $x_0=g(y_0)$; (ii) 对于 $(x,y)\in K\times J$, 其中 $K=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, $y=f(x)\iff x=g(y)$; (iii) $g(y)$ 在 $J$ 连续可微, 且

$$g'(y)=\left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=g(y)},\quad y\in J.$$

Proof.

证明: 记 $F(x,y)=y-f(x)$, 则 $F(x,y)$ 是 $C^1$ 的, $F(x_0,y_0)=0$, 且 $F_x(x_0,y_0)=-f'(x_0)\neq 0$. 故由 IFT 知存在 $\varepsilon,\delta>0$, 以及函数 $x=g(y)$, $y\in J=(y_0-\delta,y_0+\delta)$, 使得 (i) $x_0=g(y_0)$;

(ii) $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$, $(x,y)\in K\times J$, $K=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$;

(iii) 函数 $x=g(y)$ 是 $C^1$ 的, 且

$$g'(y)=-\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}\bigg|_{x=g(y)}=\frac{1}{f'(x)}\bigg|_{x=g(y)},\quad y\in J.$$

定理得证. □

注: 根据等价关系

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = g(y), \quad \forall (x, y) \in K \times J$$

可知

$$x = g(f(x)), \quad \forall x \in K = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

$$y = f(g(y)), \quad \forall y \in J = (y_0 - \delta, y_0 + \delta).$$

此即函数 $x = g(y)$ 和 $y = f(x)$ 互为反函数.

定理: 设 $F: D \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ 为 $m+1$ 元 $C^1$ 函数, $D$ 为开集. 记 $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$. 若点 $(x_0, y_0) \in D$, 使得 $F(x_0, y_0) = 0$ 且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则存在 $\varepsilon, \delta > 0$ 以及函数 $y = f(x)$, $x \in B_\delta(x_0)$, 使得

(i) $y_0 = f(x_0)$, $F(x, f(x)) \equiv 0$, $\forall x \in B_\delta(x_0)$;

(ii) $F(x, y) = 0$ 当且仅当 $y = f(x)$, $\forall (x, y) \in B_\delta(x_0) \times J_\varepsilon(y_0)$, 这里 $J_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$;

(iii) $f(x)$ 是 $C^1$ 的, 且 $\nabla f(x) = -F_y(x, y)^{-1} \nabla_x F(x, y)\Big|_{y=f(x)}$, $x \in B_\delta(x_0)$, 其中 $\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

证明基本同二元情形. 细节略

例: 设 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F(x,y,z)=x(1+yz)+e^{x+y+z}-1$. 考虑方程 $F(x,y,z)=0$ 在原点 $(0,0,0)$ 附近解的集合表示为二元函数 $z=f(x,y)$ 的可能性.

解: 简单计算表明

$$\nabla F(x,y,z)=(1+yz+e^{x+y+z},xz+e^{x+y+z},xy+e^{x+y+z}).$$

于是 $F(0,0,0)=0$ 且 $\nabla F(0,0,0)=(2,1,1)$. 由于在原点处 $F_z=1\neq 0$, 故根据 IFT 知方程的解集合在原点 $(0,0,0)$ 附近可以表示为

(i) $z=f(x,y)$, $(x,y)\in B_{\delta_1}(0,0)$, $f(0,0)=0$ 且

$$(f_x, f_y)\Big|_{(0,0)} = -\frac{(F_x, F_y)}{F_z}\Big|_{(0,0,0)} = -(2,1).$$

实际上，由于在原点处 $(F_x, F_y) = (2,1)$，故根据 IFT 知方程的解集合在原点 $(0,0,0)$ 附近，还可以有如下两个表示

(ii) $x = g(y,z)$，$(y,z) \in B_{\delta_2}(0,0)$，$g(0,0) = 0$，且

$$(g_y, g_z)\Big|_{(0,0)} = -\frac{(F_y, F_z)}{F_x}\Big|_{(0,0,0)} = -\frac{1}{2}(1,1).$$

(iii) $y = h(z,x)$，$(z,x) \in B_{\delta_3}(0,0)$，$h(0,0) = 0$，且

$$(h_z, h_x)\Big|_{(0,0)} = -\frac{(F_z, F_x)}{F_y}\Big|_{(0,0,0)} = -(1,2).$$

解答完毕.

# 方程组情形, 记号

考虑方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0, \\ f_2(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0, \\ \vdots \\ f_m(x_n,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0. \end{cases}$$

为方便记 $F \triangleq (f_1,\cdots,f_m):\Omega\subset \mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$, $\Omega$ 开. 再记 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,\cdots,y_m)\in\mathbb{R}^m$, 则上述方程组可简写作 $F(x,y)=0$.

定理: 记号同上. 设映射 $F(x,y)$ 在 $\Omega$ 上是 $C^1$ 的, $F(x_0,y_0)=0$ 且 $m$ 阶矩阵 $F_y(x_0,y_0)$ 非奇, 则存在 $\varepsilon,\delta>0$, 以及映射 $\phi(\cdot)$: $B_\delta(x_0)\to \mathbb{R}^m$, 使得 (i) $y_0=\phi(x_0)$; (ii) $F(x,\phi(x))\equiv 0$, $\forall x\in B_\delta(x_0)$; (iii) 对于 $(x,y)\in B_\delta(x_0)\times B_\varepsilon(y_0)$, $F(x,y)=0$ 当且仅当 $y=\phi(x)$; (iv) $\phi(\cdot)$ 是 $C^1$ 的, 且

$$D\phi(x)=-[D_yF(x,y)]^{-1}D_xF(x,y)\Big|_{y=\phi(x)},\quad x\in B_\delta(x_0).$$

定理证明略. 详见常庚哲史济怀《数学分析教程》(上), 第三版, page 392-395.

上述定理中的导数 $D\phi(x)$ 可如下导出：根据链规则，对恒等式 $F(x,\phi(x)) \equiv 0$ 求导得

$$D_xF(x,y) + D_yF(x,y)D\phi(x) = 0, \quad y = \phi(x).$$

由此立刻得到关于隐函数 $\phi(x)$ 的导数公式

$$D\phi(x) = -[D_yF(x,y)]^{-1}D_xF(x,y)\Big|_{y=\phi(x)}, \quad x \in B_\delta(x_0).$$

上述公式中各矩阵的阶如下

$$\Big[\quad\Big]_{m\times n} = -\Big[\quad\Big]^{-1}_{m\times m}\Big[\quad\Big]_{m\times n}.$$

例: 设 $F=(f,g):\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} f(x,y,u,v)=3x^2+y^2+u^2+v^2-1, \\ g(x,y,u,v)=x^2+2y^2-u^2+v^2-1. \end{cases}$$

不难验证, 点 $P_0=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{8}},\sqrt{\frac{5}{8}})$ 是方程组 $F(x,y,u,v)=0$ 的一个解. 考虑映射 $F$ 在点 $P_0$ 处的 Jacobian 矩阵

$$\begin{bmatrix} 6x & 2y & 2u & 2v \\ 2x & 4y & -2u & 2v \end{bmatrix}_{P_0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \\ 0 & 2 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix}.$$

# 例子续一

因矩阵

$$D_{(u,v)}F\Big|_{P_0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix}$$

非奇，故由 IFT 知存在 $C^1$ 映射 $h=(u,v)$: $B_\delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，使得

$$\begin{cases} u(x_0,y_0)=u_0, \\ v(x_0,y_0)=v_0, \end{cases}$$

其中 $B_\delta=\{(x,y),(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$，且

$$F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0,\quad \forall (x,y)\in B_\delta.$$

进一步映射 h 在点 $(x_0,y_0)$ 处的 Jacobian 矩阵为

# 例子续二

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} = -\begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix}_{P_0}^{-1} \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}_{P_0}$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

例子完毕.

例: 设三元函数 $F(x,y,z)$ 在开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上是 $C^1$ 的. 设点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, 使得 $F(x_0,y_0,z_0)=0$ 且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 于是由 IFT 知可由方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P_0$ 附近解出唯一的隐函数 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in B_\delta$, 这里 $B_\delta$ 表以点 $(x_0,y_0)$ 为心, 以 $\delta>0$ 为半径的开球域. 进一步函数 $z(x,y)$ 的偏导数可表为

$$(z_x,z_y)=-\frac{(F_x,F_y)}{F_z}\bigg|_{(x,y,z(x,y))},\quad (x,y)\in B_\delta.\quad (*)$$

如之前所提及过的, 隐函数 $z(x,y)$ 的光滑性同函数 $F(x,y,z)$.

故当 $F$ 是 $C^2$ 时，隐函数 $z(x,y)$ 也是 $C^2$ 的. 以下以计算二阶导数 $z_{xx}$ 为例，来说明如何计算隐函数的高阶偏导数. 由导数公式知 $z_x = -F_x/F_z$. 于是

$$z_{xx} = -\left[\frac{F_x(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))}\right]_x = -\frac{1}{F_z^2}\Big[F_z(F_x)_x - F_x(F_z)_x\Big]$$

$$= -\frac{1}{F_z^2}\left[F_z(F_{xx} + F_{xz}z_x) - F_x(F_{zx} + F_{zz}z_x)\right]$$

$$= -\frac{1}{F_z^2}\left[F_z\left(F_{xx} + F_{xz}\left[-\frac{F_x}{F_z}\right]\right) - F_x\left(F_{zx} + F_{zz}\left[-\frac{F_x}{F_z}\right]\right)\right]$$

$$= \frac{1}{F_z^3}\left(2F_xF_zF_{xz} - F_z^2F_{xx} - F_x^2F_{zz}\right).$$

类似可求其他两个二阶偏导数 $z_{xy}$, $z_{yy}$. 具体计算留作补充习题.

Theorem

定理: 设 $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 $C^1$ 映射, $\Omega$ 开, $x_0 \in \Omega$. 若导映射 $Df(x_0)$ (n 阶Jacobian 矩阵) 非奇, 则存在 $\varepsilon, \delta > 0$, 以及映射 $g: B_\delta(y_0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(y_0 = f(x_0))$, 使得 (i) $x_0 = g(y_0)$; (ii) $f(g(y)) = y$, $\forall y \in B_\delta(y_0)$; (iii) $g(f(x)) = x$, $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$; (iv) 映射 $g(\cdot)$ 是 $C^1$ 的, 且

$$Dg(y) = [Df(x)]^{-1}, \quad x = g(y), \forall y \in B_\delta(y_0).$$

证明: 定义 $F:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F(x,y)=y-f(x)$. 由 $y_0$ 的定义知 $F(x_0,y_0)=0$, 且 $D_xF(x_0,y_0)=-Df(x_0)$ 非奇. 由 IFT 知存在 $\delta,\varepsilon>0$, 以及映射 $g:B_\delta(y_0)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 使得 (i) $x_0=g(y_0)$; (ii) $F(g(y),y)\equiv 0$, 即 $y=f(g(y))$, $y\in B_\delta(y_0)$; 并且对任意 $x\in B_\varepsilon(x_0)$ 和任意 $y\in B_\delta(y_0)$, $F(x,y)=0$ 当且仅当 $x=g(y)$. 由此可得 $x=g(f(x))$, $\forall x\in B_\varepsilon(x_0)$. 进一步映射 $g(y)$ 是 $C^1$ 的, 且

$$Dg(y)=-[D_xF(x,y)]^{-1}F_y(x,y)\Big|_{x=g(y)}=[Df(x)]^{-1}\Big|_{x=g(y)},$$

$\forall y\in B_\delta(y_0)$. 证毕. □

一. 习题1.5 (page 53-54): 4, 5, 6, 7, 8.

二. 习题1.6 (page 65-67): 2, 3(1)(3), 4, 5, 6.

三. 补充习题. 设三元函数 $F(x,y,z)$ 在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上是 $C^1$ 的. 设点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, 使得 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ 且 $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. 于是由 IFT 知可由方程 $F(x,y,z) = 0$ 在点 $P_0$ 附近解出唯一的隐函数 $z = z(x,y)$, $(x,y) \in B_\delta$, 这里 $B_\delta$ 代表以点 $(x_0, y_0)$ 为心, 以 $\delta > 0$ 为半径的开球域. 求 $z_{xy}$, $z_{yy}$.

(答案见下页)

答案: 由 $x, y$ 的对称性可知, 在 $z_{xx}$ 的表达式中, 交换 $x, y$ 的位置, 即可得到 $z_{yy}$. 而混合导数为

$$z_{xy} = \frac{1}{F_z^3}\left(F_xF_zF_{zy} + F_yF_zF_{xz} - F_z^2F_{xy} - F_xF_yF_{zz}\right),$$

其中上式各偏导数均在 $(x, y, z(x, y))$ 处取值, $\forall (x, y) \in B_\delta$.