微积分A2第十次习题课讨论题参考解答　　　　　　　　　　杨利军　May 11-16, 2020

本次习题课有以下两个内容.

一. 关于曲线与曲面积分的总结.

二. 第二型曲面积分, Gauss定理以及 Stokes 定理的应用.

一. 关于曲线与曲面积分的总结.

1. 一维积分的基本定理

(i) 区间上的积分 $\int_{[a,b]} f'(x)dx = f(b) - f(a)$ (Newton-Leibniz公式);

(ii) 曲线上的积分 $\int_{C_{AB}^+} \nabla f(r) \cdot dr = f(B) - f(A)$ (线积分基本定理), 这里 C_{AB} 表示连接起点 A 和终点 B 的平面或或空间任意一条有向曲线.

2. 二维积分的基本定理

(i) 平面域上的 Green 公式

向量形式

$$\iint_D rot(F)dxdy = \int_{\partial D^+} [F(r) \cdot \tau(r)]ds, \quad (\text{旋度形式})$$

$$\iint_D div(F)dxdy = \int_{\partial D^+} [F(r) \cdot n(r)]ds, \quad (\text{散度形式})$$

这里 $\tau(r)$ 和 $n(r)$ 分别表示边界曲线 ∂D^+ 的单位正切向和单位外法向, D 为平面有界闭域.

分量形式

$$\iint_D (Q_x - P_y)dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy, \quad (\text{旋度形式})$$

$$\iint_D (P_x + Q_y)dxdy = \int_{\partial D^+} -Qdx + Pdy, \quad (\text{散度形式})$$

其中 P, Q 为平面域 D 上的连续可微函数.

(ii) 曲面积分的 Stokes 公式

向量形式

$$\iint_{S^+}[rot(F)\cdot n]dS=\int_{\partial S^+}(F\cdot\tau)ds$$

这里 τ 代表边界曲线 ∂S^+ 的单位切向量, 曲面 S^+ 与其边界 ∂S^+ 的定向协调.

分量形式

$$\iint_{S^+}(R_y-Q_z)dy\wedge dz+(P_z-R_x)dz\wedge dx+(Q_x-P_y)dx\wedge dy$$

$$=\int_{\partial S^+}Pdx+Qdy+Rdz,$$

设 P,Q,R 为曲面 S 上的连续可微函数.

3. 三维积分的基本定理(Gauss定理)

$$\iiint_{\Omega}divFdV=\iint_{\partial\Omega^+}F\cdot\vec{n}dS,$$

这里 $\partial\Omega^+$ 代表空间有界域 Ω 的边界曲面, $\vec{n}$ 代表 $\partial\Omega^+$ 的单位外法向. 设 $F=(P,Q,R)$, 则 Gauss 公式的分量形式为

$$\iiint_{\Omega}(P_x+Q_y+R_z)dV=\iint_{\partial\Omega^+}Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy.$$

4. 微分算子的重要关系(参见课本第228页习题4.7题9(4)(5)):

(i) $rot(\nabla)=0$, 即对任意 C^2 函数 f, $rot(\nabla f)=0$;

(ii) $div(rot)=0$, 即对任意 C^2 向量场 F, $div(rotF)=0$.

二. 第二型曲面积分, Gauss定理以及 Stokes 定理的应用.

1. 记曲面 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截取的有界部分。 规定曲面 S 的正法向向下. 所得的定向曲面记为 S^+. 求如下第一和第二型曲面积分

$$\iint_S zdS\quad 和\quad \iint_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy).$$

解：(i) 根据锥面 S 的显式表示 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 得面积微元 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}dxdy$，我们有

$$\iint_S zdS=\iint_{x^2+y^2\leq 2ax}\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\sqrt{2}\iint_{r\leq 2a\cos\theta}r^2drd\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr=\frac{16\sqrt{2}a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta=\frac{16\sqrt{2}a^3}{3}\frac{2}{3}=\frac{32\sqrt{2}a^3}{9}.$$

(ii) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的法向量为

$$\pm(-z_x,-z_y,1)=\pm\Big(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\Big).$$

根据假设, 锥面 S^+ 的正法向向下, 故单位正法向量为

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\Big).$$

记空间向量场 $\vec{F}=\sqrt{x^2+y^2}(x,y,z)$. 于是

$$\vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\Big(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-z\Big)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{x^2+y^2}-z\Big).$$

因此在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上, 我们有 $\vec{F}\cdot\vec{n}=0$. 故

$$\iint_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)=\iint_{S^+}(\vec{F}\cdot\vec{n})dS=0.$$

解答完毕.

2. 设 S^+ 是锥面的一个部分 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\leq z\leq 1$, 规定其正法向向下. 求积分

$$I=\iint_{S^+}xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy.$$

解法一：根据上一题的解答里, 我们已经计算了锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\leq z\leq 1$, 的单位正法向为

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\Big).$$

记空间场为 $\vec{F}=(x,2y,3(z-1))$. 于是

$$I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-3(z-1)\right]dS$$

$$=\iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-2\sqrt{x^2+y^2}+3\right]dS$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[3+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-2\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy=\cdots=2\pi.$$

解法二. 在锥面的开口处，添加一个圆盘 S_1：$x^2+y^2\le 1$, $z=1$. 并规定其正法向朝上。对于由锥面 S 和圆盘 S_1 所围的锥体 V 应用Gauss公式得

$$\iint_{S^+}\vec{F}\cdot\vec{n}dS+\iint_{S_1^+}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iiint_V(\text{div}\vec{F})dV.$$

注意在圆盘 S_1 上，$z=1$. 故 $\vec{F}\cdot\vec{n}=3(z-1)=0$。因此

$$\iint_{S_1^+}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=0.$$

再来考虑三重积分。因 $\text{div}\vec{F}=6$ 是常数。故

$$\iiint_V \text{div}\vec{F}=6|V|=2\pi.$$

因此原面积分等于 2π. 解答完毕.

注：上述第二种解法几乎没有复杂的计算. 可见这种解法的优越性。 这种方法常用来计算曲面积分. 其基本思想是适当添加一块曲面, 使之与原积分曲面一起构成一个封闭曲面， 再利用 Gauss 公式，将曲面积分转化为向量场散度的三重积分. 从而可能简化积分运算(注意散度涉及求导运算)

3. 记 S^+ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分, 正法向朝外. 计算曲面积分

$$\iint_{S^+}x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy.$$

解法一：记向量场 $\vec{F}=(xy-xz,0,x-y)$. 园柱面在柱面坐标下的方程为 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=z$, $(\theta,z)\in D$: $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le z\le 2$. 简单计算可得 $\vec{r}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta,0)$,

$\vec{r}_\theta = (0,0,1)$. 于是 $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (0,0,1) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. 显然 $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z$ 就是柱面 S^+ 单位正法向量. (其实无需计算就可写出柱面的向外单位法向量). 于是

$$\iint_{S^+} x(y-z)dy \wedge dz + (x-y)dx \wedge dy = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z) d\theta dz$$

$$= \iint_D (xy - xz, 0, x-y) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0) d\theta dz = \iint_D \cos\theta (xy - xz) d\theta dz$$

$$= \iint_D \cos^2\theta(\sin\theta - z) d\theta dz = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta(\sin\theta - z)] d\theta = -2\pi.$$

解法二：对圆柱面 S 面补上两个圆盘 S_0：$x^2+y^2 \le 1$, $z=0$, 其正法向为 $(0,0,-1)$， 和 S_2：$x^2+y^2 \le 1$, $z=2$, 其法向为 $(0,0,1)$. 即由 S, S_0, S_2 所围立体为 V. 根据Gauss公式得

$$\iint_{S^+} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_0^+} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2^+} \vec{F} \cdot \vec{n} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{F}.$$

简单计算得到

$$\iint_{S_0^+} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_0^+} (xy - xz, 0, x-y) \cdot (0,0,-1) dS = \iint_{x^2+y^2 \le 1} -(x-y) dx dy = 0,$$

$$\iint_{S_2^+} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2^+} (xy - xz, 0, x-y) \cdot (0,0,1) dS = \iint_{x^2+y^2 \le 1} (x-y) dx dy = 0,$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{F} = \iiint_V (y-z) dx dy dz = \iiint_V -z dx dy dz = -\int_0^2 z dz \iint_{x^2+y^2 \le 1} dx dy = -2\pi.$$

因此原积分为

$$\iint_{S^+} x(y-z)dy \wedge dz + (x-y)dx \wedge dy = -2\pi.$$

解答完毕.

注: 相比较而言, 解法二省去了许多计算.

4. 计算高斯积分

$$\iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|^2} dS,$$

其中 S 是一个不经过原点的光滑封闭曲面, 点 $\vec{r} = (x,y,z) \in S$, $\vec{n}$ 代表点 $(x,y,z) \in S$ 处的单位外法向.

解：注意 $\cos(\vec{r},\vec{n})$ 可表为

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}||\vec{n}|}=\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}|}.$$

于是高斯积分可表为

$$\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2}dS=\iint_{S^+}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{n}dS.$$

一个重要的观察并且应该记住的事情是空间向量场

$$\vec{F}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

的散度为零, 即 $\mathrm{div}\vec{F}=0$. 请同学自行验证。 由高斯公式可知，当曲面 S 不包围原点时，积分等于零；当 S 包含围原点时， 原积分等于向量场 $\vec{F}$ 关于定向球面 S_ε^+: $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 上的第二型面积分, 球面 S_ε^+ 的外法向为正法向. 取 $\varepsilon>0$ 充分小使得闭曲面包含球面 S_ε^+. 于是高斯积分

$$\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2}dS=\iint_{S_\varepsilon}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}dS=4\pi.$$

解答完毕。

5. 计算如下第一和第二型曲面积分

$$\iint_S |z|dS \quad 和 \quad \iint_{S^+}|z|dx\wedge dy.$$

其中曲面 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 规定曲面 S 的正法向朝外.

解：分别记 S_1 和 S_2 为球面 S 的上半球面和下半球面. 它们的方程分别为

$$S_1: \quad z=z(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2\le a^2,$$

$$S_2: \quad z=-z(x,y)=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2\le a^2.$$

考虑第一型曲面积分 $\iint_S |z|dS$ 的计算. 根据被积函数和球面的对称性，我们有

$$\iint_S |z|dS=2\iint_{S_1}z(x,y)dS.$$

简单计算表明

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{z(x,y)}.$$

于是

$$\iint_S |z|dS = 2a\iint_{x^2+y^2\le a^2} dxdy = 2a\iint_{x^2+y^2\le a^2} dxdy = 2\pi a^3.$$

再考虑第二型曲面积分 $\iint_{S^+} |z|dx\wedge dy$ 的计算. 根据特殊情形下的第二型曲面积分的计算公式，我们有

$$\iint_{S_1} |z|dx\wedge dy = \iint_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$$

$$\iint_{S_2} |z|dx\wedge dy = -\iint_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy.$$

因此

$$\iint_{S^+} |z|dx\wedge dy = \iint_{S_1} |z|dx\wedge dy + \iint_{S_2} |z|dx\wedge dy = 0.$$

解答完毕.

6. 设 Ω 为由圆锥面 S: $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体. 证明此圆锥体的体积 $|\Omega|$ 可以表示为

$$|\Omega| = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\vec{r}\cdot\vec{n})dS, \tag{1}$$

其中 $\partial\Omega$ 为圆锥体 Ω 的边界曲面, $\vec{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

证明： 根据Gauss公式得

$$\iint_{\partial\Omega}(\vec{r}\cdot\vec{n})dS = \iint_{\partial\Omega^+}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS = \iiint_\Omega 3dxdydz = 3|\Omega|.$$

故体积公式 (1) 成立. 实际上, 这个结论不仅仅对圆锥体成立, 而且对一般有界立体也成立. 也就是说, 一般有界立体 Ω 而言, 其体积 Ω 均可以表为

$$|\Omega| = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\vec{r}\cdot\vec{n})dS,$$

其中 $\vec{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 因为在上述证明过程中, 我们并不需要 Ω 是圆锥的假设. 证毕.

注：利用上述结论我们证明中学里所学的圆锥体的体积公式

$$|\Omega| = \frac{Ah}{3}, \tag{2}$$

A 代表圆锥的底面积, h 代表圆锥的高. 证明如下：
由于边界 $\partial\Omega$ 可以表为 $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$, 其中 S_1 代表锥面部分, S_2 代表底面部分. 因为锥面的顶点在原点, 其上每一点的法向量与径向垂直, 即 $\vec{r}\cdot\vec{n} = 0$. 故 $\iint_{S_1}(\vec{r}\cdot\vec{n})dS = 0$. 考虑 S_2 上的积分. 由于 S_2 为平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的一部分, 其单位法向量为常向量

$$\vec{n} = \frac{\pm(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

注意到在 S_2 上, 点的位置向量 $\vec{r}$ 与正法向成锐角, 从而内积 $\vec{r}\cdot\vec{n} \geq 0$. 因此

$$\iint_{S_2}(\vec{r}\cdot\vec{n})dS = \iint_{S_2}\left|(x,y,z)\cdot\frac{\pm(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS =$$

$$\iint_{S_2}\frac{|Ax+By+Cz|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}dS = \iint_{S_2}\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}dS = \frac{|D||S_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

根据解析几何的知识可知, 原点到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离

$$h = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

这个距离也就是圆锥体的高 h, 而 S_2 的面积 $|S_2|$ 正是锥体 Ω 的底面积 A. 因此

$$\iint_{S_2}(\vec{r}\cdot\vec{n})dS = Ah.$$

再根据公式 (1) 立刻得到公式 (2).

7. 记 Γ^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 和平面 $y = x\tan\theta$ 的交线即圆周, 从位于 x 正轴看去, 圆周 Γ^+ 正向为逆时针方向, 这里 $R > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. 利用 Stokes 公式计算线积分

$$I = \oint_{L^+}(y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz.$$

解：记 S^+ 为平面 $y=x\tan\theta$ 上由圆周 Γ^+ 所围的闭圆盘, 其正法向与 x 的正向成锐角. 根据 Stokes 公式得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz \\ &= \iint_{S^+} rot(y-z,z-x,x-y)\cdot dS \\ &= \iint_{S} rot(y-z,z-x,x-y)\cdot \vec{n}dS, \end{aligned}$$

这里 $\vec{n}$ 代表 S^+ 的单位正法向, 即平面 $y=x\tan\theta$ 的单位法向量, 且与 x 的正向成锐角. 于是 $\vec{n}=(\sin\theta,-\cos\theta,0)$. 另一方面由简单计算得

$$rot(y-z,z-x,x-y)=-2(1,1,1).$$

于是

$$\begin{aligned} I &= -2\iint_S(1,1,1)\cdot(\sin\theta,-\cos\theta,0)dS = 2(\cos\theta-\sin\theta)\iint_S dS \\ &= 2(\cos\theta-\sin\theta)|S| = 2(\cos\theta-\sin\theta)\pi R^2. \end{aligned}$$

解答完毕.

8. 记 L^+ 为平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线(圆周), 从 z 轴上的点 $(0,0,2)$ 处观察交线 L^+, 其正向为逆时针方向. 试计算第二类曲线积分

$$I=\oint_{L^+}\frac{(y+1)dx+(z+2)dy+(x+3)dz}{x^2+y^2+z^2}. \tag{3}$$

解：首先注意在 L^+ 上 $x^2+y^2+z^2=1$. 因此积分 (3) 实际上可写作

$$I=\oint_{L^+}(y+1)dx+(z+2)dy+(x+3)dz. \tag{4}$$

记 S^+ 为平面 $x+y+z=0$ 上包含于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的部分, 也就是由圆周 L^+ 所围成的闭圆盘, 并规定 S^+ 的正法向与 z 轴的正向成锐角. 记 $\vec{F}:=(y+1,x+2,z+3)$. 则积分 I 可写作 $I=\oint_{L^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}$. 根据Stokes公式得

$$I=\int_{L^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S^+}rot\vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

简单计算得 $rot\vec{F}=-(1,1,1)$, 并且注意到 S^+ 的单位正法向为 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. 于是

$$I=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S(1,1,1)\cdot(1,1,1)dS=-\sqrt{3}|S|=-\sqrt{3}\pi.$$

解答完毕.

9. 设 S 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 位于 $0\le z\le h$ 的那一部分, 正法向向下. 设 $v=(x,y,z)$ 为流体运动的速度场. 求流体在单位时间里通过定向曲面 S 由内向外的流量 Q, 即求曲面积分

$$Q=\iint_{S^+}\vec{v}(r)\cdot\vec{n}(r)dS.$$

解：锥面 $z^2=x^2+y^2$ 的法向量为 $(2x,2y,-2z)$, 故其单位法向量为

$$\frac{\pm(x,y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\pm(x,y,-z)}{\sqrt{2z^2}}=\frac{\pm(x,y,-z)}{\sqrt{2}z}.$$

由于 S^+ 的正法向向下. 因此 S^+ 的单位正法向为

$$\vec{n}=\frac{(x,y,-z)}{\sqrt{2}z}$$

于是所求流量为

$$Q=\iint_{S^+}\vec{v}(r)\cdot\vec{n}(r)dS=\iint_S(x,y,z)\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}}(x,y,-z)dS=\iint_S\frac{x^2+y^2-z^2}{z}dS=0.$$

解答完毕.

10. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为一空间有界闭域，其边界 $\partial\Omega$ 为逐片光滑的闭曲面. 记 $\vec{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的朝外单位法向量. 设 u,v 是 Ω 上的 C^2 函数. 证明

(i). $$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dS=\iiint_\Omega\Delta u dV.$$

(ii). $$\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dS=\iiint_\Omega|\nabla u|^2dV+\iiint_\Omega u\Delta u dV.$$

(iii). $$\iint_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big)dS=\iiint_\Omega\Big(u\Delta v-v\Delta u\Big)dV.$$

这里 Δ 为 Laplace 算子, 即 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. (注：这是课本第229页第4章总复习题第8题.)

证明：(i) 注意到 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\nabla u\cdot\vec{n}$, 以及 $div(\nabla u)=\Delta u$. 于是由 Gauss 公式得

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\iint_{\partial\Omega}\nabla u\cdot\vec{n}dS=\iiint_{\Omega}div(\nabla u)dV=\iiint_{\Omega}\Delta udV.$$

(ii) 注意到

$$div[u\nabla u]=[uu_x]_x+[uu_y]_y+[uu_z]_z=|\nabla u|^2+u\Delta u.$$

根据 Gauss 公式得

$$\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\iint_{\partial\Omega}u\nabla u\cdot\vec{n}dS=\iiint_{\Omega}div(u\nabla u)dV$$
$$=\iiint_{\Omega}|\nabla u|^2dV+\iiint_{\Omega}u\Delta udV.$$

(iii) 注意到

$$div[u\nabla v]=[uv_x]_x+[uv_y]_y+[uv_z]_z=\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v.$$

于是

$$\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS=\iint_{\partial\Omega}u\nabla v\cdot\vec{n}dS=\iiint_{\Omega}div(u\nabla v)dV$$
$$=\iiint_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla vdV+\iiint_{\Omega}u\Delta vdV.$$

即

$$\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS=\iiint_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla vdV+\iiint_{\Omega}u\Delta vdV. \tag{5}$$

在等式 (5) 中交换函数 u 和 v 的位置得

$$\iint_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\iiint_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla udV+\iiint_{\Omega}v\Delta udV. \tag{6}$$

将等式 (5) 和 (6) 相减得

$$\iint_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big)dS=\iiint_{\Omega}\Big(u\Delta v-v\Delta u\Big)dV.$$

证毕.

11. 设 $D\subset \mathbb{R}^2$ 为平面有界闭域, 设函数 $u(x,y)$ 在闭域 D 上调和, 即 $\triangle u=u_{xx}+u_{yy}=0$, 则对闭域 D 中的任意内点 (x_0,y_0), 函数值 $u(x_0,y_0)$ 可表示为

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big)dl, \tag{7}$$

其中函数 v 如下定义

$$v(x,y)=\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \tag{8}$$

$\vec{n}$ 代表边界边界曲线 ∂D^+ 的单位外法向, $\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}$ 分别代表为函数 u 和 v 关于方向 n 的方向导数. (公式(7)的意思是调和函数在区域内的值由其边界值所确定). 进一步证明

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial D_\varepsilon}u(x,y)dl, \tag{9}$$

其中 D_ε 代表闭圆盘 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\varepsilon^2$, $\varepsilon>0$ 充分小, 使得闭圆盘 $D_\varepsilon\subset D$.

注1: 这题实际上是课本第230页习题第4章总复习题第9题. 仅仅表述略有不同.

注2: 公式 (9) 揭示了调和函数的均值性质.

证明: 不难验证函数

$$v(x,y)=\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

在 $\mathbb{R}^2\backslash\{(x_0,y_0)\}$ 上调和, 即 $v_{xx}+v_{yy}=0$. 在区域 $D\backslash D_\varepsilon$ 上应用 Green 公式的散度形式得

$$\int_{\partial D^+\cup\partial D_\varepsilon^-}\Big(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big)dl=\int_{\partial D^+\cup\partial D_\varepsilon^-}(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\vec{n}dl$$
$$=\iint_{D\backslash D_\varepsilon}div(u\nabla v-v\nabla u)dxdy=\iint_{D\backslash D_\varepsilon}(u\triangle v-v\triangle u)dxdy=0.$$

因此

$$\int_{\partial D^+}\Big(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big)dl=\int_{\partial D_\varepsilon^+}\Big(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big)dl. \tag{10}$$

考虑上式右边积分. 注意圆周 $\partial D_\varepsilon:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2$ 朝外单位法向量为

$$\vec{n}=\frac{1}{\varepsilon}(x-x_0,y-y_0).$$

简单计算得

$$\nabla v=\frac{1}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}(x-x_0,y-y_0).$$

于是

$$\int_{\partial D_\varepsilon^+} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dl = \int_{\partial D_\varepsilon^+} u\nabla v\cdot\vec{n}dl = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial D_\varepsilon^+} u(x,y)dl.$$

再考虑线积分

$$\int_{\partial D_\varepsilon^+} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dl.$$

注意在圆周 $\partial D_\varepsilon : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2$ 上, $v=\ln\varepsilon$. 于是

$$\int_{\partial D_\varepsilon^+} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dl = \ln\varepsilon\int_{\partial D_\varepsilon^+}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dl = \ln\varepsilon\int_{\partial D_\varepsilon^+}\nabla u\cdot\vec{n}dl = \ln\varepsilon\iint_{D_\varepsilon}\triangle u dxdy = 0.$$

于是由等式 (10)得

$$\int_{\partial D^+}\Big(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big)dl = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial D_\varepsilon^+} u(x,y)dl. \tag{11}$$

对线积分 $\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial D_\varepsilon^+} u(x,y)dl$ 应用中值定理得

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial D_\varepsilon^+} u(x,y)dl = \frac{1}{\varepsilon}u(x_\varepsilon,y_\varepsilon)|\partial D_\varepsilon| = 2\pi u(x_\varepsilon,y_\varepsilon),$$

其中 $(x_\varepsilon,y_\varepsilon)\in D_\varepsilon$. 于是

$$\int_{\partial D^+}\Big(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big)dl = 2\pi u(x_\varepsilon,y_\varepsilon).$$

于上述中令 $\varepsilon\to 0^+$ 即得

$$\int_{\partial D^+}\Big(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big)dl = 2\pi u(x_0,y_0),$$

即

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+}\Big(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big)dl.$$

等式 (7) 成立. 再由等式 (11) 得

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+}\Big(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big)dl = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial D_\varepsilon^+} u(x,y)dl.$$

即等式 (9) 成立. ∎

12. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为空间有界开区域, 其闭包记作 $\overline{\Omega}$. 设函数 $u(x,y,z)$ 在闭域 $\overline{\Omega}$ 上连续, 在开域 Ω 上调和, 即 $\triangle u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$, 则对任意内点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 的函数值 $u(P_0)$ 可表示为

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\Big)dS, \tag{12}$$

其中函数 v 如下定义

$$v(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \tag{13}$$

n 代表边界曲面 $\partial\Omega^+$ 的单位外法向, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别代表为函数 u 和 v 关于方向 n 的方向导数.

注1: 这题实际上是课本第230页习题第4章总复习题第10题(1). 也是上题二维情形的结论在三维情形的推广. 公式(12)表达同样的意思, 即调和函数在区域内的值由其边界值所确定.

注2: 为了解答这道题, 我们需要建立几个引理, 其中 Lemma 2 实际上就是课本习题第230页习题第4章总复习题第10题(2).

注3: 公式 (12) 实际上就是课本第230页第4章总复习题第10题结论(1), 因为 $\frac{\partial v}{\partial n}=-\frac{\cos(r,n)}{|r|^2}$. 可参见如下 Lemma 4 及其证明.

为证明公式 (12), 我们建立几个引理.

Lemma 1: 由式 (13) 定义的函数 $v(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3\backslash\{P_0\}$ 上调和, 即 $\triangle v=0$.

证明: 直接验证即可. ∎

Lemma 2: 对任意给定的内点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, 存在 $\delta_0>0$, 使得对任意 $\delta\in(0,\delta_0]$, 闭球 $B_\delta:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le\delta^2$ 包含在开域 Ω 中, 并且

$$\iint_{\partial\Omega^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big)dS=\iint_{S_\delta^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big)dS, \tag{14}$$

其中 $S_\delta=\partial B_\delta$, 即 S_δ 为以 P_0 为心, 以 $\delta>0$ 为半径的球面, 曲面 $\partial\Omega^+$ 和 S_δ^+ 的正法向均朝外.

证明: 由于 P_0 是开域 Ω 的内点, 故存在 $\delta_0>0$, 使得对任意 $\delta\in(0,\delta_0]$, 闭球 B_δ 包含在 Ω 中. 记 $\Omega_\delta=\Omega\backslash B_\delta$, 则函数 u 和 v 在开域 Ω_δ 上均调和. 根据第10题的结论(iii)得

$$\iint_{\partial\Omega_\delta}\Big(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big)dS=\iiint_{\Omega_\delta}\Big(u\Delta v-v\Delta u\Big)dV=0.$$

注意到 $\partial\Omega_\delta^+=\partial\Omega^+\cup S_\delta^-$, 我们立刻得到等式(14). Lemma 2 得证. ∎

Lemma 3: 对于任意 $\delta \in (0,\delta_0]$, 我们有

$$\iint_{S_\delta^+} v\frac{\partial u}{\partial n}dS = 0.$$

证明: 注意到函数 $v(x,y,z) \equiv \delta^{-1}$, $\forall (x,y,z) \in S_\delta$, 故

$$\iint_{S_\delta^+} v\frac{\partial u}{\partial n}dS = \frac{1}{\delta}\iint_{S_\delta^+}\frac{\partial u}{\partial n}dS = \frac{1}{\delta}\iiint_{B_\delta}(\triangle u)dV = 0.$$

Lemma 3 得证. ∎

Lemma 4: 对于任意 $\delta \in (0,\delta_0]$, 我们有

$$\iint_{S_\delta^+} -u\frac{\partial v}{\partial n}dS = 4\pi u(P_\delta),$$

其中 $P_\delta \in S_\delta$.

证明: 注意在球面 S_δ: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\delta^2$ 上的任意点 $(x,y,z)\in S_\delta$ 处的单位外法向 $n=\frac{1}{\delta}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. 计算得

$$\nabla v = \frac{-(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = (\nabla v)\cdot n = -\frac{1}{\delta^2}.$$

因此

$$\iint_{S_\delta^+} -u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \frac{1}{\delta^2}\iint_{S_\delta}u(x,y,z)dS.$$

对上式右边的曲面积分应用中值定理可知, 存在 $P_\delta \in S_\delta$, 使得

$$\iint_{S_\delta}u(x,y,z)dS = u(P_\delta)\iint_{S_\delta}dS = u(P_\delta)|S_\delta| = u(P_\delta)4\pi\delta^2.$$

于是

$$\iint_{S_\delta^+} -u\frac{\partial v}{\partial n}dS = 4\pi u(P_\delta).$$

Lemma 4得证. ∎

公式(12)的证明: 根据上述引理可知, 对任意 $\delta \in (0,\delta_0]$, 存在 $P_\delta \in S_\delta$, 使得

$$4\pi u(P_\delta) = \iint_{S_\delta^+} -u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \iint_{S_\delta^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\Big)dS = \iint_{\partial\Omega^+}\Big(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\Big)dS.$$

即

$$4\pi u(P_\delta) = \iint_{\partial\Omega^+} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\Big)dS.$$

注意上式对任意 $\delta \in (0, \delta_0]$ 成立, 并且右边与 δ 无关. 故令 $\delta \to 0^+$ 即得

$$4\pi u(P_0) = \iint_{\partial\Omega^+} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\Big)dS.$$

公式(12)得证. ∎

注: 根据等式 (12), 以及 lemma 3 和 Lemma 4 可立刻得到如下结论

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi\delta^2} \iint_{S_\delta} u(x, y, z)dS, \tag{15}$$

其中 S_δ 代表球面 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \delta^2$, $\delta > 0$ 任意, 只要使得球 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq \delta^2$ 包含在 Ω 之中即可. 公式 (15) 揭示了调和函数的均值性质.