习题 1.1 作业参考解答

数学科学系　朱浩然　2017311249

3(3). 证明：任意多个开集之并为开集；有限个开集之交为开集.

证明. 一方面，设 $\{G_\alpha\}$ 是一个开集族，其中指标 α 属于指标集 I(I 中元素可以有任意多个)，考虑 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$.

任取 $\mathbf{x} \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$, $\exists \beta \in I$, $s.t.\, \mathbf{x} \in G_\beta$.

由 G_β 是开集知 $\mathbf{x}$ 是 G_β 的内点，即 $\exists r > 0$, $s.t.\, B(\mathbf{x}, r) \subset G_\beta$.

从而有 $B(\mathbf{x}, r) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$，所以 $\mathbf{x}$ 是 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ 的内点.

故 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ 是开集.

另一方面，设 $G_1, G_2, \ldots, G_m$ 为有限个开集，考虑 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$.

任取 $\mathbf{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$，有 $x \in G_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

由 G_i 是开集知 $\mathbf{x}$ 是 G_i 的内点，即 $\exists r_i > 0$, $s.t.\, B(\mathbf{x}, r_i) \subset G_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

取 $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$，则有 $B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

从而 $B(\mathbf{x}, r) \subset G_i$，所以 $B(\mathbf{x}, r) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$，所以 $\mathbf{x}$ 是 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$ 的内点.

故 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$ 是开集. $\square$

4(4). 证明：任意多个闭集之交为闭集；有限个闭集之并为闭集.

证明. 一方面，设 $\{F_\alpha\}$ 是一个闭集族，其中指标 α 属于指标集 I，考虑 $\bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha$.

对 $\forall \alpha \in I$，F_α 是闭集，故 F_α^c 是开集.

由习题 1.1/3(3) 的证明知 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} F_\alpha^c$ 是开集，从而 $(\bigcup\limits_{\alpha\in I} F_\alpha^c)^c$ 是闭集，即 $\bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha$ 是闭集.

另一方面，设 $F_1, F_2, \ldots, F_m$ 为有限个闭集，考虑 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$.

对 $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$，均有 F_i 为闭集，故 F_i^c 为开集.

由习题 1.1/3(3) 的证明知 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} F_i^c$ 为开集，从而 $(\bigcap\limits_{i=1}^{m} F_i^c)^c$ 为闭集，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$ 为闭集. □

5(4). 证明：若 $A, B \subset \mathbb{R}^n$，则 $\partial(A\cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

证明. 任取 $\mathbf{x} \in \partial(A\cup B)$.

则对 $\forall r > 0$，有

$$B(\mathbf{x}, r) \cap (A\cup B) \neq \phi \text{ 且 } B(\mathbf{x}, r) \cap (A\cup B)^c \neq \phi,$$

即

$$\exists \mathbf{y}, \mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, r), s.t.\, \mathbf{y} \in A\cup B,\, \mathbf{z} \in (A\cup B)^c.$$

从而有

$$\mathbf{y} \in A \text{ 或 } \mathbf{y} \in B,$$

$$\mathbf{z} \in A^c \cap B^c \Rightarrow \mathbf{z} \in A^c \text{ 且 } \mathbf{z} \in B^c.$$

若 $\mathbf{y} \in A$，则

$$B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \phi \text{ 且 } B(\mathbf{x}, r) \cap A^c \neq \phi.$$

从而 $\mathbf{x} \in \partial A$.

同理，若 $\mathbf{y} \in B$，则 $\mathbf{x} \in \partial B$.

故 $\mathbf{x} \in \partial A \cup \partial B$.

由 $\mathbf{x}$ 的任意性有 $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. $\square$