《微积分A2》第十二讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年03月25日

Theorem (Fubini)

定理一: 设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且对任意 $x\in[a,b]$, 积分 $\int_c^d f(x,y)dy$ 存在, 记作 $A(x)$, 则 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int_a^b A(x)dx=\iint_\Omega f(x,y)dxdy$, 即

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

Theorem (Fubini)

定理二：设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，且对任意 $y\in[c,d]$，积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 存在，记作 $B(y)$，则 $B(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，且 $\int_c^d B(y)dy=\iint_\Omega f(x,y)dxdy$，即

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

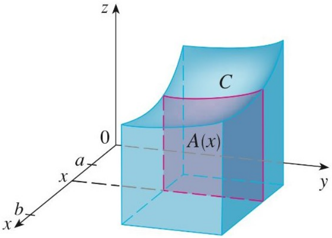
Theorem (Fubini)

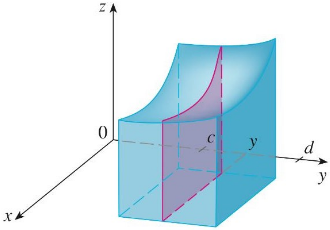
<u>定理三</u>: 设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $\Omega = [a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

显然上述定理三是定理一和定理二的直接推论.

Fubini 定理图示





例子

<u>例</u>: 计算积分 $J=\iint_\Omega f(x,y)dxdy$, 其中 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$,

$$f(x,y)=\frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

<u>解</u>: 根据上述定理可知

$$J=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{ydx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

第二个累次积分的内层积分不便计算. 而第一个累次积分的计算比较容易:

例子续

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{-2}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}\right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right] dx$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

解答完毕.

证: 想法是利用 Darboux 可积性准则. 设 π 为 Ω 的一个分割:

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$. 记

$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$,

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}}\{f(x,y)\}, \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}}\{f(x,y)\}.$$

相应的 Darboux 上和与下和为

$$U_f(\pi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\triangle x_i \triangle y_j, \quad L_f(\pi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\triangle x_i \triangle y_j.$$

证明续一

由 Darboux 可积性准则知，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当分割 π 满足 $\|\pi\| < \delta$ 时，$U_f(\pi) - L_f(\pi) < \varepsilon$. 现证明函数 $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积性. 每个闭矩形 $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ 的分割 π，均确定了闭区间 $[a, b]$ 的一个分割 π': $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 函数 $A(x)$ 关于分割 π' 的 Darboux 上和与下和分别记作 $U_A(\pi')$, $L_A(\pi')$. 下面考虑它们与 $f(x, y)$ 的 Darboux 上和与下和 $U_f(\pi)$ 与 $L_f(\pi)$ 的关系. 记 $J_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$,

$$M_i = \sup_{J_i}\{A(x)\}, \quad m_i = \inf_{J_i}\{A(x)\}.$$

证明续二

对 $i = 1, \cdots, n$, $m_i = \inf_{J_i}\{A(x)\}$

$$= \inf_{J_i}\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\} = \inf_{J_i}\left\{\sum_{j=1}^{m}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy\right\}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{m}\inf_{J_i}\left\{\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy\right\} \geq \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\triangle y_j.$$

注：上式第一个不等式成立，可以由如下简单情形的不等式看出

$\inf_K\{\phi_1(x)+\phi_2(x)\} \geq \inf_K \phi_1(x) + \inf_K \phi_2(x)$. 因此

$$m_i \geq \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\triangle y_j.$$

于上述不等式的两边同乘以 $\triangle x_i$，并对 $i = 1, \cdots, n$ 求和得

证明续三

$$L_A(\pi') = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} \triangle x_i \triangle y_j = L_f(\pi).$$

即 $L_A(\pi') \geq L_f(\pi)$. 同理可证 $U_A(\pi') \leq U_f(\pi)$. 由此得

$$L_f(\pi) \leq L_A(\pi') \leq U_A(\pi') \leq U_f(\pi).$$

于是根据 $f(x, y)$ 的可积性, 以及一维和二维 Darboux 可积性准则知, 函数 $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 并且 $\int_{[a,b]} A = \iint_\Omega f$. 定理得证.

Definition

<u>定义</u>: 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为平面上的有界点集, $f(x,y)$ 为定义在 D 上的函数. 定义 $f_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_D(x,y) \triangleq \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

并称 $f_D(x,y)$ 为函数 $f(x,y)$ 的扩张函数.

Definition

定义: 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为平面上的有界点集, $f(x, y)$ 为定义在 D 上的函数. 若存在一个包含 D 的闭矩形 $\Omega \supseteq D$, 使得扩张函数 $f_D(x, y)$ 在 Ω 上可积, 则称函数 $f(x, y)$ 在点集 D 上可积, 且 $f(x, y)$ 在点集 D 上的积分定义为

$$\iint_D f(x, y)dxdy \triangleq \iint_\Omega f_D(x, y)dxdy.$$

可积性和积分值与闭矩形的选择无关

不难证明 $f_D(x,y)$ 在某个含 D 的闭矩形 Ω 上可积，则在任何其它含 D 的闭矩形 Ω' 上可积，并且

$$\iint_{\Omega} f_D(x,y)dxdy = \iint_{\Omega'} f_D(x,y)dxdy.$$

这是因为两个包含 D 的闭矩形 Ω 和 Ω' 的交集 $\Omega \cap \Omega' =: \Omega''$ 仍是一个包含 D 的闭矩形. 根据积分区域的可加性得

$$\iint_{\Omega} f_D(x,y)dxdy = \iint_{\Omega''} f_D(x,y)dxdy = \iint_{\Omega'} f_D(x,y)dxdy.$$

Lebesgue 可积性准则

Theorem

定理: 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为平面有界点集, 且其边界 ∂D 为零测集. 设 $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数, 则 f 在 D 上可积, 当且仅当 f 在 D 上几乎处处连续.

Proof.

证明: 依定义, f 在 D 上可积 $\Longleftrightarrow$ f_D 在某个闭矩形 $\Omega \supseteq D$ 上可积 $\Longleftrightarrow$ f_D 的不连续点集为零测集. 易证

$$f \text{ 的间断点集} \subseteq f_D \text{ 的间断点集} \subseteq f \text{ 的间断点集} \cup \partial D,$$

由假设 ∂D 是零测集, 故 f 的间断点集为零测集, 当且仅当 f_D 的间断点集为零测集. 定理得证. $\square$

平面有面积(可求面积)集合

Definition

定义: 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为平面有界点集. 若取值恒为 1 的常数函数, 记作 $\mathcal{I}$, 在 D 上可积, 则称集合 D 有面积, 或者称 D 可求面积, 且定义其面积为

$$|D| \triangleq \iint_{\Omega} \mathcal{I}_D(x, y)dxdy,$$

其中 Ω 为包含 D 的任意一个闭矩形. 若常数函数 $\mathcal{I}$ 在 D 上不可积, 则称集合 D 没有面积, 或者说 D 不可求面积.

一个注记

注记: 一个平面集合不可求面积(或没有面积), 与平面集合的面积为零, 是不同的两件事情. 例如, 平面上一个直线段 L 有面积, 因为函数 $\mathcal{I}_L(x, y)$ 的间断点集为 L, 其测度为零. 进一步不难证明 L 的面积为零.

Example

例: 记 $D = \{(x, y), 0 \leq x, y \leq 1, x, y$ 均为有理数$\}$, 则 D 没有面积.

证: 显然闭矩形 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ 包含集合 D, 扩张函数 $\mathcal{I}_D$ 在 Ω 上处处都不连续. 故 $\mathcal{I}_D$ 在 Ω 上不可积, 此即函数 $\mathcal{I}$ 在 D 上不可积. 因此 D 没有面积. 证毕.

可求面积集合的特征

Theorem

定理: 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界集合, 则 D 有面积, 当且仅当其边界 ∂D 为零测集.

Example

例: 上例中, 集合 $D = \{(x, y), 0 \le x, y \le 1, x, y$ 均为有理数$\}$ 的边界 ∂D 为闭矩形 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, Ω 不是零测集. 因此 D 没有面积.

<u>证明大意</u>: 设 Ω 是一个包含 D 的闭矩形, 则

D 有面积 $\Longleftrightarrow$ 函数 $\mathcal{I}$ 在 D 上可积 $\Longleftrightarrow$ 扩张函数 $\mathcal{I}_{\mathsf{D}}$ 在 Ω 上可积 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}_{\mathsf{D}}$ 在 Ω 上的间断点集为零测集.

不难证明扩张函数 $\mathcal{I}_{\mathsf{D}}$ 在 Ω 上的间断点集 $= \partial\mathsf{D}$. 因此点集 D 有面积 $\Longleftrightarrow$ 边界 $\partial\mathsf{D}$ 为零测集. 证毕.

常见平面曲线段是零测集

Theorem

定理: 设 $\Gamma = \{(x(t), y(t)), a \le t \le b\}$ 为平面连续曲线段, 即函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[a, b]$ 上均连续, 假设其中之一在 (a, b) 上连续可微, 则曲线 Γ 作为平面点集是零测集.

证明略. 详见课本第122页的证明.

Corollary

推论: 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则其函数曲线(图像) $\Gamma = \{(x, f(x)), a \le x \le b\}$ 作为平面点集是零测集.

定理: 如下两个类型的平面闭域

$$\text{第一类}\quad D: g_1(x) \le y \le g_2(x), x \in [a, b],$$

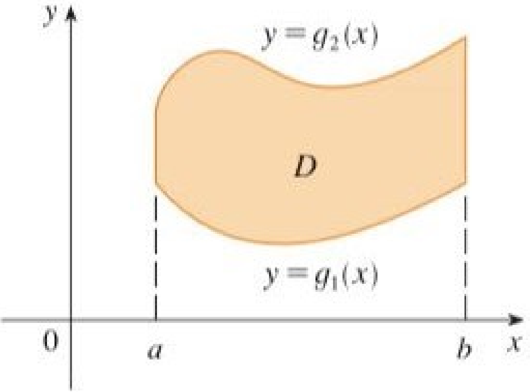
$$\text{第二类}\quad D: h_1(y) \le x \le h_2(y), y \in [c, d],$$

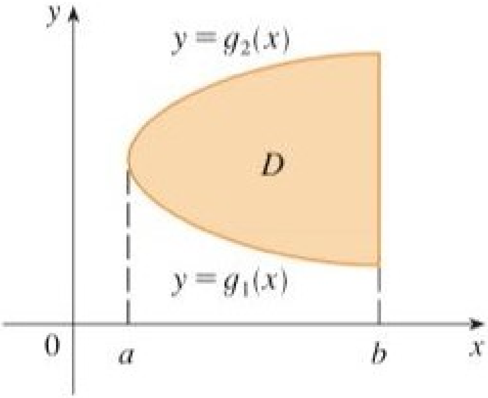
均有面积, 其中 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $h_1(y)$, $h_2(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续.

证明: 由上述推论知边界 ∂D 均为零测度集合. 故闭域 D 有面积. 证毕. $\square$

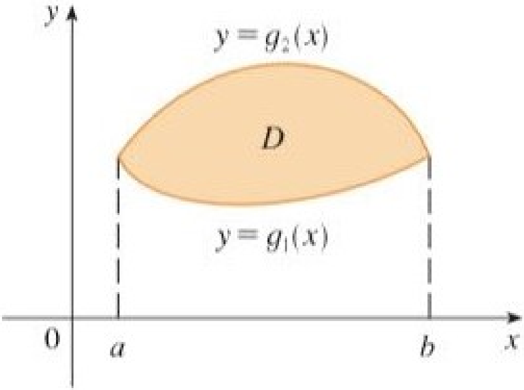
约定: 以后所涉及的积分区域均为这两类闭区域, 或者是可以分解成有限个这两类闭区域的并集.

第一类平面简单闭域，例一

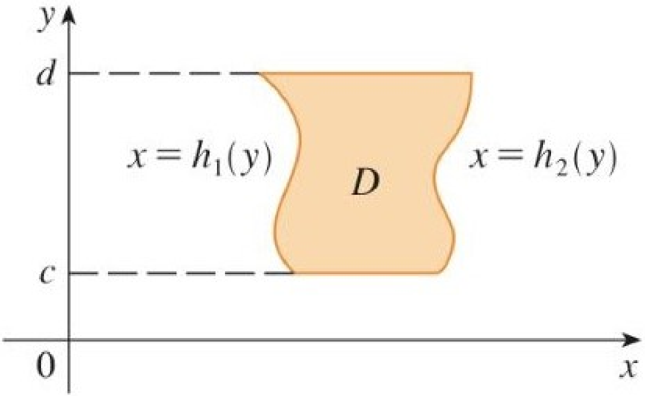



y
$y=g_2(x)$
D
$y=g_1(x)$
0
a
b
x

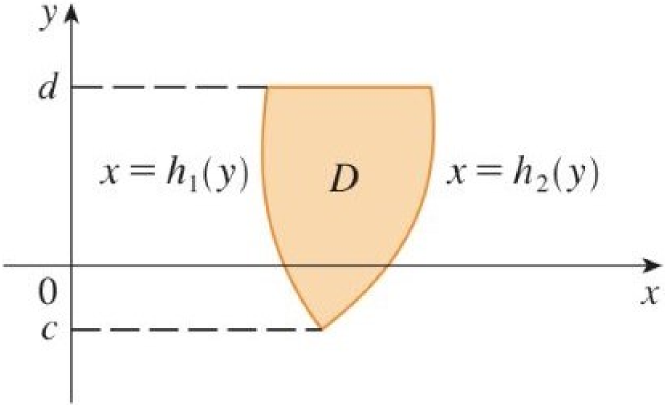
第一类平面简单闭域, 例三



第二类平面简单闭域，例一



第二类平面简单闭域, 例二



定理一 (Fubini): 设二元函数 $f(x,y)$ 在第一类平面简单闭域 D : $g_1(x) \le y \le g_2(x), x \in [a,b]$ 上可积，其中 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为 $[a,b]$ 上连续函数，并且对任何 $x \in [a,b]$，积分

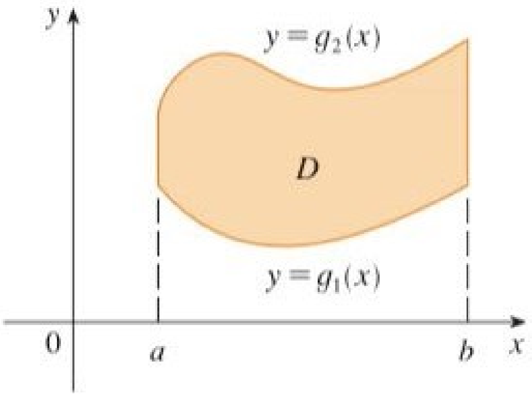
$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

存在，记作 $A(x)$，则函数$A(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b A(x)dx = \iint_D f(x,y)dxdy$，即

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

定理一证明稍后给出.

第一类简单闭域图示



定理二 (Fubini): 设二元函数 $f(x, y)$ 在第二类平面简单闭域 D : $h_1(y) \le x \le h_2(y), y \in [c, d]$ 上可积, 其中 $h_1(y)$ 和 $h_2(y)$ 均为 $[c, d]$ 上连续函数, 并且对任何 $y \in [c, d]$, 积分

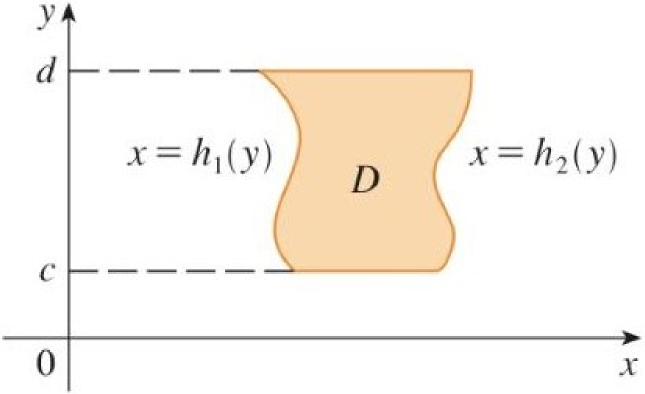
$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$$

存在, 记作 $B(y)$, 则函数 $B(y)$ 在 $[c, d]$ 上可积, 且 $\int_c^d B(y) dy = \iint_D f(x, y) dxdy$, 即

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx.$$

定理二的证明与定理一的证明类似. 故略去.

第二类简单闭域图示

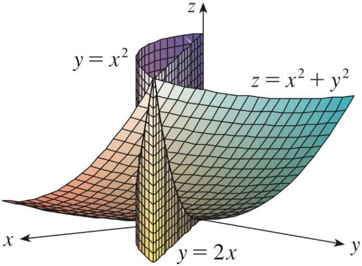


例: 计算积分

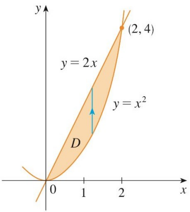
$$\mathsf{J} = \iint_{\mathsf{D}} (\mathsf{x}^2 + \mathsf{y}^2)\mathsf{dxdy}$$

其中 D 为由直线 $\mathsf{y} = 2\mathsf{x}$ 和抛物线 $\mathsf{y} = \mathsf{x}^2$ 所围成的有界闭域.

积分的几何意义是如图所示的立体的体积 V.



将积分区域 D 表为第一类简单闭域形式

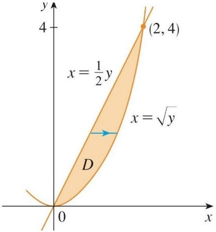


根据定理一可知

$$V=\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dy=\int_0^2\left[x^2+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=x^2}^{y=2x}dx$$

$$=\int_0^2\left\{x^2(2x-x^2)+\frac{1}{3}\left((2x)^3-x^6\right)\right\}dx=\frac{216}{35}.$$

也可将积分区域 D 表为第二类简单闭域形式



根据定理二可知

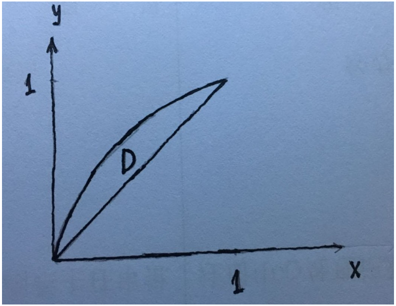
$$V=\int_0^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)dx=\int_0^4\left[\frac{x^3}{3}+y^2\right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}}dy=$$

$$\int_0^4\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}+y^{\frac{5}{2}}-\frac{y^3}{24}-\frac{y^3}{2}\right)dx=\left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{15}+\frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{13y^4}{96}\right]_{y=0}^{y=4}=\frac{216}{35}.$$

例: 计算积分

$$J = \iint_D \frac{\sin y}{y} dxdy$$

其中 D 为由直线 $y = x$ 和抛物线 $x = y^2$ 所围成的有界闭域, 如图所示.



解: 闭域 D 有如下两种表示

$$D: x \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$$

或者

$$D: y^2 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1.$$

因此原则上可以由两种方式计算积分J. 方式一: 先 y 后 x, 即

$$J = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy.$$

但是 Liouville 告诉我们不定积分

$$\int \frac{\sin y}{y} dy$$

积不出来，即不能用初等函数表示. 考虑方式二：先 x 后 y，即

$$J = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - y^2) dy$$

$$= \int_0^1 (1-y)\sin y dy = \cdots = 1 - \sin 1.$$

解答完毕.

习题3.2 (page 127-128) 2, 3, 4, 5.

习题3.3 (page 144-145) 4, 5(1)(3)(5), 6(1)(3)(5)(7)(9).

注：题 6(7) 的积分区域似应为 $0 \le x, y \le \pi$.