# 《微积分A2》第十讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年03月18日

回忆两类广义积分，无界函数的积分和区间无限的积分．这两类广义积分的许多结论完全平行．一般只需讨论其中一类即可．往下我们只考虑积分区间无界的含参变量的广义积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad y\in K,$$

其中 $K$ 为某个区间．同样，我们关心函数 $J(y)$ 的分析性质，如连续性，可微性等．

例: 记 $f(x,y)=ye^{-xy}$, 则 $f$ 在 $\Omega=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续, 广义积分

$$J(y)\triangleq\int_0^{+\infty}ye^{-xy}dx$$

对每个 $y\geq 0$ 均收敛. 显然 $J(0)=0$, 对于 $y>0$,

$$J(y)=\int_0^{+\infty}ye^{-xy}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b ye^{-xy}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\Big[-e^{-xy}\Big]_{x=0}^{x=b}=\lim_{b\to+\infty}(1-e^{-by})=1.$$

可见函数

$$J(y)=\begin{cases}0, & y=0;\\ 1, & y>0.\end{cases}$$

$J(y)$ 在点 $y=0$ 处不连续. 这个例子表明, 即使性质很好的函数, 如 $ye^{-xy}$, 经过广义积分所得到的函数 $J(y)$ 也可以不连续. 因此之前的连续性定理不能直接推广到含参变量的广义积分情形.

定义: 考虑含参变量的广义积分

$$J(y) \triangleq \int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad y \in K,$$

其中 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty) \times K$ 上连续, $K$ 为某个区间(或开或闭或有界或无界). 假设对每个 $y \in K$, 上述积分收敛, 即 $\forall y \in K$, 如下极限存在

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x,y)dx =: J(y).$$

如果上述极限关于参数 $y \in K$ 是一致的,

即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $B = B(\varepsilon) > a$, 使得

$$\left| J(y) - \int_a^b f(x,y)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall b \geq B, \ \forall y \in K,$$

则称含参变量的广义积分 $J(y)$ 在区间 $K$ 上一致收敛. 上述不等式常写作

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall b \geq B, \ \forall y \in K.$$

例: 考虑积分

$$J(y)=\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx,\quad y\in[0,+\infty).$$

证明 (i) 积分 $J(y)$ 关于 $y\in[0,+\infty)$ 非一致收敛; (ii) 对任意 $\sigma>0$, 积分 $J(y)$ 关于 $y\in[\sigma,+\infty)$ 一致收敛.

证明: 由刚刚计算的结果知

$$J(y)=\begin{cases}0, & y=0;\\ 1, & y>0.\end{cases}$$

证 (i): 反证. 假设积分 $J(y)$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛, 则依定义知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $B = B(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\left|\int_b^{+\infty} ye^{-xy}dx\right| < \varepsilon, \quad \forall b \geq B,\ \forall y \geq 0.$$

于是对 $\forall y > 0$,

$$0 < \int_b^{+\infty} ye^{-xy}dx = e^{-by} < \varepsilon, \quad \forall b \geq B.$$

取 $b = B$, $y = B^{-1}$, 则 $e^{-by} = e^{-1} < \varepsilon$. 由于 $\varepsilon > 0$ 是任意给定的正数, 故不等式 $e^{-1} < \varepsilon$ 不可能成立. 这表明积分 $J(y)$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 非一致收敛.

证 (ii). 对任意 $y \geq \sigma > 0$, 我们有

$$0 < \int_b^{+\infty} ye^{-xy}dx = e^{-by} \leq e^{-b\sigma}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $B > 0$, 使得 $e^{-B\sigma} = \varepsilon$, 即取 $B = -\frac{\ln \varepsilon}{\sigma}$ 即可.

于是对任意 $y \geq \sigma$, 任意 $b > B$,

$$0 < \int_b^{+\infty} ye^{-xy}dx = e^{-by} \leq e^{-b\sigma} < e^{-B\sigma} = \varepsilon.$$

这就证明了积分 $J(y)$ 关于 $y \in [\sigma, +\infty)$ 一致收敛. 证毕. $\square$

**Theorem**

定理 [Cauchy 一致收敛准则]: 广义含参积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad y\in K$$

关于 $y\in K$ 一致收敛, 当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $B(\varepsilon)>a$, 使得

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right|<\varepsilon, \quad \forall b_1,b_2\geq B(\varepsilon), \quad \forall y\in K.$$

证: $\Rightarrow$: 由一致收敛性定义知，对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists B = B(\varepsilon) > a$, 使得 $\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon/2$, $\forall b \geq B$. 于是对 $\forall b_2 \geq b_1 \geq B$,

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dy\right| = \left|\int_{b_1}^{+\infty} - \int_{b_2}^{+\infty}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: 假设对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $B = B(\varepsilon) > a$, 使得

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dy\right| < \varepsilon, \quad \forall b_2 \geq b_1 \geq B.$$

令 $b_2 \to +\infty$ 可得 $\left|\int_{b_1}^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leq \varepsilon$, $\forall b_1 \geq B$. 这表明广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 $y \in K$ 一致收敛. 证毕. □

**Theorem**

定理: 假设存在非负连续函数 $F(x)$, $x \in [a, +\infty)$, 使得

$$|f(x, y)| \leq F(x), \quad \forall (x, y) \in [a, +\infty) \times K,$$

且广义积分 $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ 收敛, 则广义积分

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx, \quad y \in K$$

关于 $y \in K$ 一致收敛.

注: 上述函数 $F(x)$ 称为被积函数 $f(x, y)$ 的优函数(majorant functions).

Proof.

证明: 利用 Cauchy 判别法. 由假设积分 $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ 收敛可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $B = B(\varepsilon) > a$, 使得

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} F(x)dx\right| < \varepsilon, \quad \forall b_1, b_2 \geq B.$$

于是对 $\forall y \in K$, $\forall b_2 \geq b_1 \geq B$,

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x,y)|dx \leq \int_{b_1}^{b_2} F(x)dx < \varepsilon.$$

由 Cauchy 判别法知积分 $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ 关于 $y \in K$ 一致收敛. 证毕. □

**Theorem**

定理：设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times K\subset \mathbb{R}^2$ 上连续，其中 $K$ 为某一区间. 若广义含参变量积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

关于 $y\in K$ 一致收敛，则 $J(y)$ 在区间 $K$ 上连续.

证: 由假设积分 $J(y)$ 关于 $y \in K$ 的一致收敛性知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $B = B(\varepsilon) > a$, 使得

$$\left| \int_B^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall y \in K.$$

取 $y_0, y \in K$, 再取闭区间 $[c, d] \subset K$, 使得 $y, y_0 \in [c, d]$. 由于 $f(x, y)$ 在闭矩形 $[a, B] \times [c, d]$ 上连续, 从而一致连续, 故对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{B - a}, \quad \text{if} \quad |y - y_0| < \delta.$$

于是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $|y - y_0| < \delta$ 时,

$$|J(y) - J(y_0)| = \left|\int_a^{+\infty} [f(x, y) - f(x, y_0)]dx\right| = \left|\int_a^B + \int_B^{+\infty}\right|$$

$$\leq \int_a^B \Big|f(x, y) - f(x, y_0)\Big|dx + \left|\int_B^{+\infty} [f(x, y) - f(x, y_0)]dx\right|$$

$$\leq \int_a^B \frac{\varepsilon}{B - a}dx + \left|\int_B^{+\infty} f(x, y)dx\right| + \left|\int_B^{+\infty} f(x, y_0)dx\right| < 3\varepsilon.$$

这就证明了 $J(y)$ 在 $y_0$ 处连续. 由 $y_0$ 的任意性知 $J(y)$ 在 $K$ 上连续. 证毕. □

**Theorem**

定理：假设 $f(x,y)$ 在闭域 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续，且广义积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛，则

(i) 广义积分 $\int_a^{+\infty} J_1(x)dx$ 收敛，其中 $J_1(x)=\int_c^d f(x,y)dy$,

(ii) $\int_a^{+\infty} J_1(x)dx=\int_c^d J(y)dy$，此即

$$\int_a^{+\infty}dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx.$$

例: 计算积分 J 的值, 其中

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(bx) - \arctan(ax)}{x} dx, \quad b > a > 0.$$

解: 重要观察

$$\frac{\arctan(bx) - \arctan(ax)}{x} = \int_a^b \frac{dy}{1 + (xy)^2}, \quad \forall x > 0.$$

于是

$$J = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b \frac{dy}{1 + (xy)^2}.$$

## 例子，续一

交换上述积分次序(合理性待考)得

$$J=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(xy)^2}$$

$$=\int_a^b \frac{dy}{y}\int_0^{+\infty}\frac{d(xy)}{1+(xy)^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_a^b\frac{dy}{y}=\frac{\pi}{2}(\ln b-\ln a).$$

往下还需证明上述交换积分次序的合理性.

为证明合理性，只需证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(xy)^2} \qquad (*)$$

关于 $y \in [a, b]$ 一致收敛．注意 $0 < a < b$．由于

$$0 < \frac{1}{1+(xy)^2} \leq \frac{1}{1+(ax)^2}, \quad \forall x \geq 0, \quad \forall y \in [a, b],$$

且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(ax)^2}$ 收敛．故根据 Weierstrass 判别法可知，广义积分(*)关于 $y \in [a, b]$ 一致收敛．因此交换积分次序合理． □

例二: 计算积分

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad 0 < a < b.$$

解: 将被积函数表示为积分形式

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy.$$

于是交换积分次序得

$$J = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{y} \int_0^{+\infty} e^{-xy} d(xy) = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln b - \ln a.$$

交换积分次序的合理性：含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$$

关于 $y \in [a, b]$ 一致收敛．这是因为 $0 < e^{-xy} \le e^{-ax}$, $\forall x \ge 0$, $\forall y \in [a, b]$, 且积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛．再根据 Weierstrass 判别法知上述广义积分一致收敛．证毕． $\square$

**Theorem**

<u>定理</u>: 假设 $f(x,y)$ 在闭域 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, 且广义积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛, 则

(i) 广义积分 $\int_a^{+\infty}J_1(x)dx$ 收敛, 其中 $J_1(x)=\int_c^d f(x,y)dy$,

(ii) $\int_a^{+\infty}J_1(x)dx=\int_c^d J(y)dy$, 此即

$$\int_a^{+\infty}dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx.$$

证: 由连续性定理知

$$J_1(x) = \int_c^d f(x,y)dy, \quad x \in [a,+\infty)$$

在 $[a,+\infty)$ 上连续. 因此对任何 $b > a$, 积分 $\int_a^b J_1(x)dx$ 存在.

由假设 $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 故

$\forall \varepsilon > 0$, 存在 $B = B(\varepsilon) > a$, 使得

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx \right| \le \varepsilon, \quad b_2 > b_1 \ge B, \quad y \in [c,d].$$

在闭矩形 $[b_1,b_2] \times [c,d]$ 上应用积分交换次序定理得

$$\int_{b_1}^{b_2} J_1(x)dx = \int_{b_1}^{b_2} dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow \quad \left|\int_{b_1}^{b_2} J_1(x)dx\right| \leq \int_c^d dy \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| \leq \varepsilon(d-c).$$

由 Cauchy 收敛准则可知广义积分 $\int_a^{+\infty} J_1(x)dx$ 收敛．进一步对任意 $b \geq B$

$$\left|\int_a^b J_1(x)dx - \int_c^d J(y)dy\right|$$

$$= \left|\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy - \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right|$$

# 证明，续二

$$= \left| \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx - \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \right|$$

$$= \left| \int_c^d dy \left\{ \int_a^b f(x,y)dy - \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \right\} \right|$$

$$= \left| \int_c^d dy \int_b^{+\infty} f(x,y)dx \right| \le \varepsilon(d-c).$$

这表明

$$\int_a^{+\infty} J_1(x)dx = \int_c^d J(y)dy.$$

定理得证. □

# 可微性定理(积分号下求导定理)

定理：假设

(1) 函数 $f(x,y)$ 及偏导 $f_y(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times(c,d)$ 上连续，

(2) 积分 $\int_a^{+\infty} f_y(x,y)dx$ 关于 $y\in(c,d)$ 一致收敛；

(3) 存在 $y_0\in(c,d)$，使得 $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx$ 收敛，

则 (i) 积分 $J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 $y\in(c,d)$ 一致收敛；

(ii) $J(y)$ 在 $(c,d)$ 上连续可微，且 $J'(y)=\int_a^{b} f_y(x,y)dx$，也就是可以在积分号下求导数

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\left[\frac{d}{dy}f(x,y)\right]dx.$$

换言之，积分运算和求导运算次序可互换.

课本例2.3.2 情形 $\alpha = 1$, page 113: 求积分

$$J(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(xy)dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

解: 假设对积分 $J(y)$ 可以积分号下求导, 则

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} \left[e^{-x^2} \cos(xy)\right]'_y dx = -\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(xy) x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin(xy) e^{-x^2} d(-x^2) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin(xy)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y e^{-x^2} \cos(xy)dx = -\frac{y}{2} J(y).$$

也就是说，函数 $J(y)$ 满足微分方程 $J'(y)+\frac{y}{2}J(y)=0$. 这是一阶线性齐次常微分方程. 可如下求解. 方程两边同乘以 $e^{\frac{y^2}{4}}$ (积分因子) 得

$$e^{\frac{y^2}{4}}J'(y)+e^{\frac{y^2}{4}}\frac{y}{2}J(y)=0 \quad \text{or} \quad \left[e^{\frac{y^2}{4}}J\right]'=0.$$

这表明 $e^{\frac{y^2}{4}}J(y)$ 是常数. 故 $e^{\frac{y^2}{4}}J(y)=J(0)$. 稍后我们将证明 $J(0)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 因此

$$J(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{y^2}{4}}, \quad y\in\mathbb{R}.$$

关于积分号下求导的合理性证明. 记 $f(x,y)=e^{-x^2}\cos(xy)$，则 $f_y(x,y)=-xe^{-x^2}\sin(xy)$. 易证 (i) 积分

$$\int_0^{+\infty} f_y(x,y)dx=\int_0^{+\infty}-xe^{-x^2}\sin(xy)dx$$

关于 $y\in\mathbb{R}$ 一致收敛. 因 $|f_y(x,y)|\le xe^{-x^2}$, $\forall x\ge 0$, $\forall y\in\mathbb{R}$, 且积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$ 收敛.

(ii) 存在 $y_0\in\mathbb{R}$, 使得积分 $\int_0^{+\infty}f(x,y_0)dx$ 收敛. 实际上积分 $\int_0^{+\infty}f(x,y)dx$ 对任意 $y\in\mathbb{R}$ 均收敛. 因为 $|f(x,y)|\le e^{-x^2}$, 且积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 收敛. 由定理可知积分号下求导合理. 解答完毕.

证: 由 Newton-Leibniz 公式得

$$f(x,y)=f(x,y_0)+\int_{y_0}^{y} f_u(x,u)du, \quad y\in(c,d).$$

在上式两边关于 $x$ 从 $b_1$ 到 $b_2$ 积分, 并交换积分次序得

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx=\int_{b_1}^{b_2} f(x,y_0)dx+\int_{b_1}^{b_2} dx\int_{y_0}^{y} f_u(x,u)du$$

$$=\int_{b_1}^{b_2} f(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} du\int_{b_1}^{b_2} f_u(x,u)dx.$$

由假设 (2) 和 (3)知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $B=B(\varepsilon)>a$, 使得对 $\forall b_1,b_2\geq B$,

# 证明，续一

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y_0)dx\right| < \varepsilon \quad 且 \quad \left|\int_{b_1}^{b_2} f_y(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

于是

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| \leq \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y_0)dx\right| + \left|\int_{y_0}^{y} du \int_{b_1}^{b_2} f_u(x,u)dx\right|$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon|y-y_0| \leq (1+d-c)\varepsilon,\ \forall b_1, b_2 \geq B,\ \forall y \in (c,d).$$

这说明积分 $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 $y \in (c,d)$ 一致收敛. 即结论 (i) 成立.

# 证明，续二

以下证明 (ii). 由结论 (i) 以及连续性定理可知 $J(y)$ 在 $(c,d)$ 上连续. 任取 $y_1, y_1+h \in (c,d)$, 我们有

$$\frac{J(y_1+h)-J(y_1)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^{+\infty}[f(x,y_1+h)-f(x,y_1)]dx$$

$$= \int_a^{+\infty} f_y(x,y_1+\theta h)dx, \quad \theta\in(0,1).$$

于是

$$\left|\frac{J(y_1+h)-J(y_1)}{h} - \int_a^{+\infty} f_y(x,y_1)dx\right|$$

$$= \left|\int_a^{+\infty}[f_y(x,y_1+\theta h)-f_y(x,y_1)]dx\right|.$$

# 证明，续三

取一个闭子区间 $[c', d'] \subset (c, d)$，使得 $y_1, y_1 + h \in [c', d']$. 由于 $f_y(x, y)$ 在闭矩形 $[a, B] \times [c', d']$ 上连续，从而一致连续. 故对上述任取的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得当 $|y - y'| < \delta$ 时，

$$\left| f_y(x, y) - f_y(x, y') \right| < \frac{\varepsilon}{B - a},$$

其中 $\forall x \in [a, B]$, $\forall y, y' \in [c', d']$. 于是当 $|h| < \delta$ 时，

$$\left| \int_a^{+\infty} [f_y(x, y_1 + \theta h) - f_y(x, y_1)] dx \right|$$

$$\leq \left| \int_a^B [\cdots] dx \right| + \left| \int_B^{+\infty} [\cdots] dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{B - a}(B - a) + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

这说明

$$\lim_{h\to 0}\frac{J(y_1+h)-J(y_1)}{h}=\int_a^{+\infty}f_y(x,y_1)dx.$$

此即 $J(y)$ 在 $y_1$ 处可导，且

$$J'(y_1)=\int_a^b f_y(x,y_1)dx.$$

由于 $y_1\in(c,d)$ 的任意性，故结论 (ii) 得证. $\square$

考虑含参变量的广义积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx, \quad y\in K,$$

这里 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times K$ 上连续, $K$ 记某一区间.

以下介绍两个含参变量广义积分收敛性判别法, Dirichlet 判别法和 Abel 判别法, 其证明与通常广义积分的相应的判别法基本相同. 这里从略.

定理：假设

(i) (一致有界性)：存在 $M > 0$, 使得

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx\right| \leq M, \quad \forall b \geq a, \quad \forall y \in K;$$

(ii) (单调一致收敛于零)：$g(x,y)$ 关于 $x$ 单调，且关于 $y \in K$ 一致收敛于零，即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B = B(\varepsilon) > a$, 使得 $|g(x,y)| \leq \varepsilon$, $\forall x \geq B$, $\forall y \in K$, 则下述积分关于 $y \in K$ 一致收敛

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx, \quad y \in K.$$

定理：假设

(i) (一致收敛性)：下述广义积分关于 $y \in K$ 一致收敛

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad y \in K;$$

(ii) (单调一致有界)：函数 $g(x,y)$ 关于 $x$ 单调，且关于 $y \in K$ 一致有界，即存在 $M > 0$，使得

$$|g(x,y)| \le M, \quad \forall (x,y) \in [a,+\infty) \times K,$$

则下述积分关于 $y \in K$ 一致收敛

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx, \quad y \in K.$$

习题2.1 (page 102-103): 4(2)(4)(6), 5, 6, 7, 8.

(题8提示: 利用 Dirichlet 积分公式 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$)

习题2.3 (page 115): 1, 2.

第2章总复习题(page 115-116): 1, 4, 6(1), 7.

总复习题题6(1) 提示: 积分号下求导. 答案: $\frac{\pi}{2} \ln(1+y)$.

题7 提示: 利用 Dirichlet 积分公式.