2020 年春微积分 A2 期末考试样题

1. （10 分）设 $z = xf\left(x, \frac{x}{y}\right)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

2. （10 分）设方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z} = \sqrt{2}$ 确定的函数 $z = z(x, y)$，求该函数在点 $x = 1, y = 0$ 处的全微分 $\mathrm{d}z$.

3. （10 分）求曲线 $x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0$ 上的点与直线 $x + y = 8$ 上的点之间的最短距离。

4. （10 分）求二重积分 $\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le R^2\}$。

5. （10 分）Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2 - x^2 - y^2$ 包围的空间区域，求 $\iiint\limits_\Omega (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

6. （10 分）设 L 是由点 $A(1,1)$ 出发，经过点 $B(0,1)$ 到点 $C(0,-1)$ 的有向折线，求 $\int_L (x + y)\mathrm{d}l$ 和 $\int_{L^+} (x + y)\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y$。

7. （10 分）计算曲面积分 $\iint\limits_S (2y + z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$，法向量与 z 轴正向夹角为锐角。

8. （10 分）设 $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$，将 $f(x)$ 展为周期为 2 的 Fourier 级数，求 Fourier 级数的和函数。

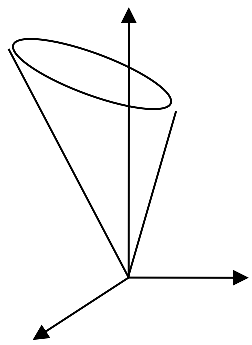
9. （12 分）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛，其和函数 $S(x)$ 满足

$$S''(x) - 2xS'(x) - 4S(x) = 0, \quad S(0) = 0, S'(0) = 1。$$

（I）证明：$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \text{L}$ ；

（II）求和函数 $S(x)$ 的表达式。

10. （8 分）设 Ω 为由光滑圆锥面 $S: F(x,y,z)=0$ 及平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体，不妨假设此圆锥体的顶点在原点.



（1）证明设此圆锥体的体积 V 可以表示为

$$V=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S$$

其中 $\partial\Omega$ 为 Ω 区域的边界面，$\mathbf{n}^0$ 为其单位外法向量，$\mathbf{r}=(x,y,z)$.

（2）此圆锥体的体积 V 也可以表示为

$$V=\frac{Ah}{3}$$

其中 A 为圆锥的底面积，h 为圆锥的高.