微积分（2）期末考题（A）答案

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1．交换累次积分次序 $\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx=$________________。

答案：$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy$

2． 设曲线 L 的参数方程为 $x=1-\sin t$， $y=1-\sqrt{2}\cos t$， $0\le t\le 2\pi$，则第一类曲线积分 $\int_{L}\sqrt{x^2-2x+2}\,dl=$____________________。

答案：3π

3．设 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $\iint_{S}(x+1)^2dS=$___________________。

答案：

$$\iint_{S}(x+1)^2dS=\iint_{S}(x^2+1)dS=\iint_{S}(x^2+1)dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{S}(x^2+y^2+z^2)dS+\iint_{S}dS=\frac{16}{3}\pi$$

4．$\vec{V}(x,y,z)=(x+y+z,xy+yz+zx,xyz)$，则 $div\vec{V}=$________________。

答案：$1+x+z+xy$

5． $f(x,y,z)=e^{x+y+z}$，则 $gradf=$_______________， $rot(gradf)=$__________。

答案：$e^{x+y+z}(1,1,1)$， **0**

6. 设函数 $f(x)=x^2+x+2$ 在 $[0,2)$ 上的 Fourier 展开为 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)$，则 $S(0)=$_________________________。

答案：5

7．三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}x^{99}y^{100}z^{101}dxdydz=$________________。

答案：0

8．级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ 的和为__________________。

答案：$(e^2-3)/2$

9．函数$\dfrac{1}{1-x}$在$x_0=2$点的 Taylor 级数为________________________________。

答案：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$

10. 曲线积分$\int_{L^+}\dfrac{x^{\lambda}dy-ydx}{x^2+y^2}=0$对上半平面的任意光滑闭曲线$L$都成立，则常数$\lambda=$__________________。

答案：1

11. S^+为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则

$\oiint\limits_{S^+}xdy\wedge dz+\cos ydz\wedge dx+dx\wedge dy=$ ______________________________。

答案：$\dfrac{4}{3}\pi$

12. 函数$f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt$在$x_0=0$点的幂级数展开为_____________________________。

答案：$x-\dfrac{1}{3\cdot 3!}x^3+\dfrac{1}{5\cdot 5!}x^5+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$

13. 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n}$在$x=3$处收敛, 且当$x<3$时发散, 则$a=$____________。

答案：4

14. 设$D=\left\{\ (x,y),\quad 0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le 1\ \right\}$, 则$D$的形心横坐标$\bar{x}=$____________。

答案：$\dfrac{3}{8}$

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 设S^+为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$的下侧，求$\iint\limits_{S^+}(x+y)dy\wedge dz+(2y-z)dz\wedge dx$。

解：加平面：$S_1^+:z=1,x^2+y^2\le 1$，上侧为正，

$$\iint\limits_{S^++S_1^+}(x+y)dy\wedge dz+(2y-z)dz\wedge dx=3\iiint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1}dxdydz=\pi$$

$$\iint_{S_1^+}(x+y)dy\wedge dz+(2y-z)dz\wedge dx=0$$

故 $\iint_{S^+}(x+y)dy\wedge dz+(2y-z)dz\wedge dx=\pi$ 。

2． 求两个球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$、$x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 相交部分的体积。

解：建立直角坐标系，使得两个球体可表为：

小球：$x^2+y^2+z^2\le 1$，大球：$x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 。于是两个球面的交线方程为

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2+(z-2)^2=4 \end{cases}$ 。 解之得 $\begin{cases} x^2+y^2=15/16 \\ z=1/4. \end{cases}$ 于是所求立体体积为

$$\iint_{x^2+y^2\le 15/16}(z_1(x,y)-z_2(x,y))dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 15/16}[\sqrt{1-x^2-y^2}-(2-\sqrt{4-x^2-y^2})]dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 15/16}(\sqrt{1-x^2-y^2}+\sqrt{4-x^2-y^2})dxdy-2\pi\cdot 15/16$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{15}/4}(\sqrt{1-r^2}+\sqrt{4-r^2})rdr-\frac{15\pi}{8}$$

$$=\pi\int_0^{15/16}(\sqrt{1-s}+\sqrt{4-s})ds-\frac{15\pi}{8}=\frac{13\pi}{24}\text{ 。}$$

3．设 $f(x)=\sin^2(x^2)$，

（I）求 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开；

（II）求 $f^{(n)}(0), n=1,2,3,\cdots$ 。

解:（I）$f(x)=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2x^2)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{2^2}{2!}x^{2\cdot 2}+\frac{2^4}{4!}x^{2\cdot 4}+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{4n}+\cdots\right)\right]$

$$=\frac{2}{2!}x^{2\cdot 2}-\frac{2^3}{4!}x^{2\cdot 4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{4n}+\cdots$$

（II）$f^{(4n)}(0)=(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}\cdot(4n)!}{(2n)!}$

$f^{(m)}(0)=0,\quad m$ 不能被 4 整除。

4． 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}\quad(x>0)$，求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx$ 。

解：级数$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$在$[\ln 2, \ln 3]$一致收敛，故

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}\right)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

三．证明题

1.（8 分）（I）2π 为周期的函数 $f(x)$ 在$[-\pi, \pi]$上的定义为 $f(x) = \cos\alpha x$（α 不是整数），将其展成 Fourier 级数（提示：$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$）；

（II）利用（I）证明：$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad x \ne k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$。

解：（I）

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\alpha-n)x + \cos(\alpha+n)x\right]dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{(\alpha-n)} + \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{(\alpha+n)}\right] = \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha^2 - n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

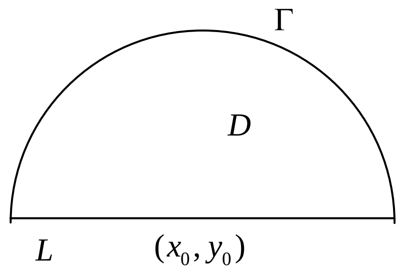
$$\cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\cos nx\right], \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

（II）令 $x = \pi$，$\cot\alpha\pi = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\right]$，在令 $\alpha\pi = x$，则

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad x \ne k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

2.（7 分）设函数 $P(x,y), Q(x,y) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$，在以任意点$(x_0, y_0)$为中心，任意正数$r$为半径的上半圆周$\Gamma$上的第二类曲线积分$\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$。求证：在$\mathbb{R}^2$上有 $P(x,y) \equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \equiv 0$。

证明：



加上直径L，记半圆域为D。

$$\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

$$\int_{\Gamma+L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

由 Green 公式，

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}\frac{1}{2}\pi r^2$$

其中(ξ,η)为D中一点。而

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)dx=P(\varsigma,y_0)2r$$

其中$\varsigma\in(x_0-r,x_0+r)$。两者相等，

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}\frac{1}{2}\pi r^2=P(\varsigma,y_0)2r$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}\frac{1}{2}\pi r=2P(\varsigma,y_0)$$

令$r\to 0$， $P(x_0,y_0)=0$。由$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$的任意性， $P(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$。

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0$， $(x,y)\in\mathbb{R}^2$。