习题5、3

4.(第)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

由Leibniz定理知：$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=0$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散；故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 为条件收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(-1)^n}{n+1}$

有 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 为发散. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ 为Leibniz级数，且知条件收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 为发散的

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}$

由Leibniz定理知 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}=0$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}\right|<\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n}\right|$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}$ 绝对收敛

(7): $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$ 令 $\frac{2^{n^2}}{n!}=u_n$

则有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n^2}}{n!}}=\frac{2^{2n+1}}{n+1}$ ∴有 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$

当n充分大时有 后项比前项 即：$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ 则 $u_n$ 从某项开始单调递增

∴有 $\lim_{n\to+\infty}u_n\to+\infty$.

∴有 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$ 为发散

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

由 Leibniz 定理有 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 故随 n 增大而单调递减

且有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$ 故有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 收敛

丰 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-1$ 为发散．故有条件收敛

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ $\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 为发散

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{(1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{2}}}\right]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}+o(\frac{1}{n^2})\right]$

其中有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}o(\frac{1}{n^2})$ 绝对收敛．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛

故有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 为条件收敛

(13) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}$

$=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n-1}>\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ 为发散

7.(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$

有 $\left|\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}\right|=\frac{1}{[n+(-1)^n]^p}\sim\frac{1}{n^p}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\left[\frac{1}{(1+\frac{(-1)^n}{n})^p}\right]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\left[1-p(\frac{(-1)^n}{n})+o(\frac{1}{n^2})\right]$

∴有：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 在 $\begin{cases} p\le 0 & \text{发散} \\ 0<p\le 1 & \text{条件收敛} \\ p>1 & \text{绝对收敛}\end{cases}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}$

有 $\left|\frac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}\right|=\frac{1}{(\sqrt{n}+(-1)^n)^p}\sim\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{p}{2}}}\left[\frac{1}{[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}]^p}\right]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{p}{2}}}\left[1-p\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+p\frac{1}{n}+p^2\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n^2})\right]$

∴有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}$ 在 $\begin{cases} p\le 1 & \text{发散} \\ 1<p\le 2 & \text{条件收敛} \\ p>2 & \text{绝对收敛}\end{cases}$

6、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 为收敛

① 则有 $(a_n+b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n \le 2(a_n^2+b_n^2)$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$ 收敛

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 为收敛 且有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

故有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$

由正项级数收敛知：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛

7、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛 且 $a_n \le c_n \le b_n$

故有 $a_n - a_n \le c_n - a_n \le b_n - a_n$

且有 $c_n - a_n$，$b_n - a_n$ 均为非负项

故其 $0 \le \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 其中 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 为非负项级

且知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛

$\therefore$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

$\therefore$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛

§ 5.3

8、证明：反证 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 收敛

令 $v_n = \begin{cases} 0, & n=2k-1 \\ u_n, & n=2k \end{cases}$ $k \in N_+$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n u_n - 2v_n\right) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 绝对收敛. 矛盾.

9. 证明：由题意 $\Rightarrow u_n \geq \alpha > 0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{1+\alpha} < 1 \Rightarrow \text{收敛}$$

10、 $$\frac{\sin n}{n^p+\sin n} = \frac{\sin n}{n^p}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n^p}}\right) = \frac{\sin n}{n^p}\left(1-\frac{\sin n}{n^p}\cdot\frac{1}{(1+\theta\frac{\sin n}{n^p})^2}\right) \quad \theta\in(0,1)$$

$$= \frac{\sin n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}}\cdot\frac{1}{(1+\theta\frac{\sin n}{n^p})^2} + \frac{\cos 2n}{2n^{2p}}\cdot\frac{1}{(1+\theta\frac{\sin n}{n^p})^2}$$

因 $\forall p>0$. $\sum \frac{\sin n}{n^p}$ 收敛. $\sum \frac{\cos 2n}{2n^{2p}}$ 收敛 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^p} = 0$

故 $p>\frac{1}{2}$ 时 $\sum \frac{\sin n}{n^p+\sin n}$ 收敛. $p\leq\frac{1}{2}$ 时发散.

$\frac{1}{2}<p\leq 1$ 时 $\left|\frac{\sin n}{n^p+\sin n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n^p+\sin n} \geq \frac{1}{n^p+1}\cdot\frac{1-\cos 2n}{2}$, $\forall n>1$. $\Rightarrow \sum\left|\frac{\sin n}{n^p+\sin n}\right|$ 发散.

$p>1$ 时 $\left|\frac{\sin n}{n^p+\sin n}\right| < \frac{1}{n^p-1}$, $\forall n>1$ $\Rightarrow \sum\left|\frac{\sin n}{n^p+\sin n}\right|$ 收敛.

综上 原级数：$0<p\leq\frac{1}{2}$ 时发散. $\frac{1}{2}<p\leq 1$ 时条件收敛.

$p>1$ 时绝对收敛

11. 证明："⇒" 若 $\sum|u_n|$ 收敛，因 $u_n^+ \le |u_n|$，$u_n^- \le |u_n|$

故 $\sum u_n^+$，$\sum u_n^-$ 收敛

"⇐" 若 $\sum u_n^+$，$\sum u_n^-$ 收敛，则 $\sum(u_n^+ + u_n^-) = \sum|u_n|$ 收敛

§5.4.

1、(1) $\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$.

$(n+1)^2-(n+1)+1 = n^2+n+1$

$\Rightarrow \prod_{n=2}^{k}\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{1\times 2}{k(k+1)}\cdot\frac{k^2+k+1}{2^2-2+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k}} \to \frac{2}{3}\ (k\to+\infty)$

(3) $(1-\frac{1}{2})\cdot\prod_{n=0}^{k}\left(1+(\frac{1}{2})^{2^n}\right) = \left(1-(\frac{1}{2})^2\right)\prod_{n=1}^{k}\left(1+(\frac{1}{2})^{2^n}\right) = \cdots = 1-(\frac{1}{2})^{2^{k+1}} \to 1\ (k\to\infty)$

2、(1) $p_k = \prod_{n=2}^{k}\frac{1}{n} < \frac{1}{k} \to 0\ (k\to\infty) \Rightarrow$ 无穷乘积收敛到0

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$

因 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}\cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$ 收敛 $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$ 收敛

(6) 题目纠正 $\to \prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2$. $\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)$

考虑 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\ln\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}-\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$ (正项级数)

因 $\lim_{n\to\infty}-\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)\cdot n^2 = 2 \Rightarrow$ 该级数收敛

$\Rightarrow \prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2$ 收敛.