作业1114第九周

2020年11月14日　23:21

习题5.3：12.（1）（2）；13.（3）.

习题5.2：5.（1）；6.（1）（3）；9.；10.

习题5.3：4.；5.；7.；9.（1）；15.

习题 5.3

12.（1）$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$

$= x-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x^2 - x\Big|_1^2 = 1$

（2）$\int_{-2}^3 |x^2-2x-3|\,dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)dx + \int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\Big|_{-2}^{-1} + (-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x)\Big|_{-1}^3 = 13$

13.（3）$\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n})$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

即 [0,1] 上关于 n 等分分割的黎曼和.

原式 $= \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

习题 5.2

5.（1）$x\in(0,1)$　$-x<-x^2$　由 $y=e^x$ 单调减

$e^{-x}<e^{-x^2}$　由积分保序性

$\int_0^1 e^{-x}dx < \int_0^1 e^{-x^2}dx$

6.（1）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$　　$0<\sin x<x$，$0<\frac{\sin x}{x}<1$

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$　$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$　$g(x)=x\cos x-\sin x$

$g'(x)=-x\sin x<0$　$g(x)<g(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{4}-1)<0$　$f(x)<0$

$f(x)\geqslant f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$

$\frac{2}{\pi}\leq\frac{\sin x}{x}<1$　由积分保序性 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}dx\leq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dx$

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{由积分保序性} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \le \frac{\pi}{4}$$

(3) $$|a\cos x + b\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}\,|\sin(x+\varphi)| \le \sqrt{a^2+b^2} \quad \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

由积分保序性 $\int_0^{2\pi} |a\cos x + b\sin x|dx \le \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dx = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

9. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，证明 $\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right) \ge (b-a)^2$

$f(x) \in C[a,b]$，$f(x)>0$，则 $f, \frac{1}{f} \in R[a,b]$ 由柯西不等式，

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right) \ge \left(\int_a^b \sqrt{f(x)\frac{1}{f(x)}}\,dx\right)^2 = (b-a)^2$$

10、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增，且 $f''(x)>0$，证明

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单增知，$f(x) \ge f(a)$，由积分保序性，$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b f(a)dx = (b-a)f(a)$

由 $f''(x)>0$ 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是凸函数 $f(x) < \frac{x-a}{b-a}f(a) + \frac{b-x}{b-a}f(b)$

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}f(a) + \frac{b-x}{b-a}f(b)\right)dx = \left(\frac{-a}{b-a}f(a) + \frac{b}{b-a}f(b)\right)(b-a) + \left(\frac{f(a)}{b-a} - \frac{f(b)}{b-a}\right)\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$= \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

习题 5.3

4、设 $f(x) \in C[0,+\infty)$，已知 $\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt = x + \sin x$，求 $f(x)$

令 $u=\sqrt{x}$ $\quad g(u) = \int_0^u f(t)dt = u^2 + \sin u^2$

$$f(x) = g'(u)\,u'(x) = (2u + 2u\cos u^2)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1+\cos x$$

$f(x) = 1+\cos x$，$x \in [0,+\infty)$

5、求 $F(x) = \int_0^x t e^{-t^2}dt$ 的极值点与拐点的横坐标.

$F'(x) = x e^{-x^2}$ $\qquad x>0$ 时 $F'(x)>0$，$x<0$ 时 $F'(x)<0$

$F''(x) = 1\cdot e^{-x^2} + x\cdot e^{-x^2}(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$ 令 $F''(x)=0$ $\quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$F(x)$ 极值点为 $x=0$，拐点横坐标 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in[-1,0) \\ x, & x\in[0,1] \end{cases}$ 讨论 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt \ (-1\le x\le 1)$ 的连续性与可导性.

$F(x)=\frac{1}{2}t^2+t\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2},\ x\in[-1,0)$

$F(x)=\frac{1}{2}t^2+t\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}t^2\Big|_{0}^{x}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\quad x\in[0,1]$

$F'_-(0)=1\neq F'_+(0)=0$ 故 $F(x)$ 在 0 处不可导，在 $[-1,0)$ 和 $(0,1]$ 可导.

$F(x)\in C[-1,1]$

9. 设 $f(x)$ 连续

(1) 若 $f(x)=x+\int_0^2 f(x)dx$，求 $f(x)$.

$\int_0^2 f(x)\,d(x)=\int_0^2 x\,dx+\int_0^2\left(\int_0^2 f(x)dx\right)dx$ 记 $\int_0^2 f(x)dx=C$

$C=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2+Cx\Big|_0^2=2+2C\qquad C=-2$

$f(x)=x-2$

15. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx\begin{cases} <\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) & R>0 \\ >\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) & R<0 \end{cases}$

$y=\sin x$ 在 $[0,1]$ 是凹函数，又由割线知 $\frac{2}{\pi}x<\sin x,\ x\in(0,1)$

$R>0$ 时 $-R\sin x<-\frac{2R}{\pi}x$ 由积分保序性，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}x}dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx<\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})$ $\qquad =-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R}{\pi}x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

同理 $R<0$ 时 $-R\sin x>-\frac{2R}{\pi}x\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx>\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}),\ R<0$

即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx\begin{cases} <\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) & R>0 \\ >\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) & R<0 \end{cases}$