



Review

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛.

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon, \forall n > N, p \geq 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

- 常用级数: $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 或 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$



总则: $\{S_n\}$ 有界. \rightarrow Cauchy 积分

非
负
项
级
数

非 负 项 级 数	比较: (逐项)	$b_n = r^n$	Cauchy 根式 (3种形式)
		$b_n = a^{-\ln n}$	对数根式型 $\sqrt[n]{a_n}$
		$b_n = n^{-p}$	对数判别法 $\frac{\ln 1/a_n}{\ln n}$
	比值: (增速)	$b_n = r^n$	D'Alembert (3种形式)
		$b_n = n^{-p}$	Raabe (3种形式)
		$b_n = a^{-\ln n}$	对数比值型 $n \ln(a_n/a_{n+1})$
		$b_n = n^{-1} (\ln n)^{-p}$	Gauss

清华大学



§ 3. 一般项级数

1. 条件收敛与绝对收敛

Thm $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. **Proof.** $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|. \square$

Def. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为绝对收敛级数(Absolute

Convergent Series); 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为

条件收敛级数(Conditional Convergent Series).



Remark. $\sum a_n$ 发散, $\sum b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$? 未定!

$\sum a_n$ 条件收敛, $\sum b_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$? 收敛!

$\sum a_n$ 绝对收敛, $\sum b_n$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$ 绝对收敛;

$\sum a_n$ 绝对收敛, $\sum b_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$ 条件收敛;

$\sum a_n$ 绝对收敛, $\sum b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$ 发散;

$\sum a_n$ 条件收敛, $\sum b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$ 发散.



2. 交错级数判敛法

Thm (交错项级数的Leibnitz判别法)

$$a_n > 0, a_n \downarrow, a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ 收敛, 其和 } S \leq a_1.$$

Proof. $a_n \downarrow, S_{2n} = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0, S_{2n} \uparrow,$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

即 $\{S_{2n}\}$ 单调上升有上界 a_1 , 从而有极限, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \leq a_1.$

又 $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S. \quad \square$$



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛.

Proof 由Leibnitz判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛. \square

例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ 条件收敛.



例. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ 条件收敛.

Taylor展开!

Proof. $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, $\sum \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛, $\sum \frac{(-1)^n}{n} o\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对

收敛, 故原级数条件收敛. \square



例.

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ 发散.

Taylor展开!

Proof. $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ 条件收敛, } \sum \frac{1}{n} \text{ 发散, } \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{C}{n^{3/2}},$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛, 故原级数发散. } \square$$



Remark. 前面两个例子, $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{n},$$

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 都条件收敛, 但 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ 发散,

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ 收敛. 这说明比较判别法、等价无穷小判

敛法等判别法仅对非负项级数适用.



例. $a_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$, $p > 0$, 讨论 $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ 的收敛性.

解: $a_n = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$

- $p > 1$ 时, $\sum a_n$ 绝对收敛.
- $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum a_n$ 条件收敛.
- $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, $a_n - \frac{(-1)^n}{n^p} = -\frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) < 0, \forall n > 1.$

$\sum \left(a_n - \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$ 发散, 而 $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, 故 $\sum a_n$ 发散. \square



Remark. Taylor展开在级数判敛中的重要性.

Question. 用Taylor展开的方法讨论以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left[\sqrt{n} + (-1)^n\right]^p}, \quad \begin{cases} p \leq 1, \text{发散;} \\ 1 < p \leq 2, \text{条件收敛;} \\ p > 2, \text{绝对收敛.} \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left[n + (-1)^n\right]^p}, \quad \begin{cases} p \leq 0, \text{发散;} \\ 0 < p \leq 1, \text{条件收敛;} \\ p > 1, \text{绝对收敛.} \end{cases}$$



3.任意项级数的Dirichlet和Abel判别法

Lemma (分部求和公式--Abel引理) $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq p$, 则

(1) 记 $B_k = \sum_{i=1}^k \beta_i, k = 1, 2, \dots, p$, 则

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_p B_p;$$

(2) 若 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_p$ (或 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_p$), 且 $|B_k| \leq L$, $k = 1, 2, \dots, p$, 则

$$\left| \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i \right| \leq L(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|).$$



Proof. (1) 记 $B_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i &= \sum_{i=1}^p \alpha_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i B_i - \sum_{i=1}^p \alpha_i B_{i-1} \\&= \sum_{i=1}^p \alpha_i B_i - \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{i+1} B_i \\&= \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_p B_p - \alpha_1 B_0 \\&= \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_p B_p\end{aligned}$$



(2) α_i 单调, B_i 有界, 利用(1)中结论, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_p B_p \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| |B_i| + |\alpha_p| |B_p| \\ &\leq L \left(\sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| + |\alpha_p| \right) \\ &\leq L (|\alpha_1| + 2|\alpha_p|). \quad \square \end{aligned}$$



Thm (Dirichlet判别法)

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{数列}\{a_n\} \text{单调趋于} 0; \\ (2) \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M, \forall n; \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n \text{收敛}.$$

Proof. $\left| \sum_{i=n}^m b_i \right| = \left| \sum_{i=1}^m b_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^m b_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{n-1} b_i \right| \leq 2M, \forall n < m.$

$\{a_n\}$ 单调, 由Abel引理,

$$\left| \sum_{i=1}^p a_{n+i} b_{n+i} \right| \leq 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|), \forall n, p.$$



$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } |a_n| < \varepsilon, \forall n > N.$$

从而有

$$\left| \sum_{i=1}^p a_{n+i} b_{n+i} \right| \leq 6M \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

由Cauchy收敛准则, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ 收敛. \square

Remark. Leibnitz判别法是Dirichlet判别法的特殊情形.



Thm (Abel判别法)

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ 数列 } \{a_n\} \text{ 单调且有界,} \\ (2) \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{ 收敛} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n \text{ 收敛.}$$

Proof. $\{a_n\}$ 单调且有界, 从而有极限, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

已知 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 收敛, 由Dirichlet判别法, $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_n - a)b_n$ 收敛.

故 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_n - a)b_n + a \sum_{k=1}^{+\infty} b_n$ 收敛. \square



例. 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}$ 条件收敛.

Proof. $\frac{1}{n} \searrow 0$, $\left| \sum_{k=1}^n \cos k \right| = \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sin \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}.$

由Dirichlet判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}$ 收敛.

下证 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n}{n} \right|$ 发散.



$$\left| \frac{\cos n}{n} \right| \geq \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1 + \cos 2n}{2n}.$$

同上可证 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 故

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \cos 2n}{2n} \text{ 发散,}$$

因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n}{n} \right|$ 发散.

综上, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}$ 条件收敛. \square



例. $a_n = \frac{\cos \frac{1}{n} \cos n}{n}$, 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的收敛性.

解: 由上例, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}$ 收敛, 而 $\left\{ \cos \frac{1}{n} \right\}$ 单调有界,

由Abel判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

$$|a_n| = \left| \frac{\cos \frac{1}{n} \cos n}{n} \right| \geq \frac{\cos \frac{1}{n} \cos^2 n}{n} = \frac{\cos \frac{1}{n} \cdot (1 + \cos 2n)}{2n}.$$



一方面, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{n} \cos 2n}{2n}$ 收敛(证明同上); 另一方面,

$\frac{\cos \frac{1}{n}}{2n} \geq \frac{\cos 1}{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 1}{2n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{2n}$ 发散(比较判别法).

故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{n} \cdot (1 + \cos 2n)}{2n}$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 发散.

综上, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛. \square



例. $a_n = \frac{\sin n}{n^p + \sin n}$, 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的收敛性.

解: 1) $p \leq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

2) $p > 1$ 时, $|a_n| = \frac{|\sin n|}{|n^p + \sin n|} \leq \frac{1}{n^p - 1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛.

3) $0 < p \leq 1$ 时,

$$|a_n| = \frac{|\sin n|}{|n^p + \sin n|} \geq \frac{\sin^2 n}{n^p + 1} \geq \frac{\sin^2 n}{2n^p} = \frac{1 - \cos 2n}{4n^p},$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{n^p}$ 收敛 (Dirichlet), 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2n}{4n^p}$ 发散,



从而 $\sum |a_n|$ 发散.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sin n}{n^p} \left(1 + \frac{\sin n}{n^p} \right)^{-1} = \frac{\sin n}{n^p} \left(1 - \frac{\sin n}{n^p} + o\left(\frac{\sin n}{n^p} \right) \right) \\ &= \frac{\sin n}{n^p} - \frac{\sin^2 n}{n^{2p}} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2p}} \right), n \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{aligned}$$

• $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时,

$\sum \frac{\sin n}{n^p}$ 收敛, $\left| \frac{\sin^2 n}{n^{2p}} \right| < \frac{1}{n^{2p}}$, $\sum \frac{\sin^2 n}{n^{2p}}$ 收敛, 故 $\sum a_n$ 收敛.



• $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$a_n - \frac{\sin n}{n^p} = -\frac{\sin^2 n}{n^{2p}} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\right) \sim -\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}, n \rightarrow +\infty \text{ 时.}$$

$\sum \frac{\sin^2 n}{n^{2p}} = \sum \frac{1 - \cos 2n}{2n^{2p}}$ 发散, 因此 $\sum \left(a_n - \frac{\sin n}{n^p}\right)$ 发散.

而 $\sum \frac{\sin n}{n^p}$ 收敛, 故 $\sum a_n$ 发散.

综上, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^p + \sin n} \begin{cases} \text{发散,} & p \leq 1/2; \\ \text{条件收敛,} & 1/2 < p \leq 1; \\ \text{绝对收敛,} & p > 1. \end{cases} \quad \square$



例. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛, $\beta > \alpha$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\beta}$ 收敛.

Proof. $\frac{a_n}{n^\beta} = \frac{a_n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\beta-\alpha}},$

$\beta > \alpha$, 则 $\frac{1}{n^{\beta-\alpha}} \searrow 0,$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛, 由Abel判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\beta}$ 收敛. \square



4. 无穷求和运算的结合律与交换率

Thm (收敛级数的顺项可括性) $\sum a_n$ 收敛, 则

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$$

也收敛到同一和.

Proof. 令 $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$, 分别记 $\sum a_k, \sum b_k$ 的部分和数列为 $\{A_k\}, \{B_k\}$, 则 $B_k = A_{n_k}$, 即 $\{B_k\}$ 是 $\{A_k\}$ 的子列.

$\sum a_k$ 收敛, 则 $\{A_k\}$ 收敛, 从而 $\{B_k\}$ 也收敛到同一极限. \square

Remark. 以上定理的逆命题不成立, 如 $\sum (-1)^n$.



Thm 若

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$$

收敛,且同一括号中各项有相同的正负号,则 $\sum a_n$ 也收敛到同一和.

Proof. 记 $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$, $\sum a_k, \sum b_k$ 的部分和分别为 $\{A_k\}, \{B_k\}$, 则 $B_k = A_{n_k}$. 若第 k 个括号中各项均非负, 则

$$B_{k-1} \leq A_i \leq B_k, \quad \forall n_{k-1} \leq i \leq n_k.$$

若第 k 个括号中各项均非正, 则 $B_k \leq A_i \leq B_{k-1}, \forall n_{k-1} \leq i \leq n_k$.

已知 $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k$ 存在, 由夹挤原理, $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$. \square



例. $a_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛.

Proof. $|a_n| = 1/n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 发散, 往证 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &\quad + (-1)^k \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}\right) + \cdots \triangleq \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k w_k \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k w_k \text{ 收敛. 往证 } \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k w_k \text{ 收敛.}$$

由Leibnitz判别法, 只要证 $w_k \downarrow 0$.



$$\begin{aligned}w_k &= \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \quad (\text{共 } 2k+1 \text{ 项}) \\&= \left(\frac{1}{k^2} + \cdots + \frac{1}{k^2+k-1} \right) + \left(\frac{1}{k^2+k} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k} \right) \\&> \frac{k}{k^2+k} + \frac{k+1}{k^2+2k} > \frac{k+1}{(k+1)^2} + \frac{k+2}{(k+1)(k+2)} \\&> \left(\frac{1}{(k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2+k} \right) + \left(\frac{1}{(k+1)^2+k+1} + \cdots + \frac{1}{(k+2)^2-1} \right) \\&= w_{k+1},\end{aligned}$$

于是 $w_k \downarrow$, 又 $0 < w_k < \frac{2k+1}{k^2}$, 故 $w_k \downarrow 0$. \square



绝对收敛和条件收敛的本质区别: 绝对收敛的级数有交换率, 而条件收敛的级数没有交换率.

Thm $\sum a_n$ 绝对收敛

\Rightarrow 任意重排 $\sum a'_n$ 也绝对收敛到同一和.

Thm (Riemann定理) $\sum a_n$ 条件收敛, 则

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}, \exists$ 重排 $\sum a'_n, s.t., \sum a'_n = \lambda.$



Thm $\sum a_n$ 绝对收敛, 则其任意重排也绝对收敛到同一和.

Proof. Case1. $\sum a_n$ 为非负项级数.

$\sum a_n$ 重排后得到的级数记为 $\sum b_n$, $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 的部分和数列分别记为 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$, 则

$$B_n \text{ 单调上升, 且 } B_n \leq \sum a_n = A,$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B \leq A$.

反之, $\sum a_n$ 也可由 $\sum b_n$ 重排得到, 同理可得 $A \leq B$, 故

$$A = B.$$



Case2.

$\sum a_n$ 为任意项级数. 令 $a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}$, $a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$,

$$\text{即 } a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0, \\ 0, & a_n < 0; \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0, \\ -a_n, & a_n < 0. \end{cases}$$

$\sum |a_n|$ 收敛, 则非负项级数 $\sum a_n^+$ 与 $\sum a_n^-$ 均收敛, 且

$$\sum a_n = \sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n^+ - \sum a_n^-.$$

$\sum a_n$ 重排后记为 $\sum b_n$, 则同理有 $\sum b_n = \sum b_n^+ - \sum b_n^-$.

由Case1中结论, $\sum b_n^+$, $\sum b_n^-$ (绝对) 收敛, 且 $\sum a_n^+ = \sum b_n^+$,

$\sum a_n^- = \sum b_n^-$. 故 $\sum b_n$ 绝对收敛且 $\sum b_n = \sum a_n$. \square



Thm (Riemann定理) $\sum a_n$ 条件收敛, 则

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}, \exists \text{重排} \sum a'_n, s.t., \sum a'_n = \lambda.$$

Proof. 记令 $a_n^\pm = \frac{|a_n| \pm a_n}{2}$. $\sum a_n$ 条件收敛, 则

$$a_n^\pm \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\pm = 0, \text{ 且 } \sum a_n^\pm = \frac{1}{2} \left(\sum |a_n| \pm \sum a_n \right) = +\infty.$$

Case1. $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. 我们来重排级数 $\sum a_n$.

$$\sum a_n^+ = +\infty, \text{ 因此, } \exists n_1, s.t., \lambda < \sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ \triangleq U_1.$$

$$\sum a_n^- = +\infty, \text{ 因此, } \exists m_1, s.t.,$$

$$U_1 - V_1 \triangleq U_1 - \sum_{j=1}^{m_1} a_j^- < \lambda \leq U_1 - \sum_{j=1}^{m_1-1} a_j^-.$$



重复上述重排过程, $\exists n_2 > n_1, m_2 > n_1, s.t.,$

$$U_1 - V_1 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2-1} a_i^+ \leq \lambda < U_1 - V_1 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i^+ \triangleq U_1 - V_1 + U_2,$$

$$U_1 - V_1 + U_2 - V_2 \triangleq U_1 - V_1 + U_2 - \sum_{j=m_1+1}^{m_2} a_j^-$$

$$< \lambda \leq U_1 - V_1 + U_2 - \sum_{j=m_1+1}^{m_2-1} a_j^-.$$



$$U_1 - V_1 + U_2 - V_2 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ - \sum_{j=1}^{m_1} a_j^- + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i^+ - \sum_{j=m_1+1}^{m_2} a_j^-$$

中前 k 项之和记为 S_k .

当 $k \in [m_1 + n_1, m_1 + n_2]$ 时, $|S_k - \lambda| \leq \max \{a_{m_1}^-, a_{n_2}^+\}$;

当 $k \in [m_1 + n_2, m_2 + n_2]$ 时, $|S_k - \lambda| \leq \max \{a_{m_2}^-, a_{n_2}^+\}$.

继续重复上述重排过程, 则 $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$,

$$m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots, U_k \triangleq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i^+, V_k \triangleq \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j^-, s.t.,$$



$$(U_1 - V_1) + \cdots + (U_k - V_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ - \sum_{j=1}^{m_1} a_j^- + \cdots + \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i^+ - \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j^-$$

中前 l 项之和 S_l 满足

$$|S_l - \lambda| \leq \max \{a_{m_{k-1}}^-, a_{n_k}^+\}, \text{ 当 } l \in [m_{k-1} + n_{k-1}, m_{k-1} + n_k] \text{ 时};$$

$$|S_l - \lambda| \leq \max \{a_{m_k}^-, a_{n_k}^+\}, \text{ 当 } l \in [m_{k-1} + n_k, m_k + n_k] \text{ 时}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\pm = 0$, 则 $\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = \lambda$, 即如上构造的重排满足 $\sum a'_n = \lambda$.

Case2. $\lambda = +\infty$, Case3. $\lambda = -\infty$, 证明留作课后思考. \square



作业：习题5.3 No. 4-11