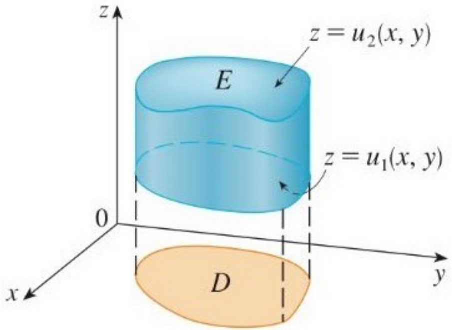
《微积分A2》第十五讲

教师　杨利军

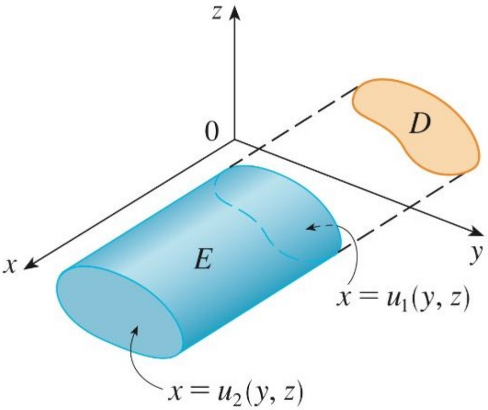
清华大学数学科学系

2020年04月08日

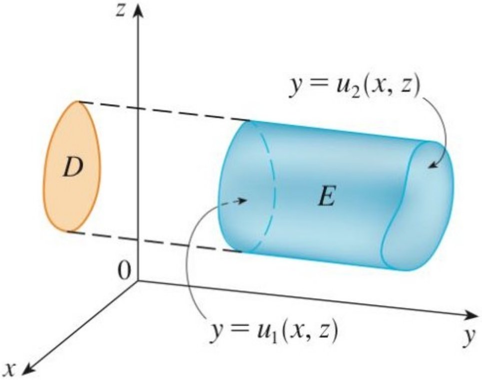
常见的三类空间积分域：分别由上下曲面，前后曲面，以及左右曲面所围成的空间区域.



由前后曲面所包围的空间域

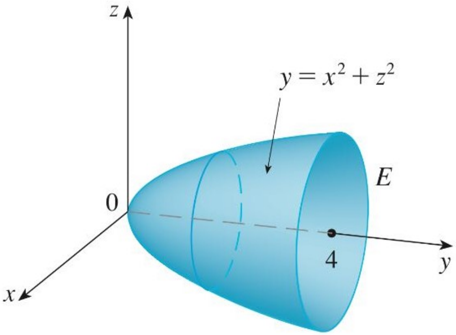


由左右曲面所包围的空间域



例子

例: 计算三重积分 $J = \iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dxdydz$, 其中 E 表示由抛物面 $y = x^2 + z^2$ 和平面 $y = 4$ 所围成的空间有界域. 如图所示.



例子，续一

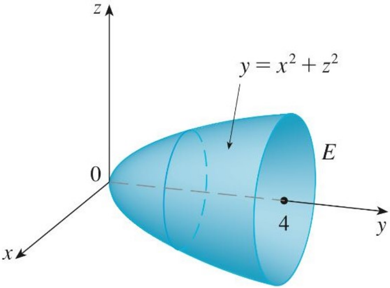
<u>解</u>: 积分域可看作上下，前后，或左右曲面所围成的区域.

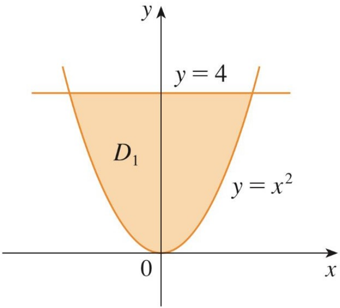
<u>方法一</u>: 将积分域看作上下曲面所围成的空间积分域. 由方程 $y = x^2 + z^2$ 可解得 $z = \pm\sqrt{y - x^2}$. 故域 E 的下方曲面为 $z = -\sqrt{y - x^2}$, 上方曲面为 $z = \sqrt{y - x^2}$, 区域 E 可写作

$$E = \{(x, y, z), -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}, (x, y) \in D_1\}$$

其中 $D_1 = \{(x, y), x^2 \leq y \leq 4, -2 \leq x \leq 2\}$. 如下图所示.

例子，续二





于是所求积分为

$$J=\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}dy\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}dz$$

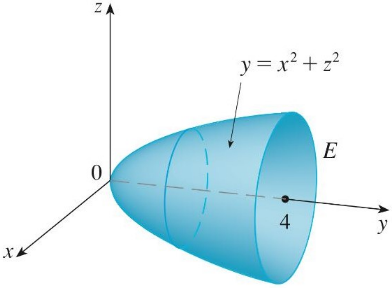
我们可以计算出上述累次积分，但计算过程有些麻烦. 就此中断. 因为我们有计算比较简单的方法.

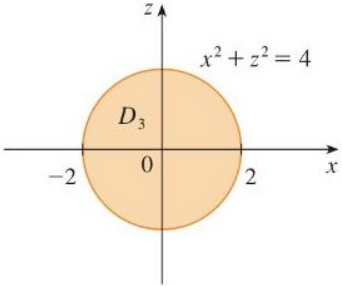
方法二: 将积分域表为前后曲面空间积分域，即积分域 E 表为

$$E=\{(x,y,z),-\sqrt{y-z^2}\le x\le\sqrt{y-z^2},(y,z)\in D_2\},$$

其中 $D_2: z^2\le y\le 4$. 再根据 Fubini 定理可将三重积分化为累次积分. 计算稍显麻烦. 故略去.

方法三：将积分域表为左右曲面所包围的空间积分域，即积分域 E 表为 $E=\{(x,y,z),x^2+z^2\le y\le 4,(x,z)\in D_3\}$，其中 $D_3: x^2+z^2\le 4$.





于是

$$J = \iint_{D_3} dxdz \int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2} dy$$

$$= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} dxdz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r \cdot r dr$$

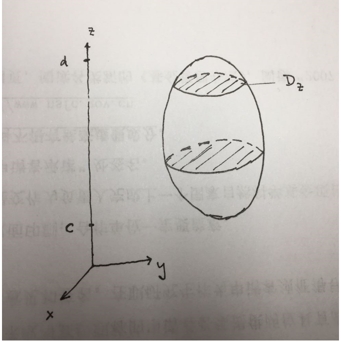
$$= 2\pi \int_0^2 (4r^2 - r^4) dr = \frac{128\pi}{15}.$$

解答完毕.

考虑三重积分 $\iiint_E f(x,y,z)dV$，其中积分区域假设可表为

$$E: \quad (x,y) \in D_z, \quad c \le z \le d.$$

如图所示.



先二后一方法，续

Theorem

定理：假设空间域 E 如上图所示，设函数 $f(x,y,z)$ 在域 E 上连续，则

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

Proof.

证明思想：先证闭长方体情形. 然后证一般情形. 细节略. □

注：上述化简和计算三重积分的方法俗称为先二后一方法(或称切片法)，即先二维积分(关于 x, y 积分)，再一维积分(关于 z 积分).

之前我们所学的计算三重积分的方法可称为先一后二方法. 例如对于由上下两个曲面所围的立体 $E: u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)$, $(x,y) \in D$, 其上的三重积分可表为

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D dxdy \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

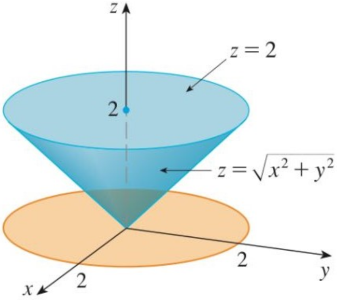
通过上式计算三重积分的方法称作先一后二方法, 即先进行一维积分(关于 z 积分), 然后作二维积分(关于 x, y 积分). 显然计算三重积分的方法有且仅有两种方法, 即先一后二方法, 或先二后一方法.

例子

课本第161页习题3.4题5(5): 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega: \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$, 如图所示.



解：由于被积函数不能用初等函数表示，故宜采用先二后一的积分方法：

$$\iiint_{\Omega} \frac{\sin z}{z} dxdydz = \int_0^2 \frac{\sin z}{z} dz \iint_{x^2+y^2 \le z^2} dxdy$$

$$= \int_0^2 \frac{\sin z}{z} \cdot \pi z^2 dz = \pi \int_0^2 z \sin z dz$$

$$= \pi(\sin 2 - 2\cos 2).$$

解答完毕.

Theorem

定理: 设 $T: E' \to E$ 是空间有界闭域 E' 到另一个闭域 E 的变换，分量形式为 $(u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$. 假设 T 是一个微分同胚，也就是说 T 连续可微，一一对应，且其逆变换也连续可微，则对于 E 上的任意连续函数 $f(x,y,z)$,

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint_{E'} f(x(u,v,w), y(\cdots), z(\cdots)) \left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

注一: 定理证明与二重积分情形类似. 故略去.

注二: 变换 T 为微分同胚的要求可稍微减弱如下:

$$\mathsf{T}: \mathsf{E}'\backslash\mathsf{E}_0' \to \mathsf{E}\backslash\mathsf{E}_0$$

是微分同胚, 这里 $\mathsf{E}_0', \mathsf{E}_0 \subset \mathbb{R}^3$ 为零测集.

三维空间变换

$$T:(r,\theta,z)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta,z),$$

常称为柱坐标变换. 设空间闭域 $E\subset \mathbb{R}^3$ 在直角坐标中可表

$$E:\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

假设平面闭域 D 在平面极坐标变换下的原象为

$$D':\ \alpha\le\theta\le\beta,\quad h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta),$$

则根据 Fubini 定理, 以及二重积分的极坐标变换定理可知

柱坐标变换, 续

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz$$

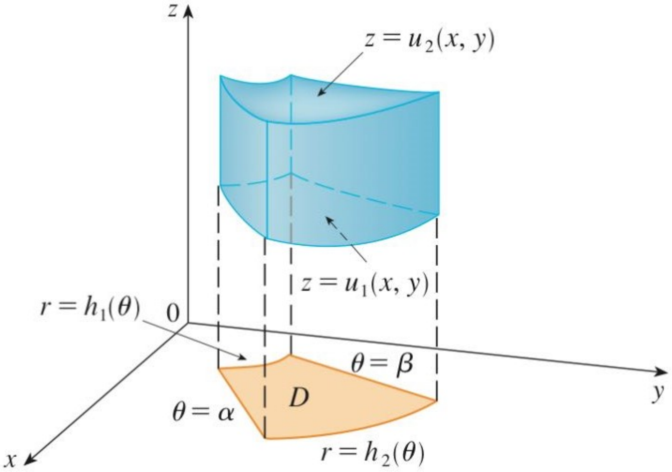
$$= \iint_D dxdy \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \iint_{D'} rdrd\theta \int_{u_1(\cdots)}^{u_2(\cdots)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} rdr \int_{u_1(\ldots)}^{u_2(\cdots)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz.$$

这里 $u_1(\cdots) = u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $u_2(\cdots)$ 的意义类似.

柱坐标变换图示



z
$z = u_2(x, y)$
$z = u_1(x, y)$
$r = h_1(\theta)$
0
$\theta = \beta$
D
$\theta = \alpha$
y
x
$r = h_2(\theta)$

因子 r 的来历

注意经过变换代换后，被积函数中多出了一个因子 r. 它源于柱坐标变换

$$T:(r,\theta,z)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta,z),$$

Jacobian 行列式

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=r.$$

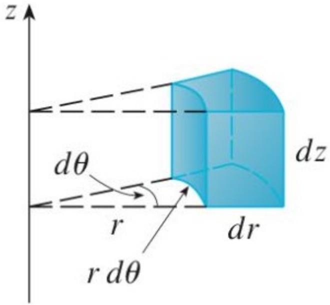
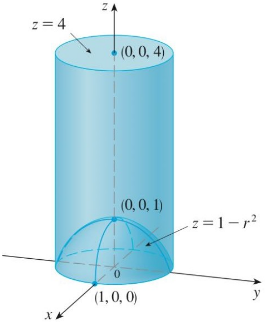


FIGURE 7

Volume element in cylindrical coordinates: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

例子

例: 设 E 由圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$, 抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$, 以及平面 $z = 4$ 所围成的空间立体. 如图所示. 假设立体 E 分布有某种物质, 其分布密度正比于点到对称轴即 z 轴的距离. 求立体 E 所含物质的总量.



解：积分域 E 在直角坐标系下可表为

$$E: \quad x^2+y^2\le 1, \quad 1-x^2-y^2\le z\le 4.$$

在柱坐标变换下的原象为

$$E': \quad 0\le\theta\le 2\pi, \quad 0\le r\le 1, \quad 1-r^2\le z\le 4.$$

由于物质分布密度正比于点到对称轴即 z 轴的距离，即密度函数为 $f(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2}=kr$. 因此所求物质总量为

$$M=\iiint_E f(x,y,z)dV=\iiint_{E'} kr\cdot r dV'$$

例子，续二

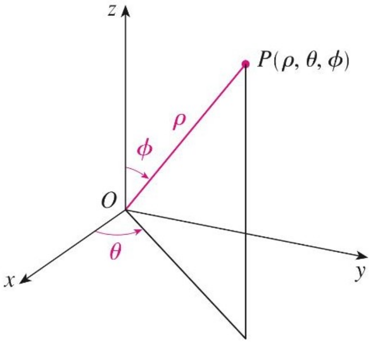
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{1-r^2}^4 kr^2 dz$$

$$= 2k\pi \int_0^1 r^2(4 - 1 + r^2)dr = \frac{12k\pi}{5}.$$

解答完毕.

球坐标回忆

空间 $\mathbb{R}^3$ 中非原点 O 的任意一点 P 可由所谓球坐标 ρ, θ, ϕ 唯一确定，其中 $\rho = |OP|$，角度 θ，ϕ，分别称作纬度和经度，如图所示.



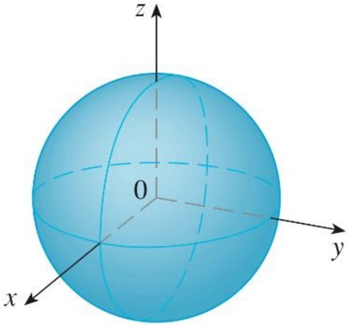


FIGURE 2 $\rho = c$, a sphere

球坐标的坐标曲面，θ 为常数

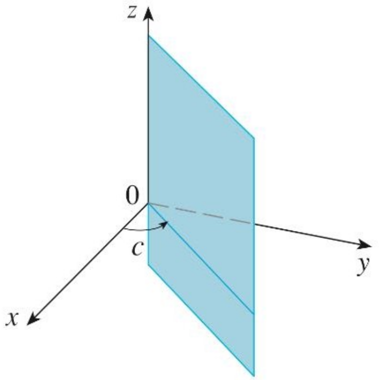


FIGURE 3 $\theta = c$, a half-plane

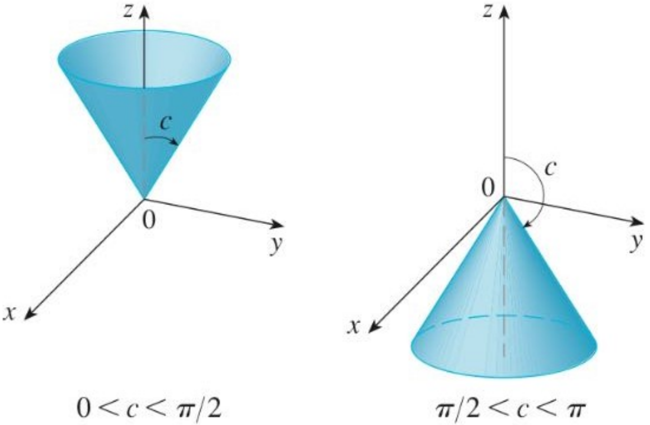
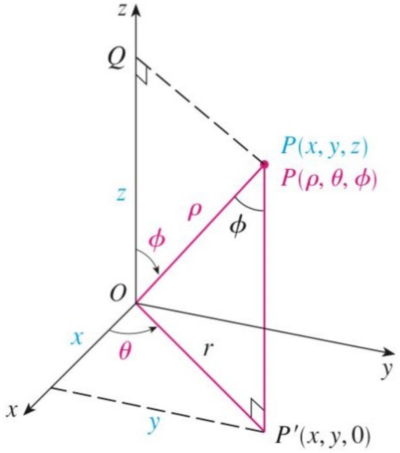


FIGURE 4 $\phi = c$, a half-cone

设点P 的直角坐标为 (x, y, z)，球坐标为 (ρ, θ, ϕ)，如图所示.



由此不难看出点P 的直角坐标为 (x, y, z) 与球坐标为 (ρ, θ, ϕ) 的关系如下：

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta,\ y = \rho \sin\phi \sin\theta,\ z = \rho \cos\phi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \theta = \arctan\frac{y}{x},\ \phi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

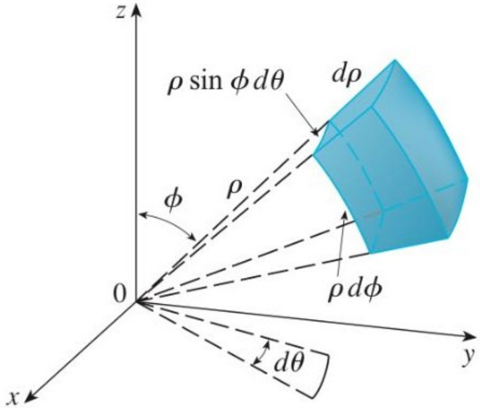
考虑球坐标变换

$$\mathbf{T}:(\rho,\theta,\phi)\mapsto(x,y,z)=(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi).$$

其变换的 Jacobian 行列式为 $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}=$

$$\det\begin{bmatrix}\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta\\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta\\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0\end{bmatrix}=\rho^2\sin\phi.$$

Jacobian 行列式的图示



体积微元 $\mathrm{dxdydz} = \mathrm{dV} = \rho\sin\phi \mathrm{d}\theta \cdot \rho \mathrm{d}\phi \cdot \mathrm{d}\rho = \rho^2 \sin\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi.$

情形一: 假设空间立体 E 在球坐标变换下的原象为

$$E': \quad a \le \rho \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta,\ c \le \phi \le d,$$

则

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{E'} f(\cdots)\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_a^b dr \int_\alpha^\beta d\theta \int_c^d f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi d\phi.$$

情形二: 假设空间立体 E 在球坐标下的原象为

$$E': \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad c \leq \phi \leq d, \quad g_1(\theta,\phi) \leq \rho \leq g_2(\theta,\phi),$$

则
$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{E'} f(\cdots)\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_c^d d\phi \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(\cdots)\rho^2 \sin\phi d\rho,$$

其中 $f(\cdots) = f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$.

例: 记 B 为单位球 $x^2+y^2+z^2\leq 1$. 计算三重积分

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz.$$

解: 单位球 B 在球坐标变换下的原象为闭长方体

$$B':\quad 0\leq\rho\leq 1,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi,\quad 0\leq\phi\leq\pi,$$

故 $$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz=\iiint_{B'} e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

$$=\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\phi d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho \int_0^\pi \sin\phi d\phi$$

$$= \frac{4}{3}\pi(e-1).$$

解答完毕.

注记

注: 三重积分

$$J = \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$$

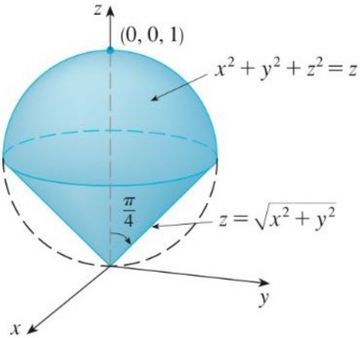
在直角坐标系系下可化为如下累次积分

$$J = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz.$$

如何计算?

<u>例</u>: 计算由圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围成的有界空间立体 V 的体积.

<u>解</u>: 立体 V 如图所示.



注意圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在球坐标

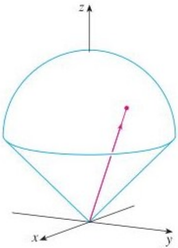
$$x=\rho\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\phi\sin\theta,\ z=\rho\cos\phi,$$

下的方程为

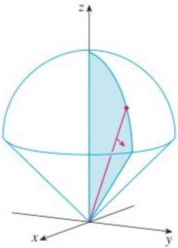
$$\rho\cos\phi=\sqrt{\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta}=\rho\sin\phi.$$

由此得 $\sin\phi=\cos\phi$, 即 $\phi=\frac{\pi}{4}$. 而球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 在球坐标下的方程为 $\rho^2=\rho\cos\phi$ 或 $\rho=\cos\phi$.

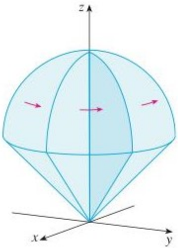
例二续二，球坐标ρ, θ, ϕ 的变化范围



ρ varies from 0 to cos ϕ
while ϕ and θ are constant.



ϕ varies from 0 to $\pi/4$
while θ is constant.



θ varies from 0 to 2π.

因此立体 V 在球坐标变换下的原象为

$$\mathbf{V}': \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \rho \le \cos\phi.$$

于是所求立体 V 的体积为

$$|\mathbf{V}| = \iiint_{\mathbf{V}} dxdydz = \iiint_{\mathbf{V}'} \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi d\phi \int_0^{\cos\phi} \rho^2 d\rho$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi \cos^3\phi d\phi = \frac{\pi}{8}.$$

课本第 158 例 3.4.11: 求由如下封闭曲面

$$S: \quad \left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right]^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

所围立体 V 的体积 |V|.

解: 作广义球坐标变量代换

$$\begin{cases} x = ar\sin\phi\cos\theta, \\ y = br\sin\phi\sin\theta, \\ z = cr\cos\phi, \end{cases}$$

上述曲面 S 的方程有如下比较简单的形式

$r^4 = r^2\sin^2\phi$ 或 $r = \sin\phi$，这里 $\phi \in [0,\pi]$ (经度)，$\theta \in [0, 2\pi]$ (纬度)．注意方程 $r = \sin\phi$ 不含纬度变量 θ，由此可见曲面 S 是一个封闭曲面．记

$$V' : \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

则广义极坐标变换将区域 V' 变换为由曲面 S 所包围的立体 V．经计算知广义球坐标变换的 Jacobian 行列式为

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)} = abcr^2\sin\phi.$$

于是曲面 S 所围立体的体积为

例子，续二

$$|V| = \iiint_V dxdydz = \iiint_{V'} abcr^2 \sin\phi drd\phi d\theta$$

$$= abc \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sin\phi} r^2 dr$$

$$= 2\pi abc \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_0^{\sin\phi} r^2 dr$$

$$= \frac{2\pi abc}{3} \int_0^{\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{4\pi abc}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta$$

$$= \frac{4\pi abc}{3} \cdot \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

解答完毕.

课本第 159 页例 3.4.13: 计算如下球心位于原点且半径为 R 的 n 维球体 B_R^n 的体积,

$$B_R^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le R^2.$$

解: 作尺度变换 $x_i = Rt_i,\ i = 1, \cdots, n$, 其 Jacobian 行列式为

$$\det \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(t_1, \cdots, t_n)} = \det \operatorname{diag}(R, \cdots, R) = R^n.$$

于是根据 n 重积分的变量代换定理可知, 所求立体的体积为

$$|B_R^n| = \int_{B_R^n} dx_1 \cdots dx_n = R^n \int_{t_1^2+\cdots+t_n^2 \le 1} dt_1 \cdots dt_n = R^n |B_1^n|.$$

例子，续一

考虑计算 $|B_1^n|$.

$$|B_1^n| = \int_{t_1^2+\cdots+t_n^2\le 1} dt_1\cdots dt_n$$

$$= \int_{-1}^{1} dt_n \int_{t_1^2+\cdots+t_{n-1}^2\le 1-t_n^2} dt_1\cdots dt_{n-1}$$

$$= \int_{-1}^{1} dt_n \left(\sqrt{1-t_n^2}\right)^{n-1} |B_1^{n-1}|$$

$$= 2|B_1^{n-1}| \int_0^1 \left(\sqrt{1-t_n^2}\right)^{n-1} dt_n.$$

对上式最后的一维积分作变量代换 $t_n = \sin\theta$ 得

例子，续二

$$|B_1^n| = 2|B_1^{n-1}|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta\cos\theta d\theta = 2|B_1^{n-1}|J_n,$$

$$\text{其中}\quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta.$$

$$\text{回忆}\quad J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2},\quad J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

因此当 $n = 2m$ 为偶数时，

$$|B_1^{2m}| = 2J_{2m}|B_1^{2m-1}| = 2|J_{2m}| \cdot 2|J_{2m-1}||B_1^{2m-2}|$$

$$= 4\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}|B_1^{2(m-1)}| = \frac{\pi}{m}|B_1^{2(m-1)}|$$

由此可知

$$|B_1^{2m}| = \frac{\pi}{m}|B_1^{2(m-1)}| = \frac{\pi}{m}\frac{\pi}{m-1}|B_1^{2(m-2)}| = \cdots = \frac{\pi^m}{m!}.$$

$$\text{因此} \quad |B_R^{2m}| = \frac{\pi^m R^{2m}}{m!}.$$

当 $n = 2m + 1$ 为奇数时，

$$B_1^{2m+1} = 2|B_1^{2m}|J_{2m+1} = 2\frac{\pi^m}{m!}\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}$$

$$\text{于是} \quad |B_R^{2m+1}| = R^{2m+1}\frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}.$$

解答完毕.

作业

习题3.4 (page 162):   9(1)(3)(5)(7), 10, 11.

第3章总复习题(page 170-172): 5, 7(2), 8, 12, 13