1.1 已知如图 1.1 所示的网络系统，取 v_C、i_L 为状态变量，试写出系统的状态方程。

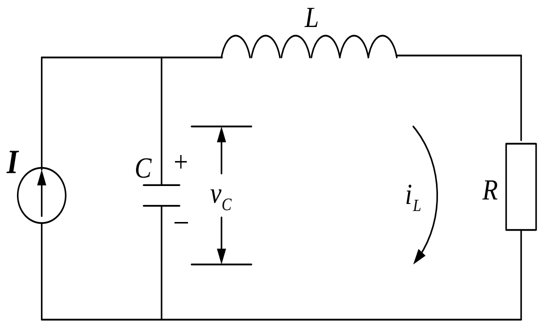


图 1.1

解：由电路知识可以得出下列方程：
$$\begin{cases} v_C = L\dfrac{di_L}{dt} + i_L R \\ I = i_L + C\dfrac{dv_C}{dt} \end{cases},$$

于是可以得到状态方程为：
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} I，\quad \boldsymbol{x} \triangleq \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}。$$

1.3 图 1.3 所示水箱系统中，管道阻尼系数均为 R，水箱截面积为单位截面积。设 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 为水箱 I、II 的液位。流量 $y(t)$ 为输出，流量 $u(t)$ 为输入，求此水箱系统的状态方程和输出方程。

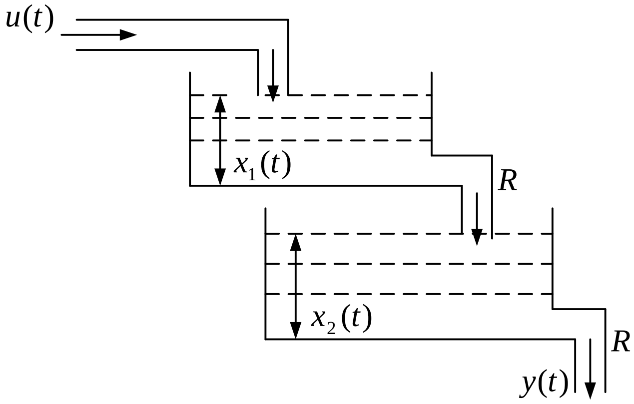


图 1.3

解 由物理知识可以得到下列方程: $\begin{cases} u-\dfrac{x_1}{R}=\dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{x_1-x_2}{R}=\dfrac{dx_2}{dt} \\ y=\dfrac{x_2}{R} \end{cases}$,

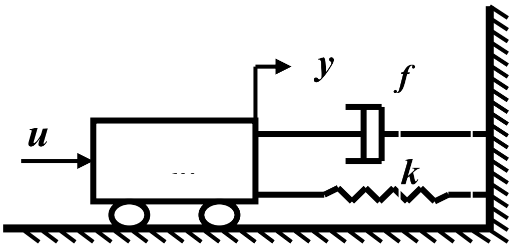
于是可得状态方程和输出方程为: $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R} & 0 \\ \dfrac{1}{R} & -\dfrac{1}{R} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$ 。

$$y=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

1.6 已知如图 1.6 所示的机械位移系统，图中 $\boldsymbol{m}$ 为小车的质量，$\boldsymbol{u}$ 为外作用力，$\boldsymbol{y}$ 为输出位移，$\boldsymbol{f}$ 为阻尼系数，$\boldsymbol{k}$ 为弹簧系数，选择小车的位移和速度为状态变量。

（1）试列写系统状态空间表达式;

（2）试写出输出位移 $\boldsymbol{y}$ 与外作用力 $\boldsymbol{u}$ 之间的传递函数。



解: 由物理知识可得: $m\ddot{y}+f\dot{y}+ky=u$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$,

可得状态方程为: $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{f}{m} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}u \quad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 。

传递函数为: $g(s)=\dfrac{1}{ms^2+fs+k}$ 。

1.8 设系统的差分方程为

$$\boldsymbol{y(k+3)+3y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=u(k+2)+2u(k+1)+u(k)}$$

输出为 $y(k)$，试写出系统的状态方程。

解: 系统的状态方程为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

1.9 某国家有一亿人口，其中城市人口有一千万。假定城市每年有其前一年人口的 4% 迁到农村，而农村又有前一年人口的 2% 迁到城市，城市人口的自然增长率为 0.8%，农村人口的自然增长率为 1%，试建立城乡人口变化的数学模型（包括状态方程和初始条件。提示：设 $x_1(k)$ 为第 k 年城市人口数， $x_2(k)$ 为第 k 年农村人口数。人口变化按照先增长后迁移的方式计算。）

解：由题意可得系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+0.008-0.04)X_1(k)+0.02X_2(k) \\ 0.04X_1(k)+(1+0.01-0.02)X_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.968 & 0.02 \\ 0.04 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix}$$

（先增长后迁移）。　初始条件： $X_1(0)=1$ $X_2(0)=9$ （单位：千万）

1.10 系统的运动方程为

$$\dddot{y} + 7\ddot{y} + 14\dot{y} + 8y = 3u$$

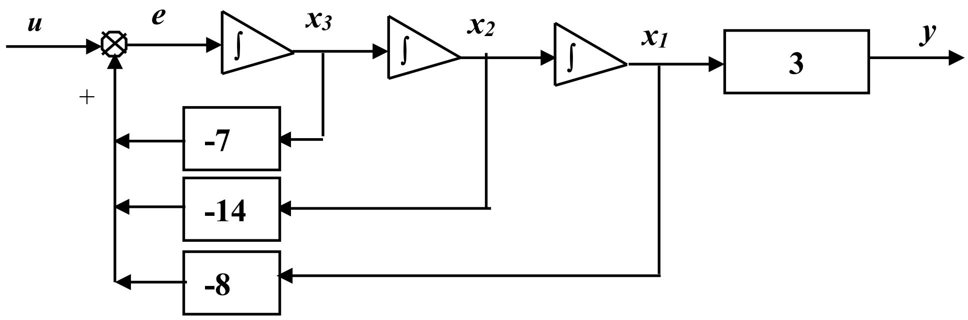
输入为 u，输出为 y，试写出它的能控标准 **I** 型和能观标准 **II** 型，并画出它们相应的系统模拟结构图。

解：能控标准 I 型：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \; ;$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

系统模拟结构图为：

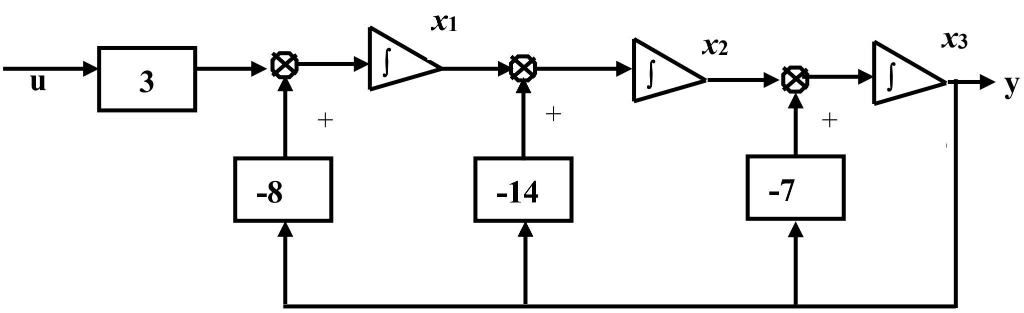


能观标准 II 型为:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -8\\ 1 & 0 & -14\\ 0 & 1 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

系统模拟结构图为:



1.11 已知系统:

$$\dddot{y}+7\ddot{y}+13\dot{y}+7y=\dddot{u}+8\ddot{u}+11\dot{u}+5u$$

输入为 u，输出为 y，试写出能控标准 **I** 型和能观标准 **II** 型，并画出它们相应的系统模拟结构图。

解:

能控标准 I 型为:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -7 & -13 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$;

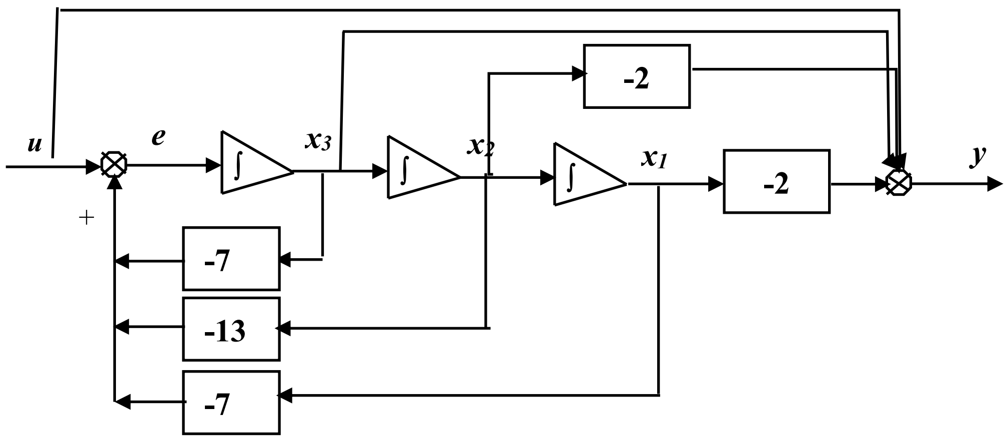
$$y=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+u$$

能观标准 II 型为:

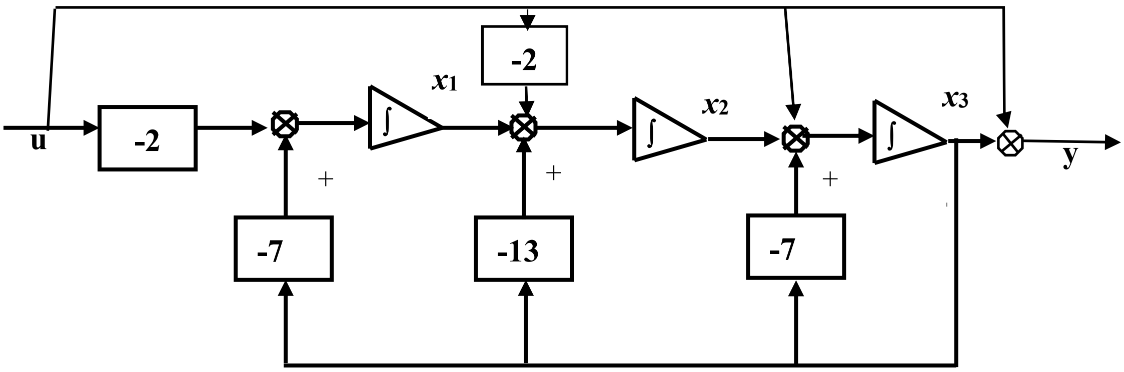
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -7\\ 1 & 0 & -13\\ 0 & 1 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}u$$。

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+u$$

能控型结构图



能观型结构图



1.12 已知系统的方程为

$$\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}=u$$

试导出系统的状态空间表达式。选取状态变量，使状态矩阵为对角标准型。

解：由系统方程得到系统的传递函数为：

$$g(s)=\frac{1}{s^3+3s^2+2s}=\frac{1/2}{s}+\frac{-1}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}$$

于是可得对角标准型为：

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\underline{x}$$

1.13 试求如下系统的状态空间表达式，使之成为解耦标准型。

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

解：由传递函数得到：

$$g(s)=\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}=\frac{4}{s+1}+\frac{-2}{s+2},$$

于是可得对角标准型为:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}&=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\\ y&=\begin{bmatrix}4&-2\end{bmatrix}\underline{x}\end{aligned}。$$

1.15 将如下系统化为特征值规范型。

$$\begin{cases}\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&-\mathbf{6}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&-\mathbf{11}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&-\mathbf{6}\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

解: 解得特征值为: $\lambda=-1,-2,-3$, 选 $T=\begin{pmatrix}6&3&2\\5&4&3\\1&1&1\end{pmatrix}$,

可得对角标准型为:

$$\left(\begin{array}{c|c}\tilde{\boldsymbol{A}}&\tilde{\boldsymbol{b}}\\\hline\tilde{\boldsymbol{c}}^T&\tilde{d}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&-2&0&3\\0&0&-3&-\frac{5}{2}\\\hline1&1&1&0\end{array}\right)$$

1.16 已知系统传递函数为

$$\boldsymbol{g(s)=\frac{2s^2+6s+5}{s^3+4s^2+5s+2}}$$

试写出它的约当标准型。并画出相应的系统结构图。

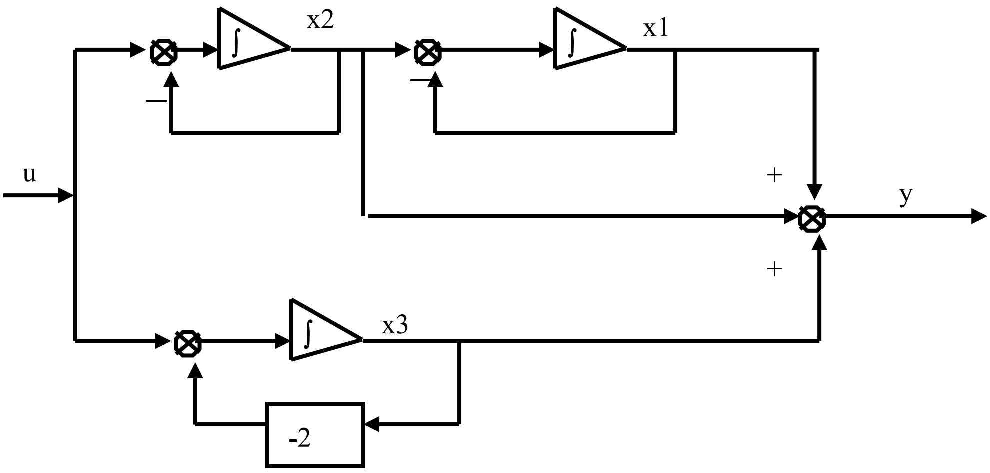
解: 由传递函数得到:

$$g(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+2}$$

于是可得约当标准型为:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}&=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u\\ y&=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\underline{x}\end{aligned}。$$

系统结构图:



1.17　已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

试求系统的传递函数阵。

解:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)} \begin{pmatrix} s^2+2s+2 & 2s+2 \\ -(7s^2+24s+24) & 2s^2+2s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} + \frac{-5}{s+3} + \frac{5}{s+4} & \frac{-1}{s+2} + \frac{4}{s+3} + \frac{-3}{s+4} \\ \frac{-2}{s+2} + \frac{15}{s+3} + \frac{-20}{s+4} & \frac{2}{s+2} + \frac{-12}{s+3} + \frac{12}{s+4} \end{pmatrix}$$

1.18　已知如下两个子系统：

$$\Sigma_1: \quad \dot{\underline{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \quad , y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_1$$

$$\Sigma_2: \quad \dot{\underline{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \underline{x}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad , y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}_2$$

(1) 求并联系统的状态空间表达式；

(2) 求 Σ_1 在前，Σ_2 在后的串联系统状态空间表达式；

(3) 求 Σ_1 在主通道，Σ_2 在反馈通道的反馈连接系统的状态空间表达式。

解：(1) 并联

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & & \\ -2 & -3 & & \\ \hdashline & & 0 & 1 \\ & & -4 & -4 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{b}=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 1 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{c}^T=\left(1 \quad 0 \mid 1 \quad 2\right)
$$

(2) 串联

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & & \\ -2 & -3 & & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{b}=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{c}^T=\left(0 \quad 0 \mid 1 \quad 2\right)
$$

(3) 反馈

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{b}=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{c}^T=\left(1 \quad 0 \mid 0 \quad 0\right)
$$

1.19 已知反馈系统的结构如图 1.7 所示，试列出系统的状态空间表达式。

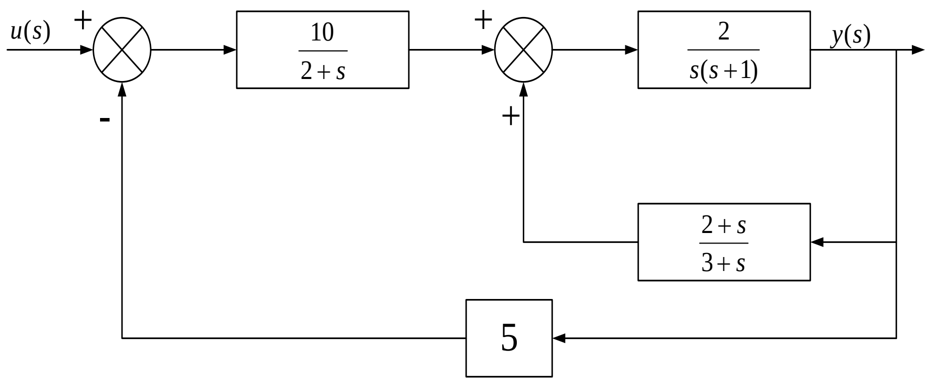
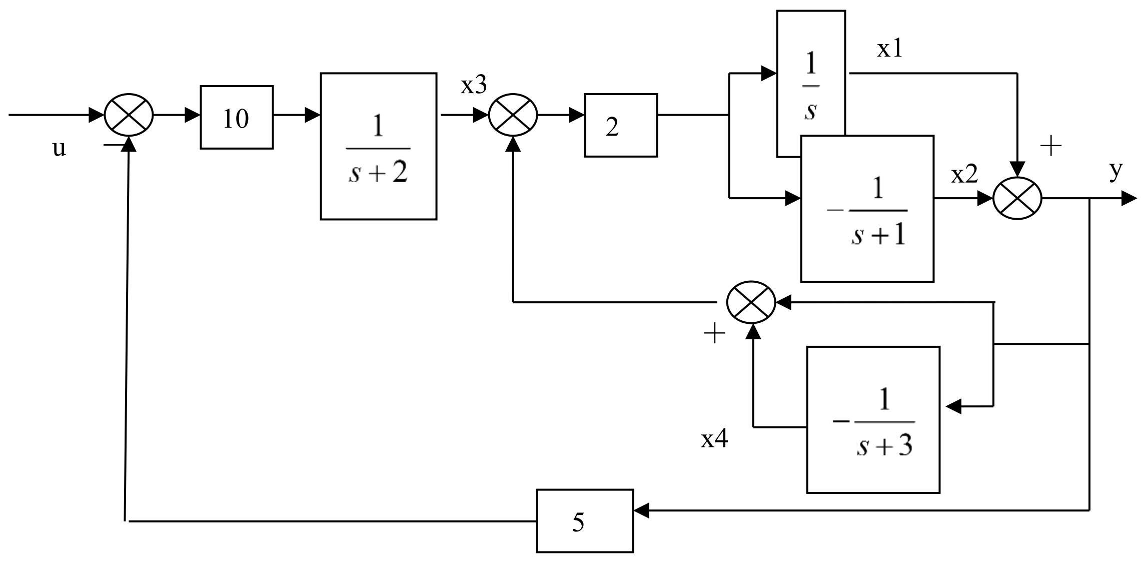


图 1.7

解：将结构图变化如下，并选取相应的状态变量：



列出方程得:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2(x_3 + y + x_4) \\ \dot{x}_2 + x_2 = -2(x_3 + y + x_4) \\ \dot{x}_3 + 2x_3 = 10(u - 5y) \\ \dot{x}_4 + 3x_4 = -y \\ y = x_1 + x_2 \end{cases},$$

于是可得状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 & -2 \\ -50 & -50 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

1.15　将如下系统化为特征值规范型。

$$\begin{cases}\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-6}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-11}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-6}\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{2}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

解：解得特征值为：$\lambda=-1,-2,-3$，选 $T=\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\ 5 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，

可得对角标准型为：

$$\left(\begin{array}{c:c}\tilde{\boldsymbol{A}} & \tilde{\boldsymbol{b}}\\ \hdashline \tilde{\boldsymbol{c}}^T & \tilde{d}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -3 & -\frac{5}{2}\\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

2.1(1) 给定系统矩阵 A 如下，求它们的转移矩阵

（1）$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

解：

$$e^{At}=L^{-1}((sI-A)^{-1})=\begin{bmatrix}2e^{2t}-e^{3t} & -e^{2t}+e^{3t}\\ 2e^{2t}-2e^{3t} & -e^{2t}+2e^{3t}\end{bmatrix}。$$

（也可以通过将 A 转化为对角阵的方法求解，会更简单一些，计算完后也可以令 t=0 看e^{At}会不会变成单位矩阵，以此来检验计算正确性。）

2.2 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\theta\\ 0 & \theta & 0\end{bmatrix}$$

求矩阵指数e^{At}

解：

$$e^{At}=L^{-1}((sI-A)^{-1})=L^{-1}\left(\frac{1}{s^3+s\theta^2}\begin{bmatrix}s^2+\theta^2 & 0 & 0\\ 0 & s^2 & -s\theta\\ 0 & s\theta & s^2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\,\theta\,t & -sin\,\theta\,t\\ 0 & sin\,\theta\,t & cos\,\theta\,t\end{bmatrix}$$

2.3 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

求矩阵指数，试将此结果推广到n阶方阵情况。

解：这是一个约当矩阵，有：

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1&t&\frac{1}{2!}t^2&\frac{1}{3!}t^3\\0&1&t&\frac{1}{2!}t^2\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{bmatrix}。$$

推广到 n 阶方阵为：

$$\boldsymbol{e^{At}}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\boldsymbol{t}&\frac{\boldsymbol{t^2}}{\mathbf{2!}}&\cdots&\frac{\boldsymbol{t^{n-1}}}{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}\\&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&\frac{\boldsymbol{t^2}}{\mathbf{2!}}\\&&&\ddots&\boldsymbol{t}\\&&&&\mathbf{1}\end{pmatrix}。$$

2.4 已知矩阵　$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，

试用如下的方法求转移矩阵e^{At}：

（2）利用拉氏变换法。

解：(2)

$$\boldsymbol{e^{At}}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})&\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})-\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})&\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\\\mathbf{0}&\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})&\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&sinh(t)&cosh(t)-\mathbf{1}\\\mathbf{0}&cosh(t)&sinh(t)\\\mathbf{0}&sinh(t)&cosh(t)\end{bmatrix}。$$

2.5 系统$\dot{\underline{x}}=A\underline{x}$的转移矩阵$\Phi(t)$以如下形式给出时，试确定矩阵$A$。

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}&0&0\\0&(1-2t)e^{-2t}&4te^{-2t}\\0&-te^{-2t}&(1+2t)e^{-2t}\end{bmatrix}$$

解：　$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{0},\mathbf{0})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{0},\mathbf{0})=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-4&4\\0&-1&0\end{bmatrix}$。

2.6　矩阵A是2×2的常数矩阵，关于系统的状态方程式$\dot{\underline{x}}=A\underline{x}$，有

$\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$时，$\underline{x}=\begin{bmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{bmatrix}$

$$\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\text{时，}\ \underline{x}=\begin{bmatrix}2e^{-t}\\-e^{-t}\end{bmatrix}$$

试决定系统的转移矩阵$\Phi(t)$和矩阵A。

解：由$\boldsymbol{\Phi}(t,0)\times\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\-\mathbf{1}&-\mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e^{-2t}}&\boldsymbol{2e^{-t}}\\-\boldsymbol{e^{-2t}}&-\boldsymbol{e^{-t}}\end{bmatrix}$

可得$\boldsymbol{\Phi}(t,0)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}&2e^{-t}-2e^{-2t}\\-e^{-t}+e^{-2t}&-e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$。

$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{0},\mathbf{0})\boldsymbol{\Phi}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{0},\mathbf{0})=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{2}\\-\mathbf{1}&-\mathbf{3}\end{bmatrix}$。

2.7 已知系统方程

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix}\underline{x}，\ \underline{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

试求$x_1(t)$和$x_2(t)$。

解：

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}&\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\\-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t}&-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}\text{。}$$

$$\underline{x}(t)=e^{At}\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{bmatrix}\quad(t\geq 0)\text{。}$$

2.8 已知给定系统方程为

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\underline{x}$$

试求出用初始条件$x_1(0)$、$x_2(0)$和$x_3(0)$来表示的解。

解：

$$e^{At}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(t)=e^{At}\underline{x}(0)=e^{2t}\begin{bmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}\underline{x}(0)\qquad(t\geq 0)\text{。}$$

2.9 验证 $\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix}2&-e^{t}\\e^{-t}&1\end{bmatrix}\underline{x}$ 的转移矩阵为$\Phi(t,0)=\begin{bmatrix}e^{2t}\cos t&-e^{2t}\sin t\\e^{t}\sin t&e^{t}\cos t\end{bmatrix}$

并求出$\Phi(t,1)$。

解： 验证：$\boldsymbol{\Phi}(0,0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,0)=\begin{bmatrix}2e^{2t}\cos t-e^{2t}\sin t&-2e^{t}\sin t-e^{2t}\cos t\\e^{t}\sin t+e^{t}\cos t&e^{t}\cos t-e^{t}\sin t\end{bmatrix}$$
$$=A(t)\boldsymbol{\Phi}(t,0)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t},\mathbf{1})=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t},\mathbf{0})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{1},\mathbf{0})=\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^{2t-2}\,\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{t}-\mathbf{1}) & -\boldsymbol{e}^{2t-1}\,\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{t}-\mathbf{1}) \\ \boldsymbol{e}^{t-2}\,\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{t}-\mathbf{1}) & \boldsymbol{e}^{t-1}\,\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{t}-\mathbf{1}) \end{bmatrix}$$

2.11 证明

因为：$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$

可得, $\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$ 两边同乘$\mathrm{e}^{-\mathbf{At}}$，则

$$\mathrm{e}^{-\mathbf{At}}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)]=\mathrm{e}^{-\mathbf{At}}\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

上式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\mathrm{e}^{-\mathbf{At}}\boldsymbol{x}(t)]=\mathrm{e}^{-\mathbf{At}}\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

两边对 t 积分可得

$$\mathrm{e}^{-\mathbf{At}}\boldsymbol{x}(t)|_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\mathbf{A\tau}}\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\mathrm{e}^{-\mathbf{At}}\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{-\mathbf{At_0}}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\mathbf{A\tau}}\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\mathbf{A(t-t_0)}}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\mathbf{A(t-\tau)}}\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau$$

3.2　试判断下面系统状态的能控性

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

解：这是能控标准型，故能控。 或$Q_k=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-6\\1&-6&25\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=3$。

3.3 判断下面系统的能控性

（1）　$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}-3&1&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

（2）　$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}2&1\\1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

解：(1)　约当型，不完全能控。

或 $Q_k=\begin{bmatrix}1&-1&-3&3&9&-9\\0&0&0&0&0&0\\2&0&-2&0&2&0\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=2<3$。

(2)　$Q_k=\begin{bmatrix}2&1&3&2&5&4\\1&1&2&2&4&4\\-1&-1&-2&-2&-4&-4\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=2<3$，不完全能控。

3.4　设系统方程为

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&1\\0&0&\lambda_1\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}u$$

试确定满足状态完全能控条件的a、b和c。

解：这是个约当型，系统完全能控需要满足条件$c\neq0$。

3.5　给定二阶系统

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix} u$$

为使系统具有能控性，试确定常数$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所应满足的关系式。

解：$Q_k = \begin{bmatrix} b & ab-1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$，系统完全能控需要满足条件$b^2 + ab - 1 \neq 0$。

3.6　已知如下倒置摆状态方程，试判断其能控性和能观性。

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \underline{x} \end{cases}$$

解：

$$Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix}, \quad rank(Q_k) = 4$$，系统完全能控。

$$Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad rank(Q_g) = 4$$，系统完全能观。

3.7　设系统方程为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \underline{x} \end{cases}$$

试确定满足状态完全能控和完全能观条件的$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{d}$。

解：

$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 1 & e+d \end{bmatrix}$，系统完全能控需要满足条件$a + b \neq e + d$。

$Q_g=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & b\end{bmatrix}$，系统完全能观需要满足条件$b\neq 0$。

3.8　设三阶系统

$$\begin{cases}\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

(1)问能不能适当地选择常数 a、b 和 c，使系统具有能控性；

(2)试问能不能适当地选择常数 a、b 和 c，使系统具有能观性。

解:

(1)　$Q_k=\begin{bmatrix}a & a\lambda+b & a\lambda^2+2b\lambda\\ b & b\lambda & b\lambda^2\\ c & c\lambda & c\lambda^2\end{bmatrix}$，$\det(Q_k)\equiv 0$，故不可能使系统完全能控。

(2)　$Q_g=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a\lambda & a+b\lambda & c\lambda\\ a\lambda^2 & 2a\lambda+b\lambda^2 & c\lambda^2\end{bmatrix}$，$\det(Q_g)\equiv 0$，故不可能使系统完全能观。

3.9 判断下列系统的能观性

（2）$$\begin{cases}\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

解:

(2)　$Q_g=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ -1 & -4 & -1\end{bmatrix}$，$rank(Q_g)=3$，系统完全能观。

3.10　设系统的传递函数为

$$g(s)=\frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}$$

试问a等于多少时，系统将是不能控或不能观的。

解：分母进行分解得 $(s+1)(s+2)(s+4)$，当出现零极点相消时，系统是不能控或不能观的，所以$a=1或2或4$时，系统是不能控或不能观的。

3.11　在 3.10 题中，若$a=1$，试选择一组状态变量，将系统的状态方程写成

（1）能控但不能观的；

（2）能观但不能控的。

解：

(1) 写成能控标准型 $\left[\begin{array}{c:c}A & b\\ \hdashline c^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -8 & -14 & -7 & 1\\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$，这时是能控但不能观的。

(2) 写成能观标准型 $\left[\begin{array}{c:c}A & b\\ \hdashline c^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 0 & -8 & 1\\ 1 & 0 & -14 & 1\\ 0 & 1 & -7 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$，这时是能观但不能控的。

或 $g(s)=\frac{1/2}{s+2}+\frac{-1/2}{s+4}+\frac{0}{s+1}$，

能控不能观的形式为 $\left[\begin{array}{c:c}A & b\\ \hdashline c^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 1\\ \hdashline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right]$，

能观不能控的形式为 $\left[\begin{array}{c:c}A & b\\ \hdashline c^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -4 & -\frac{1}{2}\\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$。

3.15　已知系统

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

（1）试将系统化为约当标准型；

（2）考察可控状态、可观状态各为多少。

解:

(1) $\lambda = -2, -3, -4$，取$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$，

变换后得到对角标准型为 $\left[\begin{array}{c:c} \tilde{A} & \tilde{b} \\ \hdashline \tilde{c}^T & \tilde{d} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{1}{2} \\ \hdashline 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$。

(2) 系统完全能控，但不完全能观，能观状态为 2。

3.17 Σ_1、Σ_2为两个能控且能观的单输入单输出系统

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \underline{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_1 \end{cases} \qquad \Sigma_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 + u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

（1）Σ_1、Σ_2如图 3.2 所示串联起来，试求串联系统的状态方程。

（2）考察此串联系统的能控性和能观性。

（3）试求此串联系统的传递函数，并验证（2）中的结果。

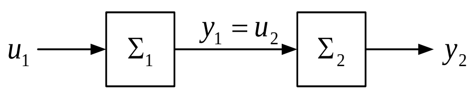


图 3.2

解:

(1)串联系统的状态方程为: $\left[\begin{array}{c:c} A & b \\ \hdashline c^T & d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$。

(2) $Q_k=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & -4 & 13\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=2<3$，系统不完全能控；

$Q_g=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ -7 & -4 & 4\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_g\right)=3$，系统完全能观。

(3) $g_1(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}$，

$g_2(s)=\dfrac{1}{s+2}$，

$g(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$。

系统出现零极点相消的情况，系统是不能控或不能观的。

进一步，$(sI-A)^{-1}b$ 出现零极点相消，说明系统不完全能控；$c(sI-A)^{-1}$ 无零极点相消，系统完全能观。

3.19 已知系统

$$\begin{cases}\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\underline{x}\end{cases}$$

（1）求此系统的传递函数；

（2）此系统能控否？如不完全能控，试求其能控子系统；

（3）此系统能观否？如不完全能观，试求其能观子系统。

解:

(1) $g\left(s\right)=\dfrac{s+3}{s^2+2s-1}$。

(2) $Q_k=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$rank\left(Q_k\right)=2<3$，系统不完全能控。

取 $T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，能控子系统为 $\left[\begin{array}{c|c}A_k & b_k\\ \hline c_k^T & d_k\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ \hline 1 & 1 & 0\end{array}\right]$。

(3) $Q_g=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & -6 & -1\end{bmatrix}$， $rank\left(Q_k\right)=3$，系统完全能观。

3.21 根据图 3.3 系统的结构图，写出其状态方程和输出方程，并判断系统的能控性和能观性。

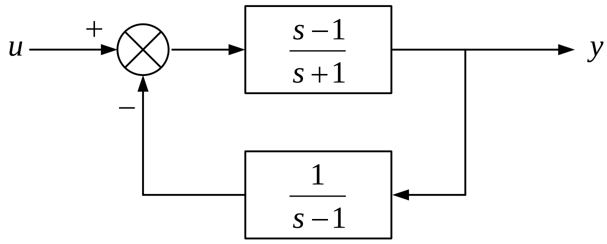
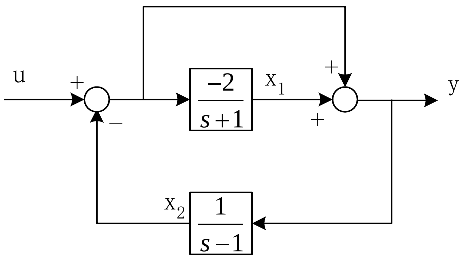


图 3.3

解:



如图定义状态变量。得到系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1-2\left(u-x_2\right)=-x_1+2x_2-2u\\ \dot{x}_2=x_2+\left(u-x_2\right)+x_1=x_1+u\\ y=x_1-x_2+u\end{cases}$$，得到 $\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \hdashline \boldsymbol{c}^T & d\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:c}-1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & -1 & 1\end{array}\right]$。

$Q_k=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$， $rank\left(Q_k\right)=1<2$，系统不完全能控；

$Q_g=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$， $rank\left(Q_g\right)=1<2$，系统不完全能观。

3.16 已知系统为

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}0\\4\\3\end{bmatrix}u$$

此系统能否变换成能控标准型？若能，则将系统变换成能控标准型。

解：

$Q_k=\begin{bmatrix}0 & 4 & -8\\ 4 & -4 & 4\\ 3 & -6 & 12\end{bmatrix}$， $rank\left(Q_k\right)=3$，系统完全能控，可以化为能控标准型。

$$Q_k^{-1}=-\frac{1}{48}\begin{bmatrix}-24 & 0 & -16\\ -36 & 24 & -32\\ -12 & 12 & -16\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}=-\frac{1}{48}\begin{bmatrix}-12 & 12 & -16\\ 12 & -24 & 32\\ -12 & 36 & -64\end{bmatrix}$$

$T=\begin{bmatrix}8 & 4 & 0\\ 8 & 12 & 4\\ 3 & 6 & 3\end{bmatrix}$，能控标准型为 $\left[\tilde{A}\mid\tilde{b}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -5 & -4 & 1\end{array}\right]$。

3.18 已知系统状态方程为：

$$\begin{cases}\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\underline{x}\end{cases}$$

试将方程化成能观标准型。

解：

$Q_g=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & 4\end{bmatrix}$， $rank\left(Q_g\right)=2$，系统完全能观，可以化为能观标准型。

$$Q_g^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$T^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$，能观标准型为 $\left[\begin{array}{c|c}\tilde{\boldsymbol{A}}&\tilde{\boldsymbol{b}}\\ \hline \tilde{\boldsymbol{c}}^T&\tilde{d}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}0&-4&1\\1&5&0\\ \hline 0&1&0\end{array}\right]$。

4.3　有系统为

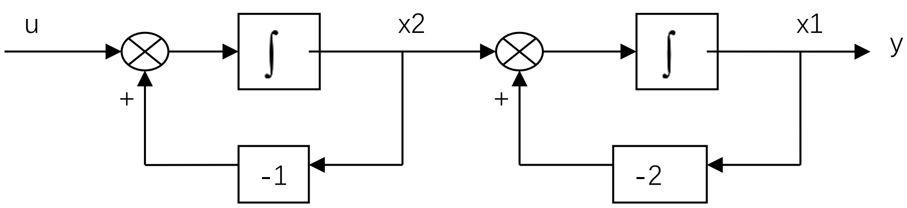
$$\begin{cases}\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-1\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

（1）　画出其系统结构图。

（2）　若其动态性能不满足要求，可否任意配置极点？

解:

(1)



(2)　$Q_k=\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}$，系统完全能控，可以任意配置极点。

4.5　已知系统

$$\begin{cases}\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&-2&1\\-3&0&-4\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

（1）　能否通过状态反馈任意配置极点？

解:

(1)　$Q_k=\begin{bmatrix}0&1&-4\\0&1&-4\\1&-4&13\end{bmatrix}$，系统不完全能控，不能任意配置极点。

6.1 有外扰的受控系统如下。问：能否实现状态对外扰的完全不变性？能否实现输出对外扰的完全不变性？若能实现，请给出控制策略。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}6 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

解： $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ $Q_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$系统完全能控 所以系统可镇定；

$$rank(B)=rank(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix})=1 \qquad rank([B\ \ N])=rank(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix})=2$$

所以不能实现状态对外扰的完全不变性；

$CN=0;\ \ CAN=-12$ 不满足匹配条件，

设反馈 $F_x=\begin{bmatrix}f_1 & f_2\end{bmatrix}$

$A_L=A-BF_x$

$CA_LN=0$ 得 $2*f_2-f_1=4$

$\det(sI-A_L)=s^2+f_2s+f_1$；保证闭环稳定 $f_2>0,\ f_1>0$

可以取 $F_x=[2,3]$，通过反馈 $u=-F_x\mathrm{x}$ 实现对外扰的不变性

6.2 控制系统的状态方程如下。当外部输入 f_1 和 f_2 分别为阶跃函数 $1(t)$ 和斜坡函数 t 时，求状态 $\boldsymbol{x}$ 的强制解。

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+f_1\\ \dot{x}_2=-6x_1-5x_2+f_2\end{cases}$$

解： $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}$对应的特征值为： $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$ 所以矩阵 A 为稳定矩阵；

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\ \ M=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\ \ N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ \ w=\begin{bmatrix}1\\ t\end{bmatrix}$$

$AP-PM=N$ 的解为 $P=\begin{bmatrix}-\frac{25}{36} & -\frac{1}{6}\\ \frac{5}{6} & 0\end{bmatrix}$ 又 A 的特征值与 M 矩阵的特征值相异，所以

有唯一解，状态的强制解为：$\tilde{x}(t) = \text{-}Pw(t) = \begin{bmatrix} \frac{25}{36} + \frac{1}{6}t \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$

6.3 有外扰作用的受控系统如下。当外扰 w 为常值时，判断输出 $y(t)$ 的静态值是否为零。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

解：矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 所以矩阵 A 是渐近稳定的；

$M = 0 \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} AP - PM = N \\ CP = D \end{cases}$ 对应的解为：$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 所以输出 $y(t)$ 的静态值为零。

6.4 有外扰作用的受控系统如下。判断输出 $y(t)$ 的静态值是否为零。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

解：矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -3$ 所以矩阵 A 是渐近稳定的；

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} AP - PM = N \\ CP = D \end{cases}$ 对应的解为：$P = \begin{bmatrix} -1/6 & -5/36 \\ 0 & 5/6 \end{bmatrix}$ 所以输出 $y(t)$ 的静态值为零。

6.5 有外扰作用的受控系统如下。设计控制器 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$ 使得闭环极点为-2和-3，且使得输出$\boldsymbol{y}(t)$的静态值为零。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

$$\dot{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 0 & 6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

解：$Q_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$系统完全能控，所以系统可镇定；

$$A-BF_x=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -f_1 & -f_2\end{bmatrix}$$

根据期望极点位置可得：$f_1=6 \quad f_2=5$

根据$CP=D$可得 $P=\begin{bmatrix}-1/6 & -5/36\\ 0 & 5/6\end{bmatrix}$

由$AP-PM+BQ=N$，得到：

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}P-P\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$，可得$Q=\begin{bmatrix}0 & -2\end{bmatrix}$

$$F_w=Q+F_xP=[-1 \ \ -2]$$

6.6 有外扰作用的受控系统如下。外扰 $\boldsymbol{w}$ 为常值，求该系统的鲁棒抗干扰控制器，使得闭环极点为-1，-1，-2，-2。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

解：$Q_c=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$系统完全能控 所以系统可镇定；$rank(\begin{bmatrix}A & B\\ C & 0\end{bmatrix})=n+m=4$

所以存在鲁棒抗干扰控制器。

设计鲁棒干扰控制器 $\begin{aligned}\dot{q}&=y\\ u&=-F_x x-F_q q\end{aligned}$，　根据期望的极点位置可得：

$$F_x=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 2 & -2\end{bmatrix}\qquad F_q=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

6.7 有外扰作用的受控系统如下。问：该系统存在鲁棒抗干扰控制器吗？如存在，请设计之，使得闭环极点均为-1。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

$$\dot{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

解：$Q_c=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$系统完全能控 所以系统可镇定；

$M=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$的特征根为$\pm j$ 所以$\phi(s)=s^2+1$

$rank(\begin{bmatrix}A-\lambda I & B\\ C & 0\end{bmatrix})=n+m=3$，　所以存在鲁棒抗干扰控制器。

所以可以构造补偿器为：

$$\dot{q}=A_C q+B_C y=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}q+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}y$$

$$A_L=\begin{bmatrix}A-BF_x & -BF_q\\ B_C C & A_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-f_1 & -f_2 & -f_3 & -f_4\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

所以$F_x=\begin{bmatrix}7 & 1\end{bmatrix}\quad F_q=\begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix}$

6.1 判断下列函数的定号性。

（a） $V(\boldsymbol{x})=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-5x_2x_3-2x_1x_3$

（b） $V(\boldsymbol{x})=-x_1^2-3x_2^2-11x_3^2+2x_1x_2-x_2x_3-2x_1x_3$

（c） $V(\boldsymbol{x})=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$

解：

（a）$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -5/2\\ -1 & -5/2 & 1\end{bmatrix}$ $\lambda_1=-0.7441$ $\lambda_2=0.5863$ λ_3=5.1578有正、负特征值，所以该函数不定号

（b）$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -1/2\\ -1 & -1/2 & -11\end{bmatrix}$ $\lambda_1=-11.11$ $\lambda_2=-3.41$ $\lambda_3=-0.4677$特征值均为负，所以此函数负定。

（c）$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ $\lambda_1=5.65$ $\lambda_2=0.345$ λ_3=1 特征值均为正值，所以此函数为正定函数。

6.2 判断下列系统在原点处是否大范围渐近稳定，说明理由。

（a） $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_2+x_1^2\\ \dot{x}_2=-x_2+2x_1-x_1^2\end{cases}$ （b） $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_1x_2\\ \dot{x}_2=-x_2+2x_1-x_1^2\end{cases}$

解：

（a）令$\dot{x}_1=-x_1+x_2+x_1^2=0$，$\dot{x}_2=-x_2+2x_1-x_1^2=0$可得原点为该系统的唯一平衡点；

在原点处进行线性化可得矩阵$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ 对应的特征值分别为： $\lambda_1=-1+\sqrt{2}$ $\lambda_2=-1-\sqrt{2}$有正的特征值，所以该系统在原点处不是渐近稳定的，不是大范围渐近稳定。

（b）令$\dot{x}_1=-x_1+x_1x_2$=0，$\dot{x}_2=-x_2+2x_1-x_1^2$=0可得原点不是该系统的唯一平衡点，所以原点处不能大范围渐近稳定。

6.3 判断下列系统在原点处的稳定性。

（a） $\ddot{x}+sin\,x=0$

（b） $\ddot{x}+5x^4\dot{x}+x^3=0$

解：

（a） 令 $x_1=x$ $x_2=\dot{x}$可得到系统的状态空间表达式如下

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-sin(x_1)\end{cases}$$

由状态空间方程可知原点为系统的唯一平衡点。

可以构造一个李雅普诺夫函数为$V(x) = 1 - cos(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$，

$$\dot{V}(x) = sin(x_1)x_2 - x_2\,sin(x_1) = 0$$

所以该系统在原点处是稳定的。

（b）令 $x_1 = x \quad x_2 = \dot{x}$可得到系统的状态空间表达式如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1^4x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

由状态空间方程可知原点为系统的唯一平衡点。

可取$V(x) = x_1^4 + 2x_2^2$，则对应的$\dot{V}(x) = -20x_1^4x_2^2$，沿轨线不恒为零，所以该系统在原点处是渐近稳定的。

6.4 判断下述系统在原点处的稳定性。

$$\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = 0$$

其中，$g(x)$为连续函数，与x同号，且$g(0) = 0$，$g(x) \neq 0, \forall x \neq 0$。

解：令 $x_1 = x \quad x_2 = \dot{x}$可得到系统的状态空间表达式如下

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - g(x_1)$$

由状态空间方程可知原点为系统的唯一平衡点。

根据题设条件，构造一个李雅普诺夫函数为：$V(x) = \int_0^{x_1} g(x_1)\,dx_1 + \frac{1}{2}x_2^2$。根据题设条件，该函数正定；则$\dot{V}(x) = -x_2^2$，所以系统在原点处渐近稳定。若当$|x_1| \to \infty$时，$\int_0^{x_1} g(x_1)\,dx_1 \to \infty$，则系统在原点处为大范围渐近稳定性。

6.5 判断下述系统在原点处的稳定性。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$$

其中，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$，$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{diag}(x_1^2, \cdots, x_n^2)$。

解：利用克拉索夫斯基方法来解题。根据题意，原点是系统的一个平衡点；$f(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$对应的雅可比矩阵为：$F(x) = \boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$，则$F(x) + F^T(x) = -6\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$为负定矩阵，所以是渐近稳定的。当$\|x\|_2 \to \infty$时，有$\|f(x)\|_2 \to \infty$，所以原点是大范围渐近稳定的。

6.6 用克拉索夫斯基方法确定参数 a 和 b 的取值范围，保证下述系统在原点处大范围渐稳。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + bx_2^5 \end{cases}$$

解：原点是系统的平衡点，系统对应的雅可比矩阵为

$$F(x) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -1+5bx_2^4 \end{bmatrix},$$

所以要求

$$F(x)+F^T(x)=\begin{bmatrix}2a & 2\\ 2 & -2+10bx_2^4\end{bmatrix}\text{负定，}$$

可解出$a<-1$，　$b\le 0$。

6.7 用变量梯度法判断下述系统在原点处的稳定性。

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1-2x_1x_2^4\\ \dot{x}_2=-x_2\end{cases}$$

解：原点是系统唯一的平衡点；

设梯度向量 $\mathrm{grad}V(x)=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{bmatrix}$

计算导函数

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=[\mathrm{grad}V(x)]^T\dot{x}=(a_{11}x_1+a_{12}x_2)(-2x_1-2x_1x_2^4)+(a_{21}x_1+a_{22}x_2)(-x_2)\\&=-2a_{11}x_1^2-2a_{11}x_1^2x_2^4-(2a_{12}+a_{21})x_1x_2-2a_{12}x_1x_2^5-a_{22}x_2^2\end{aligned}$$

可以取 $a_{11}=1$，$a_{12}=a_{21}=0,\quad a_{22}=1$，得

$$\dot{V}(x)=-2x_1^2-2x_1^2x_2^4-x_2^2$$

为负定函数，积分得$V(x)=x_1^2+x_2^2$为正定函数，检查可知满足梯度条件。$V(x)=x_1^2+x_2^2$是该系统的李雅普诺夫函数，因$\dot{V}(x)$负定，所以原点是渐近稳定的。因$V(x)\to\infty$，$\|x\|_2\to\infty$，故该系统在原点处是大范围渐近稳定的。

6.8 判断下述系统在原点处的稳定性。

$$\dot{x}=2y-\frac{2x}{1+x^2},\quad \dot{y}=-\frac{2x+2y}{1+x^2}$$

解：原点是系统的唯一平衡点。

在原点处对该状态方程进行线性化可得矩阵$A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & -2\end{bmatrix}$，其特征值分别为$\lambda=-2\pm 2j$所以该系统在原点处渐近稳定。但不能根据线性化结果判断大范围渐近稳定性。

考虑如下V函数：

$$V(x,y)=a(x)+b(y)$$

其中$a(x)$和$b(y)$分别是x和y的偶正定函数。则

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y)&=\frac{\partial a}{\partial x}\left[2y-\frac{2x}{1+x^2}\right]+\frac{\partial b}{\partial y}\left[-\frac{2x+2y}{1+x^2}\right]\\&=-\frac{\partial a}{\partial x}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{\partial a}{\partial x}2y-\frac{\partial b}{\partial y}\frac{2y}{1+x^2}-\frac{\partial b}{\partial y}\frac{2x}{1+x^2}\end{aligned}$$

选取$a(x)$和$b(y)$满足

$$\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2},\quad \frac{\partial b}{\partial y}=2y$$

即

$$a(x)=\ln(1+x^2)-\ln(1),b=y^2$$

则

$$V(x,y)=\ln(1+x^2)-\ln(1)+y^2$$

$$\dot{V}(x,y)=-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{4y^2}{1+x^2}$$

因此

$$V(x,y) > 0, \dot{V}(x,y) < 0, \quad V(x,y) \to \infty, \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|_2 \to \infty$$

故该系统在原点处大范围渐近稳定性。