微积分A2第一次习题课讨论题参考解答 杨利军 March 9-13, 2020

题一．求极限

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}$; (极限为 1)

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x-y)\ln\sqrt{x^2+y^2}$; (极限为 0)

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; (极限不存在)

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{|x||y|^p}}{\sqrt{|x|+|y|}}$, 其中 $p>1$. (极限为 0)

5. $\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty}(x^2+y^4)e^{-(x+y)}$; (极限为 0)

6. $\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{y^2}$. (极限为 0)

注记: 求极限一般原则(以二元函数为例)

(i) 在考察极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 是否存在时, 如果观察到动点 (x,y) 沿不同的路径, 例如沿不同射线, 趋向于 (x_0,y_0) 时, 趋向于不同的值, 则可断言极限不存在. 例如上述极限3.

(ii) 当所考虑极限存在时, 常常可以利用一元函数求极限的模式求极限． 例如上述第极限1,2,5. 应牢记一元函数的若干极限公式(模式). 例如

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(iii) 适当放大或缩小, 然后观察是否存在极限．例如上述极限4,5.

(iv) 给出必要的计算过程.

解答思路:

1. 记 $\delta = x^2 + e^{y^2} - 1$, 则 $\delta(x,y) \to 0$, $(x,y) \to (0,0)$. 于是

$$\frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2} = \frac{\ln(1+\delta)}{\delta}\frac{x^2+e^{y^2}-1}{x^2+y^2} \to 1\cdot 1 = 1, \quad (x,y)\to(0,0).$$

2. 回忆一元函数极限的一个基本结论 $\lim_{\rho\to 0^+}\rho\ln\rho = 0$. 于是

$$(x-y)\ln\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}\ln\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0.$$

注意虽然函数

$$\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在, 但保持有界.

3. 由于

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)(xy)}{x^2+y^2} = \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由于极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2+1}+1$$

存在且等于 2, 而极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

不存在. 因此原极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

不存在.

4. 由于

$$\frac{|x||y|^p}{(|x|+|y|)^2} \le \frac{|x||y|}{x^2+y^2}|y|^{p-1} \le \frac{1}{2}|y|^{p-1} \to 0, \quad (x,y)\to(0,0),$$

故极限
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x||y|^p}}{\sqrt{|x|+|y|}} \quad (p>1)$$
存在且极限为零.

5. 对于 $x>0, y>0$,
$$0 \le \frac{x^2+y^4}{e^{x+y}} \le \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^4}{e^y} \to 0+0=0, \quad x\to+\infty, y\to+\infty,$$
故原极限存在且极限为零.

题二. 假设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的重极限以及两个累次极限均存在, 证明这三个极限相等. (课本习题1.3题4(2)).

证明: 记
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A, \quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=B, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=C.$$
要证 $A=B=C$. 根据假设重极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=C$ 存在性可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得
$$|f(x,y)-C|<\varepsilon, \quad \forall z=(x,y)\in B^\circ(z_0,\delta).$$
于上述不等式中, 固定 $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)\backslash\{y_0\}$, 令 $x\to x_0$ 即得
$$|\phi(y)-C|\le\varepsilon, \tag{1}$$
其中 $\phi(y)\triangleq\lim_{x\to x_0} f(x,y)$. 于不等式 (1) 中令 $y\to y_0$ 即得 $|A-C|\le\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性可知 $A=C$. 同理可证 $B=C$. 命题得证. ∎

题三. 设 $f(x,y)=|x-y|\phi(x,y)$, 其中 $\phi(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处连续. 考虑函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处的可微性 (课本习题1.4题1(4)).

解：分两种情形讨论.

情形一: $\phi(0,0)\neq 0$. 考虑函数 $f(x,y)$ 在原点处的偏导数. 由于

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\frac{|x|\phi(x,0)}{x}=\pm\phi(x,0),$$

故偏导数 $f_x(0,0)$不存在. 由此可见函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不可微.
情形二: $\phi(0,0)=0$. 由估计

$$|f(x,y)|=|x-y||\phi(x,y)|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}|\phi(x,y)|$$

可知

$$\frac{|f(x,y)-0\cdot x-0\cdot y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 2|\phi(x,y)|\to 0,\quad (x,y)\to(0,0).$$

这说明函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微, 且其微分为 $df(0,0)=0$. 解答完毕. ∎

注: 研究二元函数 $f(x,y)$ 的可微性之一般准则:

(i) 若两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 的其中之一不存在, 则可断言函数 f 在点 (x_0,y_0) 处不可微.

(ii) 设两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 是均存在, 分别记作 a,b. 若以下极限式

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-a\Delta-b\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,$$

不成立, 则可断言函数在点 (x_0,y_0) 处不可微.

题四. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin x}{|x|+2|y|}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微, 并求微分 $df(0,0)$.
解: 根据一元函数的结论可知

$$\frac{x-\sin x}{x^3}\to\frac{1}{6}.$$

由此得
$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x-\sin x|}{(|x|+2|y)|\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x-\sin x|}{x^2} \to 0, \quad x\to 0.$$
这表明函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微, 且其微分为 $df(0,0)=0$. 解答完毕. ∎

题五. 设 $A\subset \mathbb{R}^n$ 为平面点集. 定义平面上的点 $z_0=(x_0,y_0)$ 到点集 A 的距离为 $\rho(z_0,A) \triangleq \inf\{\|z-z_0\|, z\in A\}$, 这里 $\|z-z_0\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $z=(x,y)$. 证明
(i) 对于任意两点 $z,w\in\mathbb{R}^2$, 成立 $|\rho(z,A)-\rho(w,A)|\le\|z-w\|$;
(ii) 点集 A 的闭包可以表示为 $\bar{A}=\{z\in\mathbb{R}^2, \rho(z,A)=0\}$.
注：根据结论(i)可知, 对于给定的平面点集 A, 距离 $\rho(z,A)$ 作为定义在整个 $\mathbb{R}^2$ 上的函数处处连续. 参见课本第96页第一章总复习题第6题.

证(i)：记 $f(z)=\rho(A,z)$. 对平面任意两个点 z_1, $z_2\in\mathbb{R}^2$, 不妨设 $f(z_2)\ge f(z_1)$. 根据 $f(z_1)$ 的定义, 以及下确界的性质可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在点 $a_1\in A$, 使得 $\|a_1-z_1\|<f(z_1)+\varepsilon$ 或写作 $f(z_1)>\|a_1-z_1\|-\varepsilon$. 另一方面显然有 $f(z_2)\le\|z_2-a_1\|$. 于是
$$|f(z_2)-f(z_1)|=f(z_2)-f(z_1)<\|z_2-a_1\|-(\|a_1-z_1\|-\varepsilon)\le\|z_2-z_1\|+\varepsilon.$$
此即 $|f(z_2)-f(z_1)|<\|z_2-z_1\|+\varepsilon$. 注意 $\varepsilon>0$ 是任意正数. 因此 $|f(z_2)-f(z_1)|\le\|z_2-z_1\|$. 结论(i)得证.
证(ii). 为方便, 记 $B=\{z\in\mathbb{R}^2, \rho(A,z)=0\}$. 要证 $\bar{A}=B$. 以下将证明 (1) $\bar{A}\subset B$; (2) $\bar{A}\supset B$.
证(1). 对任意元素 $z_*\in\bar{A}=A\cup\partial A$. 若 $z_*\in A$, 则有 $\rho(A,z_*)=0$, 从而 $z_*\in B$. 设 $z_*\notin A$, $z_*\in\partial A$, 则存在点列 $\{z_n\}\subset A$, 使得 $z_n\to z_*$. 根据结论(i)知函数 $f(z)=\rho(A,z)$ 是连续的. 故 $\rho(A,z_*)=\lim_{n\to+\infty}\rho(A,z_n)=0$, 因为 $\rho(A,z_n)=0$, $\forall n\ge 1$. 这就证明了 $z_*\in B$. 结论(1)得证.
证(2). 设 $z_*\in B$. 若 $z_*\in A$, 则当然有 $z_*\in\bar{A}$. 设 $z_*\notin A$, 则根据下确界性质可知, 对任意 $n\ge1$, 存在 $z_n\in A$, 使得 $\|z_n-z_*\|<\rho(A,z_*)+1/n=1/n$. 这说明点 z_* 是集合 A 的边界点, 即 $z_*\in\partial A$. 故结论(2)成立. 解答完毕. ∎

题六. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为 n 元函数. 证明函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续, 当且仅当对于 $\mathbb{R}$ 中的任何开集 $G\subset\mathbb{R}$, 其原象 $f^{-1}(G)\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n, f(x)\in G\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. (注: 这是课本第96页第1章总复习题第4题.)

证明. $\Rightarrow$: 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续. 要证 $\mathbb{R}$ 中的任何开集 $G\subset\mathbb{R}$ 的原象 $f^{-1}(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 即要证 $f^{-1}(G)$ 中的每个点都是内点. 任取一点 $x_0\in f^{-1}(G)$, 即 $y_0=f(x_0)\in G$. 由于 G 是开集, 故存在点 y_0 的一个邻域完全包含在 G 中, 即存在 $\varepsilon>0$, 使得 $(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)\subset G$. 根据函数 f 在点 x_0 处的连续性可知, 存在 $\delta>0$, 使得 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 对 $\forall x\in B(x_0,\delta)=\{x\in\mathbb{R}^n,\|x-x_0\|<\delta\}$. 此即 $f(B(x_0,\delta))\subset(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)\subset G$. 这表明 $B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(G)$, 即 x_0 是 $f^{-1}(G)$ 的内点. 由点 $x_0\in f^{-1}(G)$ 的任意性可知 $f^{-1}(G)$ 是开集.
$\Leftarrow$: 设 $\mathbb{R}$ 中的任何开集 $G\subset\mathbb{R}$ 的原象 $f^{-1}(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 要证函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续. 对任意给定的点 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 记 $y_0=f(x_0)$. 对任意 $\varepsilon>0$, 点 y_0 的邻域 $G=(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ 是开集. 于是 G 的原象 $f^{-1}(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 故点 $x_0\in f^{-1}(G)$ 是内点, 即存在 $\delta>0$, 使得点 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(G)$, 即 $f(B(x_0,\delta))\subset G$. 这表明对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|x-x_0\|<\delta$, 我们有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 换言之, 函数 f 在任意给定的点 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 处连续. 由点 x_0 的任意性可知, 函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续. 证毕. ∎

题七. 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上处处连续且满足条件 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$. 证明函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上可取得最小值, 即存在点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$f(x_0,y_0)\le f(x,y),\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(注: 这是课本第24页习题1.3第8题).

证明: 由假设 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$ 知, 对于函数 $f(x,y)$ 在任意一点的值, 比如 $f(0,0)$, 存在正数 $M>0$, 使得 $f(x,y)>f(0,0)$, 对 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2\ge M$. 再根据连续函数在有界闭集的最值性可知, 函数 $f(x,y)$ 在有界闭圆盘 $B_M: x^2+y^2\le M$ 上可取得最小值. 设 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)\in B_M$ 处取有界闭圆盘 B_M 上的最小值. 显然

$f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值. 命题得证. ∎

题八: 假设二元函数 $f(x,y)$ 在平面开区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的两个偏导数恒为零. 证明函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 上为常数.

证明: 由假设区域 D 是连通开集, 即对于 D 中任意两点, 存在一条连接这两点的折线, 且折线完全包含在 D 中. 现固定一点 $z_0=(x_0,y_0)\in D$, 对 D 中的任意点 $z=(x,y)\in D$, 根据 D 的连通性可知, 存在有限个点 $z_k=(x_k,y_k)\in D$, $k=1,2,,,n$, 其中 $z_n=z$, 使得由 n 个直线段 $\overline{z_kz_{k+1}}$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 所构成的折线包含在 D 中. 直线段 $\overline{z_0z_1}$ 可用如下参数方程表示 $x(t)=tx_1+(1-t)x_0$, $y(t)=ty_1+(1-t)y_0$, $0\le t\le 1$. 考虑复合函数 $g(t)=f(x(t),y(t))$. 根据复合函数的求导规则, 以及 f 的两个偏导数恒为零的假设可知, 故 $g(t)$ 的导数在开区间 $(0,1)$ 恒为零, 从而 $g(t)$ 为常数, 即 $g(0)=g(1)$. 此即 $f(z_0)=f(z_1)$. 同理可证 $f(z_1)=f(z_2)=\cdots=f(z_n)$. 由此可知 $f(z)=f(z_0)$. 这就证明了函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 上为常数. 证毕. ∎

注1: 熟知若开区间上一元函数的导数恒为零, 则这个函数为常数函数. 题八的结论是这个一元情形的结论对于二元情形的推广. 显然这个结论可以推广到一般 n 元情形, 即若一个 n 元函数的 n 个偏导数均恒为零, 则函数必为常数函数. 证明方法同如下二元情形的证明方法.

注2：设二元函数 $f(x,y)$ 在平面开区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上连续可微. 若它的一个偏导数, 比如说 $f_y(x,y)$ 恒为零, 则当 D 为凸域时(区域称为凸的, 如果区域中的任何两点之间的线段均包含在 D 中), 函数 $f(x,y)$ 与变量 y 无关. 但当区域 D 非凸时, 函数 $f(x,y)$ 仍可能与变量 y 有关. 例如设 $D=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y),x\ge 0,y=0\}$. 易见 D 非凸. 令

$$f(x,y)=\begin{cases} x^3, & x>0,y>0\\ 0, & \text{others.}\end{cases}$$

显然 $f_y(x,y)=0$, $\forall(x,y)\in D$. 但函数 $f(x,y)$ 的值变量 y 有关. 例如 $f(1,1)=1$, 而 $f(1,-1)=0$.

题九. 考虑偏微分方程的初值问题 $z_t = az_x + bz_y$, $z(x, y, 0) = z_0(x, y)$, 其中 a, b 均为常数, $z_0(x, y)$ 为全平面 $\mathbb{R}^2$ 上的连续可微函数. 证明这个初值问题有唯一解, 且这个唯一解可表示为 $z(x, y, t) = z_0(x + at, y + bt)$, $\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$. (这是课本第96页第一章总复习题第11题. 方程 $z_t = az_x + bz_y$ 称为运输方程.)

注: 三元函数 $z(x, y, t)$ 称为上述初值问题的解是指, 函数 $z(x, y, t)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续可微, 且满足方程 $z_t = az_x + bz_y$, 即如下恒等式成立,

$$z_t(x, y, t) \equiv az_x(x, y, t) + bz_y(x, y, t), \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

此外还满足初值条件, 即

$$z(x, y, 0) \equiv z_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

证明：不难验证三元函数 $z(x, y, t) = z_0(x + at, y + bt)$ 是上述初值问题的解. 以下证明解的唯一性. 即要证, 若连续可微函数 $w(x, y, t)$ 满足等式(2) 和 (3), 即

$$w_t(x, y, t) = aw_x(x, y, t) + bw_y(x, y, t), \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

$$w(x, y, 0) = z_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

则必有 $w(x, y, t) = z_0(x + at, y + bt)$, $\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$. 作变量替换 $u = x + at$, $v = y + bt$, $t = t$. 其逆变换 $x = u - at$, $y = v - bt$, $t = t$. 记 $\bar{w}(u, v, t) = w(u - at, v - bt, t)$, 则根据等式(4)可知, 函数 $\bar{w}(u, v, t)$ 关于变量 t 的偏导数恒为零, 即 $\bar{w}_t(u, v, t) \equiv 0$, $\forall (u, v, t) \in \mathbb{R}^3$. 根据题八的注2可知, 三元函数 $\bar{w}(u, v, t)$ 与变量 t 无关. 于是

$$\bar{w}(u, v, t) = \bar{w}(u, v, 0) = w(u, v, 0) = z_0(u, v), \quad \forall (u, v, t) \in \mathbb{R}^3.$$

将变量 u, v 变回 x, y 得 $w(x, y, t) = z_0(x + at, y + bt)$, $\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$. 唯一性得证. 证毕. ∎