# 第四次作业参考解答

《高等微积分教程（上）》

习题 2.6

2. 设 $a_{2m} < 0$. 求证: 实系数多项式 $x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \cdots + a_{2m-1}x + a_{2m}$ 至少有两个零点.

证明. 令 $f(x) = x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \cdots + a_{2m-1}x + a_{2m}$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x) - x^{2m}}{x^{2m}} = 0$.

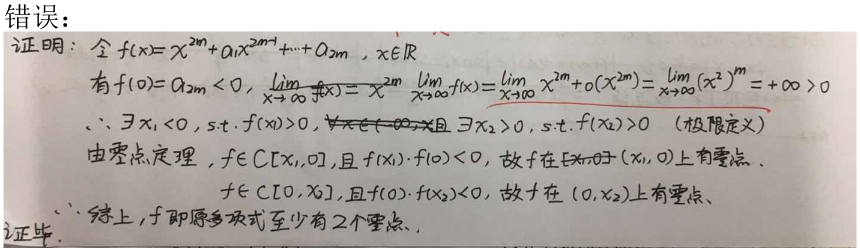
故存在 $M > 0$，使得当 $|x| > M$ 时，$\left|\dfrac{f(x) - x^{2m}}{x^{2m}}\right| < \dfrac{1}{2}$.

从而有 $\dfrac{f(x)}{x^{2m}} > \dfrac{1}{2}$，故 $f(M+1) > 0, f(-M-1) > 0$.

又 $f(0) = a_{2m} < 0$.

由介值定理, 存在 $\xi_1 \in (-M-1, 0)$, 使得 $f(\xi_1) = 0$; 存在 $\xi_2 \in (0, M+1)$, 使得 $f(\xi_2) = 0$. □

错误:


证明：令 $f(x)=x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots+a_{2m}$，$x\in\mathbb{R}$

有 $f(0)=a_{2m}<0$，$\cancel{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = x^{2m}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^{2m}+o(x^{2m}) = \lim\limits_{x\to\infty}(x^2)^m = +\infty > 0$

$\therefore \exists x_1<0$, s.t. $f(x_1)>0$，$\cancel{\forall x\in(-\infty, x}$ 且 $\exists x_2>0$, s.t. $f(x_2)>0$ （极限定义）

由零点定理，$f\in C[x_1,0]$，且 $f(x_1)\cdot f(0)<0$，故 $f$ 在 $\cancel{[x_1,0]}$ $(x_1,0)$ 上有零点.

$f\in C[0,x_2]$，且 $f(0)\cdot f(x_2)<0$，故 $f$ 在 $(0,x_2)$ 上有零点、

$\because$ 综上，$f$ 即原多项式至少有2个零点、

证毕.

错误原因：此处两个极限是不存在的，只是为了简便，采用极限等于正无穷的记号，并没有相等的关系。

大家注意，无穷不是一个值。

4. 设 $f \in C[0,2a], f(0)=f(2a)$. 求证：$\exists \xi \in [0,a]$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证明. 设 $g(x)=f(x)-f(x+a)$，则 $g(0)+g(a)=f(0)-f(a)+f(a)-f(2a)=0$.

若 $g(0)=0$，则令 $\xi=0$ 即可.

若 $g(0)\neq 0$，则由介值定理，$\exists \xi \in (0,a)$，使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$. □

9. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x^2)=f(x)$. 证明：若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $f(x)$ 恒为常数.

证明. 对任意 $x_0 \in (0,+\infty)$，由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_0^{\frac{1}{n}}=1$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_0^{2^{-n}}=1$.

由 $f(x^2)=f(x)$ 知 $f(x_0)=f(x_0^{2^{-n}})$，故 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0^{2^{-n}})$.

又因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0^{2^{-n}})=f(1)$.

从而 $f(x_0)=f(1)$.

由 $x_0$ 的任意性即知 $f(x)$ 恒为常数. □

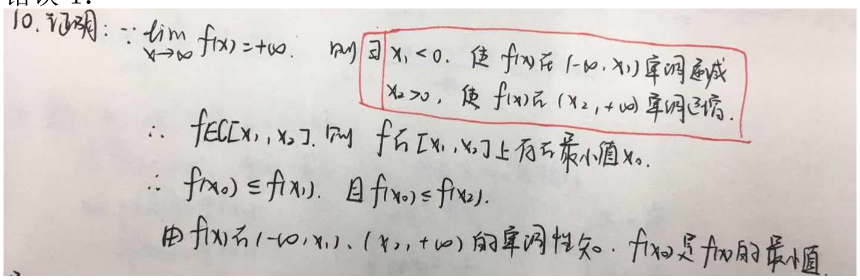
10. 设 $f\in C(\mathbb{R})$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. 则 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上有最小值.

证明. 设 $f(0)=A$. 则由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ 知 $\exists M>0$，使得当 $|x|>M$ 时有 $f(x)>A$.

由 $f \in C[-M,M]$ 知 $\exists x_0 \in [-M,M]$ 使得 $f(x_0) = \min\limits_{x\in[-M,M]} f(x)$，则 $A = f(0) \geq f(x_0)$.

从而对任意 $x \in \mathbb{R}$，有 $f(x) \geq f(x_0)$，故 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上有最小值. $\square$

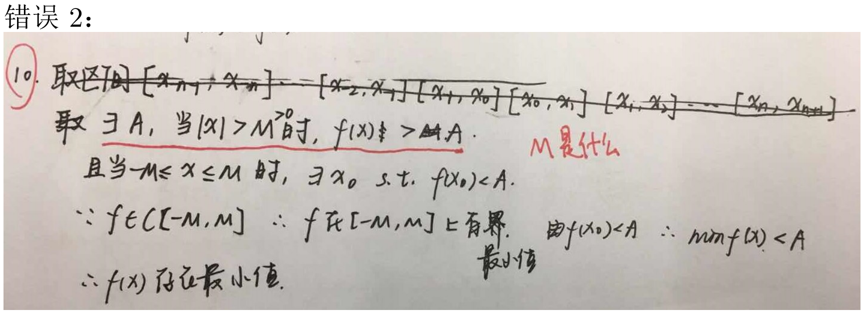
错误 1：


10. 证明：∵ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. 则 $\boxed{\exists}$ $x_1<0$. 使 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 单调递减
$x_2>0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 单调递增.
∴ $f\in C[x_1, x_2]$. 则 $f$ 在 $[x_1, x_2]$ 上存在最小值 $x_0$.
∴ $f(x_0) \le f(x_1)$. 且 $f(x_0)\le f(x_2)$.
由 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$、$(x_2,+\infty)$ 的单调性知. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最小值.

错误原因：并不一定存在。

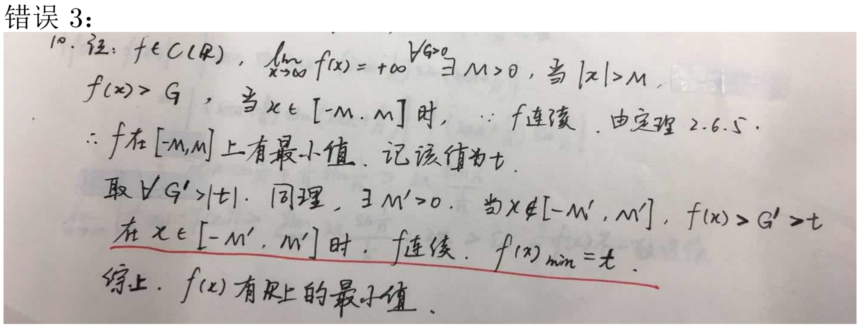
大家注意，如果想用教材或者课件上没有的某一结论，最好自己先证一下，因为很有可能是错误的。

错误 2：


10. 取区间 ~~$[x_{-n}, x_{-n}] \cdots [x_{-2}, x_{-1}][x_{-1}, x_0][x_0, x_1][x_1, x_2] \cdots [x_n, x_{n+1}]$~~
取 $\exists A$, 当 $|x|>M$ 时, $f(x) > A$.　　M是什么
且当 $-M\le x\le M$ 时, $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)<A$.
∵ $f\in C[-M,M]$ ∴ $f$ 在 $[-M,M]$ 上有界 最小值　由 $f(x_0)<A$ ∴ $\min f(x)<A$
∴ $f(x)$ 存在最小值.

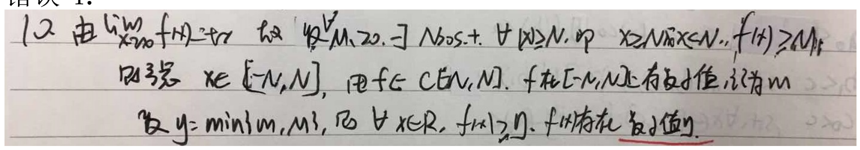
错误原因：对于极限是无穷没有理解好。

错误 3：


10. 证: $f\in C(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ $\forall G>0$ $\exists M>0$, 当 $|x|>M$,
$f(x)>G$, 当 $x\in[-M, M]$ 时, ∵ $f$ 连续. 由定理 2.6.5.
∴ $f$ 在 $[-M,M]$ 上有最小值. 记该值为 $t$.
取 $\forall G'>|t|$. 同理, $\exists M'>0$. 当 $x\notin[-M', M']$, $f(x)>G'>t$
在 $x\in[-M', M']$ 时. $f$ 连续. $f(x)_{min}=t$.
综上. $f(x)$ 有界上的最小值.

错误原因：没有说明 $t$ 为什么是最小值。

错误 4：



12 由 $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ 故 对 $\forall M_1>0$, $\exists N>0$ s.t. $\forall |x|\geq N$, 即 $x\geq N$ 或 $x\leq -N$, $f(x)\geq M_1$

则考虑 $x\in[-N,N]$, 由 $f\in C[-N,N]$. $f$ 在 $[-N,N]$ 上有最小值, 记为 $m$

取 $y=\min\{m,M\}$, 则 $\forall x\in R$, $f(x)\geq y$. $f(x)$ 存在最小值.

错误原因：这里 $y$ 可能等于 $M$，而 $M$ 可能不是某个 $f(x_0)$.

习题 5.1

15.

5.1

不一致连续 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0,\ \forall \delta>0,\ \exists u,v\in I,\ |u-v|<\delta$ s.t. $|f(u)-f(v)|\geq\varepsilon_0$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \exists u_n,v_n\in I$ s.t. $|u_n-v_n|<\frac{1}{n},\ |f(u_n)-f(v_n)|>\varepsilon_0$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0,$ ∃两个点列 $\{u_n\},\{v_n\}\in I$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n-v_n|=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(u_n)-f(v_n)|>\varepsilon_0$

15.(1) 令 $\varepsilon_0=1$ 则 $\forall n\in\mathbb{N}$，令 $u_n=n+\frac{1}{2n}$，$v_n=n$.

$|u_n-v_n|=\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}\quad |f(u_n)-f(v_n)|=\left|(n+\frac{1}{2n})^2-n^2\right|=\left|1+\frac{1}{4n^2}\right|>1$

$\therefore f(x)=x^2,\ x\in[0,+\infty)$ 不一致连续

$\lim\limits_{n\to+\infty}|f(u_n)-f(v_n)|>\varepsilon$ 更强 可以保证不一致连续

(2) 令 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$u_n=\frac{1}{n}$，$v_n=\frac{1}{2n}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n-v_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(u_n)-f(v_n)|=\lim\limits_{n\to\infty}|-\ln n+\ln 2n|=\ln 2>\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)$ 不一致连续

(3) 令 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$

$u_n=\sqrt{2\pi n}$，$v_n=\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n-v_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2\pi n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2\pi n}}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}|f(u_n)-f(v_n)|=\left|\sin(2\pi n)-\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})\right|=1>\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\sin x^2,\ x\in\mathbb{R}$ 不一致连续

(4) 令 $\varepsilon_0=\pi$

$u_n=2\pi n\quad v_n=2\pi n+\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n-v_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}|f(u_n)-f(v_n)|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|2\pi n\sin 2\pi n-(2\pi n+\frac{1}{n})\sin(2\pi n+\frac{1}{n})\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(2\pi n+\frac{1}{n})\sin\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(2\pi+\frac{1}{n^2})\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=2\pi>\pi$

$\therefore f(x)=x\sin x,\ x\in\mathbb{R}$ 不一致连续.

错误：

解：(1) 证明：取 $x=x_n,\ y=x_n+1$. 则 $|x-y|=1$，故 $\exists\delta>1$，有 $|x-y|<\delta$，$\forall x_n\in[0,+\infty)$

而 $|f(x)-f(y)|=|x_n^2-(x_n+1)^2|=|2x_n+1|=2x_n+1\geq 1$

故取 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，均有：当 $\delta>1$ 时，$|x-y|<\delta$.

此时 $|f(x)-f(y)|\geq 1>\varepsilon$，故 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致连续.

错误原因：一致连续的概念理解错误。

习题 3.1

5/9/15.

5. (1). 原式 $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{h}$

$= \alpha\cdot f'(x_0) + \beta\cdot f'(x_0) = (\alpha+\beta)\cdot f'(x_0)$

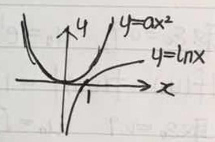
(2). 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+2/n)-f(x_0)}{\frac{2}{n}}\cdot 2 = \lim\limits_{\frac{2}{n}\to 0}\dfrac{f(x_0+\frac{2}{n})-f(x_0)}{\frac{2}{n}}\cdot 2 = 2f'(x_0)$

(3). $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}\cdot(-1) = -f'(x_0)$.

(4). $= \exp\left(\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(f(x_0+h))}{h}\right) \cancel{= \exp\left(\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)}$

令 $g(x) = \ln(f(x))$ $\quad\therefore g(x_0) = 0$

$\therefore$ 原式 $= \exp\left(\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right) = \exp\left(\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right) = e^{f'(x_0)}$




9. 令切点为 $(x_1, y_1)$

$\therefore \left.\begin{array}{l} y_1 = ax_1^2 = \ln x_1 \\ y' = 2ax_1 = \dfrac{1}{x_1} \end{array}\right\}$ $\quad\therefore x_1 = e^{\frac{1}{2}} \quad \therefore a = \dfrac{1}{2e}$

$\therefore (\sqrt{e}, \frac{1}{2}) \qquad y = \dfrac{x}{\sqrt{e}} - \dfrac{1}{2}$

估算:

15. $dT = \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{l}}\cdot dl \qquad 0.05 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{9.8}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{0.2}}\cdot dl \qquad \therefore dl = 0.02\,m \ \cancel{0.0223} = 2.23\ cm$

准确: $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}. \quad \therefore T_0 = \dfrac{2}{7}\pi$

$\therefore T_0 + 0.05 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}} \qquad \therefore l_1 - l_0 = 0.2229 - 0.2 = 2.29\ cm \qquad \therefore$ 增长 2.29 cm.

5.(4) 错误：

补-5.(4): $\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0+h))^{\frac{1}{h}} = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)}{h}\cdot h\right)^{\frac{1}{h}}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\left(1 + h\cdot\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim\limits_{h\to 0}(1+f'(x_0)\cdot h)^{\frac{1}{f'(x_0)\cdot h}\cdot f'(x_0)}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\left[(1+f'(x_0)\cdot h)^{\frac{1}{f'(x_0)\cdot h}}\right]^{f'(x_0)} = \boxed{e^{f'(x_0)}}$

错误原因：不符合极限的运算法则.

习题 3.2

4.

T4. (1) $y' = 6\cos 3x$

(3) $y' = (-3x^2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot(1-x^3)^{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{9}{2}x^2\sqrt{1-x^3}$

(5) $y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right)\cdot\left(1+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(7) $y' = \left(\frac{-1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = \frac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$

(9) $y = \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) - \ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} - \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

(11) $y' = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\arctan^2 x}} = \frac{-1}{(1+x^2)\sqrt{1-\arctan^2 x}}$

(13) $y' = (\cos x)(2\sin x)\cosh(\sin^2 x) = \sin(2x)\cosh(\sin^2 x)$

(15) $y' = \left(\frac{-2}{x^2}\right)\cosh\left(\frac{2}{x}\right)\cosh(3x) + 3\sinh(3x)\sinh\left(\frac{2}{x}\right)$

5.

5. (1) $[f(-x)]' = -f'(-x)$

(3) $\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]' = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{-f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{2x\sqrt{x}}$

(5) 令 $g(x) = e^{f(x)}\tan[f(x^2)+f(2x)]$，则：

$$g'(x) = [e^{f(x)}]'\tan[f(x^2)+f(2x)] + e^{f(x)}\{\tan[f(x^2)+f(2x)]\}'$$

$$= f'(x)e^{f(x)}\tan[f(x^2)+f(2x)] + e^{f(x)}\frac{2xf'(x^2)+2f(2x)}{\cos^2[f(x^2)+f(2x)]}$$

6.

$\cos^2[f(x^2)+f(2x)]$

Ex6. 解。

(1) $y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$

$\ln y = 2\ln x - \ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1+x+x^2).$

$\therefore \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}$

$\therefore y' = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}\right)\frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$

(3) 令 $f(x) = \sqrt[x]{x}$ $\therefore \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln x$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

令 $g(x) = x^{\ln(1-x)}$ $\therefore \ln g(x) = [\ln(1-x)][\ln x]$

$\therefore \frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}$

$\therefore g'(x) = \left(\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}\right)x^{\ln(1-x)}$

$\therefore y' = f'(x) + g'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x) + \left(\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}\right)x^{\ln(1-x)}$

(5) $\ln y = \sin x\ln(\ln x)$

$\therefore \frac{y'}{y} = \cos x\ln(\ln x) + \sin x\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}$

$\therefore y' = \left(\cos x\ln(\ln x) + \sin x\frac{1}{x\ln x}\right)(\ln x)^{\sin x}$

7/8/9.

科目 第6页

7\. (1) $\cancel{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$ 易知 $y \in C(0,+\infty)$.

且 $y$ 严格单增且可导，有 $y' = 1+\frac{1}{x}$，则 $x=x(y)$ 可导，且有：

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$$

(3) $y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$，故 $y$ 处处可导，且 $y' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$

∴ $y$ 严格单增，且 $y \in C\mathbb{R}$，则 $x=x(y)$ 可导，且有：

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \cosh^2 x$$

8\. (1) 两侧关于 $x$ 求导：$y + xy' = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x}$

(3) 两侧关于 $x$ 求导：$1 - y' - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}+1}$

(5) 两侧关于 $x$ 求导：$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

9\. (1) 对 $xy + \ln y = 1$ 两侧关于 $x$ 求导：$y + xy' + \frac{1}{y} \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^2}{xy+1}$

∴ 曲线 $(1,1)$ 处切线斜率 $y'|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$

∴ 切线方程：$y = -\frac{1}{2}(x-1)+1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

(3) 对该曲线两侧关于 $x$ 求导：$-\sin(xy)\cdot(y+xy') - \frac{y}{x+1} \cdot \frac{y-(x+1)y'}{y^2} = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{y^2\sin(xy)}{1-xy\sin(xy)} + \frac{y}{(x+1)[1-xy\sin(xy)]}$$

则曲线 $(0,1)$ 处切线斜率 $y'|_{(0,1)} = 1$

∴ ~~线~~ 切线方程：$y = x+1$

10.

编号 科目 第7页

10\. (1) $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a(\sin t + t\cos t)}{-\sin t} = -a - at\cot t$

(3) $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{9at^2(1+t^3) - 9at^5}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1+t^3) - 9at^3}{(1+t^3)^2}} = \frac{3t^2(1+t^3) - 3t^5}{1-2t^3} = \frac{3t^2}{1-2t^3}$

(5) $\begin{cases} x = a\theta\cos\theta \\ y = a\theta\sin\theta \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{a(\sin\theta + \theta\cos\theta)}{a(\cos\theta - \theta\sin\theta)} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$