《微积分A2》第六讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年03月04日

例: 设三元函数 $F(x,y,z)$ 在开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上是 C^1 的. 设点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, 使得 $F(x_0,y_0,z_0)=0$ 且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 于是由 IFT 知可由方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 P_0 附近解出唯一的隐函数 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in B_\delta$, 这里 B_δ 表以点 (x_0,y_0) 为心, 以 $\delta>0$ 为半径的开球域. 进一步函数 $z(x,y)$ 的偏导数可表为

$$(z_x,z_y)\Big|_{(x,y)}=-\frac{(F_x,F_y)}{F_z}\Bigg|_{(x,y,z(x,y))},\quad (x,y)\in B_\delta. \quad (*)$$

如之前所提及过的, 隐函数 $z(x,y)$ 的光滑性同函数 $F(x,y,z)$.

故当 F 是 C^2 时，隐函数 $z(x,y)$ 也是 C^2 的．以下以计算二阶导数 z_{xx} 为例，来说明如何计算隐函数的高阶偏导数．由导数公式知 $z_x = -F_x/F_z$．于是

$$z_{xx} = -\left[\frac{F_x(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))}\right]_x = -\frac{1}{F_z^2}\Big[F_z(F_x)_x - F_x(F_z)_x\Big]$$

$$= -\frac{1}{F_z^2}\left[F_z(F_{xx} + F_{xz}z_x) - F_x(F_{zx} + F_{zz}z_x)\right]$$

$$= -\frac{1}{F_z^2}\left[F_z\left(F_{xx} + F_{xz}\left[-\frac{F_x}{F_z}\right]\right) - F_x\left(F_{zx} + F_{zz}\left[-\frac{F_x}{F_z}\right]\right)\right]$$

计算续二

$$= \frac{1}{F_z^3}\left(2F_xF_zF_{xz} - F_z^2F_{xx} - F_x^2F_{zz}\right)\Big|_{(x,y,z(x,y))}.$$

类似可求其他两个二阶偏导数 z_{xy}, z_{yy}. 具体计算留作补充习题.

Theorem

定理: 设 $f:\Omega\subset \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射, Ω 开, $x_0\in\Omega$. 若 n 阶Jacobian 矩阵 $Df(x_0)$ 非奇, 则存在映射 $g: B_\delta(y_0)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $(y_0=f(x_0))$, 使得 (i) $x_0=g(y_0)$; (ii) $f(g(y))=y$, $\forall y\in B_\delta(y_0)$; (iii) $g(f(x))=x$, $\forall x\in B_\varepsilon(x_0)$; (iv) 映射 $g(\cdot)$ 是 C^1 的, 且

$$Dg(y)=[Df(x)]^{-1}\Big|_{x=g(y)},\quad \forall y\in B_\delta(y_0).$$

例: 已知极坐标变换为 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 其变换的

Jacobian 矩阵为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix},$$

其逆变换 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ 的 Jacobian 矩阵为

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right]^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

证明: 定义 $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x, y) = y - f(x)$. 由 y_0 的定义知 $F(x_0, y_0) = 0$, 且 $D_x F(x_0, y_0) = -Df(x_0)$ 非奇. 由 IFT 知存在映射 $g : B_\delta(y_0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 使得 (i) $x_0 = g(y_0)$; (ii) $F(g(y), y) \equiv 0$, 即 $y = f(g(y))$, $y \in B_\delta(y_0)$; 且对 $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$ 和 $\forall y \in B_\delta(y_0)$, $F(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = g(y)$. 由此可得 $x = g(f(x))$, $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$. 进一步映射 $g(y)$ 是 C^1 的, 且

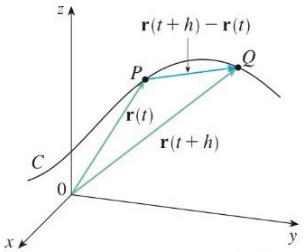
$$Dg(y) = -[D_x F(x, y)]^{-1} F_y(x, y)\Big|_{x=g(y)} = [Df(x)]^{-1}\Big|_{x=g(y)},$$

$\forall y \in B_\delta(y_0)$. 证毕. $\square$

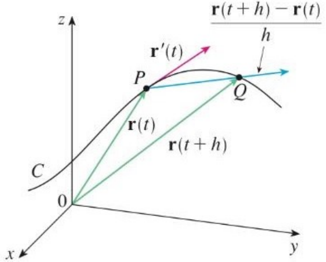
Definition

定义: (i) 设 $r(\cdot): J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ 为向量值映射, J 为开区间, 称其象集合 $C = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in J\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一条曲线, 并且称映射 $r(\cdot)$ 为曲线 C 的一个参数表示; (ii) 当映射 $r(\cdot)$ 是 C^1 时, 称曲线 C 为光滑曲线, 并且称 $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ 为曲线 C 在点 $r(t)$ 处的切向量; (iii) 若光滑曲线 $r(\cdot)$ 还满足 $r'(t) \neq 0$, $\forall t \in J$, 则称曲线 C 是正则的(regular), 且称 $r(\cdot)$ 为正则曲线 C 的正则表示.

曲线 $C: \mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 的切向量 $\mathbf{r}'(t)$ (tangent vectors) 可以看作割向量(secant vectors) 的极限. 如图.



(a) The secant vector $\overrightarrow{PQ}$



(b) The tangent vector $\mathbf{r}'(t)$

同一条曲线可以有不同的参数表示

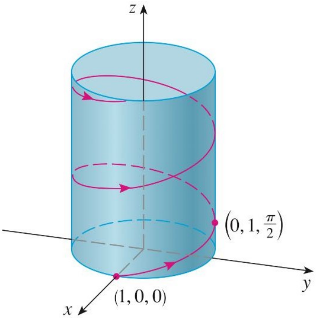
例如直线 $L: x = y = z$ 有如下两个参数表示

$$C_1 = \{(t, t, t), t \in \mathbb{R}\}, \quad C_2 = \{(t^3, t^3, t^3), t \in \mathbb{R}\}.$$

显然前者是正则的，而后者不是．因为当 $t = 0$ 时，$(t^3, t^3, t^3)'$
$= (0, 0, 0)$.

Example

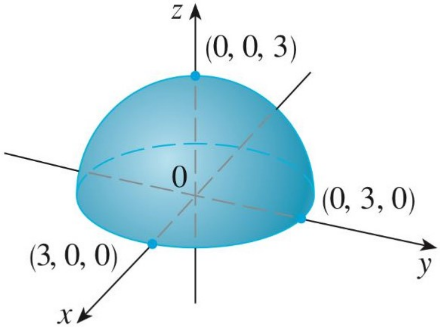
例: 回忆空间螺线是由参数方程 $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ 所确定的曲线. 如图. 这个参数表示式正则的, 因为 $(\cos t, \sin t, t)' = (-\sin t, \cos t, 1) \neq (0,0,0)$, $\forall t \in \mathbb{R}^1$.



空间曲面的三种表示之一: 显式表示

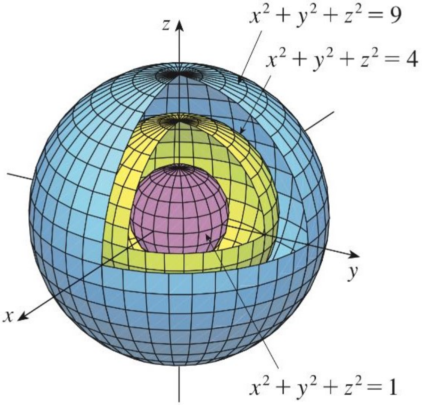
定义: 设 $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为二元函数, 其函数图像, 即集合 $S = \{(x, y, f(x, y)), (x, y)) \in D\}$ 称为显式曲面. 简言之, 每个二元函数的函数图像均称为一个显式曲面. 形如 $y = y(z, x)$ 或 $x = x(y, z)$ 所定义的曲面同样称作显式曲面.

例如二元函数 $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ 的图像(半个球面), 其定义域为圆盘 $\{(x,y),x^2+y^2\le 9\}$.



定义：每个三元函数 $F(x,y,z)$ 的水平面 $S_c = \{(x,y,z) \in \Omega, F(x,y,z) = c\}$ 称为隐式曲面，其中 Ω 为 F 的定义域. 隐式曲面常写作 $S_c : F(x,y,z) = c$. 当 F 是 C^1 的，且 $\nabla F(x,y,z) \neq 0$, $\forall (x,y,z) \in S_c$ 时，隐式曲面 S_c 称作正则曲面.

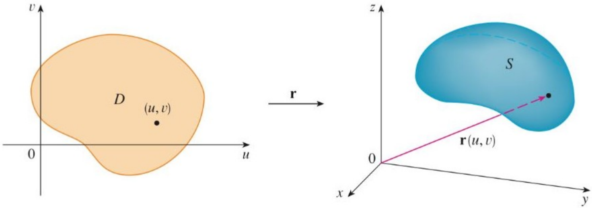
例如，若取函数 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$，则隐式曲面 S_c，即球面 $x^2 + y^2 + z^2 = c$，是正则的，这里 $c > 0$. 如图所示.



定义：考虑二维到三维的映射 $\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$(u,v) \mapsto \mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

其象集 $S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$, 通常称为三维空间中的一个参数曲面，而映射 $\mathbf{r}$ 常称为曲面的一个参数表示.



定义: 设参数曲面 S 由 $r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ 给出, $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, D 为开集. 假设 $r(u,v)$ 是 C^1 的, 且 $r_u(u,v) \times r_v(u,v) \neq 0$, $\forall (u,v) \in D$, 即 $(x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v)$

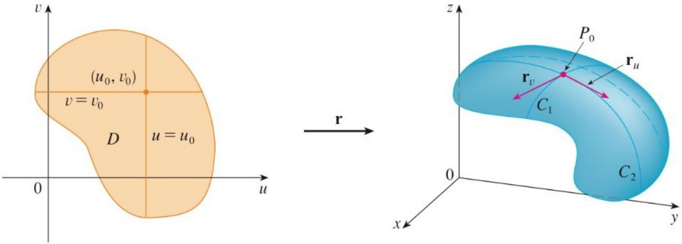
$$\triangleq \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right) \neq (0,0,0),$$

则称曲面 S 是正则的(regular), 并且称参数方程 $r = r(u,v)$ 是曲面 S 的一个正则表示. (注: 假设在点 (u_0, v_0) 处, $r_u \times r_v$ 的第三个分量非零, 那么根据逆映射定理可解得 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. 于是参数曲面可局部地表示为显式曲面 $z = z(u(x,y), v(x,y))$.)

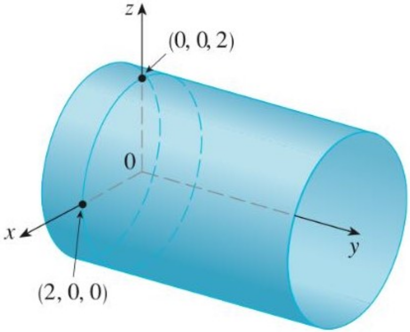
设 S 为正则的参数曲面，$r = r(u, v)$，$(u, v) \in D$，是 S 的一个正则表示。设 $(u_0, v_0) \in D$，记点 $P_0 = r(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$。分别固定 $u = u_0$ 和 $v = v_0$，即得曲面 S 上经过点 P_0 的两条曲线 $C_1 : r = r(u_0, v)$，$(u_0, v) \in D$ 和 $C_2 : r = r(u, v_0)$，$(u, v_0) \in D$。这两条曲线常称为曲面在点 P_0 处的 v 线和 u 线。它们在点 P_0 处的切向量为

$$r_u = (x_u, y_u, z_u)\Big|_{(u_0,v_0)}, \quad r_v = (x_v, y_v, z_v)\Big|_{(u_0,v_0)}.$$

可见正则性条件 $\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}\big|_{(u_0,v_0)} \neq 0$ 的几何意义就是，曲面 S 上点 P_0 处的 u 线和 v 线(的切线)不平行. 如图所示.



例: 映射 $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (2\cos u, v, 2\sin u)$ 是柱面的一个参数表示. 显然这个表示是正则的. 如图.



(i) 显式曲面 $S = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D\}$ 是特殊形式的参数曲面. 因为曲面 S 可以写作参数形式 $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

(ii) 正则的隐式曲面 $S_c : F(x, y, z) = c$ 可以局部地写作显式曲面形式. 说明如下. 设 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, 即 $F(P_0) = c$. 由于 $\nabla F(P_0) \neq 0$ (因为正则性), 不妨设 $F_z(P_0) \neq 0$, 则根据 IFT 可知, 曲面 S 在点 P_0 处可表为显式 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in B_\delta$, 这里 B_δ 表示点 (u_0, v_0) 的一个 δ 邻域.

(iii) 正则的参数曲面可局部表为显式曲面. 见本讲义第17页注.

线性化 (Linearization)

Definition

定义: 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是 C^1 的, Ω 开, $x_0 \in \Omega$, 称线性映射 $L_\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_\phi(x) = \phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0)$ 为映射 ϕ 在点 x_0 处的线性化(映射).

Example

例: 设映射(函数) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = x^2$ 在点 $x_0 = 0$ 处的线性化映射为 $L_\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L_\phi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 因为 $\phi(0) = 0$, $D\phi(0) = 0$.

Definition

定义：设 C 为正则曲线，也就是说曲线 C 有一个正则表示 $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$，$t\in J$，J 为开区间。固定点 $t_0\in J$，映射 $r(t)$ 在点 t_0 处的线性化 $r=L(t)\triangleq r(t_0)+r'(t_0)(t-t_0)$，$t\in\mathbb{R}$，几何上代表一个直线方程。我们称这条直线为曲线 C 在点 $r(t_0)$ 处的切线。称 $r'(t_0)$ 为切向量。

记 $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$，$s = t - t_0$，则上述切线方程有如下的分量形式

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(t_0)s, \\ y = y_0 + y'(t_0)s, \\ z = z_0 + z'(t_0)s. \end{cases}$$

上式为切线的参数方程. 对应的标准方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Example

例：空间螺线 $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 在点 $t \in (0, 2\pi)$ 处的切线方程为

$$\frac{x - \cos t}{-\sin t} = \frac{y - \sin t}{\cos t} = \frac{z - t}{1}.$$

定义: 设 $S = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D\}$ 为显式曲面, D 开. 设曲面 S 光滑, 即函数 f 光滑 (C^1 的). 函数 f 在 $(x_0, y_0) \in D$ 的线性化函数

$$z = z_0 + f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) \quad (*)$$

所表示的平面称为曲面 S 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面, 这里 $z_0 = f(x_0, y_0)$, $(f_x^0, f_y^0) = (f_x, f_y)\big|_{(x_0, y_0)}$.

回忆二元函数在点 (x_0, y_0) 处可微的几何意义就是, 有一个平面可以在这个点处附近与曲面一阶贴近. 这个平面就是切平面 (*).

易见切平面

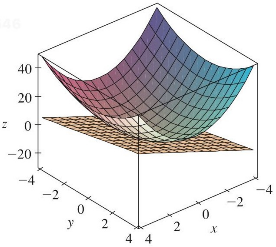
$$z = z_0 + f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0)$$

的法向量为 $(-f_x^0, -f_y^0, 1)$. 经过点 (x_0, y_0, z_0), 且以法向量为方向的直线, 即

$$\frac{x - x_0}{-f_x^0} = \frac{y - y_0}{-f_y^0} = \frac{z - z_0}{1}$$

称为曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法线. 其方程称为法线方程.

例：设 $f(x,y)=2x^2+y^2$，其函数图像是一个抛物面 S．易见点 $(1,1,3)$ 在 S 上．简单计算知 $f_x(1,1)=4$，$f_y(1,1)=2$．因此曲面在该点处的且平面为 $z-3=4(x-1)+2(y-1)$．化简得切平面方程为 $z=4x+2y-3$．如图．



例子续

抛物面 $z = 2x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1, 3)$ 处的法线方程为

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

<u>定义</u>: 设 $S: F(x,y,z)=c$ 为隐式曲面, 正则. 函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$ 处的线性化函数为

$$L_F(x,y,z)=F^0+F_x^0(x-x_0)+F_y^0(y-y_0)+F_z^0(z-z_0).$$

线性函数 $L_F(x,y,z)$ 相应的水平面为 $L_F(x,y,z)=c$, 即

$$F_x^0(x-x_0)+F_y^0(y-y_0)+F_z^0(z-z_0)=0, \qquad (*)$$

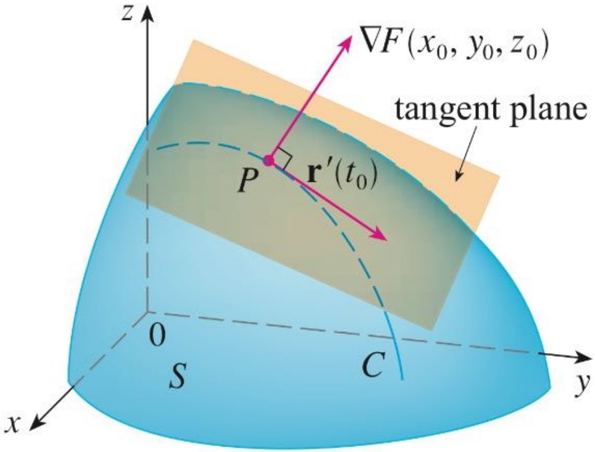
称平面 (*) 为曲面 S 在点 P_0 处的切平面, 这里 $(F_x^0,F_y^0,F_z^0)=(F_x,F_y,F_z)\big|_{P_0}$, $F^0=F(P_0)=c$.

由上述切平面方程 $F_x^0(x-x_0)+F_y^0(y-y_0)+F_z^0(z-z_0)=0$ 可知，函数 F 在点 P_0 处的梯度 $\nabla F(P_0)$ 正是切平面的法方向. 也就是说，函数的梯度垂直于函数的水平面. 此事也可如下看出. 设曲线 $C: r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 正则，过点 $P_0=r(t_0)$，且位于曲面 S 上，即 $F(x(t),y(t),z(t))\equiv c$. 对这个恒等式求导，并取 $t=t_0$ 得

$$0=F_x^0x'(t_0)+F_y^0y'(t_0)+F_z^0z'(t_0)=\nabla F^0\cdot r'(t_0).$$

上式表明梯度 ∇F^0 垂直于切向量 $r'(t_0)$.

三元函数的梯度性质，图示



隐式曲面 $F(x,y,z)=c$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的法线是指，切平面

$$F_x^0(x-x_0)+F_y^0(y-y_0)+F_z^0(z-z_0)=0,$$

经过点 (x_0,y_0,z_0) 的法线，即

$$\frac{x-x_0}{F_x^0}=\frac{y-y_0}{F_y^0}=\frac{z-z_0}{F_z^0}.$$

<u>例</u>: 求椭球面 $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ 上点 $P_0=(-2,1,-3)$ 处的切平面方程, 以及法线方程.

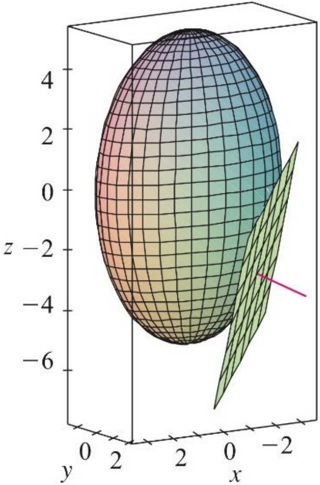
<u>解</u>: 记 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}$, 则上述椭球面就是函数 F 的一个水平面. 函数 F 的梯度为 $\nabla F=(F_x,F_y,F_z)=(\frac{x}{2},2y,\frac{2z}{9})$. 于是 $\nabla F(P_0)=(-1,2,-\frac{2}{3})$. 因此所求的切平面方程为

$$-1(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0.$$

化简得 $3x-6y+2z+18=0$. 所求法线方程为

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-\frac{2}{3}}.$$

例子图示

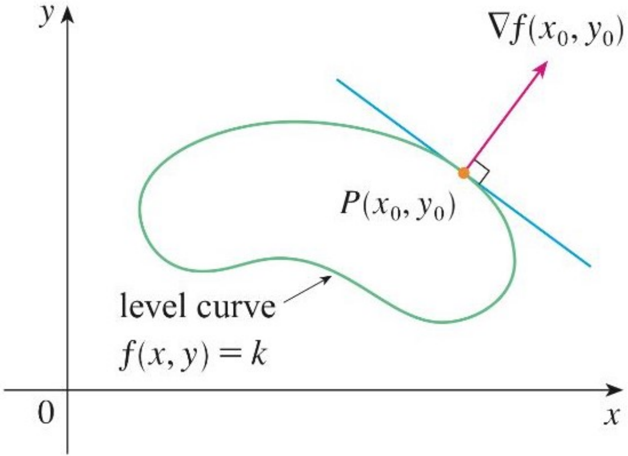


如同三元函数的梯度垂直于它的水平面, 二元函数的梯度也垂直于它的水平线. 以下来详细说明. 设 $f(x,y)$ 是 C^1 的, D 是其定义域, 开. 考虑水平线 $C: f(x,y) = k$. 设 $(x_0, y_0) \in C$, 即 $f(x_0, y_0) = k$. 设 C 有正则的参数表示 $r(t) = (x(t), y(t))$, 且 $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. 对恒等式 $f(x(t), y(t)) \equiv k$ 求导并取 $t = t_0$ 得

$$0 = f_x^0 x'(t_0) + f_y^0 y'(t_0) = \nabla f^0 \cdot r'(t_0).$$

上式表明梯度 ∇f^0 垂直于切向量 $r'(t_0)$.

二元函数梯度性质，图示



在讨论向量值函数微分时，提及过参数曲面的切平面 (参见 Feb 26讲义第23-25页). 这里用线性化方法重新讨论. 设 S 为参数曲面，有正则表示 $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v)^T \mapsto r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$, 其定义域 D 为开集. 映射 $r(u, v)$ 在点 $(u_0, v_0) \in D$ 处的线性化为 $r = r_0 + r_u^0(u - u_0) + r_v^0(v - v_0)$, 其分量形式为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_u^0 \\ y_u^0 \\ z_u^0 \end{bmatrix} (u - u_0) + \begin{bmatrix} x_v^0 \\ y_v^0 \\ z_v^0 \end{bmatrix} (v - v_0), \quad (*)$$

参数曲面的切平面，续

其中

$$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T = (x, y, z)^T\big|_{(u_0,v_0)},$$

$$\mathbf{r}_u^0 = (x_u^0, y_u^0, z_u^0)^T = (x_u, y_u, z_u)^T\big|_{(u_0,v_0)},$$

$$\mathbf{r}_v^0 = (x_v^0, y_v^0, z_v^0)^T = (x_v, y_v, z_v)^T\big|_{(u_0,v_0)}.$$

熟知线性化映射 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_u^0(u - u_0) + \mathbf{r}_v^0(v - v_0)$ 是空间平面的参数方程. (注意 $\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0 \neq 0$. 这是曲面正则性条件.)

参数曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 在点 $\mathbf{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ 处的法线定义为切平面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{r}_u^0 + t\mathbf{r}_v^0$, $s, t \in \mathbb{R}$ 经过点 (x_0, y_0, z_0) 的法线. 若记 $(A, B, C) \triangleq \mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0$, 则法线方程也可以写作

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

例: 考虑参数曲面 S:

$$(x, y, z) = (u + e^{u+v}, u + v, e^{u-v}), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

参数点 $(u_0, v_0) = (1, -1)$ 对应曲面 S 上的点 $r_0 = (x_0, y_0, z_0) = (2, 0, e^2)$. 我们来求曲面 S 在点 r_0 处的切平面, 及其法线.

简单计算得

$$r_u = (x_u, y_u, z_u) = (1 + e^{u+v}, 1, e^{u-v}), \quad r_u^0 = (2, 1, e^2),$$
$$r_v = (x_v, y_v, z_v) = (e^{u+v}, 1, -e^{u-v}), \quad r_v^0 = (1, 1, -e^2).$$

例子，续一

于是所求切平面方程的向量形式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{r}_u^0 + t\mathbf{r}_v^0, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

其中 s, t 为参数. 其分量形式为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ e^2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ e^2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -e^2 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

为求曲面在点 $\mathbf{r}_0$ 处的法线方程，需要计算

$$\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0 = (2, 1, e^2) \times (1, 1, -e^2) = (-2e^2, 3e^2, 1).$$

于是所求法线方程为

$$\frac{x-2}{-2e^2} = \frac{y-0}{3e^2} = \frac{z-e^2}{1}.$$

例子完毕.

设两个隐式曲面 $S_1 : F(x,y,z) = 0$ 和 $S_2 : G(x,y,z) = 0$ 的交线为曲线 C, 这里函数 F, G 假设在开区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上是 C^1 的. 设 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C = S_1 \cap S_2$ 是曲线 C 上的一点. 由于曲线 C 在点处的切线必位于这两个曲面在点 P_0 处的切平面上, 故切线是这两个切平面的交线(直线). 因此曲线 C 在点 P_0 处的切线可表示为

$$\begin{cases} F_x^0(x - x_0) + F_y^0(y - y_0) + F_z^0(z - z_0) = 0, \\ G_x^0(x - x_0) + G_y^0(y - y_0) + G_z^0(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

这里自然应假设 $\nabla F^0 \times \nabla G^0 \neq 0$.

例: 求曲线 C

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ z-x^2-y^2=0, \end{cases}$$

在点 $P_0=(1,1,2)$ 处的切线方程.

解: 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$, $G(x,y,z)=z-x^2-y^2$.

简单计算得

$$\begin{cases} \nabla F=(2x,2y,2z), & \nabla F^0=(2,2,4), \\ \nabla G=(-2x,-2y,1), & \nabla G^0=(-2,-2,1). \end{cases}$$

于是所求的切线方程为

$$\begin{cases} 2(x-1)+2(y-1)+4(z-2)=0, \\ -2(x-1)-2(y-1)+(z-2)=0. \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} x+y+2z=6, \\ 2x+2y-z=2. \end{cases}$$

注意 $\nabla F^0 \times \nabla G^0 \neq 0$. 因为简单计算得

$$\nabla F^0 \times \nabla G^0 = (2,2,4)\times(-2,-2,1) = (10,-10,0) \neq 0.$$

例子完毕.

作业

一. 习题1.6 (pp.78-79): 7, 9(1)(3), 10(1).

二. 习题1.7 (pp.78-79): 1(1)(3)(5), 2, 3, 4(1)(3)(5), 5, 6, 7.

三. 选作题. 设函数 $f(x,y,z)$ 在全空间 $\mathbb{R}^3$ 上连续可微, 它的三个一阶偏导函数处处相等(恒同), 即

$$f_x(x,y,z) = f_y(x,y,z) = f_z(x,y,z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

若 $f(x,0,0) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 证明 $f(x,y,z) > 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(注: 选作题解答直接交给老师. 目前可微信拍照发给老师. 以后的选作题也照此办理).