Review

• 含参定积分的性质

$$I(t)=\int_\alpha^\beta g(t,x)dx,\quad D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$$

$(1)g(t,x)\in C(D)$

$$\Rightarrow\begin{cases} I(t)\in C[a,b],\text{即}\lim\limits_{t\to t_0}\int_\alpha^\beta g(t,x)dx=\int_\alpha^\beta \lim\limits_{t\to t_0} g(t,x)dx \\ \int_a^b dt\int_\alpha^\beta g(t,x)dx=\int_\alpha^\beta dx\int_a^b g(t,x)dt \end{cases}$$

(2) $g(t,x), g_t'(t,x)\in C(D)$

$$\Rightarrow I'(t)=\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta g(t,x)dx=\int_\alpha^\beta g_t'(t,x)dx.$$

(3) $g(t,x), g_t'(t,x) \in C([a,b]\times[c,d]), \alpha(t), \beta(t)$ 在$[a,b]$上可导,且

$$c \le \alpha(t), \beta(t) \le d, \quad \forall t \in [a,b],$$

则

$$f(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t,x)dx$$

在区间$[a,b]$上可导,且

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t,x)dx.$$

$$= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g_t'(t,x)dx + g(t,\beta(t))\beta'(t) - g(t,\alpha(t))\alpha'(t).$$

§2. 含参广义积分的一致收敛性

Question: 设$f(t,x)$在$D=[\alpha,\beta]\times[a,+\infty)$上连续, $\forall t\in[\alpha,\beta]$,

广义积分$I(t)=\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$收敛. 问$I(t)\in C[\alpha,\beta]$?

分析: $\left|I(t)-I(t_0)\right|=\left|\int_a^{+\infty} f(t,x)dx-\int_a^{+\infty} f(t_0,x)dx\right|$

$$\le\int_a^{+\infty}\left|f(t,x)-f(t_0,x)\right|dx$$

由f的连续性, $\left|f(t,x)-f(t_0,x)\right|$可控, 但积分区间为$[a,+\infty)$. 因此需要更多的条件来确保广义含参积分的连续性.

1. 含参无穷限积分

1)回顾广义积分的收敛性:

$$I(t_0)=\int_a^{+\infty} f(t_0,x)dx, \text{则} \underline{\forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{M}(\varepsilon,t_0)>a}, \forall \mathrm{A}>\mathrm{M}, \text{有}$$

$$\left|\int_a^{\mathrm{A}} f(t_0,x)dx - I(t_0)\right| < \varepsilon.$$

Cauchy收敛原理:

$$\int_a^{+\infty} f(t_0,x)dx \text{ 收敛}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{M}(\varepsilon,t_0), s.t. \left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} f(t_0,x)dx\right| < \varepsilon, \ \forall \mathrm{A},\mathrm{A}'>\mathrm{M}.$$

2) 含参广义积分的收敛性:

Def. $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R},\int_a^{+\infty}f(t,x)dx$ 收敛. 若$\forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}(\varepsilon), s.t.$

$$\left|\int_a^{\mathrm{A}}f(t,x)dx-\int_a^{+\infty}f(t,x)dx\right|<\varepsilon,\quad \forall \mathrm{A}>\mathrm{M}, \forall t\in\Omega,$$

则称含参广义积分$\int_a^{+\infty}f(t,x)dx$ 关于$t\in\Omega$一致收敛.

Thm.(Cauchy收敛原理)

$$\int_a^{+\infty}f(t,x)dx \text{ 关于 } t\in\Omega \text{ 一致收敛}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}(\varepsilon), s.t.$$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'}f(t,x)dx\right|<\varepsilon,\quad \forall \mathrm{A},\mathrm{A}'>\mathrm{M}, \forall t\in\Omega.$$

Remark. $\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$ 关于$t\in\Omega$非一致收敛

$\Leftrightarrow\ \exists\varepsilon>0, \forall M, \exists A, A'>M, \exists t_0\in\Omega, s.t.$

$$\left|\int_A^{A'} f(t_0,x)dx\right|\geq\varepsilon.$$

例. 证明$\int_a^{+\infty} ye^{-xy}dx$ 关于$y\in[0,+\infty)$不一致收敛.

Pf. $\exists\varepsilon_0=e^{-1}-e^{-2}, \ \forall M>0, \exists A=M+1, A'=2A, y_0=\dfrac{1}{A}, s.t.$

$$\left|\int_A^{A'} y_0e^{-xy_0}dx\right|=-e^{-xy_0}\Big|_{x=A}^{A'}=e^{-Ay_0}-e^{-A'y_0}=\varepsilon_0,$$

故广义积分关于$y\in[0,+\infty)$不一致收敛.□

Thm.(Weirstrass判别法) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}, \int_a^{+\infty} f(t,x)dx$ 收敛,

若存在$[a,+\infty)$上的广义可积函数$g(x)$, s.t.

$$|f(t,x)|\le g(x),\quad \forall (t,x)\in\Omega\times[a,+\infty),$$

则$\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$ 在$t\in\Omega$上一致收敛.

Pf. $\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛, $\underline{\forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}(\varepsilon)>a>0, s.t. \forall \mathrm{A}'>\mathrm{A}>\mathrm{M}(\varepsilon)}$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} g(x)dx\right|<\varepsilon.$$

于是

$$\underline{\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} f(t,x)dx\right|}\le\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'}|f(t,x)|dx\le\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} g(x)dx\right|\underline{<\varepsilon,\forall t\in\Omega}.$$

故$\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$ 在$t\in\Omega$上一致收敛.□

Remark.(Weirstrass) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, $f(t,x)$在$x \in [a,+\infty)$上连续,若存在$b > a$及$[b,+\infty)$上的广义可积函数$g(x)$, s.t.

$$|f(t,x)| \le g(x), \quad \forall (t,x) \in \Omega \times [b,+\infty),$$

则$\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$在$t \in \Omega$上一致收敛.

例. (1)设$c>0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$ 在$y\in[c,+\infty)$上是否一致收敛?

(2)$\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$ 在$y\in(0,+\infty)$上是否一致收敛?

解: (1) $c>0$, 则$\int_0^{+\infty} e^{-cx}dx = -\frac{1}{c}e^{-cx}\Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{c}$收敛, 且

$$e^{-xy} \le e^{-cx}, \quad \forall (x,y)\in[0,+\infty)\times[c,+\infty).$$

故$\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$ 在$y\in[c,+\infty)$上一致收敛(Weirstrass).

(2) $\exists \varepsilon_0 = e^{-1}-e^{-2}, \forall \mathrm{M}>0, \exists \mathrm{A}=\mathrm{M}+1, \mathrm{A}'=2\mathrm{A}, y_0=\frac{1}{\mathrm{A}}, s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} e^{-xy_0}dx\right| = -\frac{1}{y_0}e^{-xy_0}\Big|_{x=\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} = \frac{1}{y_0}(e^{-\mathrm{A}y_0}-e^{-\mathrm{A}'y_0}) = \mathrm{A}\varepsilon_0 > \varepsilon_0,$$

故$\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$ 在$y\in[0,+\infty)$上不一致收敛(Cauchy).□

Remark. (1) $f(x,t)$在$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$中连续,若$\int_a^{+\infty} f(x,\beta)dx$发散,而$\forall t\in[\alpha,\beta)$, $\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$都收敛, 则$\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$在$t\in[\alpha,\beta)$上非一致收敛.(证明留作课后练习)

(2) $f(x,t)$连续,若$\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$在$t\in I_1$上一致收敛,在$t\in I_2$上也一致收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$在$t\in I_1\bigcup I_2$上一致收敛.

Question. $\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)dx$ 在 $t\in\Omega$ 上是否一致收敛?

分析: 给定 $t\in\Omega$, 若 $f(t,x)$ 关于 x 单调, 则

$$\int_{A}^{A'} f(t,x)g(t,x)dx$$

$$= f(t,A)\int_{A}^{\xi} g(t,x)dx + f(t,A')\int_{\xi}^{A'} g(t,x)dx.$$

欲使 $\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)dx$ 在 $t\in\Omega$ 上一致收敛, 只要控制

$\left|\int_{A}^{A'} f(t,x)g(t,x)dx\right|$, 可以考虑分别对 f 和 g 加条件.

Thm.(Dirichlet) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, f(t,x), g(t,x)$在$x \in [a,+\infty)$上连续,若

(1) $\forall t \in \Omega, f(t,x)$关于$x$单调,

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t,x) = 0$关于$t \in \Omega$一致成立, 即$\forall \varepsilon > 0, \exists L(\varepsilon) > 0$,

$s.t.$ $$\left| f(t,x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x > L(\varepsilon), \forall t \in \Omega;$$

(3) $\int_a^{\mathrm{A}} g(t,x)dx$关于$t \in \Omega$以及充分大的A一致有界,即

$\exists \mathrm{M} > 0, s.t.$对$\forall t \in \Omega$以及充分大的A, 都有

$$\left| \int_a^{\mathrm{A}} g(t,x)dx \right| \le \mathrm{M}.$$

则$\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)dx$在$t \in \Omega$上一致收敛.

Thm.(Abel) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}$, $f(t,x), g(t,x)$在$x\in[a,+\infty)$上连续, 若

(1) $\forall t\in\Omega$, $f(t,x)$关于x单调;

(2) $x\to+\infty$时, $f(t,x)$关于$t\in\Omega$一致有界;

(3) $\int_a^{+\infty} g(t,x)dx$关于$t\in\Omega$一致收敛;

则 $\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)dx$在$t\in\Omega$上一致收敛.

例. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$关于$y\in[1,+\infty)$是否一致收敛?

解: 令$f(x,y)=\frac{1}{x}$, $g(x,y)=\sin xy$, 则 $f(x,y)$关于x单调;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,y)=0 \text{关于} y\in[1,+\infty)\text{一致成立};$$

$$\left|\int_1^{A} g(x,y)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_1^{A}\sin xy\,\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\frac{1}{y}\cos xy\Big|_{x=1}^{A}\right| \le \frac{2}{|y|}\le 2,\quad \forall A>1, y\in[1,+\infty).$$

由Dirichlet判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$关于$y\in[1,+\infty)$一致收敛. □

例. $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$关于$y\in[0,+\infty)$是否一致收敛?

解: 令$f(x,y)=\dfrac{\sin x}{x}, g(x,y)=e^{-xy}$, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left(=\frac{\pi}{2}\right),$$

关于$y\in[0,+\infty)$一致收敛; 给定$y\in[0,+\infty)$, $g(x,y)$关于x单调, 且

$$|g(x,y)|=|e^{-xy}|\le 1,\quad \forall x\ge 0, y\ge 0.$$

由Abel判别法, $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 关于$y\in[0,+\infty)$一致收敛.□

2. 含参瑕积分

$$f(t,x): D=[\alpha,\beta]\times[a,b)\to\mathbb{R},$$

$$I(t)=\int_a^b f(t,x)dx,\ \ \forall t\in[\alpha,\beta].\quad (b\text{为瑕点})$$

Def . 设$\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}$, $\int_a^b f(t,x)dx$ 收敛, b为唯一瑕点, 若

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)\in(0,b-a), s.t.$

$$\left|\int_{b-\eta}^b f(t,x)dx\right|=\left|\int_a^{b-\eta} f(t,x)dx-\int_a^b f(t,x)dx\right|<\varepsilon,$$

$$\forall\eta\in(0,\delta),\forall t\in\Omega,$$

则称含参瑕积分$\int_a^b f(t,x)dx$ 关于$t\in\Omega$一致收敛.

Thm.(Cauchy收敛原理) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, b为$\int_a^b f(t,x)dx$的唯一瑕点, 若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \in (0, b-a)$, s.t.

$$\left|\int_{b-\eta_2}^{b-\eta_1} f(t,x)dx\right| < \varepsilon, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in (0,\delta), \forall t \in \Omega,$$

则$\int_a^b f(t,x)dx$关于$t \in \Omega$一致收敛.

Thm.(Weirstrass) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}, \int_a^b f(t,x)dx$ 收敛, b为唯一瑕点, 且存在$[a,b)$上广义可积函数$g(x)$, s.t.

$$\left|f(t,x)\right|\le g(x),\quad \forall(t,x)\in\Omega\times[a,b),$$

则$\int_a^b f(t,x)dx$ 在$t\in\Omega$上一致收敛.

Remark.(Weirstrass) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}$, $f(t,x)$在$x\in[a,b)$上连续, 若存在$\delta>0$及$[b-\delta,b)$上广义可积函数$g(x)$, s.t.

$$\left|f(t,x)\right|\le g(x),\quad \forall(t,x)\in\Omega\times[b-\delta,b),$$

则$\int_a^b f(t,x)dx$ 在$t\in\Omega$上一致收敛.

Thm.(Dirichlet) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, $f(t,x), g(t,x)$在$x \in [a,b)$上连续,若

(1) $\forall t \in \Omega$, $f(t,x)$关于x单调;

(2) $\lim\limits_{x \to b^-} f(t,x) = 0$关于$t \in \Omega$一致成立;

(3) $\int_a^A g(t,x)dx$关于$t \in \Omega$以及$A \in [a,b)$一致有界;

则$\int_a^b f(t,x)g(t,x)dx$在$t \in \Omega$上一致收敛.

Thm.(Abel) $\forall t\in\Omega\subset\mathbb{R}$, $f(t,x),g(t,x)$在$x\in[a,b)$上连续,若

(1) $\forall t\in\Omega$, $f(t,x)$关于x单调;

(2)$x\to b^-$时, $f(t,x)$关于$t\in\Omega$一致有界;

(3)$\int_a^b g(t,x)dx$关于$t\in\Omega$一致收敛;

则 $\int_a^b f(t,x)g(t,x)dx$在$t\in\Omega$上一致收敛.

作业：习题2.1 No.4

Lemma (Riemann-Lebesgue). f在$[a,b]$上可积或广义绝对可积(即f与$|f|$均在$[a,b]$上广义可积),则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0,\ \ \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0.$$

Proof. 只证第一式,第二式同理.

Case1. 设f在$[a,b]$上可积,则f在$[a,b]$上有界,即

$$\exists M>0, s.t. |f(x)|\le M, \forall x\in[a,b].$$

任意给定$\lambda>1$,令$n=\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor$. n等分$[a,b]$:

$$x_i=a+(b-a)i/n,\quad i=0,1,2,\cdots,n.$$

$$\omega_i(f)=\sup\{f(\xi)-f(\eta):\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]\},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

f在$[a,b]$上可积,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i=0$. 于是

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x dx\right|$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(x)-f(x_i)\big)\cos\lambda x dx\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\cos\lambda x dx\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x dx\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i + \frac{2Mn}{\lambda} = \sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor}\omega_i(f)\Delta x_i + \frac{2M\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor}{\lambda}$$

$$\to 0, 当\lambda\to+\infty时.$$

Case2. f在$[a,b]$上广义绝对可积,不妨设a为唯一的瑕点.

则$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t., f在$[a+\delta, b]$上可积, 且

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|\, dx < \varepsilon/2.$$

从而 $\left|\int_a^{a+\delta} f(x)\cos\lambda x dx\right| \le \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx < \varepsilon/2,$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

于是$\exists \Lambda > 0$, 当$\lambda > \Lambda$时, $\left|\int_{a+\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx\right| < \varepsilon/2$, 进而有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| \le \left|\int_a^{a+\delta} f(x)\cos\lambda x dx\right| + \left|\int_{a+\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx\right|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall \lambda > \Lambda. \square$$

例. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$

解: 由广义积分的Dirichlet判别法, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\mathrm{d}t.$$

恒等式 $\frac{\sin\left(n+1/2\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ 两边在$[0,\pi]$上积分, 得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+1/2\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.$$

令$g(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$，往证$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+1/2)t\mathrm{d}t=0.$

$$\lim_{t\to0} g(t)=\lim_{t\to0}\frac{2\sin\frac{t}{2}-t}{2t\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{2t\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)}{2t\left(t-\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)\right)}=0.$$

故$t=0$是$g(t)$的可去间断点.由Riemann-Lebesgue引理,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+1/2)t\mathrm{d}t=0.\square$$