《微积分A2》第三十一讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年06月03日

习题六 (法93严君啸推荐): 原题: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi f(\sin\phi\sin\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi f(\cos\phi)d\phi. \quad (*)$$

题目可作两处修改．第一，函数 $f(x)$ 的可导可以减弱为连续．第二，等式(*)右边的积分可以化简为 $\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(w)dw$. 因此原题可修改如下:

问题: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi f(\sin\phi\sin\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(w)dw.$$

<u>证明</u>：对累次积分

$$J \triangleq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi f(\sin\phi \sin\theta) d\theta$$

作变换

$$v = \sin\phi, \quad \phi \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad v \in [0, 1],$$

$$u = \sin\theta, \quad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad u \in [0, 1],$$

$$\phi = \arcsin v, \quad d\phi = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\theta = \arcsin u, \quad d\theta = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\Rightarrow \quad J = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \int_0^1 \frac{f(uv)vdu}{\sqrt{1-u^2}}.$$

对上式右边的内层积分 $\int_0^1 \frac{vf(uv)du}{\sqrt{1-u^2}}$ 作变换

$$w = uv, \quad dw = vdu, \quad u = \frac{w}{v}$$

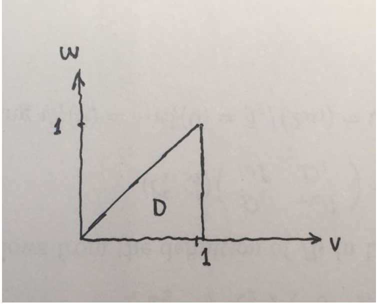
$$\Rightarrow \quad J = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \int_0^v \frac{f(w)dw}{\sqrt{1-\frac{w^2}{v^2}}}$$

$$= \int_0^1 \frac{vdv}{\sqrt{1-v^2}} \int_0^v \frac{f(w)dw}{\sqrt{v^2-w^2}}.$$

上述积分可看做二元函数

$$\frac{vf(w)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{v^2-w^2}}$$

在三角形区域 D 上的一个累次积分. 如图所示.



改变这个累次积分次序可得

$$J=\int_0^1 f(w)dw\int_w^1\frac{vdv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{v^2-w^2}}.$$

再对上述内层积分作变量代换 $x=v^2$ 得

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1 f(w)dw\int_{w^2}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{x-w^2}}.$$

由以下引理可知

$$\int_{w^2}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{x-w^2}}=\pi.$$

$$\Rightarrow\quad J=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(w)dw.$$

引理：对任意 $a < b$ 积分

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}\sqrt{x-a}} = \pi.$$

证明：对积分作变量代换 $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$，(神来变换!)，

$t \in [0, \pi/2] \to x \in [a, b]$. 进一步 $dx = 2(b-a)\sin t\cos t$,

$$(b-x)(x-a) = (b - a\cos^2 t - b\sin^2 t)(a\cos^2 t + b\sin^2 t - a)$$

$$= (b-a)\cos^2 t(b-a)\sin^2 t = (b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t.$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}\sqrt{x-a}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi. \qquad \square$$

习题七: 求级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k}$ 的和.

解: 考虑函数项级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}$. 显然这个等比级数在开区间 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 其和函数为

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{1}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{e^x - 1}, \quad \forall x > 0.$$

对上式两边求导得

$$\sum_{k=1}^{+\infty} -ke^{-kx} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}, \quad \forall x > 0,$$

即 $$\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-kx} = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}, \quad \forall x > 0,$$

令 $x=1$ 即得所求级数的和为

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k}=\frac{e}{(e-1)^2}.$$

另解：记 $S=\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k}$，则 $eS=\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k+1}$. 于是

$$eS=1+2e^{-1}+3e^{-2}+4e^{-3}\cdots+(k+1)e^{-k}+\cdots$$

$$S=e^{-1}+2e^{-2}+3e^{-3}+\cdots+ke^{-k}+\cdots$$

上述两式相减得

$$(e-1)S=1+e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+\cdots=\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{e}{e-1}.$$

由此得 $S=\frac{e}{(e-1)^2}$. 解答完毕.

习题八: 设 S^+ 为封闭曲面

$$(x-y+z)^2+(y-z+x)^2+(z-x+y)^2=1,$$

正法向朝外. 计算如下第二型面积分

$$\iint_{S^+}(x+y-z)dy\wedge dz+[2y+\sin(z+x)]dz\wedge dx$$

$$+(3z+e^{x+y})dx\wedge dy.$$

解: 记上述面积分为 J. 根据 Gauss 公式得

$$J = \iiint_{\Omega} [(x+y-z)_x + [2y+\sin(z+x)]_y$$

$$+(3z+e^{x+y})_z]\,dxdydz = \iiint_{\Omega} 6dxdydz = 6|\Omega|,$$

其中 Ω 表示由封闭曲面 S^+ 所包围的立体，$|\Omega|$ 表示 Ω 的体积.

为求体积 $|\Omega|$，作线性变换

$$u = x-y+z, \quad v = y-z+x, \quad w = z-x+y,$$

其变换的 Jacobian 行列式为

$$\det \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4. \quad \Rightarrow$$

$$|\Omega| = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} \left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

$$= \frac{1}{4}\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} dudvdw = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$$

由此得所求积分为 $J = 6|\Omega| = 6\cdot\frac{\pi}{3} = 2\pi$. 解答完毕.

Theorem

定理：设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

例子: 为计算积分

$$J=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx, \quad b>a>0.$$

我们将被积函数可表为积分形式, 即

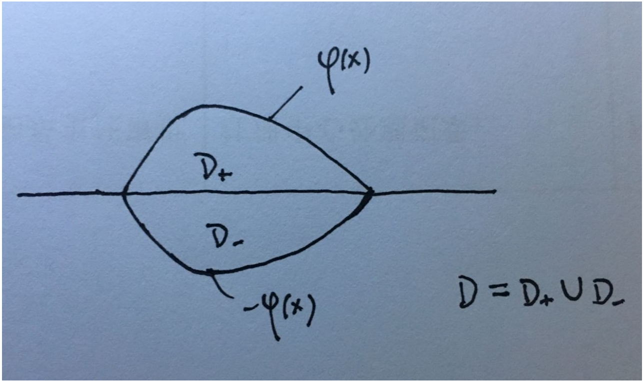
$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy.$$

于是利用积分交换次序定理知

$$J=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx$$

$$=\int_a^b \left[\frac{x^{1+y}}{1+y}\Big|_{x=0}^{x=1}\right]dy=\int_a^b \frac{dy}{1+y}=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

关于 x 轴对称的区域 D, 如图所示.



Theorem

定理: 设闭区域 D 为关于 x 轴对称, 且可表示为 $D = D_+ \cup D_-$,

$$D_+ = \{(x,y), 0 \le y \le \phi(x), a \le x \le b\};$$

$$D_- = \{(x,y), -\phi(x) \le y \le 0, a \le x \le b\},$$

其中 $\phi(x) \ge 0$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数. 设 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

(i) 若函数 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数, 则 $\iint_D f = 0$;

(ii) 若函数 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数, 则 $\iint_D f = 2\iint_{D_+} f$.

Example

例：当正整数 n 或 m 为奇数时，

$$\iint_{x^2+y^2\leq R^2} x^n y^m dxdy = 0.$$

Example

例: 计算二重积分 $\iint_D x\cos(xy)dxdy$, 其中 $D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$.

解: 选择先 y 后 x 计算比较容易.

$$\iint_D x\cos(xy)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^1 \cos(xy)d(xy)$$

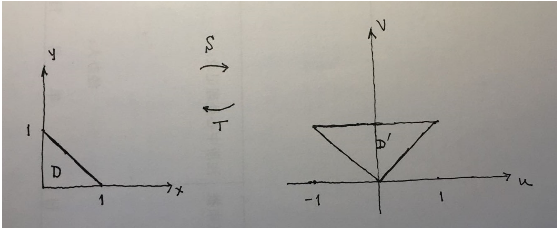
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy)\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

相比较而言, 另一个累次积分的计算则稍麻烦一些. 解答完毕.

例子

例: 计算二重积分 $J = \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$, 其中 D 代表由平面上直线 $x+y=1$, 和 $x=0$, $y=0$ 所围成的有界闭域.

解: 对二重积分 J 作变量替换 $u = x - y$,, $v = x + y$, 且简单计算表明变换的 Jacobian 行列式 $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2$. 变换将 x, y 平面的三角域 D, 变成 u, v 平面的三角域 D'. 如图所示.



例子续

于是

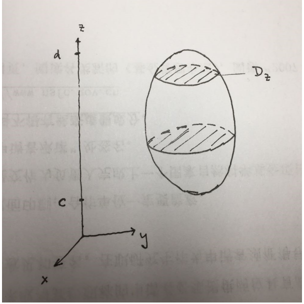
$$J = \iint_{D'} \cos\left(\frac{u}{v}\right)\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 dv \int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right)du,$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 vdv\left[\sin\left(\frac{u}{v}\right)\right]_{u=-v}^{u=v} = \frac{\sin 1}{2}.$$

解答完毕.

假设空间域 E 如图所示, 设函数 $f(x, y, z)$ 在域 E 上连续, 则

$$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z)\,dxdy.$$

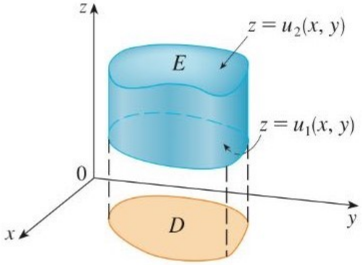


三重积分的计算方法: 先一后二

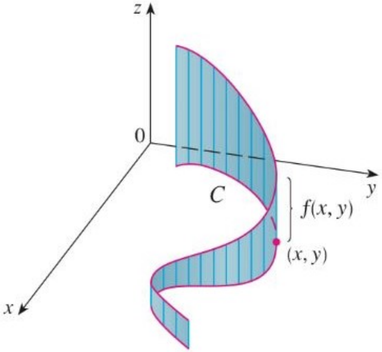
设空间域 $E=\{(x,y,z),\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y),(x,y)\in D\}$,

如图所示, 函数 $f(x,y,z)$ 在 E 上连续, 则

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\iint_D dxdy\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$



假设曲线 C 为 x, y 平面曲线, $f(x,y) \geq 0$, 则线积分 $\int_C f(x,y)ds$ 就是如图所示的柱面面积.



例：计算第一型面积分 $\iint_\Sigma \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

解：根据曲面 Σ 的对称性不难看出

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

$$= \frac{1}{3}\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2) dS = \frac{R^2}{3}|\Sigma| = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

$$\Rightarrow \iint_\Sigma \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{4\pi R^4}{3} = \frac{13\pi R^4}{9}.$$

解答完毕.

<u>定理</u>: 设 D 为平面有界闭区域, 其边界 ∂D 为分段光滑曲线, 则对 D 上任意连续可微向量场 $F=(P,Q)$ 成立

$$\iint_D (\mathrm{rot}\, F)dxdy = \int_{\partial D^+} (F\cdot\tau)ds \quad (\text{旋度形式})$$

$$\iint_D \mathrm{div}(F)dxdy = \oint_{\partial D^+} (F\cdot n)ds. \quad (\text{散度形式})$$

分量形式

$$\iint_D (Q_x-P_y)dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx+Qdy \quad (\text{旋度形式})$$

$$\iint_D (P_x+Q_y)dxdy = \int_{\partial D^+} -Qdx+Pdy. \quad (\text{散度形式})$$

例: 计算曲线积分 $\int_{L^+} \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$, 其中定向曲线 L^+ 为以下三种情形

(i) 椭圆周 $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$, 正向为顺时针.

(ii) 星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, 正向为顺时针.

(iii) 由点 $(2,0)$ 到点 $(4,4)$ 的有向直线段.

解: 记平面向量场 $F=(P,Q)$, 其分量为

$$P(x,y) \triangleq \frac{x-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) \triangleq \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

则所考虑的积分可写作 $\int_{L^+} F\cdot dr$.

例子续一

简单计算表明

$$Q_x = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2} = P_y.$$

即向量场 $F = (P, Q)$ 无旋.

情形(i): 闭曲线 L^+ 是椭圆周 $(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 1$, 正向为顺时针. 由于场 $F = (P, Q)$ 在由闭曲线 L 所围闭区域内连续可微, 根据 Green 公式得

$$\oint_{L^+} \frac{(x+y)dx + (x-y)dy}{x^2+y^2}$$

$$= -\iint_{(x-2)^2+4(y-1)^2 \le 1} (Q_x - P_y)dxdy = 0.$$

例子续二

情形(ii): L^+ 是星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, 正定向为顺时针. 以原点 $(0,0)$ 为圆心, 作以 $\varepsilon>0$ 为半径的圆周 L_ε: $x^2+y^2=\varepsilon^2$, 逆时针为正向. 只要 $\varepsilon>0$ 充分小, 即可使得圆周 L_ε 被包含在曲线 L 所围区域的内部. 由 L 和 L_ε 所围的闭环域记作 D_ε, 显然场 $F=(P,Q)$ 在 D_ε 上连续可微. 应用 Green 公式可知

$$\oint_{L^-\cup L_\varepsilon^-} Pdx+Qdy=\iint_{D_\varepsilon}(Q_x-P_y)dxdy=0.$$

上式表明

$$\oint_{L^+} Pdx+Qdy=-\oint_{L_\varepsilon^+} Pdx+Qdy.$$

很容易计算上式右边的积分

$$\oint_{L_\varepsilon^+} \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon(\cos t-\sin t)(-\varepsilon\sin t)+\varepsilon(\cos t+\sin t)(\varepsilon\cos t)}{\varepsilon^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

于是所求积分为

$$\oint_{L^+} Pdx+Qdy = -\oint_{L_\varepsilon^+} Pdx+Qdy = -2\pi.$$

情形(iii): L^+ 是从点 $(2,0)$ 到点 $(4,4)$ 的有向直线段. 不难写出 L 的参数方程 $x=2+2t$, $y=4t$, $0\le t\le 1$. 将这个参数式代入线积分即可求得积分值. 但用如下方式计算更简单. 已经证明向量场 F 无旋. 因此在右半平面(单连通域)上, 线积分 $\int_{L^+} F\cdot dr$ 与路径无关. 因此将积分路径改为 $(2,0)$ 到 $(4,0)$ 的有向直线段 L_1, 再连接从点 $(4,0)$ 到 $(4,4)$ 的有向直线段 L_2, 积分值不变, 而在 L_1 和 L_2 上的线积分更简单. 于是

$$\int_{L^+} \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} = \int_{L_1} \quad + \int_{L_2}$$

$$= \int_2^4 \frac{xdx}{x^2} + \int_0^4 \frac{(4+y)dy}{4^2+y^2}$$

$$= \int_2^4 \frac{dx}{x} + 4\int_0^4 \frac{dy}{4^2+y^2} + \int_0^4 \frac{ydy}{4^2+y^2}$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

解答完毕.

旋度场的记忆

旋度场 $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ 可形式地写作

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

$$= \left(\begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ \mathbf{R} & \mathbf{P} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \mathbf{P} & \mathbf{Q} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(\mathbf{R}_y - \mathbf{Q}_z, \mathbf{P}_z - \mathbf{R}_x, \mathbf{Q}_x - \mathbf{P}_y \right).$$

例子

例: 若正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_n$ 收敛，且数列 $\{x_n\}$ 单调下降，证明 $\lim_{n\to+\infty} nx_n = 0$.

证: 由假设级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_n$ 收敛，利用 Cauchy 收敛准则可知对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} x_n < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 1.$$

取 $p = n$ 并注意到 x_n 单调下降，故

$$0 < nx_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} x_k < \varepsilon.$$

这表明 $\lim_{n\to+\infty} nx_{2n} = 0$, 从而 $\lim_{n\to+\infty} 2nx_{2n} = 0$. 在不等式

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} x_n < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 1.$$

中, 取 $p = n + 1$, 我们有

$$0 < (n+1)x_{2n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n+1} x_k < \varepsilon.$$

这表明 $\lim_{n\to+\infty}(n+1)x_{2n+1} = 0$.

由此进一步得到

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)x_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+1}\lim_{n\to+\infty}(n+1)x_{2n+1}$$

$$= 2\cdot 0 = 0$$

这就证明了 $\lim_{n\to+\infty} nx_n = 0$. 证毕.

(i) 指数函数 e^x 的 Maclaurin 展式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ii) 三角函数 $\cos x$, $\sin x$ 的 Maclaurin 展式

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(iii) 二项式函数$(1+x)^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ 的 Maclaurin 展式

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{+\infty}C_k^\alpha x^k,\quad \forall x\in(-1,1)$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots,$$

这里 $C_k^\alpha=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

祝考试顺利

祝同学们考试顺利！暑假愉快！