第二次习题课讨论题 杨利军 March 16-20, 2020

1. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (a,a) 处可微, 且 $f(a,a)=a$, $f_x(a,a)=b=f_y(a,a)$. 记

$$\phi(x)=f(x,f(x,f(x,x))).$$

求 $\frac{d}{dx}[\phi(x)^2]\Big|_{x=a}$.

2. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 且在该点处沿着方向 $u=(1,-1)/\sqrt{2}$ 和 $v=(-1,2)/\sqrt{5}$ 的方向导数分别为 $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=-2$, $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)=1$. 求微分 $df(x_0,y_0)$.

3. 设函数 $f(u,v)$ 是 C^2 函数. 求

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x+y,xy).$$

4. (三元齐次函数的 Euler 公式) 设三元函数 $f(x,y,z)$ 在全空间 $\mathbb{R}^3$ 上定义. 若存在实数 $k\in\mathbb{R}$, 使得函数 f 满足如下条件

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z),\quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad \forall t>0, \tag{1}$$

则称函数 f 为三元 k 次齐次函数. 证明对于在 $\mathbb{R}^3$ 上连续可微函数 $f(x,y,z)$ 而言， f 为三元 k 次齐次函数, 当且仅当如下恒等式 (常称作 Euler 恒等式) 成立

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=kf(x,y,z),\quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \tag{2}$$

注1： 必要性证明是课本第一章总复习题题12(2) page 96.

注2： 类似可定义一般 n 元 k 次齐次函数， 并建立相应地 Euler 公式.

5. 设函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微，并满足如下条件

(i) $f(x,y)$ 可表为 x^2+y^2 的复合函数， 即 $f(x,y)=g(x^2+y^2)$， 这里 $g(t)$ 是 $\mathbb{R}^1$上连续可微函数。

(ii) $f(x,y)$ 还可表为具有对称性的变量分离形式: $f(x,y)=\phi(x)\phi(y)$，$\phi(t)$ 是 $\mathbb{R}^1$上连续可微函数。

(iii) $f(0,0)=1$， $f(1,0)=e$。

试确定函数 $f(x,y)$. (注：这是第一章总复习题题 12(4))

6. 设函数 $u(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微。假设 $u(x,y)$ 满足条件

(i) $u_{xx}(x,y)=u_{yy}(x,y), \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$;

(ii) $u(x,2x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$;

(iii) $u_x(x,2x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

求函数 $u(x,y)$.

7. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微且满足条件

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty. \tag{3}$$

试证明对于任意向量 $v=(a,b)$, 均存在点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 使得 $\nabla f(x_0,y_0)=v$. (注: 这是课本第97页习题题15)

8. 设函数 $z(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微。 假设 (i) 函数 z 在全平面上恒正，即 $z(x,y)>0, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. (ii) $zz_{xy}=z_xz_y$. 证明函数 $z(x,y)$ 必为变量分离型的， 即 $z(x,y)=\phi(x)\psi(y)$, 其中 $\phi(x)$ 和 $\psi(y)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的任意二次连续可微的一元函数。

9. 设函数 $F(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微。 若存在正数 $m>0$, 使得

$$F_y(x,y)\geq m, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{4}$$

证明存在唯一的连续可微的函数 $f(x)$, f 在整个 $\mathbb{R}$ 上定义, 使得

$$F(x,f(x))\equiv 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$