1. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (a,a) 处可微, 且 $f(a,a)=a$, $f_x(a,a)=b=f_y(a,a)$. 记

$$\phi(x)=f(x,f(x,f(x,x))).$$

求 $\frac{d}{dx}[\phi(x)^2]\Big|_{x=a}$.

解： 为方便, 记 $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ 为二元函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数. 再记 $**=f(x,f(x,x))$, $*=f(x,x)$, 则 $\phi(x)=f(x,**)$. 由求导的链规则得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\phi(x)^2&=2\phi(x)\frac{d}{dx}\phi(x)=2\phi(x)\frac{d}{dx}f(x,**)\\&=2\phi(x)\Big[f_1(x,**)+f_2(x,**)\frac{d}{dx}(**)\Big]\\&=2\phi(x)\left[f_1(x,**)+f_2(x,**)\Big(f_1(x,*)+f_2(x,*)\frac{d}{dx}f(x,x)\Big)\right]\\&=2\phi(x)\left[f_1(x,**)+f_2(x,**)\Big(f_1(x,*)+f_2(x,*)(f_1(x,x)+f_2(x,x))\Big)\right].\end{aligned}$$

由条件 $f(a,a)=a$, $f_1(a,a)=b=f_2(a,a)$ 可知, 当 $x=a$ 时, $*=**=a$, $\phi(a)=a$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\phi(x)^2\Big|_{x=a}&=2\phi(a)\left[f_1(a,a)+f_2(a,a)\Big(f_1(a,a)+f_2(a,a)(f_1(a,a)+f_2(a,a))\Big)\right]\\&=2a\Big[b+b(b+b(2b))\Big]=2a(b+b^2+2b^3).\end{aligned}$$

解答完毕.

2. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 且在该点处沿着方向 $u=(1,-1)$ 和 $v=(-1,2)$ 的方向导数分别为 $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=-2$, $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=1$. 求微分 $df(x_0,y_0)$.

解：要求微分 $df(x_0,y_0)$, 也就是要求两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$. 为方便分别记这两个偏导数为 a,b. 根据条件 $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=-2$, $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)=1$ 知

$$\begin{cases}-2=\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\Big[a\cdot 1+b\cdot(-1)\Big]/\sqrt{2},\\ \;\;1=\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)=\Big[a\cdot(-1)+b\cdot 2\Big]/\sqrt{5}.\end{cases}$$

由此得

$$\begin{cases} a-b=-2\sqrt{2}, \\ -a+2b=\sqrt{5}. \end{cases}$$

解之得 $b=\sqrt{5}-2\sqrt{2}$, $a=\sqrt{5}-4\sqrt{2}$. 于是 $df(x_0,y_0)=(\sqrt{5}-4\sqrt{2})dx+(\sqrt{5}-2\sqrt{2})dy$. 解答完毕.

3. 设 $f(u,v)$ 是 C^2 函数. 求

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x+y,xy).$$

解： 记 $u=x+y$, $v=xy$, 则

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x+y,xy)=f_u(u,v)u_x+f_v(u,v)v_x=f_u(u,v)+f_v(u,v)y.$$

进一步

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x+y,xy)=\frac{\partial}{\partial y}\Big[f_u(u,v)+f_v(u,v)y\Big]$$

$$=f_{uu}(u,v)u_y+f_{uv}(u,v)v_y+f_v(u,v)+y\Big[f_{vu}(u,v)u_y+f_{vv}(u,v)v_y\Big]$$

$$=f_{uu}(u,v)+f_{uv}(u,v)x+f_v(u,v)+yf_{vu}(u,v)+xyf_{vv}(u,v).$$

解答完毕.

4. (三元齐次函数的 Euler 公式) 设三元函数 $f(x,y,z)$ 在全空间 $\mathbb{R}^3$ 上定义. 若存在实数 $k\in\mathbb{R}$, 使得函数 f 满足如下条件

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z),\quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad \forall t>0, \tag{1}$$

则称函数 f 为三元 k 次齐次函数. 证明对于在 $\mathbb{R}^3$ 上连续可微函数 $f(x,y,z)$ 而言， f 为三元 k 次齐次函数, 当且仅当如下恒等式 (常称作 Euler 公式) 成立

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=kf(x,y,z),\quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \tag{2}$$

注1: 必要性证明是课本第一章总复习题题12(2) page 96.

注2: 类似可定义一般 n 元 k 次齐次函数, 并建立相应地 Euler 公式.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2): 在等式 (1) 中, 关于变量 t 求导得

$$xf_x(tx,ty,tz)+yf_y(tx,ty,tz)+zf_z(tx,ty,tz)=kt^{k-1}f(x,y,z).$$

在上式中, 令 $t=1$ 立刻得到等式 (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): 假设等式 (2) 成立. 要证等式 (1) 成立. 为此任意固定 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 令

$$g(t):=\frac{f(tx,ty,tz)}{t^k},\quad \forall t>0.$$

对函数 $g(t)$ 求导得

$$g'(t)=\frac{1}{t^{k+1}}\Big(txf_x(tx,ty,tz)+tyf_y(tx,ty,tz)+tzf_z(tx,ty,tz)-kf(tx,ty,tz)\Big).$$

由于等式 (2) 可知 $g'(t)\equiv 0$, $\forall t>0$. 因此 $g(t)\equiv g(1)$, $\forall t>0$. 此即等式 (1)。 证毕。

5. 设函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, 并满足如下条件

(i) $f(x,y)$ 可表为 x^2+y^2 的复合函数, 即 $f(x,y)=g(x^2+y^2)$, 这里 $g(t)$ 是 $\mathbb{R}^1$上连续可微函数.

(ii) $f(x,y)$ 还可表为具有对称性的变量分离形式: $f(x,y)=\phi(x)\phi(y)$, $\phi(t)$ 是 $\mathbb{R}^1$上连续可微函数.

(iii) $f(0,0)=1$, $f(1,0)=e$.

试确定函数 $f(x,y)$. (注: 这是第一章总复习题题 12(4))

解: 要确定函数 f, 只要确定函数 $\phi(t)$ 即可.

断言一: $\phi(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

反证. 假设存在 x_0, 使得 $\phi(x_0)=0$. 于是 $\phi(\frac{x_0}{\sqrt{2}})^2=f(\frac{x_0}{\sqrt{2}},\frac{x_0}{\sqrt{2}})=g(x_0^2)=\phi(x_0)\phi(0)=0$. 这表明若 $\phi(x_0)=0$, 则 $\phi(\frac{x_0}{\sqrt{2}})=0$, 从而 $\phi(\frac{x_0}{2^{n/2}})=0$, $\forall n\geq 1$. 于是 $0=\lim_{n\to+\infty}\phi(\frac{x_0}{2^{n/2}})=\phi(0)$. 矛盾.

断言二: 可取 $\phi(0)=1$, 且 $\phi(1)=e$.

证明: 由条件 (iii) 可知 $\phi^2(0) = 1$. 由此得 $\phi(0) = \pm 1$. 注意若 $\phi(x)$ 满足 $f(x,y) = \phi(x)\phi(y)$，则 $-\phi(x)$ 也满足. 为了明确起见，我们只考虑满足条件 $\phi(0) = 1$ 的函数 $\phi(x)$. 再根据 (iii) 中的条件 $f(1,0) = e$ 以及条件 (ii) 可知 $\phi(1) = e$.

断言三: $\phi(t) = e^{t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

证明: 根据条件(i)和(ii)可知

$$g(u) = \phi(x)\phi(y), \quad u := x^2 + y^2.$$

于上式分别关于 x 和 y 求导得

$$2xg'(u) = \phi'(x)\phi(y), \quad 2yg'(u) = \phi'(y)\phi(x).$$

于是

$$\frac{\phi'(x)\phi(y)}{x} = \frac{\phi'(y)\phi(x)}{y}, \quad \forall x \neq 0,\ \forall y \neq 0.$$

由于 $\phi(t)$ 无零点, 恒正, 故

$$\frac{\phi'(x)}{x\phi(x)} = \frac{\phi'(y)}{y\phi(y)}, \quad \forall x \neq 0,\ \forall y \neq 0.$$

注意上述等式两边分别是 x 和 y 的函数. 该等式成立的充分必要条件是

$$\frac{\phi'(t)}{t\phi(t)} = c_1, \quad \forall t \neq 0.$$

其中 c_1 是任意常数. 上式可等价地写作

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = c_1 t, \quad \forall t \neq 0.$$

关于上式积分得

$$\ln \phi(t) = c_1 t^2/2 + c_2 \quad 即 \quad \phi(t) = e^{c_2} e^{c_1 t^2/2}.$$

于上式令 $t \to 0$, 并注意到条件 $\phi(0) = 1$, 我们立刻得到 $c_2 = 0$. 再根据条件 $\phi(1) = e$ 可知 $c_1 = 2$. 于是我们得到 $\phi(t) = e^{t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 由此可知 $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

由断言三立刻得到 $f(x,y) = \phi(z)\phi(y) = e^{x^2+y^2}$. 解答完毕.

6. 设函数 $u(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微. 假设 $u(x,y)$ 满足条件

(i) $u_{xx}(x,y)=u_{yy}(x,y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$;

(ii) $u(x,2x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

(iii) $u_x(x,2x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

求函数 $u_{xx}(x,2x)$, $u_{xy}(x,2x)$, $u_{yy}(x,2x)$.

解: 对等式 (iii) 关于 x 取导数得

$$u_{xx}(x,2x)+2u_{xy}(x,2x)=2x. \tag{3}$$

对等式 (ii) 关于 x 取导数得

$$u_x(x,2x)+2u_y(x,2x)=1. \tag{4}$$

再次利用等式 (iii) 和 (4) 可解得 $u_y(x,y)$ 如下

$$u_y(x,2x)=\frac{1-x^2}{2} \tag{5}$$

对上式关于 x 求导得

$$u_{xy}(x,2x)+2u_{yy}(x,2x)=-x. \tag{6}$$

利用条件(i)将上式写作

$$u_{xy}(x,2x)+2u_{xx}(x,2x)=-x. \tag{7}$$

联立方程 (3), (7) 以及条件 (i) 可解得

$$u_{xx}(x,2x)=u_{yy}(x,2x)=\frac{-4x}{3},\quad u_{xy}(x,2x)=\frac{5x}{3}.$$

解答完毕.

7. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微且满足条件

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty. \tag{8}$$

试证明对于任意向量 $v=(a,b)$, 均存在点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 使得 $\nabla f(x_0,y_0)=v$. (注: 这是课本第97页习题题15)

证明：对于任意向量 $v=(a,b)$, 定义函数 $F(x,y)=f(x,y)-ax-by$. 根据假设 (8)可知, 当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时,

$$\frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\geq\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{|a||x|+|b||x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\geq\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}-|a|-|b|\to+\infty. \tag{9}$$

由此可见 $F(x,y)\to+\infty$, $x^2+y^2\to+\infty$. 根据课本第24页习题8的结论可知, 函数 $F(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可取得最小值, 例如在点 (x_0,y_0) 处取得, 则根据极值的必要条件可知， $\nabla F(x_0,y_0)=0$. 这等价于 $\nabla f(x_0,y_0)=v$. 证毕。

8. 设函数 $f(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微. 假设 (i) 函数 f 在全平面上恒正, 即 $f(x,y)>0$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. (ii) $ff_{xy}=f_xf_y$. 证明函数 $f(x,y)$ 必为变量分离型的, 即 $f(x,y)=\phi(x)\psi(y)$, 其中 $\phi(x)$ 和 $\psi(y)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的任意二次连续可微的一元函数.

证明： 根据假设(i) 和 (ii) 我们有

$$\left(\frac{f_x}{f}\right)'_y=\frac{1}{f^2}(ff_{xy}-f_xf_y)=0.$$

由此可知函数 f_x/f 与变量 y 无关。也就是说 $f_x/f=\xi(x)$. 注意到关系式 $f_x/f=\xi(x)$ 可写作 $(\ln f)'_x=\xi(x)$, 于是我们得到 $\ln f(x,y)=\phi(x)+\psi(y)$, 其中 $\phi'(x)=\xi(x)$, $\psi(y)$ 连续可微函数. 这样就得到

$$f(x,y)=e^{\phi(x)}e^{\psi(y)}=\Phi(x)\Psi(y).$$

证毕。

9. 设函数 $F(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微. 若存在正数 $m>0$, 使得

$$F_y(x,y)\geq m,\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{10}$$

证明存在唯一的连续可微的函数 $f(x)$, f 在整个 $\mathbb{R}$ 上定义, 使得

$$F(x,f(x))\equiv0,\quad\forall x\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

证明: 任意给定 $x \in \mathbb{R}$. 对于任意 $y > 0$, 我们对不等式 (10) 从 0 到 y 关于 y 积分得

$$F(x, y) \geq my + F(x, 0) \to +\infty, \quad \text{当 } y \to +\infty.$$

类似, 对于任意 $y < 0$, 我们对不等式 (10) 从 y 到 0 关于 y 积分得

$$F(x, 0) - F(x, y) \geq -my.$$

由此得

$$F(x, y) \leq my + F(x, 0) \to -\infty, \quad \text{当 } y \to -\infty.$$

于是我们得到了结论，任意给定 $x \in \mathbb{R}$， 函数 $F(x, y)$ 关于 y 严格单调上升， 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$. 因此存在唯一的 $f(x)$, 使得 $F(x, f(x)) = 0$. 再根据隐函数定理可知函数 $f(x)$ 是连续可微的。证毕。

注：不能直接应用隐函数定理来得到在整个区间 $\mathbb{R}$ 上定义的隐函数 $f(x)$。 原因有二：(1) 应用隐函数定理的前提是已知方程 $F(x, y) = 0$ 有一个解 (x_0, y_0), 即 $F(x_0, y_0) = 0$; (2) 根据隐函数定理所得到的函数 $f(x)$ 仅在一个可能很小的区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上定义, 而本题需要说明函数 $f(x)$ 的定义域是整个实轴.