1. 求解过程如下：

| $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ | $v_9$ | $v_{10}$ | $v_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| | 8 | ∞ | 3 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| | 8 | ∞ | | ∞ | ∞ | ∞ | 4 | ∞ | ∞ |
| | 8 | ∞ | | ∞ | 7 | 11 | | ∞ | ∞ |
| | 8 | ∞ | | ∞ | | 11 | | 8 | ∞ |
| | | 15 | | ∞ | | 11 | | 8 | ∞ |
| | | 15 | | ∞ | | 11 | | | ∞ |
| | | 15 | | ∞ | | | | | 20 |
| | | | | ∞ | | | | | 20 |

由此可知：

$v_2$：距离2　路径 $v_1 \to v_2$

$v_3$：距离8　路径 $v_1 \to v_3$

$v_4$：距离15　路径 $v_1 \to v_3 \to v_4$

$v_5$：距离3　路径 $v_1 \to v_2 \to v_5$

$v_6$：不可达

$v_7$：距离7　路径 $v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_9 \to v_7$

$v_8$：距离11　路径 $v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_9 \to v_8$

$v_9$：距离4　路径 $v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_9$

$v_{10}$：距离8　路径 $v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_9 \to v_7 \to v_{10}$

$v_{11}$：距离20　路径 $v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_9 \to v_8 \to v_{11}$

2. 关联矩阵：

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_8$ | $e_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 1 | 1 | | | | | | | |
| $v_2$ | -1 | | -1 | 1 | -1 | | | | |
| $v_3$ | | -1 | 1 | | | 1 | | | |
| $v_4$ | | | | -1 | | | -1 | 1 | |
| $v_5$ | | | | | 1 | -1 | 1 | | 1 |
| $v_6$ | | | | | | | | -1 | -1 |

所含边数最多的割集：$\{e_1, e_3, e_5, e_7, e_9\}$　$\{e_1, e_3, e_5, e_7, e_8\}$

$\{e_2, e_3, e_5, e_7, e_9\}$　$\{e_2, e_3, e_5, e_7, e_8\}$

3. 可知对偶目标函数

$$\varphi(\lambda_i, u_{ij}, w_{ij}) = \min_{x\in R^n} L(x, u, v)$$

$$= W + \sum_{i\notin\{s,t\}} \lambda_i \Big(\sum_{(v_i,v_j)\in E} x_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in E} x_{ji}\Big) + \lambda_s \Big(\sum_{(v_s,v_j)\in E} x_{sj} - \sum_{(v_j,v_s)\in E} x_{js} - W\Big)$$

$$+ \lambda_t \Big(\sum_{(v_t,v_j)\in E} x_{tj} - \sum_{(v_j,v_t)\in E} x_{jt} + W\Big) - \sum_{(v_t,v_j)\in E} u_{ij} x_{ij} + \sum_{(v_i,v_j)\in E} w_{ij}(x_{ij} - c_{ij})$$

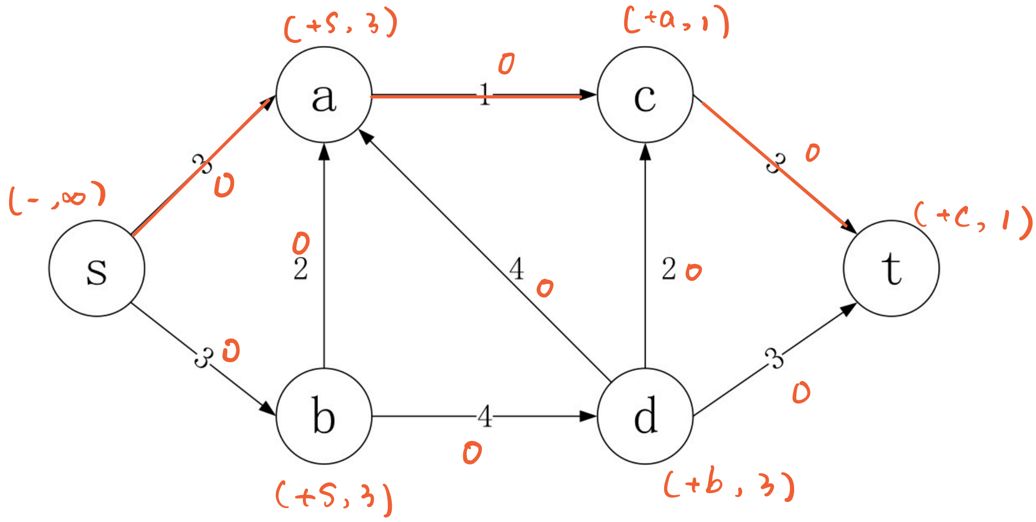
因此：

$$\varphi(\lambda, u, w) = \begin{cases} -\sum_{(v_i,v_j)\in E} w_{ij} c_{ij} & \lambda_i - \lambda_j - u_{ij} + w_{ij} = 0,\ 1-\lambda_s + \lambda_t = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

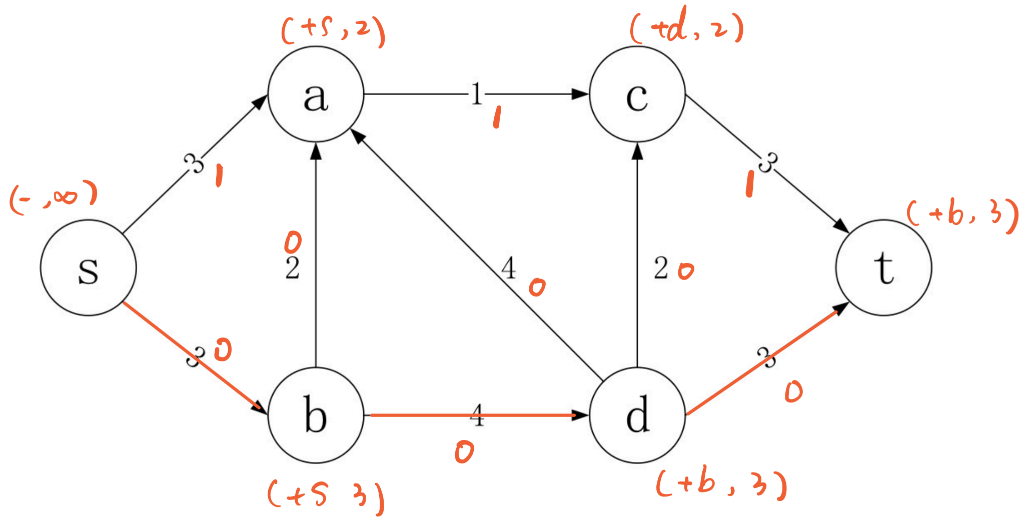
拉格朗日对偶问题为

$$\max \Big\{ -\sum_{(v_i,v_j)\in E} w_{ij} c_{ij} \ \Big|\ \lambda_i - \lambda_j - u_{ij} + w_{ij} = 0,\ i\neq j \quad 1-\lambda_s + \lambda_t = 0,\ w_{ij}\geq 0,\ u_{ij}\geq 0 \Big\}$$

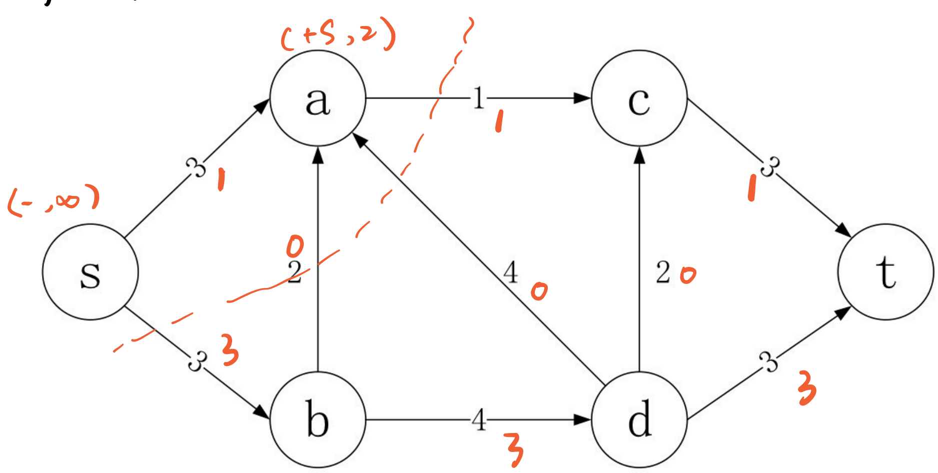
4. 根据可增广链的方法，首先初始化流量为0




可增广链 $s \to a \to c \to t$




可增广链 $s \to b \to d \to t$




由此可知，网络从 $s \to t$ 的最大流为 4