第5章 Riemann积分

学习材料（12）

1 Riemann积分概念及Riemann积分存在条件

2 Riemann积分的性质

3 变上限积分与原函数的存在性

4 不定积分

5 定积分的计算

6 定积分的应用

6.1 平面图形的面积

6.2 旋转体的体积

6.3 曲线的弧长

6.4 旋转面的面积

例1 求圆台的侧面积。如图，令线段绕x轴旋转，求该旋转面的面积A.

解：由几何关系知

$$x\theta = 2\pi r,\ (x+l)\theta = 2\pi R,$$

故

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(x+l)^2\theta - \frac{1}{2}x^2\theta \\ &= \frac{1}{2}\, l(2x+l)\theta \\ &= \pi\,(r+R)\,l. \end{aligned}$$

现定义简单曲线L绕x轴旋转所得旋转面的面积。设简单曲线L有参数表示

$$L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t) \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta],$$

其中$g(t)\geq 0,\ \forall t\in[\alpha,\beta]$. 对区间$[\alpha,\beta]$进行分割

$$T:\ \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

记$M_i=\begin{pmatrix} f(t_i) \\ \\ g(t_i) \end{pmatrix}$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$，从而得到折线$\overline{M_0M_1\cdots M_n}$. 则此折线绕$x$轴旋转所得旋转面的面积为$n$个圆台的侧面积之和，即

$$\sum_{i=1}^{n}\pi[g(t_{i-1})+g(t_i)]\sqrt{[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2+[g(t_i)-g(t_{i-1})]^2}.$$

定义1 若极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi[g(t_{i-1})+g(t_i)]\sqrt{[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2+[g(t_i)-g(t_{i-1})]^2}$$

存在，即如果存在实数A，使得$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$[\alpha,\beta]$的分割T

$$T:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$$

满足$\lambda(T)<\delta$时，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\pi[g(t_{i-1})+g(t_i)]\sqrt{[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2+[g(t_i)-g(t_{i-1})]^2}-A\right|<\varepsilon,$$

则称曲线L绕x轴旋转所得旋转面的面积为A.

定理1 设简单曲线L的参数方程

$$L:\begin{cases} x=f(t), \\ \\ y=g(t), \end{cases}\qquad t\in[\alpha,\beta]$$

满足$f,g:[\alpha,\beta]\to\mathcal{R}$可导，$f',g'\in R[\alpha,\beta]$，且$g(t)\geq 0,\ \forall t\in[\alpha,\beta]$，则曲线$L$绕$x$轴旋转所得旋转面的面积为

$$\int_{\alpha}^{\beta}2\pi g(t)\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}dt.$$

证：类似弧长定理证明。

注1 若曲线L的方程为

$$L:y=g(x),\quad x\in[a,b],$$

其中$g:[a,b]\to\mathcal{R}_+$可导，且$g'\in R[a,b]$，则曲线L绕x轴旋转所得旋转面的面积为

$$\int_a^b 2\pi g(x)\sqrt{1+[g'(x)]^2}dx.$$

注2 若曲线L的极坐标下的方程为$r=\varphi(\theta)$ $(\theta\in[\alpha,\beta])$，即$L$的参数方程为

$$L:\begin{cases} x=\varphi(\theta)\cos\theta, \\ \\ y=\varphi(\theta)\sin\theta, \end{cases}\qquad \theta\in[\alpha,\beta]$$

其中$\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathcal{R}_+$可导，$\varphi'\in R[\alpha,\beta]$，且$\varphi(\theta)\sin\theta\geq 0,\ \forall\theta\in[\alpha,\beta]$，则曲线$L$绕极轴旋转所得旋转面的面积为

$$\int_\alpha^\beta 2\pi\varphi(\theta)\sin\theta\sqrt{[\varphi'(\theta)\cos\theta-\varphi(\theta)\sin\theta]^2+[\varphi'(\theta)\sin\theta+\varphi(\theta)\cos\theta]^2}d\theta,$$

即

$$\int_\alpha^\beta 2\pi\varphi(\theta)\sin\theta\sqrt{[\varphi'(\theta)]^2+[\varphi(\theta)]^2}d\theta.$$

例1 求极坐标下曲线$L:r=1+\cos\theta\ (\theta\in[0,\pi])$绕极轴旋转所得旋转面的面积$A$.

解：

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi 2\pi(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{[\sin\theta]^2+[1+\cos\theta]^2}d\theta \\ &= \int_0^\pi 2\pi(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta \\ &= -\int_0^\pi 2\pi(1+\cos\theta)\sqrt{2(1+\cos\theta)}d(1+\cos\theta) \\ &= -2\sqrt{2}\pi\cdot\frac{2}{5}(1+\cos\theta)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^\pi == \frac{32\pi}{5}. \end{aligned}$$

6.5 曲率半径

为了刻画曲线的弯曲程度，我们引入曲率的概念。设曲线L有参数表示

$$L:\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t) \end{cases} t\in[\alpha,\beta],$$

其中$f,g:[\alpha,\beta]\to\mathcal{R}$可导，且$f',g'\in R[\alpha,\beta]$. 则曲线在参数$t_0$处切线与在参数$t$处切线间的夹角为

$$\left|\arctan\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)-\arctan\left(\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right)\right|,$$

曲线从参数t_0到参数t段曲线的弧长为

$$\left|\int_{t_0}^t\sqrt{[f'(u)]^2+[g'(u)]^2}du\right|.$$

定义1 若极限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\left|\arctan\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)-\arctan\left(\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right)\right|}{\left|\int_{t_0}^t\sqrt{[f'(u)]^2+[g'(u)]^2}du\right|}$$

存在，则称上述极限值为曲线L在<u>参数t_0处的曲率</u>，称上述极限值的倒数为曲线L 在<u>参数t_0处的曲率半径</u>。

注1 若$f,g\in C^2[\alpha,\beta]$，$[f'(t_0)]^2+[g'(t_0)]^2\neq 0$，则曲率

$$k \overset{}{=\!=\!=\!=\!=} \lim_{t\to t_0}\frac{\left|\arctan\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)-\arctan\left(\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right)\right|}{\left|\int_{t_0}^{t}\sqrt{[f'(u)]^2+[g'(u)]^2}du\right|}.$$

$$\Leftarrow\!=\!=\!=\!=\!= \left|\lim_{t\to t_0}\frac{\arctan\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)-\arctan\left(\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right)}{\int_{t_0}^{t}\sqrt{[f'(u)]^2+[g'(u)]^2}du}\right|.$$

$$\underset{\text{L'Hospital法则}}{\Leftarrow\!=\!=\!=\!=\!=} \left|\lim_{t\to t_0}\frac{\dfrac{\dfrac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2}}{1+\left[\frac{g'(t)}{f'(t)}\right]^2}}{\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}}\right|.$$

$$=\!=\!=\!=\!= \underline{\frac{|g''(t_0)f'(t_0)-g'(t_0)f''(t_0)|}{\left[[f'(t_0)]^2+[g'(t_0)]^2\right]^{\frac{3}{2}}}}.$$

特别，若曲线L的方程为

$$L: y=g(x),\quad x\in[a,b],$$

其中$g\in C^2[a,b]$，则曲线L在x_0处的曲率

$$k =\!=\!=\!=\!= \underline{\frac{|g''(x_0)|}{\left[1+[g'(x_0)]^2\right]^{\frac{3}{2}}}};$$

例1 L的参数方程为

$$L:\begin{cases} x=R\cos\theta, \\ y=R\sin\theta, \end{cases}\quad \theta\in[0,2\pi]$$

求曲线L的曲率与曲率半径。

解：曲率为

$$k =\!=\!=\!=\!= \frac{|y''(\theta_0)x'(\theta_0)-y'(\theta_0)x''(\theta_0)|}{\left[[x'(\theta_0)]^2+[y'(t_0)]^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\!=\!=\!=\!= \frac{1}{R}\quad .$$

曲率半径为R.

注2 若光滑曲线L在点M处的曲率半径为R，过点M作L的法线l，并在l上L凹的一侧取点O使得$|OM|=R$.以点O为圆心、以R为半径的圆称为曲线L在点M处的<u>曲率圆</u>，点O称为<u>曲率中心</u>。

例2 求抛物线$y=x^2$上任一点处的曲率、曲率半径与曲率中心。

解：抛物线上任一点$M(x,x^2)$处的曲率为

$$k \quad ===== \quad \frac{|y''(x)|}{\left[[1+[y'(x)]^2\right]^{\frac{3}{2}}} ==== \frac{2}{[1+4x^2]^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

曲率半径为

$$R=\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\left[1+4x^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

抛物线在点$M(x,x^2)$处的法线方程为

$$Y-x^2=-\frac{1}{2x}(X-x).$$

曲率中心$O(X,Y)$应满足

$$(X-x)^2+(Y-x^2)^2=R^2.$$

于是

$$(X-x)^2+\frac{1}{4x^2}(X-x)^2=\frac{1}{4}\left[1+4x^2\right]^3.$$

当$x>0$时$X<x$；当$x<0$时，$X>x$，所以

$$X=-4x^3.$$

从而$Y=\frac{1}{2}+3x^2$，故抛物线在点$M(x,x^2)$处的曲率中心为$O=\left(-4x^3,\frac{1}{2}+3x^2\right)$.

6.6 定积分的物理应用

例1 一圆锥形水池，池口直径30米，深10米。池中盛满水，试求将全部池水抽出池外需做的功。

解：如图建立坐标系。考虑将池中深度为x到$x+\Delta x$的一薄层水抽至池口需做功ΔW. 当Δx很小时，这个小薄层水的重量为 $\pi\left(15-\frac{15}{10}x\right)^2$,于是

$$\Delta W\approx x\cdot\pi\left(15-\frac{15}{10}x\right)^2\Delta x,$$

从而将全部池水抽出池外需做的功为

$$W=\int_0^{10}x\cdot\pi\left(15-\frac{15}{10}x\right)^2dx=1875\pi.$$

例2 设有质量均匀分布的细杆，长度为l，质量为M. 在细杆的延长线上，与细杆距离a处有一质量为m的质点P. 求细杆对质点P的万有引力。

解：将坐标系原点取在质点P处，细杆所在的直线为x轴。x到$x+\Delta x$上的一小段细杆对质点P的引力为

$$\Delta F\approx -k\frac{m\left(\frac{M}{l}\Delta x\right)}{x^2}\quad k\text{为万有引力常数},$$

从而细杆对质点P的万有引力为

$$F = \int_a^{a+l} -k\frac{m\left(\frac{M}{l}\right)}{x^2}dx = -\frac{kmM}{a(a+l)}.$$

例3一个质量为m的物体沿着半径为R的四分之一的圆弧自由下滑，恰在圆弧的底部停止，求物体与圆弧间的动摩擦系数μ.

7 反常积分

7.1 反常积分的概念

Riemann 积分是研究有界闭区间上的有界函数的积分。一个自然的问题就是，对于无界区间以及对于无界函数，如何定义积分？

例1（第二宇宙速度问题） 在地球表面垂直发射火箭，要使火箭克服地球的引力无限远离地球，试问火箭的初速度v_0 至少要多大？

解：设地球半径为R，火箭的质量为m，地球质量为M，万有引力常数为G. 按照万有引力定律，在距地心$x(\geq R)$处火箭所受引力为

$$F(x) = -\frac{GMm}{x^2}.$$

当火箭位于地面时，地球的引力为$-\dfrac{GMm}{R^2} = -mg$, 故$G = \dfrac{R^2 g}{M}$, 所以

$$F(x) = -\frac{mgR^2}{x^2}.$$

于是火箭从地面上升到距离地心为$r(> R)$处需做功

$$\int_R^r F(x)dx = \int_R^r -\frac{mgR^2}{x^2}dx = mgR^2\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right].$$

当$r \to +\infty$时，其极限$-mgR$就是火箭无限远离地球需做的功。我们把这极限写作上限为$+\infty$的“积分”

$$\int_R^{+\infty} -\frac{mgR^2}{x^2}dx = \lim_{r\to+\infty}\int_R^r -\frac{mgR^2}{x^2}dx = -mgR.$$

最后由机械能守恒定律可求得初速度v_0至少应使得

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 \leq -mgR,$$

即

$$v_0 \geq \sqrt{2gR}.$$

称$\sqrt{2gR}$为第二宇宙速度。

例2 圆柱形桶内壁高为h，半径为R，桶底有一半径为r的小孔。试问从盛满水开始打开小孔直至流完桶中的水，共需要多少时间？

解：从物理学知道，在不计摩擦力的情况下，当桶内水位高度为$h-x$时，水从孔中流出的流速为
$$v=\sqrt{2g(h-x)},$$
其中g为重力加速度。设在很小一段时间Δt内，桶中液面低的微小量为Δx，则它们之间应满足
$$\pi R^2\Delta x=v\pi r^2\Delta t,$$
因此
$$\Delta t=\frac{R^2}{r^2v}\Delta x=\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}\Delta x,\ x\in[0,h].$$
所以流完一桶水所需要的时间在形式上也可写成“积分”
$$T=\int_0^h\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}dx.$$
但这里被积函数是$[0,h]$上的无界函数，所以它的确切含义应该为
$$\begin{aligned}T&=\lim_{u\to h^-}\int_0^u\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}dx\\&=\lim_{u\to h^-}\frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{h}-\sqrt{h-u}\right]\\&=\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{R^2}{r^2}.\end{aligned}$$

定义1 设函数f定义在$[a,+\infty)$上，且对$\forall A\in[a,+\infty)$，有$f\in R[a,A]$. 若存在极限
$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx=J,$$
则称J为f在$[a,+\infty)$上的反常积分，记作
$$J=\int_a^{+\infty}f(x)dx,$$
并称反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛（到J）；若不存在极限
$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx,$$
则称反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散。

类似地，可定义反常积分
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)dx.$$

定义2 设函数f定义在$(-\infty,+\infty)$上，$a\in(-\infty,+\infty)$. 若反常积分
$$\int_{-\infty}^a f(x)dx\ \ ,\ \ \int_a^{+\infty}f(x)dx$$

都收敛，则称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$<u>收敛</u>，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx;$$

若反常积分

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad , \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

至少有一个发散，则称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$<u>发散</u>。

注1

数a的选择不影响反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$的敛散性和它的值。因为

$$\int_{-\infty}^{\hat{a}} f(x)dx + \int_{\hat{a}}^{+\infty} f(x)dx \quad = \quad \left(\int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\hat{a}} f(x)dx\right) + \left(\int_{\hat{a}}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx\right).$$

注2

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{a} f(x)dx + \lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A} f(x)dx.\end{aligned}$$

上述两个极限过程是相互独立的。

例3

讨论反常积分

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$$

的敛散性。

解：由于对$\forall A > 1$，有

$$\int_{1}^{A} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \ln A,\ p = 1 \\ \frac{A^{1-p}-1}{1-p},\ p \neq 1, \end{cases}$$

于是

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} +\infty,\ p = 1 \\ +\infty,\ p < 1 \\ \frac{1}{p-1},\ p > 1, \end{cases}$$

故当$p > 1$时，反常积分$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$收敛，其值为$\frac{1}{p-1}$；而当$p \leq 1$时，反常积分$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$发散。

例4

讨论反常积分

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^p x}dx$$

的敛散性。

解：由于对$\forall A>2$，有

$$\int_2^A \frac{1}{x\ln^p x}dx=\int_{\ln 2}^{\ln A}\frac{1}{t^p}dt \quad （令t=\ln x）$$

于是由例1知故当$p>1$时，反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx$收敛；而当$p\le 1$时，反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx$发散。

定义3

设函数f定义在$(a,b]$上，且在点a的任一右邻域内无界，则称a为f的瑕点。若对$\forall\varepsilon\in(0,b-a)$，有$f\in R[a+\varepsilon,b]$，且存在极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx=J,$$

则称J为f在$[a,b])$上的反常积分，记作

$$J=\int_a^b f(x)dx,$$

并称反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；若不存在极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

则称反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

类似地，可定义b为f瑕点时的反常积分

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

定义4

设函数f定义在$[a,b]$上，且f在点$c\in(a,b)$的任一邻域内无界. 若反常积分

$$\int_a^c f(x)dx \quad , \quad \int_c^b f(x)dx$$

都收敛，则称反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$$

若反常积分

$$\int_a^c f(x)dx \quad , \quad \int_c^b f(x)dx$$

至少有一个发散，则称反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

注3

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\\ &= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.\end{aligned}$$

上述两个极限过程是相互独立的。

例5 讨论反常积分

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx \quad (p>0)$$

的敛散性。

解：$\dfrac{1}{(x-a)^p}$在$(a,b]$连续，$x=a$为其瑕点。对$\forall\varepsilon\in(0,b-a)$，有

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^p}dx=\begin{cases}\ln\frac{b-a}{\varepsilon}, & p=1\\ \dfrac{(b-a)^{1-p}-\varepsilon^{1-p}}{1-p}, & p\neq 1,\end{cases}$$

于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^p}dx=\begin{cases}+\infty,\ p=1\\ +\infty,\ p>1\\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p},\ p<1,\end{cases}$$

故当$(0<)p<1$时，反常积分$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$收敛，其值为$\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$；而当$p\geq 1$时，反常积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$发散。

7.2 非负函数反常积分敛散性的判别

由定义知，反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛与否，取决于函数$F(A)=\displaystyle\int_a^A f(x)dx$在$A\to+\infty$时是否存在极限。而此时函数$F(A)=\displaystyle\int_a^A f(x)dx$是单调递增的，因此有如下定理。

定理1 设f是定义在$[a,+\infty$上的非负函数，且对于任给$A>a$，$f\in R[a,A]$。则反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充分必要条件是函数$F(A)=\displaystyle\int_a^A f(x)dx$有界。

推论1（比较法） 设f,g是定义在$[a,+\infty$上的非负函数，且$f,g\in R[a,A](\forall A>a)$。

若$0\leq f\leq g$，且反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，则反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$也收敛.

推论2（比值法） 设f,g是定义在$[a,+\infty$上的非负函数，且$f,g\in R[a,A](\forall A>a)$。

(1)若极限$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$存在，且反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，则反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；

(2)若极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在且不为零，则反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛的充分必要条件是反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛。

注1

对含有瑕点的反常积分也有类似上述定理1、推论1、推论2的陈述定理1'、推论1'、推论2'。请同学们完成。

推论3（阶方法）

设f是定义在$[a,+\infty$上的非负函数，且$f\in R[a,A](\forall A>a)$。

(1)若$p>1$，且极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}$存在，则反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛；

(2)若$p\le 1$，且极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^p}}{f(x)}$存在，则反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散。

(3)若极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)$存在且不为零，则反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛的充分必要条件是$p>1$.

推论3'（阶方法）

设f是定义在$(a,b]$上的非负函数，a是f的瑕玷，且$f\in R[a+\varepsilon,b](\forall\varepsilon\in(0,b-a))$.

(1)若$p<1$，且极限$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{(x-a)^p}}$存在，则反常积分$\displaystyle\int_a^{b}f(x)dx$收敛；

(2)若$p\ge 1$，且极限$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\frac{1}{(x-a)^p}}{f(x)}$存在，则反常积分$\displaystyle\int_a^{b}f(x)dx$发散。

(3)若极限$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{(x-a)^p}}$存在且不为零，则反常积分$\displaystyle\int_a^{b}f(x)dx$收敛充分必要条件是$p<1$.

例1

讨论反常积分$\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 的敛散性。

解：对任意$\alpha\in\mathcal{R}$，因

$$\lim_{x\to+\infty}x^2x^{\alpha-1}e^{-x}=0,$$

故由“阶方法”知，反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$收敛。

当$\alpha-1\ge 0$时，即$\alpha\ge 1$时，$x=0$不是$x^{\alpha-1}e^{-x}$的瑕点。此时反常积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$收敛。

当$\alpha-1<0$时，即$\alpha<1$时，$x=0$是瑕点，而因

$$\lim_{x\to 0^+}x^{1-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x}=1,$$

故由“阶方法”知，此时当$0<\alpha<1$时，反常积分$\displaystyle\int_0^{1}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$收敛；而当$\alpha\le 0$时，反常积分$\displaystyle\int_0^{1}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$发散。故反常积分

$$\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^{1}x^{\alpha-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

在$0<\alpha<1$时收敛，在$\alpha\le 0$发散。

综上，当$0<\alpha$时，反常积分$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$收敛；而当$\alpha\le 0$时，反常积分$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$发散。

例2 讨论反常积分$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$的敛散性，其中$\alpha,\beta\in\mathcal{R}$.

解：这里可能的瑕点只有两个，即$x=0$和$x=1$。因此，可以分别考虑

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

和

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

的敛散性。

因为

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}=1,$$

所以$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$收敛的充分必要条件是$1-\alpha<1$，即$\alpha>0$.

又因为

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{1-\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}=1,$$

所以$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$收敛的充分必要条件是$1-\beta<1$，即$\beta>0$.

综上，$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$收敛的充分必要条件是$\alpha>0,\ \beta>0$.

7.3 任意函数反常积分敛散性的判别

由定义知，反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛与否，取决于函数$F(A)=\int_a^A f(x)dx$在$A\to+\infty$时是否存在极限。因此由函数极限的Cauchy准则，有如下定理。

定理1 设f是定义在$[a,+\infty$上的函数，且对于任给$A>a$，$f\in R[a,A]$，则反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充分必要条件是对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>a$，当$A_1,A_2>M$时，$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

推论1 设f是定义在$[a,+\infty$上的函数，且对于任给$A>a$，$f\in R[a,A]$。
若反常积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$收敛，则反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$也收敛。

定义1 设f是定义在$[a,+\infty$上的函数，且对于任给$A>a$，$f\in R[a,A]$.

(1)若反常积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$收敛，则称反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$<u>绝对收敛</u>。

(2)若反常积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$发散，而反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则称反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$<u>条件收敛</u>。

例1 讨论反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$和$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$的敛散性，其中$\alpha$是参数。

解：（1）若$\alpha \le 0$. 对任何自然数n，

$$\left|\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx\right| = \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx \ge \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin x dx = 1,$$

由定理1知反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$发散。同理，反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$发散

（2）若$\alpha > 0$. 对任意$A > 1$，

$$\begin{aligned}\int_1^A\frac{\sin x}{x^\alpha}dx &= -\int_1^A\frac{1}{x^\alpha}d\cos x\\ &= -\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big|_1^A+\int_1^A\cos x d\frac{1}{x^\alpha}\\ &= \cos 1-\frac{\cos A}{A^\alpha}-\alpha\int_1^A\frac{1}{x^{\alpha+1}}\cos x dx,\end{aligned}$$

因$\frac{1}{x^{\alpha+1}}|\cos x| \le \frac{1}{x^{\alpha+1}}$及反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx$收敛，故由“比较法”知反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+1}}\cos x dx$ 绝对收敛，从而反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$收敛。同理可证反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$收敛。

例2 讨论反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$和$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$的绝对收敛、条件收敛，其中$\alpha$ 是正的参数。

解：（1）若$\alpha > 1$. 对任意$x \ge 1$，

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}.$$

显然$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 收敛，所以由“比较法”知$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$ 收敛，从而$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ 绝对收敛。

（2）若$0 < \alpha \le 1$. 对任意$x \ge 1$，

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \ge \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha}-\frac{\cos 2x}{2x^\alpha}$$

易知反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\alpha}dx$发散，而由上例知反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\alpha}dx$收敛，故反常积分$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x^\alpha}-\frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\right)dx$ 发散，即反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx$发散，所以由“比较法”知反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$发散。从而知反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$条件收敛。

例3 证明下列反常积分都是条件收敛的。

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx; \quad \int_1^{+\infty} \cos x^2 dx; \quad \int_1^{+\infty} x\sin x^4 dx.$$

证：由

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx \underset{x^2=u}{===} \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du$$

$$\int_1^{+\infty} \cos x^2 dx \underset{x^2=u}{===} \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} du$$

$$\int_1^{+\infty} x\sin x^4 dx \underset{x^4=u}{===} \int_1^{+\infty} u^{\frac{1}{4}} \cdot \sin u \cdot \frac{1}{4u^{\frac{3}{4}}} du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{4\sqrt{u}} du$$

及上例知它们都是条件收敛的。

引理（积分第二中值） 设$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，$g(x)$在区间$[a,b]$上单调，则存在$\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b-0)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

特别的，当$g(x)$在区间$[a,b]$的端点还连续时，有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

证：由于时间关系，我们只在条件$f \in C[a,b]$，$g \in C^1[a,b]$ 下证明此定理。

令$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,b]$，则

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx \quad & \underset{\text{分部积分}}{=====} \quad g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\
& \underset{\substack{\text{积分中值定理} \\ \exists \xi \in [a,b]}}{=====} \quad g(b)F(b) - F(\xi)\int_a^b g'(x)dx \\
& ===== \quad g(b)F(b) - F(\xi)[g(b) - g(a)] \\
& ===== \quad g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

定理2 (Dirichlet) 设$f(x), g(x)$是定义在$[a,+\infty)$上函数，且$\forall A > a, f \in R[a,A]$. 若

1. 函数$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,+\infty))$ 有界;

2. $g(x)$ 单调，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

则反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

证：任取$A_2>A_1\geq a$，则由上引理，存在$\xi\in[A_1,A_2]$，使得

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx === g(A_1)F(\xi)+g(A_2)[F(A_2)-F(\xi)].$$

记C为F的一个界，则

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right|\leq 2C\left[|g(A_2)|+|g(A_1)|\right].$$

另一方面，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，从而$\forall\varepsilon>0,\ \exists M>a$使得当$x>M$时，有

$$|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4C+1}.$$

故当$A_2>A_1>M$时，有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right|\leq 2C\left[|g(A_2)|+|g(A_1)|\right]<\varepsilon.$$

由定理1知反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理3 (Abel) 设$f(x),g(x)$是定义在$[a,+\infty)$上函数，且$\forall A>a, f\in R[a,A]$. 若

1. 反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

2. $g(x)$ 单调、有界.

则反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

证：由于$g(x)$ 单调、有界，故极限$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$存在，记$b=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. 于是由定理2 知$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)[g(x)-b]dx$ 收敛. 又因为$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，所以

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)[g(x)-b]dx+b\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛。

注1 对含有瑕点的反常积分也有类似上述定理1、推论1、定理2、定理3. 请同学们完成。

例2 讨论反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$和$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^\alpha}dx$的敛散性，其中参数$0<\alpha\leq 1$.

解：$\forall u>1$,有

$$\left|\int_1^u \sin x dx\right|=|\cos 1-\cos u|\leq 2,$$

而$\dfrac{1}{x^\alpha}$ 单调趋于$0(x \to +\infty)$，故由Dirichlet判别法知$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 收敛。另一方面，对任意$x \geq 1$，

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

其中$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx \underset{2x=u}{===} \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ 满足Dirichlet判别法的条件，它是收敛的。而$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ 发散，因此$\displaystyle\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\right] dx$ 发散，从而$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ 发散。

同理可证$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^\alpha} dx$当$0 < \alpha \leq 1$时发散。