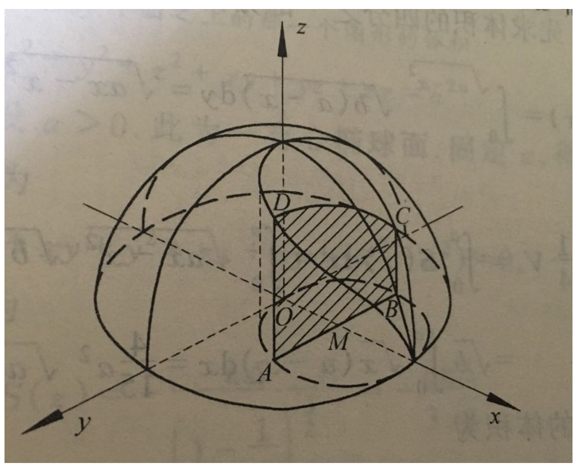
微积分A2第八次习题课讨论题参考解答　　　　　杨利军　Apr 27 - May 02, 2020

本次习题课讨论题涉及以下三个方面的问题. 一. 计算三个重要立体体积和表面积; 二. 关于重积分变量替换问题; 三. 重积分的物理应用.

一. 计算三个重要立体的体积和表面积.

注：求解这类题目, 最重要的是能够正确想象和画出这些立体的大致图形.

题1. 求由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=ax$ (这里 $a>0$) 所围, 并位于圆柱面内部的有界立体 V 的体积和表面积. 这个立体 V 通常称作 Viviani 立体. 它的上半部分如图所示.



解: 立体 V 的上半部分, 记作 $V_{\pm}$. 由于立体 V 关于 x,y 平面对称, 因此体积 $|V|=2|V_{\pm}|$. 由图可知 $|V_{\pm}|$ 可表为

$$|V_{\pm}|=\iint_{x^2+y^2\le ax}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy.$$

圆周 $x^2+y^2=ax$ 在极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 下的方程为 $r=a\cos\theta$, $|\theta|\le\frac{\pi}{2}$. 因此对上述积分作极坐标变换得

$$|V_{\pm}|=\iint_{|\theta|\le\frac{\pi}{2},0\le r\le a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}dr^2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-r^2}dr^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=a\cos\theta} d\theta$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3-a^3\sin^3\theta)d\theta = a^3\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\Big).$$

因此所求体积为

$$|V| = 2|V_{\text{上}}| = a^3\Big(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\Big).$$

再来求立体 V 的边界 $S=\partial V$ 即外表面的面积 $|S|$. 显然 $S=S_{\text{球}}\cup S_{\text{柱}}$, 这里 $S_{\text{球}}$ 代表 S 的球面的上下两个部分, 代表 $S_{\text{柱}}$ 代表 S 的柱面的部分. 根据对称性我们有

$$|S_{\text{球}}| = 2\iint_{x^2+y^2\le ax} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy,$$

其中 $z=z(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 是上半球面的方程. 利用极坐标计算上述积分得

$$|S_{\text{球}}| = 2\iint_{x^2+y^2\le ax} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = 2a\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$$
$$= 2a\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{a^2-r^2}\Big|_{r=0}^{r=a\cos\theta} d\theta = 2a^2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\theta|)d\theta$$
$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta = 2a^2(\pi-2).$$

往下来计算 $|S_{\text{柱}}|$. 有多种方式计算 $|S_{\text{柱}}|$, 其中用线积分计算比较简单. 参见课本第180页例4.2.3. 同样 $S_{\text{柱}}$ 关于 x,y 平面对称, 故只需计算 x,y 平面上方部分的面积. 根据线积分的几何意义可知

$$|S_{\text{柱}}| = 2\oint_{x^2+y^2=ax} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dl$$

取圆周 $x^2+y^2=ax$ 的参数方程为 $x=x(t)=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t$, $y=y(t)=\frac{a}{2}\sin t$, $0\le t\le 2\pi$. 于是

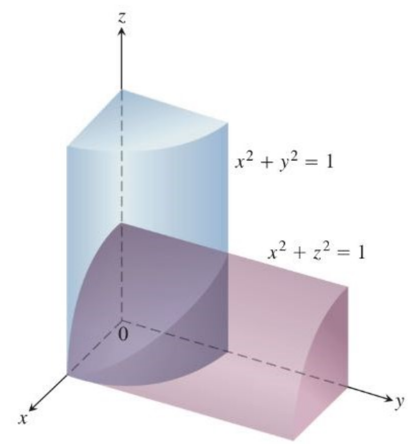
$$|S_{\text{柱}}| = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2-x(t)^2-y(t)^2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt = a^2\int_0^{2\pi}\sin(t/2)dt = 4a^2.$$

综上可知 Viviani 立体的表面积为

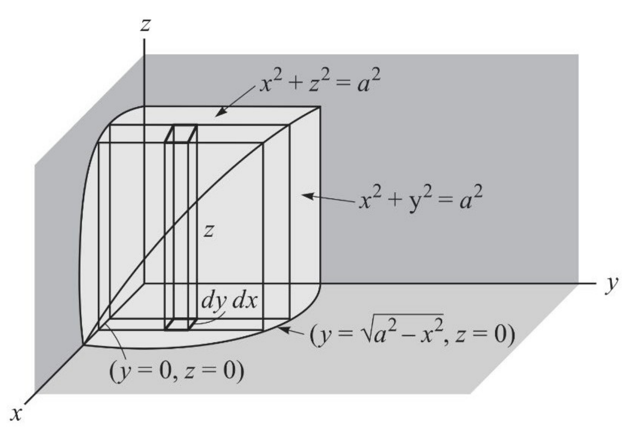
$$|S| = |S_{\text{球}}|+|S_{\text{柱}}| = 2a^2(\pi-2)+4a^2 = 2a^2\pi.$$

解答完毕.

题2. 求两个圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2$ 相交部分 V 的体积和表面积, 这里 $a>0$. (这是课本第162页习题3.4第9题3). 所考虑的立体 V 位于第一卦限的部分, 如图所示.



解：记立体 V 的边界(曲面)为 S. 根据对称性, 我们只需考虑立体 V 和曲面 S 位于第一卦限 $(x,y,z\geq 0)$ 部分的体积和面积. 它们分别记作 V_1 和 S_1. 显然 $|V|=8|V_1|$, $|S|=8|S_1|$. 我们来计算 $|V_1|$ 和 $|S_1|$.



由上图可知, 立体 V_1 是曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2}$ 在平面域 $D: x^2+y^2\leq a^2$, $x,y\geq 0$ 的立体. 于是

$$|V_1|=\iint_D \sqrt{a^2-x^2}dxdy=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}dy$$

$$= \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2a^3}{3}.$$

故所求立体的体积为 $|V| = 8|V_1| = \frac{16a^3}{3}$.

考虑如何计算 $|S_1|$. 由图可知 S_1 由两部分组成, 分别是曲面 $x^2+z^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=a^2$ 上的一部分. 由对称性知这两部分的面积相等. 因此我们只需求其中的一个部分, 例如 $x^2+z^2=a^2$ 上的那一部分. 将这个曲面位于第一卦限的部分可写作 $z=\sqrt{a^2-x^2}$, 其定义域为上述平面域 D, 即 $D: x^2+y^2 \le a^2$, $x, y \ge 0$. 于是

$$|S_1| = 2\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = 2\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdy$$

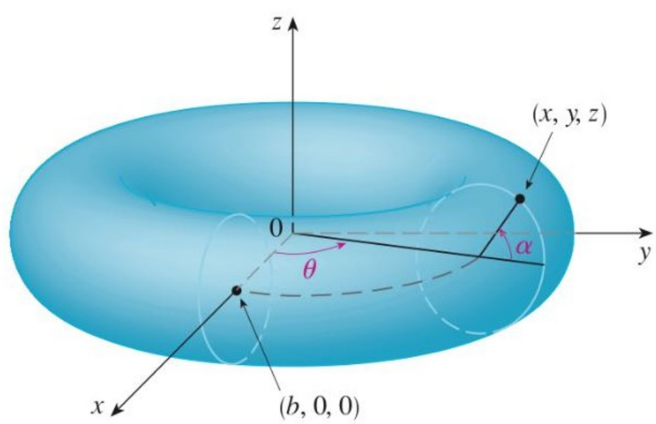
$$= 2a\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dy = 2a\int_0^a dx = 2a^2.$$

由此得 $|S| = 8|S_1| = 16a^2$. 解答完毕.

题3. 设环面 S 由如下参数式给出

$$x = (b + a\cos\alpha)\cos\theta, \quad y = (b + a\cos\alpha)\sin\theta, \quad z = a\sin\alpha, \tag{1}$$

其中 $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 < a < b$, 如图所示. 求环面 S 的面积, 以及由环面 S 所包围的立体(实心轮胎)的体积.



解：为求 S 的面积, 我们先来计算 S 的 Gauss 系数. 简单计算得

$$x_\theta = -(b + a\cos\alpha)\sin\theta, \quad y_\theta = (b + a\cos\alpha)\cos\theta, \quad z_\theta = 0.$$

$$x_\alpha = -a\sin\alpha\cos\theta, \quad y_\alpha = -a\sin\alpha\sin\theta, \quad z_\alpha = a\cos\alpha.$$

由此得环面 S 的 Gauss 系数为

$$E = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = (b + a\cos\alpha)^2, \quad G = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 = a^2, \quad F = x_\theta x_\alpha + y_\theta y_\alpha + z_\theta z_\alpha = 0.$$

记平面矩形域 $D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$. 于是环面 S 的面积为

$$|S| = \iint_D \sqrt{EG - F^2} = \iint_D a(b + a\cos\alpha)d\theta d\alpha = ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha = 4\pi^2 ab.$$

我们再来考虑由环面 S 所包围的立体 V 的体积 $|V|$. 我们用先二后一的方法来计算这个三重积分. 如果我们以$z = z \in [-a, a]$ 平面截立体 V, 那么我们所得截面是一个平面环域, 即由两个同心圆周所围成的有界闭域. 我们记这个平面域为 V_z, 其面积记作 $|V_z|$. 于是 $|V| = \int_{-a}^{a} |V_z| dz$. 我们来求 $|V_z|$. 对于 $z = a\sin\alpha$, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 环域 V_z 是从半径为 $R = b + a\cos\alpha$ 圆盘中, 挖去半径为 $r = b - a\cos\alpha$ 圆盘. 因此其面积为

$$|V_z| = \pi(R^2 - r^2) = 4ab\pi\cos\alpha.$$

由此得

$$|V| = \int_{-a}^{a} |V_z| dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4ab\pi\cos\alpha (a\sin\alpha)' d\alpha = 4a^2 b\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha d\alpha = 2\pi^2 a^2 b.$$

注：关于圆环面的面积, 及其所包围立体的体积, 可根据 Guldin 第一和第二定理, 可得到同样的结论. 解答完毕.

二. 重积分的变量替换问题

题1. 计算积分

$$I = \iint_D \frac{1}{xy} dxdy$$

其中平面闭域 D 由如下不等式确定.

$$2 \leq \frac{x}{x^2 + y^2} \leq 4 \quad \text{and} \quad 2 \leq \frac{y}{x^2 + y^2} \leq 4. \tag{2}$$

解：一般说来, 为计算重积分作变量替换, 其目的是将积分区域变为比较简单的区域, 例如矩形区域. 因此对于由式(2)所确定的区域 D, 我们有如下自然的变量替换

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{3}$$

这是一个可逆变换, 从 x,y 平面的第一象限到 u,v 平面的第一象限. 在复平面上, 这个变换称作关于单位圆周(圆心位于原点)的对称变换. 变换(3)的逆变换具有相同的形式

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=\frac{v}{u^2+v^2}. \tag{4}$$

变换(4)将矩形 $D':2\le u\le 4,\ 2\le v\le 4$ 变为平面域 D. 其 Jacobian 行列式为

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} & \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}\\ \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}\end{bmatrix}=\frac{-1}{(u^2+v^2)^2}.$$

被积函数为

$$\frac{1}{xy}=\frac{(u^2+v^2)^2}{uv}.$$

于是所求积分

$$I=\iint_D\frac{1}{xy}dxdy=\iint_{D'}\frac{(u^2+v^2)^2}{uv}\frac{1}{(u^2+v^2)^2}dudv=\iint_{D'}\frac{dudv}{uv}$$

$$=\int_2^4\frac{du}{u}\int_2^4\frac{dv}{v}=(\ln 2)^2.$$

解答完毕.

题2. 求极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le1}\ln(x^2+y^2)dxdy$$

解：用极坐标计算积分后再求极限.

$$\iint_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le1}\ln(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^1 2(\ln r)rdr=4\pi\int_\varepsilon^1(\ln r)rdr$$

$$=2\pi\left[r^2\ln r\Big|_{r=\varepsilon}^1-\int_\varepsilon^1 rdr\right]=-2\pi\left[\varepsilon^2\ln\varepsilon-\frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\right]=-2\pi\varepsilon^2\ln\varepsilon+\pi(1-\varepsilon^2).$$

于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1} dxdy=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[-2\pi\varepsilon^2\ln\varepsilon+\pi(1-\varepsilon^2)\Big]=\pi.$$

解答完毕.

题3. 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 记

$$F(t)=\iiint_{V_t}\Big[z^2+f(x^2+y^2)\Big]dxdydz, \tag{5}$$

这里 V_t 表示圆柱体 $x^2+y^2\le t^2$, $0\le z\le h$. 求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}.$$

解: 由于式(5)中的积分域是圆柱体, 故对这个积分作柱坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$ 得

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t dr\int_0^h\Big[z^2+f(r^2)\Big]rdz\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t dr\int_0^h z^2rdz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t dr\int_0^h f(r^2)rdz\\&=2\pi\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot\frac{1}{3}h^3+2\pi h\int_0^t f(r^2)rdr=\frac{1}{3}\pi h^3t^2+\pi h\int_0^{t^2}f(s)ds.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{\pi h^3}{3}+\pi h\frac{\int_0^{t^2}f(s)ds}{t^2}\right]=\frac{\pi h^3}{3}+\pi hf(0).$$

解答完毕.

题4. 计算二重积分

$$I=\iint_D\cos\Big(\frac{x-y}{x+y}\Big)dxdy, \tag{6}$$

其中 D 代表由平面上直线 $x+y=1$ 和两个坐标轴即 $x=0$ 和 $y=0$ 所围成的有界闭域.

解：作变量替换 $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 分量形式为

$$\begin{cases} u = x-y, \\ v = x+y. \end{cases} \tag{7}$$

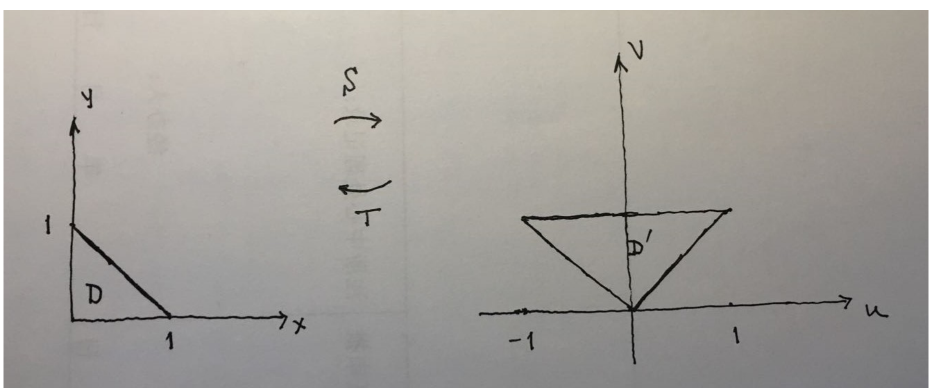
由于线性变换将直线变为直线, 线性变换 S 将 x,y 平面的三角域 D 变成 u,v 平面的三角域 D'. 线性变换 的 Jacobian 行列式为

$$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

进一步线性变换 S 可逆, 且其逆变换为 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 由下式给出

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v), \\ y = \frac{1}{2}(v-u). \end{cases} \tag{8}$$

如图所示.



于是对积分 I 作变量替换 T 即可得到

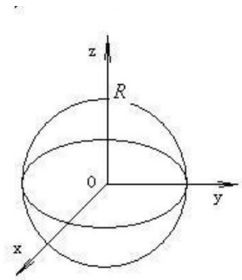
$$I = \iint_{D'} \cos\Big(\frac{u}{v}\Big)\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v}\cos\Big(\frac{u}{v}\Big)du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 vdv\Big[\sin\Big(\frac{u}{v}\Big)\Big]_{u=-v}^{u=v} = \frac{\sin 1}{2}.$$

解答完毕.

三. 重积分的物理应用.

1. 假设半径为 $R>0$ 的球体浮在水面. 现将球体压入水下, 使得水面刚好淹没球体, 即球心距离水面为 R. 求在这过程中外力所作的功.



解: 回忆 Archimedes 浮力定律: 浸入液体中的物体所受的力垂直向上, 并且等于所排除液体的重量. 要求所做的功, 就是要求为了将球体压入水里, 必须克服浮力对球体所施加的力所做的功. 对任意 $z\in[-R,R]$, 将微元 dV 置入深度为 $R-z$ 处所做的功为 $(R-z)dV$. 因此所求外力的功为

$$W=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R^2}(R-z)dV.$$

根据对称性可知积分

$$W=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R^2}zdV=0.$$

因此所求的功为

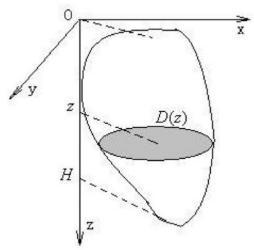
$$W=R\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R^2}dV=R|V|=\frac{4\pi R^4}{3}.$$

即外力所作的功等效于将球体的形心从 $z=R$ 推入 $z=0$ 处克服浮力(球体体积)所作的功

$$W=R\cdot\frac{4\pi R^3}{4}=\frac{4\pi R^4}{3}.$$

这正是水面到球心的距离乘以球的体积. 等价地说, 水面到球体形心的距离乘以浮力.

推广至一般物体： 建立空间直角坐标系, 如图所示,

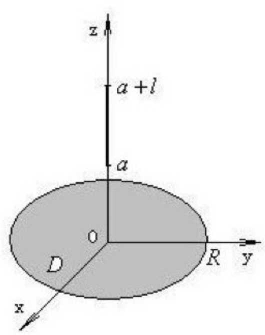


其中 z 轴垂直向下, 且 xy 平面为水平面, 物体 Ω 位于 $z \geq 0$ 的部分. 在点 (x, y, z) 处取微元 dV, 将微元 dV 置于点 (x, y, z) 处所要作的功为 zdV, $z \geq 0$. 因此物体置于如图位置所做的功为

$$W = \iiint_{\Omega} zdV.$$

若记物体 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 则 $W = \bar{z}|\Omega|$. 也就是说, 所做的功为浸入水中物体形心的垂直坐标 $\bar{z}$, 乘以物体的体积(即浮力的大小).

2. 如图所示, 半径为 R 的均质圆盘的密度为常数 μ, 圆盘上方有一根竖直的长度为 l的细棒, 其密度为常数 ρ, 其下端距离圆盘的原心为 a. 求圆盘对细棒的引力.



解：由图可知, 细棒位于 z 轴的区间 $[a, a+l]$ 的位置, 圆盘位于 x, y 平面的闭原盘 $x^2+y^2 \leq R$ 的位置. 在 $z \in [a, a+l]$ 处, 取细棒微元 dz, 其质量为 ρdz. 再在点 $(x, y) \in D$ 处取圆盘的面积微元 $dxdy$, 其质量为 $\mu dxdy$. 根据万有引力定律可知, 圆盘微元对细棒

微元(均看作质点)之间的引力为

$$dF = \frac{G(\mu dxdy)(\rho dz)}{r^2}\vec{r}_0 = \frac{G\rho\mu dxdydz}{x^2+y^2+z^2}\vec{r}_0,$$

其中 G 为万有引力常数, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $(0,0,z)$ 到点 $(x,y,0)$ 距离, $\vec{r}_0$ 记点 $(0,0,z)$ 到点 $(x,y,0)$ 单位向量, 即

$$\vec{r}_0 = \frac{(x,y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

于是

$$dF = \frac{G(\mu dxdy)(\rho dz)}{r^2}\vec{r}_0 = \frac{G\rho\mu(x,y,-z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz.$$

因此圆盘对细棒的引力为

$$F=(F_1,F_2,F_3)=G\rho\mu\iint_D dxdy\int_a^{a+l}\frac{(x,y,-z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz.$$

由此可知所求引力 F 的各分量为

$$F_1 = G\rho\mu\iint_D dxdy\int_a^{a+l}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz,$$

$$F_2 = G\rho\mu\iint_D dxdy\int_a^{a+l}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz,$$

$$F_3 = -G\rho\mu\iint_D dxdy\int_a^{a+l}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz.$$

根据对称性可知 $F_1=F_2=0$. 以下我们计算 F_3.

$$F_3 = G\rho\mu\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bigg|_{z=a}^{z=a+l}dxdy$$

$$= G\rho\mu\iint_D\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(a+l)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\right]dxdy.$$

$$= G\rho\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(a+l)^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right]rdr$$

$$= 2\pi G\rho\mu\left[\sqrt{R^2+(a+l)^2}-\sqrt{R^2+a^2}-l\right]. \qquad (*)$$

综上得所求的圆盘对细杆的引力为 $F=(0,0,F_3)$, 其中 $F_3<0$ 由式 (*) 给出. 解答完毕.