1. 假设以下集合均为非空集合，请判断哪些集合一定有极点，并给出理由：

a） $\Omega=\left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \mathbf{x}\in\mathbb{R}_{+}^{n}, \mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b}\in\mathbb{R}^{m}\right\}$。

b） $\Omega=\left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax}\geq\mathbf{b}, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n}, \mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b}\in\mathbb{R}^{m}\right\}$，其中 $\mathbf{A}$ 为行满秩矩阵。

c） $\Omega=\left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax}\geq\mathbf{b}, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n}, \mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b}\in\mathbb{R}^{m}\right\}$，其中 $\mathbf{A}$ 为列满秩矩阵。

(a)

一定有极点：

由于问题为线性规划问题的标准形式且有可行解

故至少有一个基本可行解.

而基本可行解即为顶点，故必有顶点。

(b) 不一定有： $\Omega = \{ x \mid x_1+x_2 \geq 0 \}$ 就没有极点。

(c)

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$m \geq n$，有 n 行线性无关.

$$\left.\begin{aligned} a_{k(1)} x^* &= b_{k(1)} \\ &\vdots \\ a_{k(n)} x^* &= b_{k(n)} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{唯一确定 } x^*$$

$$a_{k(n+1)} x^* > b_{k(n+1)}$$

$$\vdots$$

$$a_{k(m)} x^* > b_{k(m)}$$

若 $x^* = \alpha x_1 + \beta x_2$

x_1, 和 x_2 前 n 式必有大于出现

故不成立

故存在顶点。

2. 验证 Beale 的例子

考虑如下线性规划问题

$$\max_{x_1,x_2,\dots,x_7} \quad \frac{3}{4}x_4 - 20x_5 + \frac{1}{2}x_6 - 6x_7$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0$$

$$x_3 + x_6 = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,7$$

假设我们选择的初始基变量是 $\{x_1, x_2, x_3\}$，则得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	0	0	1/4	−8	−1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	−12	−1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	3/4	−20	1/2	−6	$z-0$

第一次选择 x_4 作为进基变量，x_1 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_4, x_2, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	4	0	0	1	−32	−4	36	0
x_2	−2	1	0	0	4	3/2	−15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	−3	0	0	0	4	7/2	−33	$z-0$

第二次选择 x_5 作为进基变量，x_2 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_4, x_5, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	−12	8	0	1	0	8	−84	0
x_5	−1/2	1/4	0	0	1	3/8	−15/4	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	−1	−1	0	0	0	2	−18	$z-0$

第三次选择 x_6 作为进基变量，x_4 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_6, x_5, x_3\}$，得到如下的单纯型表

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	−3/2	1	0	1/8	0	1	−21/2	0
x_5	1/16	−1/8	0	−3/64	1	0	3/16	0
x_3	3/2	−1	1	−1/8	0	0	21/2	1
	2	−3	0	−1/4	0	0	3	$z-0$

第四次选择 x_7 作为进基变量，x_5 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_6, x_7, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	2	−6	0	−5/2	56	1	0	0
x_7	1/3	−2/3	0	−1/4	16/3	0	1	0
x_3	−2	6	1	5/2	−56	0	0	1
	1	−1	0	1/2	−16	0	0	$z-0$

第五次选择 x_1 作为进基变量，x_6 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_1, x_7, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	−3	0	−5/4	28	1/2	0	0
x_7	0	1/3	0	1/6	−4	−1/6	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	2	0	7/4	−44	−1/2	0	$z-0$

第六次选择 x_2 作为进基变量，x_7 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_1, x_2, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	0	0	1/4	−8	−1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	−12	−1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	3/4	−20	1/2	−6	$z-0$

则此时循环到了初始状态。实际上在整个迭代过程中，虽然可行基矩阵不断改变，但对应的基本可行解始终是 $\boldsymbol{x} = [0,0,1,0,0,0,0]^T$，没有变化。

如果采用 Bland 法则，请重新计算上述例子，找到最优解。

Bland：选择下标最小的变量进行进/出基.

第四次迭代：x_1进基，x_5出基.

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	0	-2	0	-1	24	1	-6	0
x_1	1	-2	0	$-\frac{3}{4}$	16	0	3	0
x_3	0	2	1	$\frac{5}{4}$	-24	0	6	1
	0	1	0	$\frac{5}{4}$	-32	0	-3	$z-0$.

第五次迭代：x_2进基，x_3出基.

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	0	1	$\frac{1}{4}$	-8	0	9	1
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-12	0	3	$\frac{1}{2}$
	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-20	0	-6	$z-\frac{1}{2}$

第六次迭代：x_4 进基，x_2出基.

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$	$z-\frac{5}{4}$

$x=(\frac{3}{4},0,0,1,0,1,0)$

$z_{max}=\frac{5}{4}$

3. 某线性规划问题的约束条件是

$$2x_1+3x_2+x_3=14$$
$$5x_1+x_2+x_4=9$$
$$x_i\geq 0,\ \ i=1,2,3,4$$

请问 x_1,x_2 所对应的列向量 A_1,A_2 是否构成可行基？若是，请写出 B,N，并求出 B 对应的基本可行解。

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}\qquad B^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{13} & \frac{3}{13}\\ \frac{5}{13} & -\frac{2}{13}\end{bmatrix}\qquad B^{-1}b=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}>0$$

$$N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\downarrow$

构成可行基，基本可行解为：$(1,4,0,0)^T$

4. 用单纯型法求解以下问题，其中起点为 $x_1=x_2=0$

$$\max_{x_1,x_2}\ \ 2x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\ \ 5x_2\leq 15$$
$$6x_1+2x_2\leq 24$$
$$x_1+x_2\leq 5$$
$$x_1\geq 0,x_2\geq 0$$

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	5	1	0	0	15
x_4	6	2	0	1	0	24
x_5	1	1	0	0	1	5
	2	1	0	0	0	z

进 x_1，出 x_4

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	5	1	0	0	15
x_4	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0	4
x_5	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	1
	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$z-8$

进 x_2，出 x_5

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$
x_4	1	0	0	$\frac{3}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$z-\frac{17}{2}$

$$X=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2},\frac{15}{2},0,0\right)$$

$$z_{max}=\frac{17}{2}$$

附加题：假设以下集合均为非空集合，请判断哪些集合一定有极点，并给出理由：

d） $\Omega = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} = -1, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \right\}$，其中 $\mathbf{A}$ 为列满秩矩阵。

(C)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$m \geq n$，有 n 行线性无关.

可选 $n-1$ 个和 C^T 线性无关的

$$\left.\begin{aligned} C^T x^* &= -1 \\ a_{k(1)} x^* &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k(n-1)} x^* &= 0 \end{aligned}\right\} \text{唯一确定 } x^*$$

$$\begin{aligned} a_{k(n)} x^* &> 0 \\ a_{k(n+1)} x^* &> 0 \\ &\vdots \\ a_{k(m)} x^* &> 0 \end{aligned}$$

若 $x^* = \alpha x_1 + \beta x_2$

x_1，和 x_2 前 $n-1$ 式必有大于出现

故不成立

故一定有顶点、