《微积分A2》第十四讲

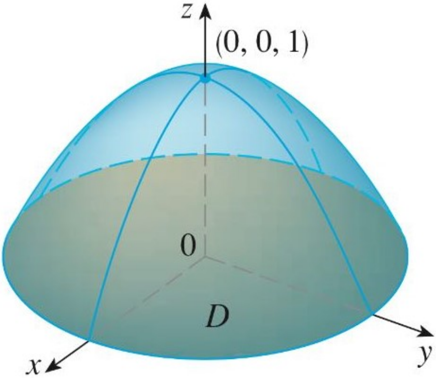
教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年04月01日

例二

例: 求由抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 和平面 $z = 0$ 所围成的有界闭区域 V 的体积 $|V|$. 如图所示.



解: 显然立体 V 是抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在闭圆盘 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上所盖住的立体. 故所求立体的体积为

$$|V| = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy.$$

区域 D 在极坐标下变换的原象为 $D': 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

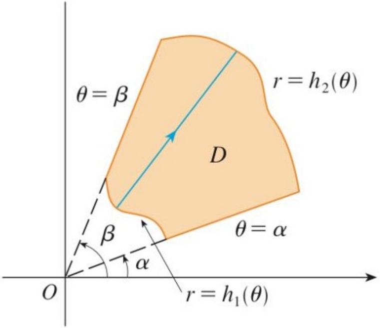
于是

$$|V| = \iint_{D'} (1 - r^2)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2)rdr$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r - r^3)dr = \frac{\pi}{2}.$$

解答完毕.

<u>定理</u>: 设平面闭区域 D 在极坐标变换下的原象为 $D' = \{(r, \theta), \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$, 其中 $h_1(\theta), h_2(\theta)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, (这样的区域 D 称为扇形类区域), 如图所示.



扇形类区域上的二重积分, 续

设函数 $f(x,y)$ 在扇形类闭域 D 上连续, 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

证: 利用二重积分变量代换公式即可.

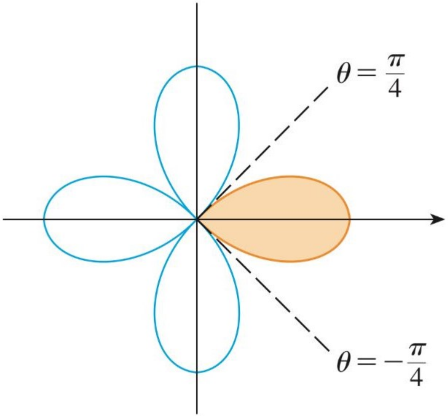
扇形类区域的面积公式

在上述定理中，若 $f(x,y) \equiv 1$，则扇形类区域 D 的面积为

$$|D| = \iint_D 1 dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{h_1(\theta)}^{h_1(\theta)} r dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [h_2(\theta)^2 - h_1(\theta)^2] d\theta.$$

例一：求四叶玫瑰线 $r = \cos 2\theta$ 的一支所围面积. 如图所示.



解: 由四叶玫瑰线的一支所围闭区域, 即如图所示的黄色区域, 记作 D, 可看作扇形类区域. 域 D 在极坐标变换下的原象为

$$D' = \left\{(r,\theta), |\theta| \le \pi/4, 0 \le r \le \cos 2\theta\right\}$$

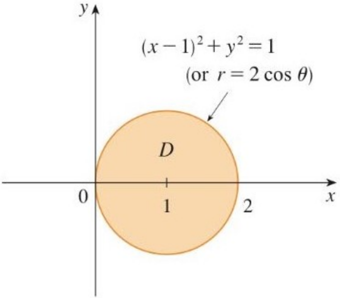
根据上述定理可知所求面积为

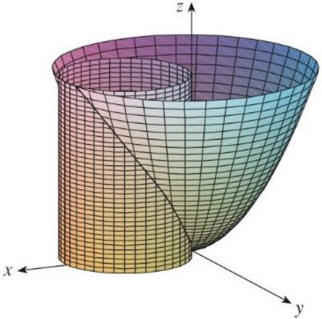
$$|D| = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}[(\cos 2\theta)^2 - 0^2]d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}[1+\cos 4\theta]d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

解答完毕.

<u>例二</u>: 求柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 内部, 位于抛物面 $z = x^2 + y^2$ 下方, 且位于平面 $z = 0$ 上方那一部分立体 V 的体积. 如图所示.





解：显然所求立体体积为

$$|V| = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

考虑用极坐标变换来计算上述积分. 方程 $x^2 + y^2 = 2x$ 在极坐标下的形式为 $r^2 = 2r\cos\theta$ 或 $r = 2\cos\theta$, $|\theta| \le \pi/2$. 直角坐标 x, y 平面区域 D 所对应的极坐标区域为

$$D' = \left\{(r,\theta), |\theta| \le \pi/2, 0 \le r \le 2\cos\theta\right\}.$$

故所求立体体积为

$$|V| = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \iint_{D'} r^2 \cdot rdrd\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 r dr$$

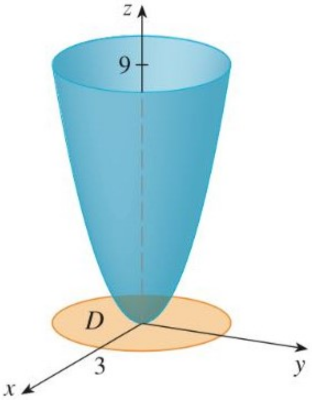
$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = \cdots = \frac{3\pi}{2}.$$

即所求体积为

$$|V| = \frac{3\pi}{2}.$$

解答完毕.

例三: 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 位于平面 $z = 9$ 下方部分 S 的面积. 如图所示.



解: 记区域 $D: x^2+y^2\le 9$, 则所求面积为

$$|S| = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy.$$

利用极坐标计算上述积分. 显然极坐标变换的逆变换将区域 D 变为闭矩形 $D': 0\le r\le 3, 0\le\theta\le 2\pi$. 因此

$$|S| = \iint_{D'} \sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\,rdr$$

$$= \cdots = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right).$$

解答完毕.

设 $B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的闭长方体，$f(x,y,z)$ 为定义在 B 上的函数. 我们来定义函数 f 在 B 上的积分.

第一步: 对 B 作分割 π:

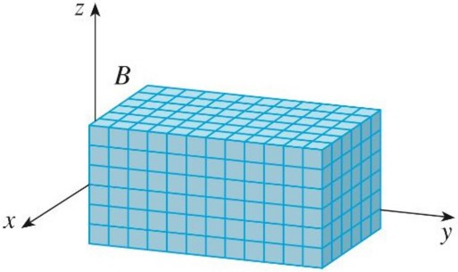
$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

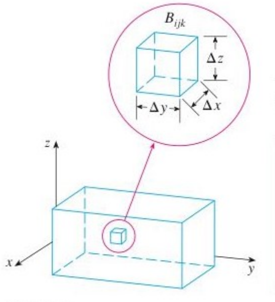
$$c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d,$$

$$r=z_0<z_1<\cdots<z_p=s.$$

记 $B_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$，$\triangle x_i=x_i-x_{i-1}$，$\triangle y_j=y_j-y_{j-1}$，$\triangle z_k=z_k-z_{k-1}$. 记小长方体 B_{ijk} 的对角线长为 d_{ijk}，即 $d_{ijk}=\sqrt{\triangle x_i^2+\triangle y_j^2+\triangle z_k^2}$. 再记分割 π 的密度为 $\|\pi\|=\max\{d_{ijk}\}$.

分割图示





第二步: 作 Riemann 和. 取样本点 $p_{ijk} \in B_{ijk}$, $P = \{p_{ijk}\}$ 称作样本点集, 作和

$$S(\pi, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(p_{ijk}) \triangle x_i \triangle y_j \triangle z_k.$$

上述和式称作 Riemann 和.

第三步：假设极限 $\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi, P)$ 存在，且极限值与样本点集 P 的选择无关，则称该极限值为函数 f 在 B 上的三重积分，并记作 $\iiint_B f(x, y, z)dxdydz$，即

$$\iiint_B f(x, y, z)dxdydz \triangleq \lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi, P).$$

此时称函数 f 在闭长方体 B 上可积. 与二重积分类似，三重积分常简记作

$$\iiint_B f \quad \text{or} \quad \int_B f.$$

函数可积的必要条件

Theorem

定理: 若函数 $f(x,y,z)$ 在长方体 B 上可积, 则函数 f 在 B 上有界.

Proof.

证明: 证明方法基本同一维情形. 细节略去. □

设 $f(x,y,z)$ 为长方体 $B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ 上的有界函数，π 是 B 的一个分割. 记 $B_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$, $M_{ijk}=\sup_{B_{ijk}}\{f(x,y,z)\}$, $m_{ijk}=\inf_{B_{ijk}}\{f(x,y,z)\}$. 我们分别称

$$U(\pi)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}M_{ijk}\triangle x_i\triangle y_j\triangle z_k,$$

$$L(\pi)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}m_{ij}\triangle x_i\triangle y_j\triangle z_k,$$

为函数 f 的 Darboux 上和与 Darboux 下和.

由假设 f 在闭长方体 B 上有界，即存在数 $m, M \in \mathbb{R}$，使得 $m \le f(x,y,z) \le M$，$(x,y,z) \in B$．由此可知对 B 的任意分割 π，我们有

$$m|B| \le L(\pi) \le U(\pi) \le M|B|,$$

这里 $|B|$ 记 B 的体积，即 $|B| = (b-a)(d-c)(s-r)$．定义

$$\overline{\int_B} f \triangleq \inf\{U(\pi)\}, \quad \underline{\int_B} f \triangleq \sup\{L(\pi)\}$$

并分别称它们为 Darboux 上积分和 Darboux 下积分．可以证明对任意分割 π，

$$m|B| \le L(\pi) \le \underline{\int_B} f \le \overline{\int_B} f \le U(\pi) \le M|B|.$$

Theorem

<u>定理</u>：设 $f(x,y,z)$ 是闭长方体 $B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ 上的有界函数，则以下事情等价

(i) f 在 B 上可积；

(ii) $\overline{\int_B} f=\underline{\int_B} f$；

(iii) $\forall\varepsilon>0$，存在分割 π，使得 $U(\pi)-L(\pi)<\varepsilon$；

(iv) $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当任意分割 π 满足 $\|\pi\|<\delta$ 时，$U(\pi)-L(\pi)<\varepsilon$.

定理的证明方法同一维和二维情形. 略去.

Definition

定义: 设 $S \subset \mathrm{IR}^3$ 为空间点集. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限个或可数个闭长方体 C_j, $j \geq 1$, 使得

$$S \subset \bigcup_{j\geq 1} C_j \quad \text{and} \quad \sum_{j\geq 1} |C_j| < \varepsilon,$$

则称集合 S 为 IR^3 中的零测集.

Theorem

定理：设 $f(x,y,z)$ 为闭立方体 B 上的有界函数，则 f 在 B 上可积，当且仅当 f 的不连续点集是 $\mathbb{R}^3$ 的零测集.

Proof.

证明略去. $\square$

Corollary

推论：闭立方体 B 上的连续函数可积.

注：与一维和二维情形相同，如果函数 $f(x,y,z)$ 在 B 上的不连续点集是零测集，则称 f 在 B 上几乎处处连续，即 a. e. on B.

Theorem

定理: 设 $f(x,y,z)$ 在长方体 $B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ 上连续, 则

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_r^s f(x,y,z)dz.$$

$$=\int_a^b dx\int_r^s dz\int_c^d f(x,y,z)dy=\cdots.$$

即函数 $f(x,y,z)$ 的六个累次积分均存在, 它们彼此相等, 且都等于 f 在 B 上三重积分.

例: 求三重积分

$$J = \iiint_{[0,1]^3} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dxdydz.$$

解: 由 Fubini 定理可知

$$J = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\frac{-1}{2} \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \right]_{z=0}^{z=1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{(2+x+y)^2}\right] dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{-1}{1+x+y} + \frac{1}{2+x+y}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} - \frac{1}{2+x}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x)(3+x) - 2\ln(2+x)\Big]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{8}{3} - 3\ln\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}(5\ln 2 - 3\ln 3).
\end{aligned}
$$

解答完毕.

扩张函数

Definition

定义: 设 $E \subset \mathbb{R}^3$ 为空间有界点集, $f(x,y,z)$ 为定义在 E 上的函数. 定义 $f_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f_E(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in E, \\ 0, & (x,y,z) \notin E. \end{cases}$$

我们称 $f_E(x,y,z)$ 为函数 $f(x,y,z)$ 的扩张函数.

一般空间有界集上的积分

Definition

定义: 设 $E \subset \mathbb{R}^3$ 为空间上的有界点集, $f(x,y,z)$ 为定义在 E 上的函数. 若存在一个包含 E 的立方体 $B \supseteq E$, 使得扩张函数 $f_E(x,y)$ 在 B 上可积, 则称函数 $f(x,y,z)$ 在点集 E 上可积, 且函数 f 在点集 E 上的积分定义为

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz \triangleq \iiint_B f_E(x,y,z)dxdydz$$

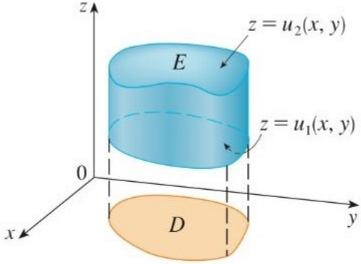
(i) 三重积分具有与二重积分类似的积分性质. 如积分线性性, 可加性, 中值定理等;

(ii) 对于空间有界点集, 可类似定义可求体积集(有体积集合);

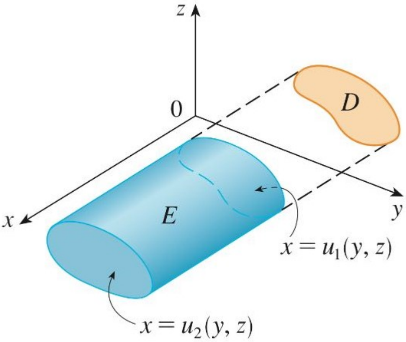
(iii) 由若干个显式曲面, 例如 $z = z(x, y)$, 其中 $z(x, y)$ 连续, 所围成的空间立体均为可求体积的立体.

(iv) 我们约定, 以后凡三重积分所涉及三维积分闭域, 即空间立体均可求体积.

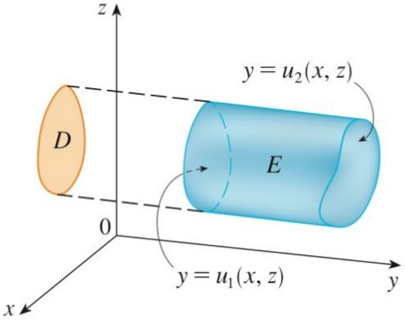
第一类空间立体是指如下形式的空间闭区域 $E=\{(x,y,z),\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y),(x,y)\in D\}$, 其中 $D\subset \mathbb{R}^2$ 为平面有界闭域, $u_1(x,y)$ 和 $u_2(x,y)$ 均为 D 上的连续函数. 第一类空间积分域可简述为上下曲面所围的立体.



称由前后两个显式曲面所成的立体，称为第二类空间积分域；



称由左右两个显式曲面所成的立体，称为第三类空间积分域；



Theorem (Fubini)

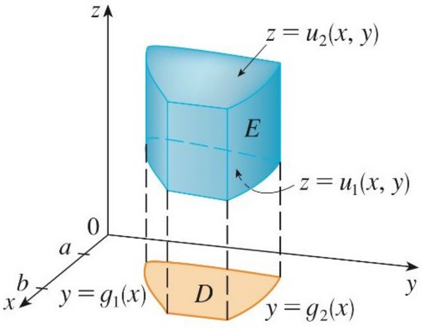
定理: 设函数 $f(x,y,z)$ 在第一类空间积分区域 $E=\{(x,y,z),$ $u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y),(x,y)\in D\}$ 上连续, 则

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\iint_D\left\{\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right\}dxdy.$$

为方便, 上式右边的积分可简写为

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\iint_D dxdy\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

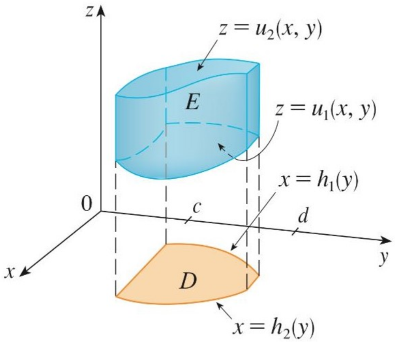
进一步, 如果平面闭域 D 可以表示为第一类平面域, 即 $\mathsf{D} = \{(\mathsf{x},\mathsf{y}), \mathsf{g}_1(\mathsf{x}) \le \mathsf{y} \le \mathsf{g}_2(\mathsf{x}), \mathsf{x} \in [\mathsf{a},\mathsf{b}]\}$, 其中 $\mathsf{g}_1(\mathsf{x})$ 和 $\mathsf{g}_2(\mathsf{x})$ 均为 $[\mathsf{a},\mathsf{b}]$ 上的连续函数, 如下图所示.



那么三重积分可进一步化为三层累次积分

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

若 D 可表为第二类平面域, 即 $D = \{(x, y), h_1(y) \le x \le h_2(y), y \in [c, d]\}$, 其中 $h_1(y)$ 和 $h_2(y)$ 均为 $[c, d]$ 上的连续函数, 如下图所示.

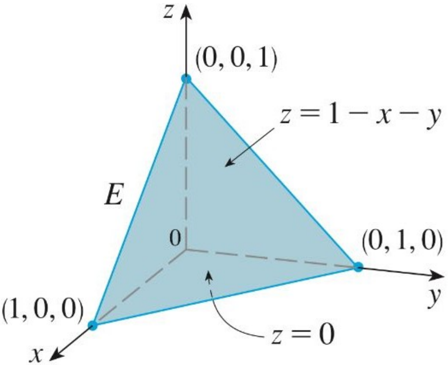


Fubini 定理, 续四

那么三重积分可化为如下三层累次积分

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

<u>例</u>: 计算三重积分 $J = \iiint_E z\,dxdydz$, 其中 E 表示由三个坐标平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, 以及平面 $x + y + z = 1$ 所围成了四面体. 如图所示.

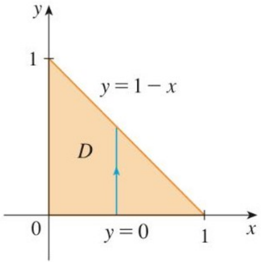


例子续一

解: 四面体 E 可表示为

$$\mathsf{E} = \left\{(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z}), 0 \le \mathsf{z} \le 1-\mathsf{x}-\mathsf{y}, (\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathsf{D}\right\},$$

其中 D 表示由坐标轴 $x=0$, $y=0$ 和直线 $x+y=1$ 所围成的三角区域, D 可表示为第一类平面积分区域, 如图所示.



于是根据 Fubini 定理可知所求积分为

$$J=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}zdz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy=\frac{-1}{6}\int_0^1\left[(1-x-y)^3\right]_{y=0}^{y=1-x}dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3dx=\frac{1}{24}.$$

解答完毕.

作业

习题3.3 (page 146-147) 15, 16, 17, 18.

习题3.4 (page 160-162) 3, 4, 5(1)(3)(5), 6, 7(1)(3)(5), 8.