习题 7.2 作业参考解答

《高等微积分教程（下）》

1. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数. 且 $f(x)=e^x, x\in[0,2)$. 若 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数. 试求 $S(0),S(2),S(3)$.

解：由于 $f\in C[0,2)$，所以

$$S(0)=\frac{1}{2}(\lim_{x\to 0^+}f(x)+\lim_{x\to 0^-}f(x))=\frac{1}{2}(e^2+1).$$

$$S(2)=\frac{1}{2}(\lim_{x\to 2^+}f(x)+\lim_{x\to 2^-}f(x))=\frac{1}{2}(e^2+1).$$

$$S(3)=\frac{1}{2}(\lim_{x\to 3^+}f(x)+\lim_{x\to 3^-}f(x))=e.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 可积. 证明：$\pi\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n^2=2\int_0^{\pi}f^2(x)dx$，其中 $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx.n=1,2,\cdots$.

证明. 将 $f(x)$ 从 $(0,\pi)$ 奇延拓到 $(-\pi,\pi)$ 上，再延拓为以 2π 为周期的周期函数，并做 Fourier 展开.

$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\dfrac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$

故可设 a_n,b_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的系数. 由 Parseval 等式有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

由 $a_n = 0$ 知

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

即

$$\pi \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = 2 \int_0^{\pi} f^2(x) dx.$$

$\square$

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 可积. 证明：$\frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = 2 \int_0^{\pi} f^2(x) dx$，其中 $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx . n = 0, 1, \cdots$.

证明. 将 $f(x)$ 偶延拓到 $[-\pi, \pi]$ 上，再延拓为以 2π 为周期的周期函数，并做 Fourier 展开.

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$

故可设 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的系数. 由 Parseval 等式有

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

由 $b_n = 0$ 知

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

即

$$\frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = 2 \int_0^{\pi} f^2(x) dx.$$

$\square$

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 可积. 证明：$\dfrac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=2\int_0^\pi f^2(x)dx$,其中 $a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos 2nxdx, n=0,1,2,\cdots, b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin 2nxdx, n=1,\cdots$.

证明. 将 $f(x)$ 从 $(0,\pi)$ 延拓为以 π 为周期的周期函数，并做 Fourier 展开.

则 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的系数.

从而由 Parseval 等式有：(内积定义为 $(f,g)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)g(x)dx$)

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx.$$

即

$$\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=2\int_0^\pi f^2(x)dx.$$

□