

清华大学2021春季学期

电路原理C

第15讲 互感

内容

1 互感和互感电压

根据绕线方式确定同名端

2 同名端

根据同名端确定互感电压

3 互感的去耦等效

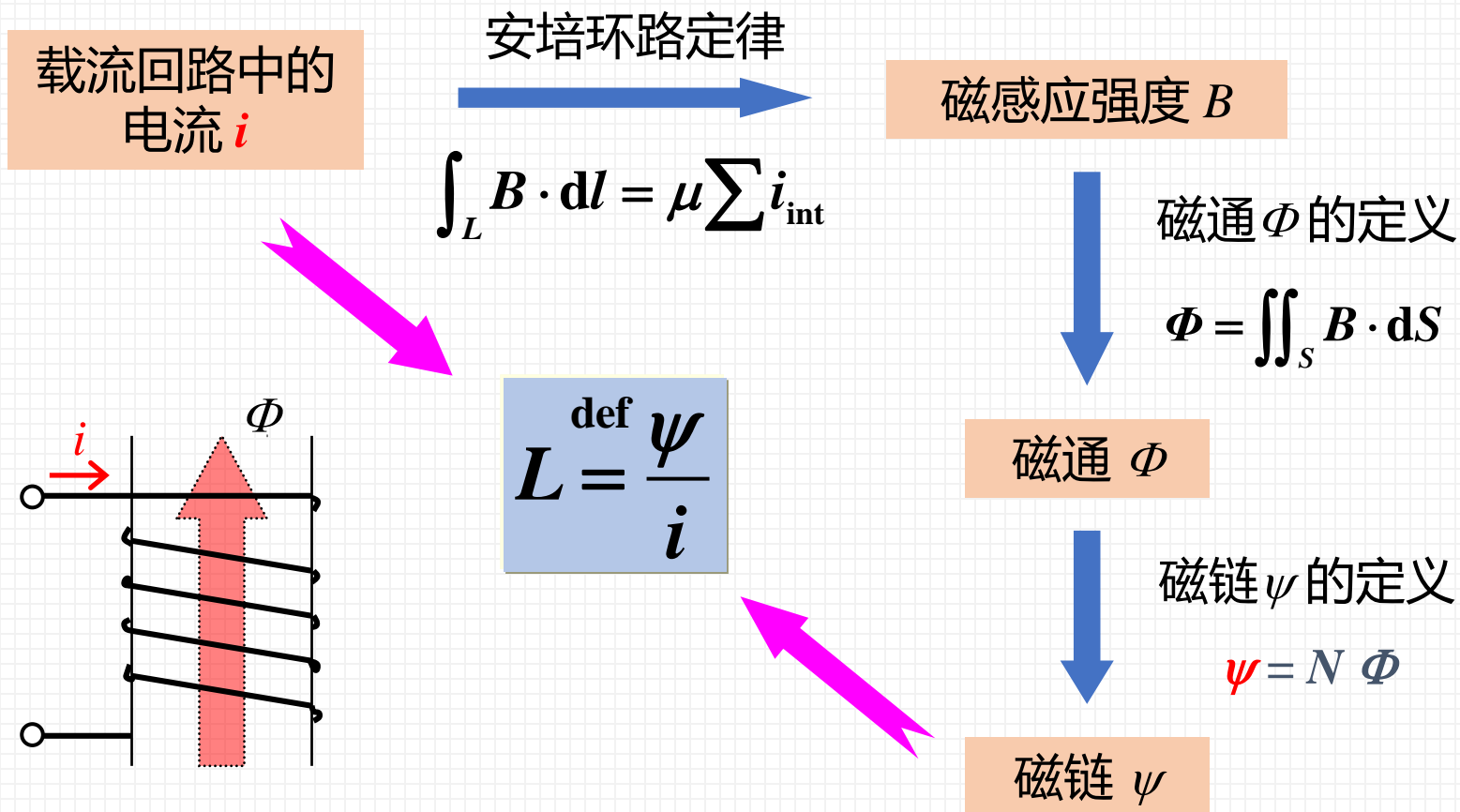
互感的去耦等效

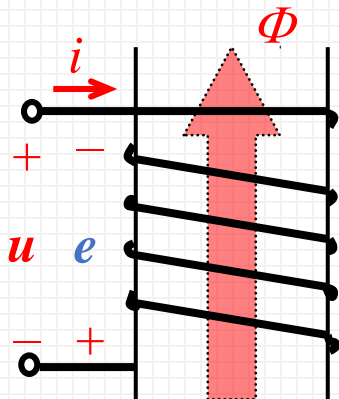
包括时域和相量域

本讲重难点

- 根据绕向确定同名端
- 根据同名端确定感应电压正负号
- 去耦等效
 - 串联
 - 并联
 - 单点联

1、互感和互感电压 (Mutual Inductance)





i, Φ 右螺旋

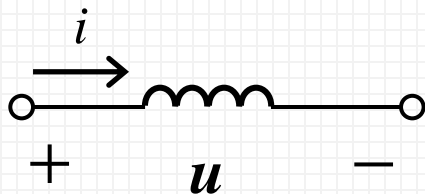
e, Φ 右螺旋

u, i 关联

由电磁感应定律

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

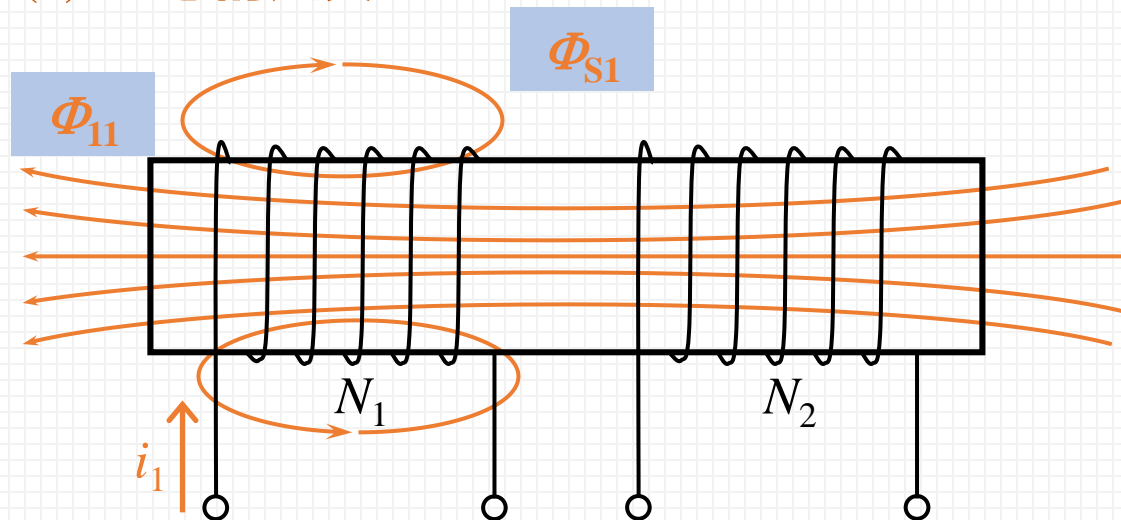
$$u = -e = L\frac{di}{dt}$$



$$u = L\frac{di}{dt}$$

电感确定 $u-i$ 关系无需考虑线圈绕向

(1) 互感的定义



同理有

线圈2的自感

$$L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2}$$

线圈2对1的互感

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$$

$$L_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_{11}}{i_1}$$

线圈1的自感

磁链 ψ_{11}

$$\psi_{11} = N_1 \Phi_{11}$$

磁通 Φ_{11}

磁通 Φ_{21}

$$\psi_{21} = N_2 \Phi_{21}$$

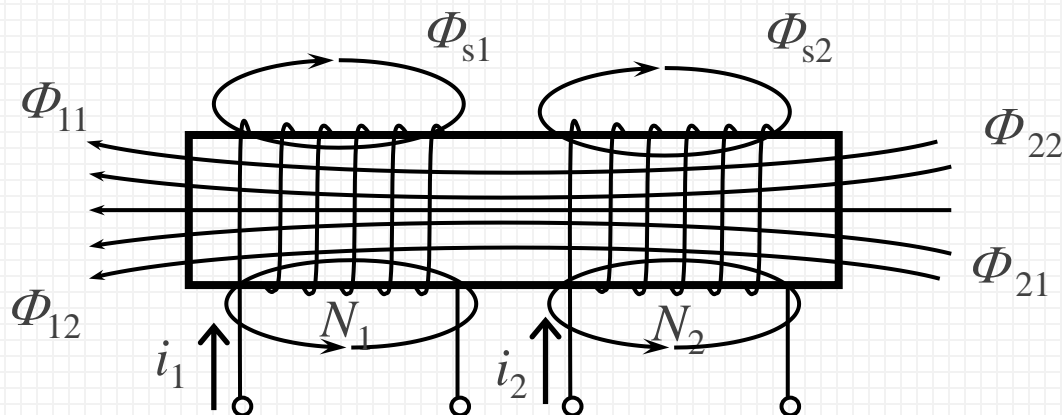
磁链 ψ_{21}

载流回路1中的电流 i_1

磁感应强度 B

$$M_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_{21}}{i_1}$$

线圈1对2的互感



线圈1的自感

$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1}$$

$$L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2}$$

线圈2的自感

线圈1对2的互感

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1}$$

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$$

线圈2对1的互感

(2) 互感的性质

$$M \propto N_1 N_2$$

单位 亨 (H)

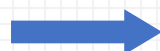
a) 对于线性电感 $M_{12} = M_{21} = M$

b) 互感系数 M 只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关。

(3) 耦合系数 k (coupling coefficient)

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$M^2 \leq L_1 L_2$$



$$k \leq 1$$

互感不大于两个自感的几何平均值。

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}$$

$$L_2 = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$

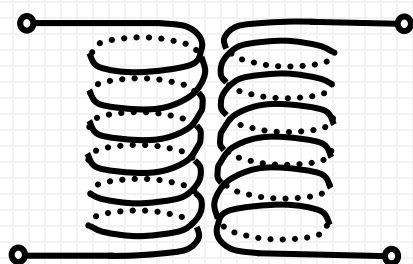
$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}$$

全耦合: $k = 1 \longrightarrow \Phi_{S1} = \Phi_{S2} = 0$

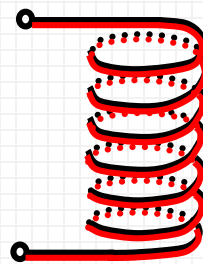
互感现象 $\begin{cases} \text{利用} \text{ —— 变压器, 信号和功率的传递} \\ \text{避免} \text{ —— 合理布置线圈以减少干扰} \end{cases}$

$$\Phi_{11} = \Phi_{S1} + \Phi_{21}$$

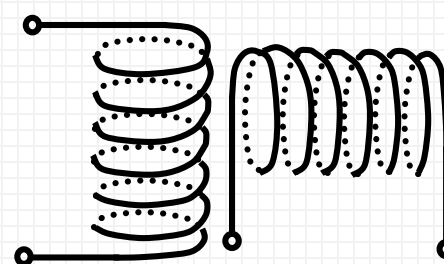
$$\Phi_{22} = \Phi_{S2} + \Phi_{12}$$



$k < 1$

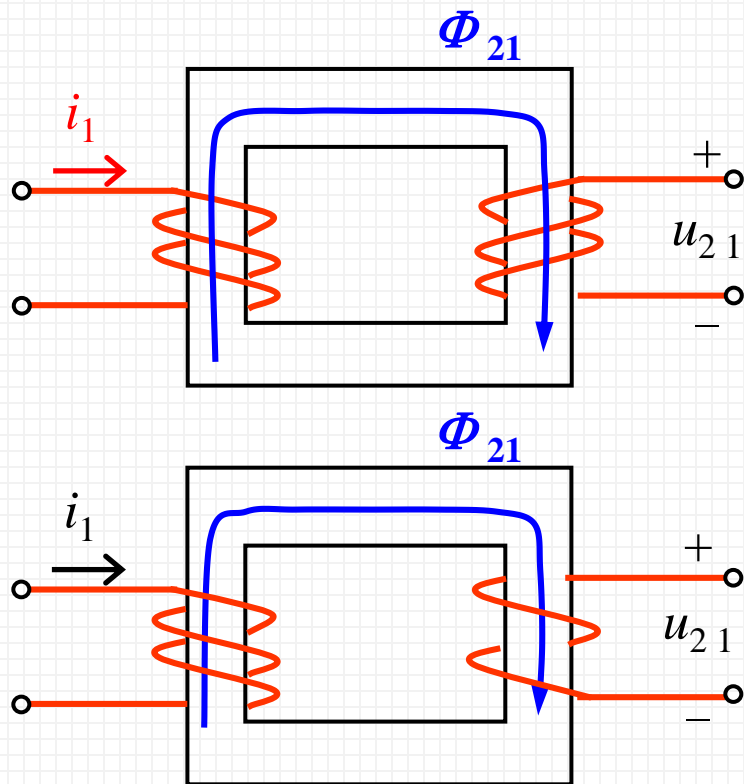


$k = 1$



$k = 0$

(4) 互感电压



i_1, Φ_{21} 右手螺旋定则

Φ_{21}, e_{21} 右手螺旋定则

互感电压的方向与互感线圈的**绕向**有关！！

i_1, Φ_{21} 右手螺旋定则

Φ_{21}, e_{21} 右手螺旋定则

由电磁感应定律

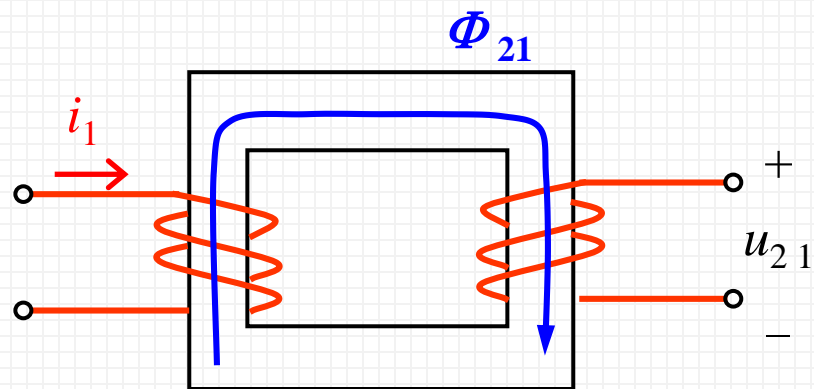
$$e_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{21} = -e_{21} = M \frac{di_1}{dt}$$

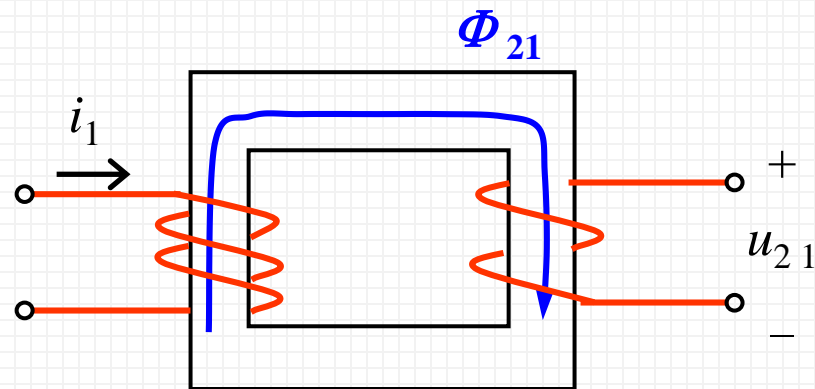
$$e_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{21} = e_{21} = \ominus M \frac{di_1}{dt}$$

难道需要画绕向才能定电压吗？

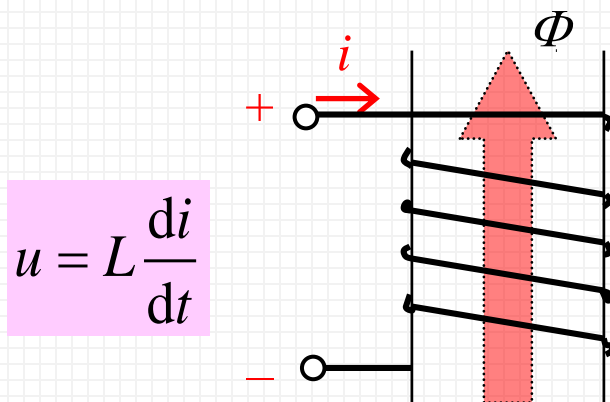


$$u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$$

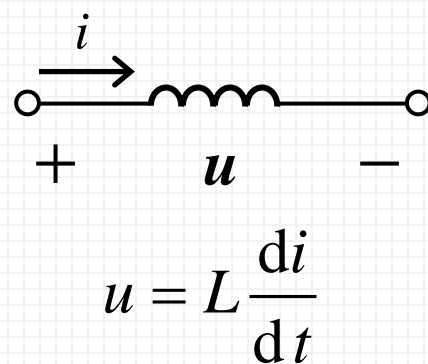


$$u_{21} = -M \frac{di_1}{dt}$$

如何规定 i_1 和 u_{21} 的参考方向关系，使得互感电压总是正的？



$$u = L \frac{di}{dt}$$

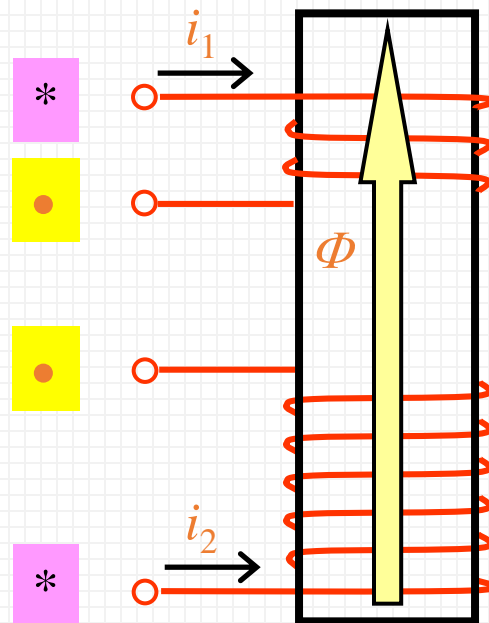
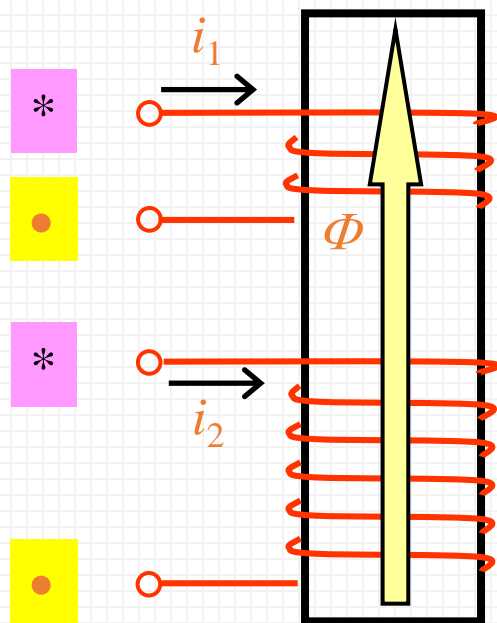


$$u = L \frac{di}{dt}$$

2、同名端 (Dot Convention)

同名端：当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入，其所产生的磁场相互加强时，则这两个对应端子称为同名端。

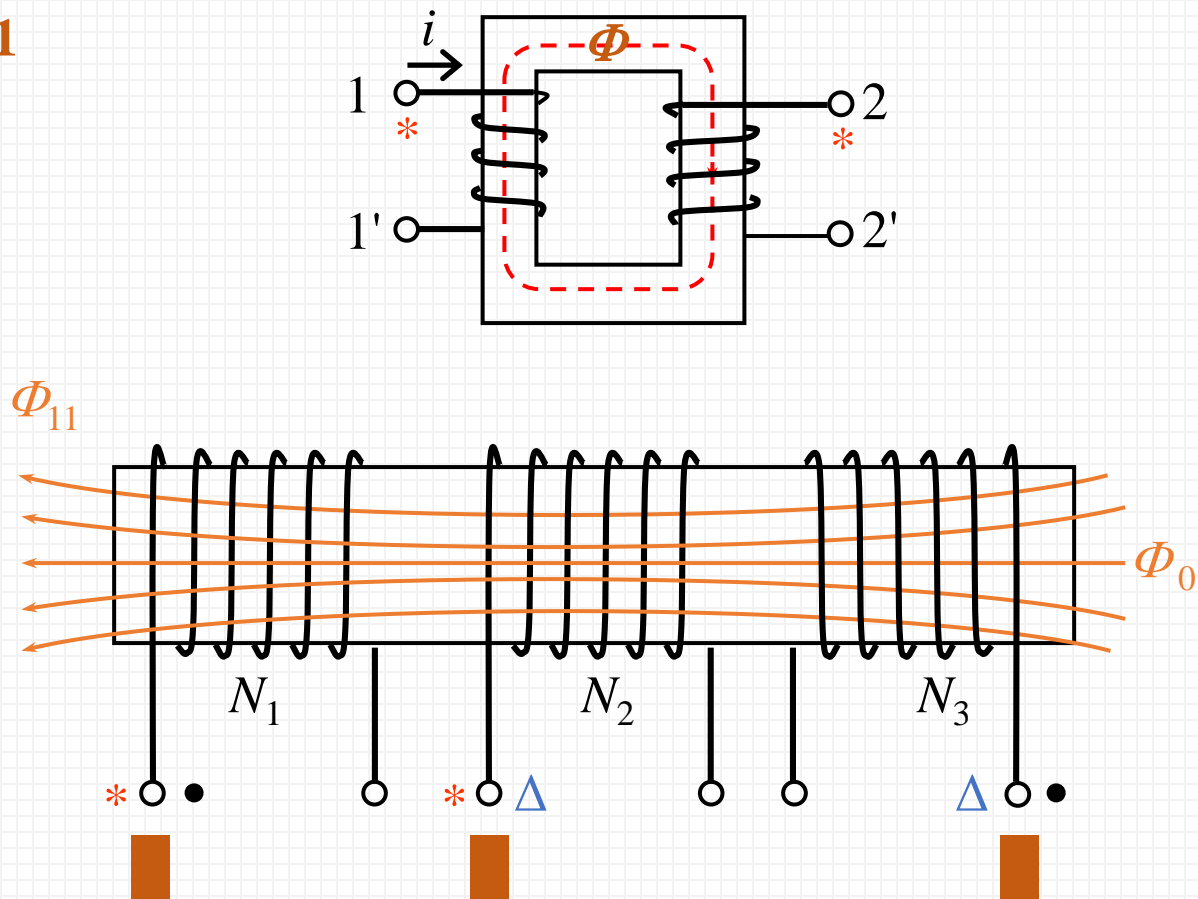
需要解决的问题1：如何根据绕法确定同名端？



注意：线圈的同名端必须**两两**确定。



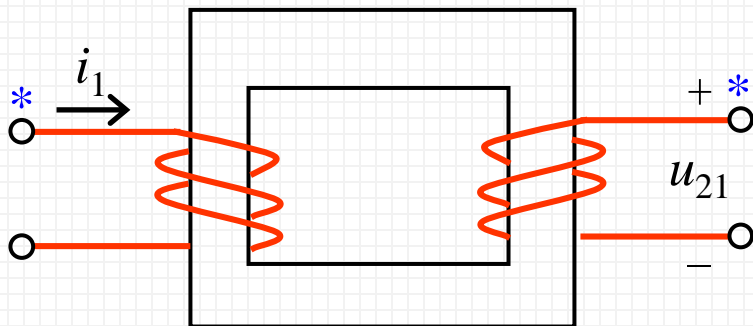
例1



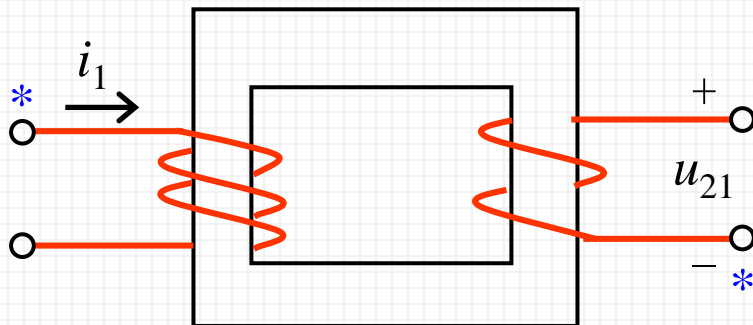
如果3个绕组根据线圈之间的两组关系可以确定另一组关系，
则可以用3个点来代替6个点。



需要解决的问题2：如何根据同名端确定互感电压？



$$u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$$



$$u_{21} = -M \frac{di_1}{dt}$$



需要解决的问题2：如何根据同名端确定互感电压？



$$u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$$

标注同名端后，无需绕向即可确定电压



$$u_{21} = -M \frac{di_1}{dt}$$

规律：如果**电流**参考方向**从同名端流入**，
互感**电压**参考方向在**同名端为正**。

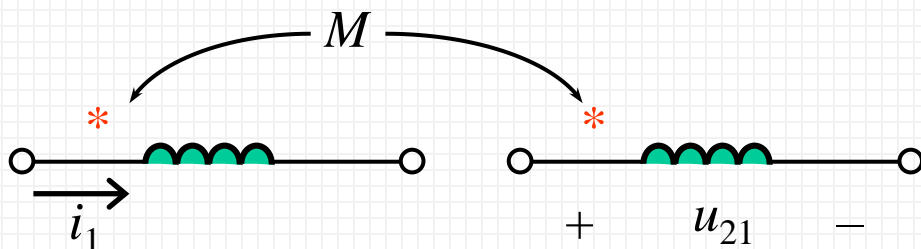
则

$$u = M \frac{di}{dt}$$

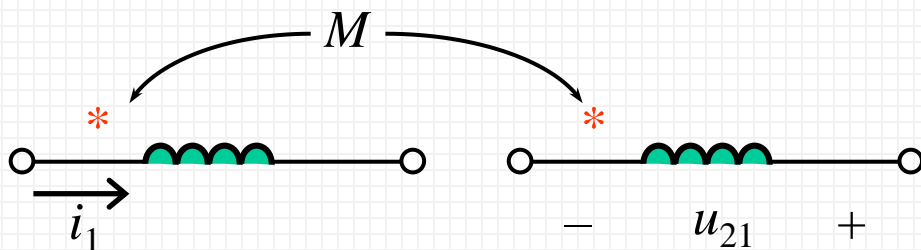
重要！！



例2

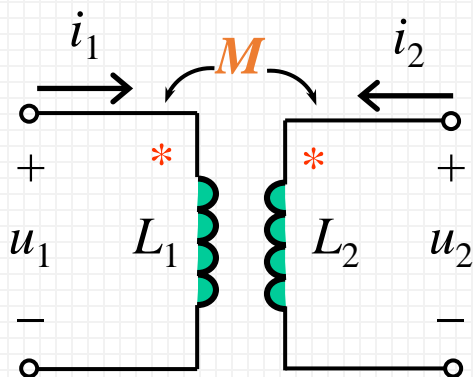


$$u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$$



$$u_{21} = \boxed{-} M \frac{di_1}{dt}$$

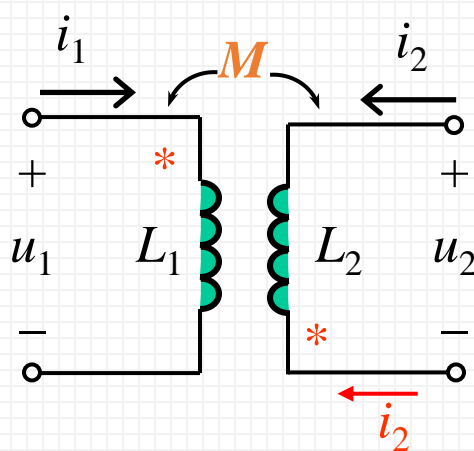
例3



时域形式

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

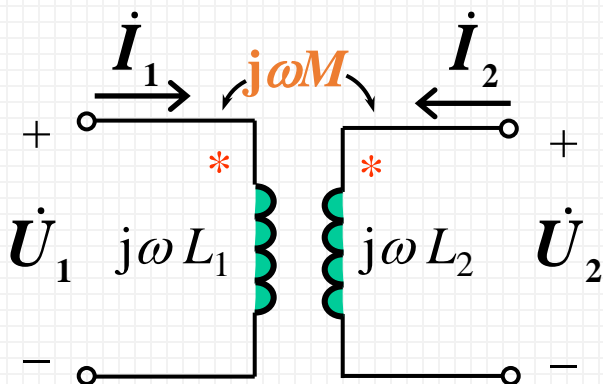
$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$$

在正弦稳态分析中，其相量形式的方程为

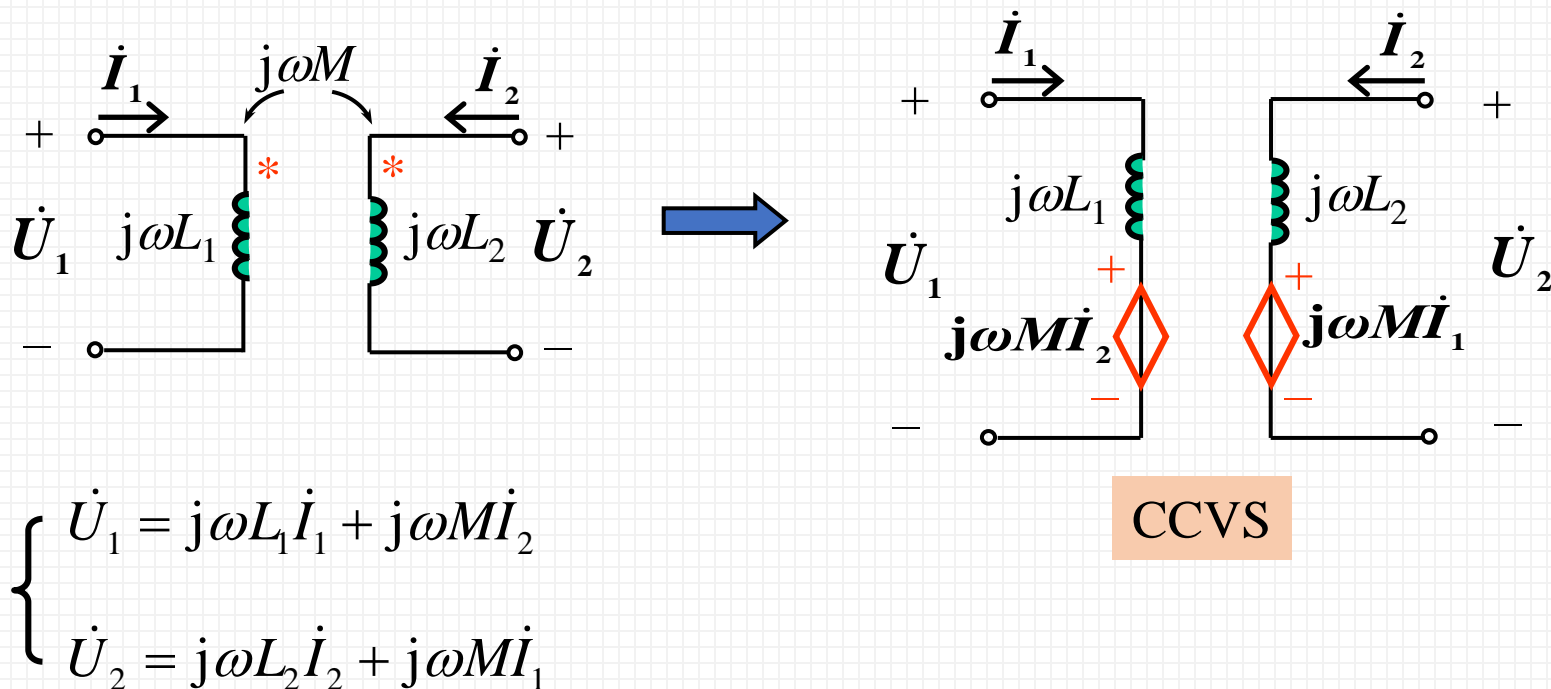


$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2$$



互感线圈的等效电路

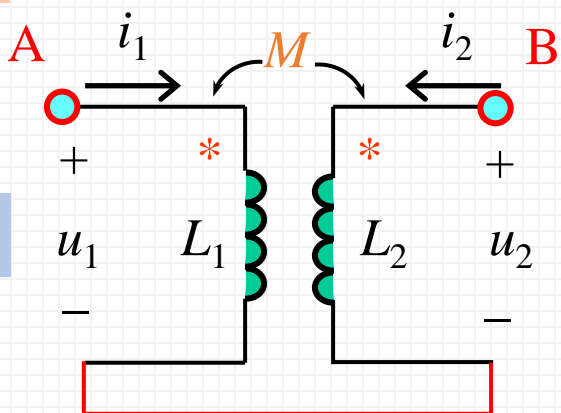




3、互感的去耦等效

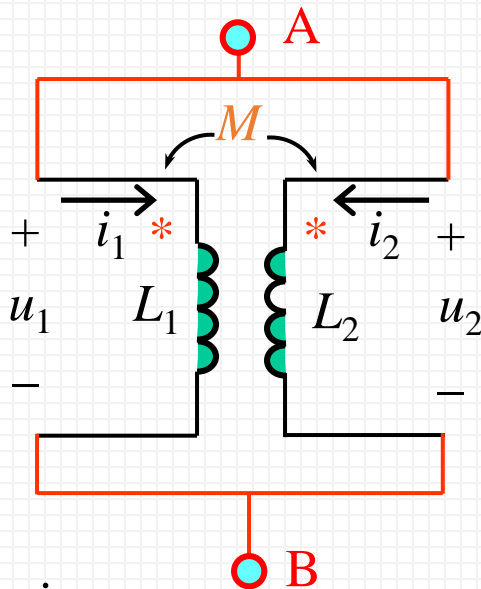
串联

4端→2端



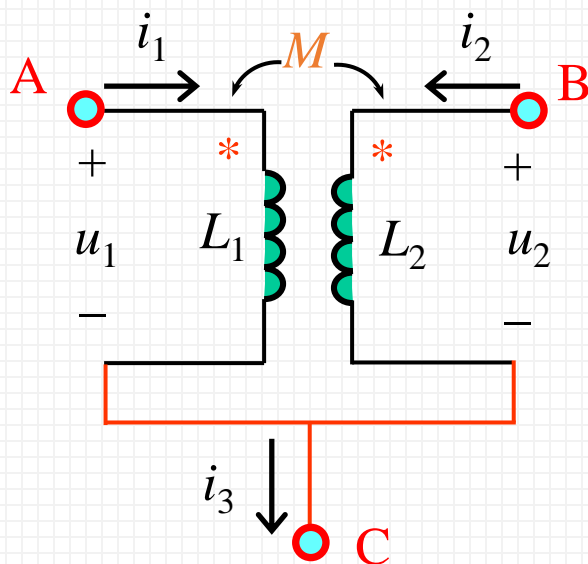
并联

4端→2端



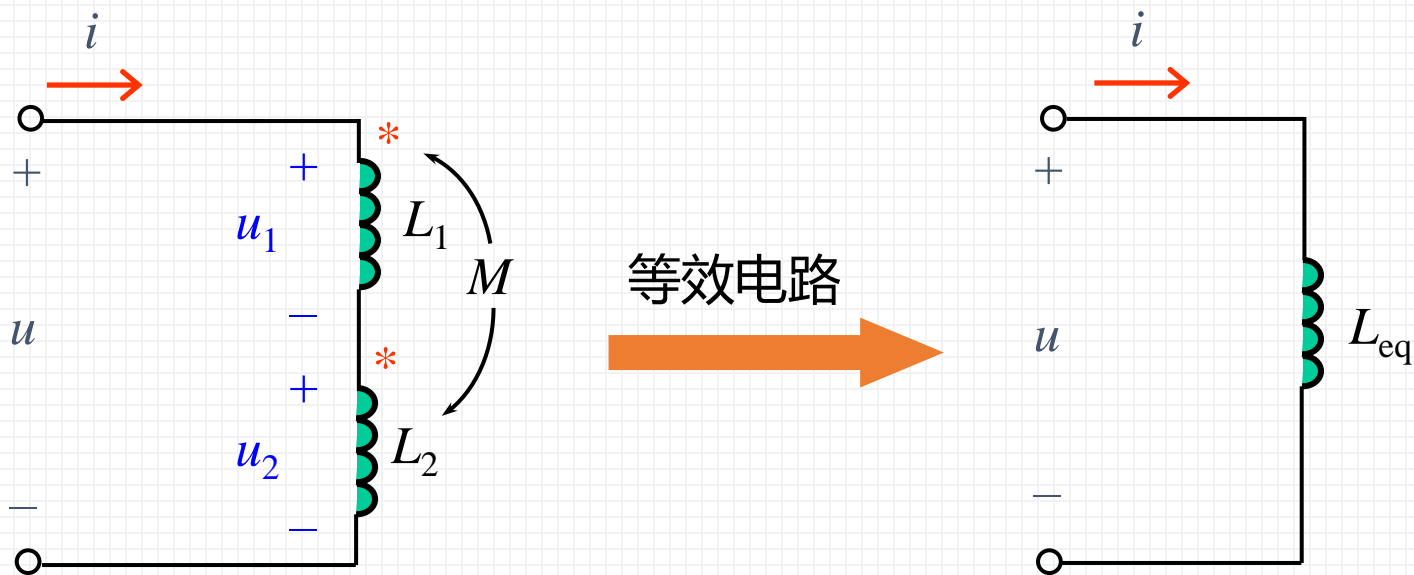
单公共节点联

4端→3端



(1) 互感线圈的串联

同名端顺串连接



$$u = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

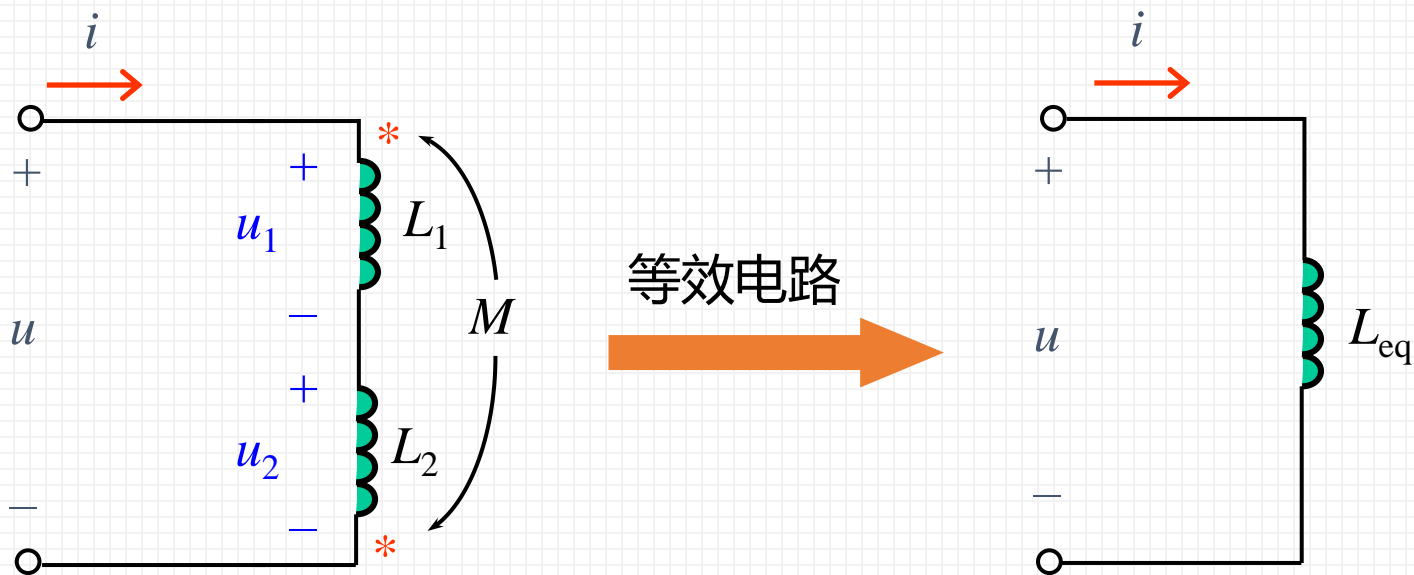
$$= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}$$

$$= L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$



同名端反串连接



$$u = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}$$

$$= L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M \geq 0$$



问题：你手头有一个电感测量装置
(比如你作业中设计的电桥)，
如何测量两线圈之间的互感值？

$$L_{\text{顺}} = L_1 + L_2 + 2M$$

$$L_{\text{反}} = L_1 + L_2 - 2M$$



问题：如何测量互感值？

$$L_{\text{顺}} = L_1 + L_2 + 2M$$

$$L_{\text{反}} = L_1 + L_2 - 2M$$

* 顺接一次，反接一次，就可以测出互感：

$$M = \frac{L_{\text{顺}} - L_{\text{反}}}{4}$$

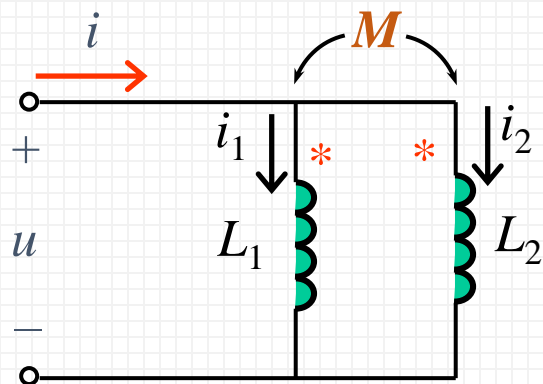
* 全耦合 $M = \sqrt{L_1 L_2}$

当 $L_1 = L_2 = L$ 时， $M = L$

$$L_{\text{eq}} = \begin{cases} 4M & \text{顺串} \\ 0 & \text{反串} \end{cases}$$

(2) 互感线圈的并联

同名端在同侧



$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

解得 u, i 的关系

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt}$$

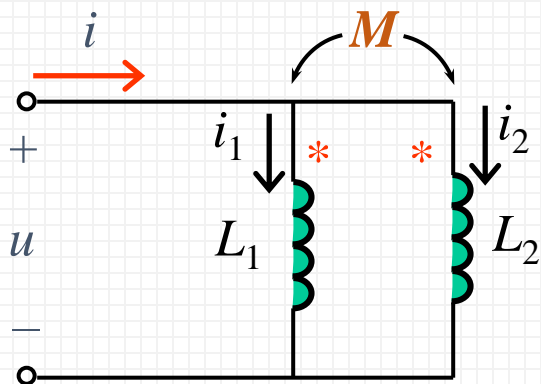
$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$



记不住



同名端在同侧互感并联电路的去耦等效分析



$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$i_2 = i - i_1$$

$$i_1 = i - i_2$$

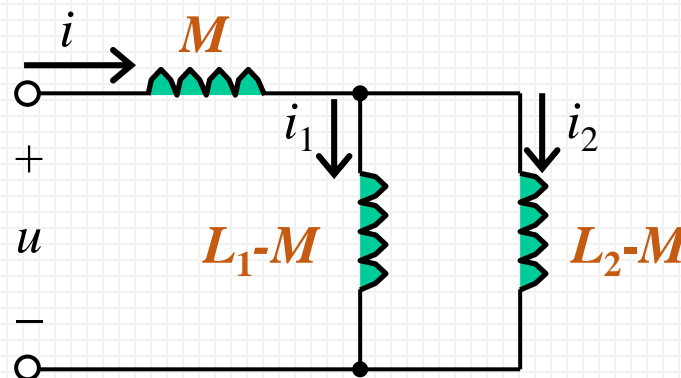
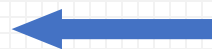
$$\begin{cases} u = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di}{dt} \\ u = (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di}{dt} \end{cases}$$



$$(L_1 - M) // (L_2 - M) + M$$

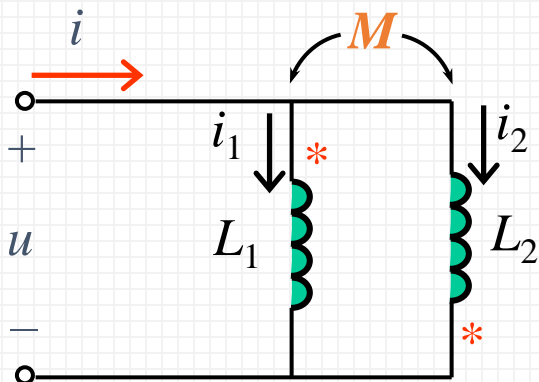
$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

画等效电路



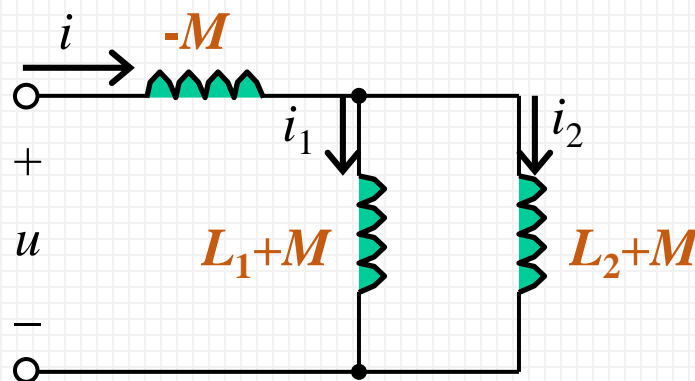


同理可推得同名端在异侧互感并联电路的去耦等效分析



$$\begin{cases} u = (L_1 + M) \frac{di_1}{dt} - M \frac{di}{dt} \\ u = (L_2 + M) \frac{di_2}{dt} - M \frac{di}{dt} \end{cases}$$

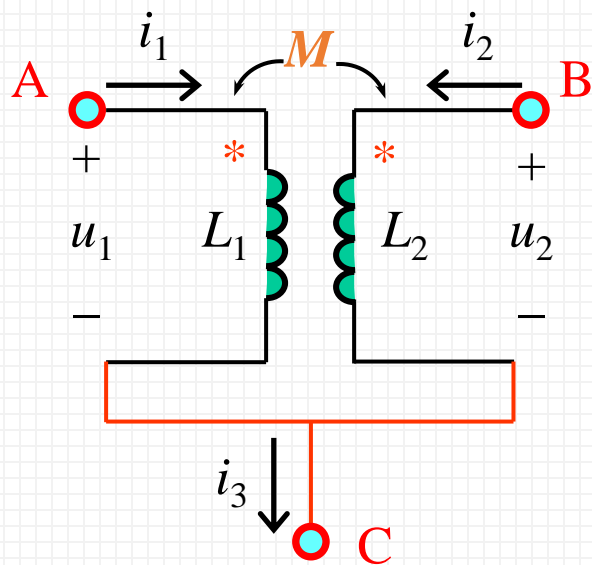
等效电路



$$(L_1 + M) // (L_2 + M) - M$$

$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M}$$

(3) 有一个公共节点互感线圈的去耦等效电路



2 个同名端都靠近
(远离) 公共节点

$$u_{AC} = u_1$$

$$= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$= (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_3}{dt}$$

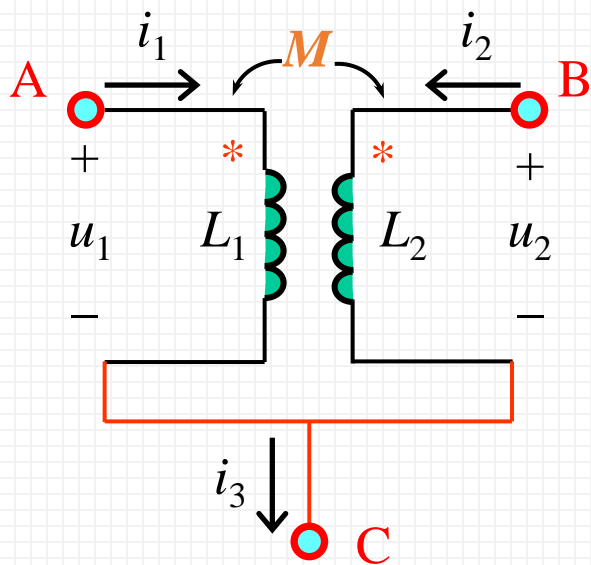
$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$u_{BC} = u_2$$

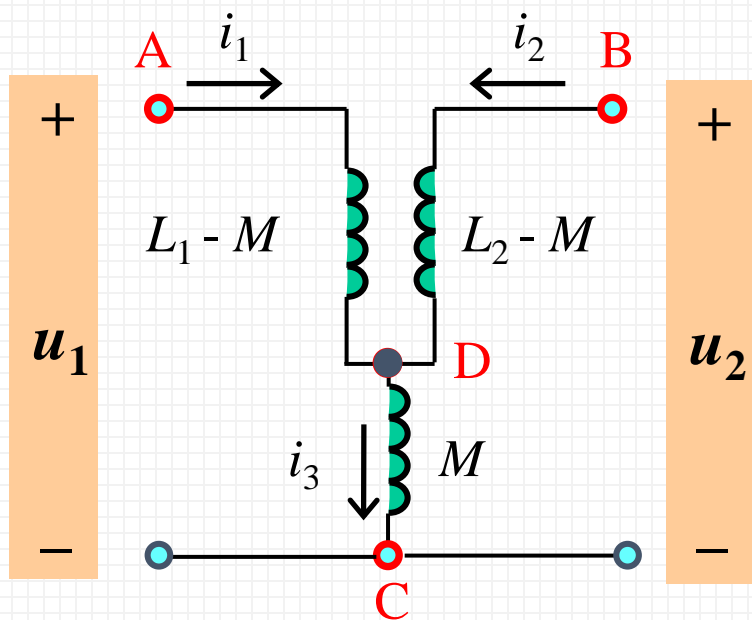
$$= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

$$= (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt}$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$



等效电路



$$u_{AC} = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_3}{dt}$$

$$u_{BC} = (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt}$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

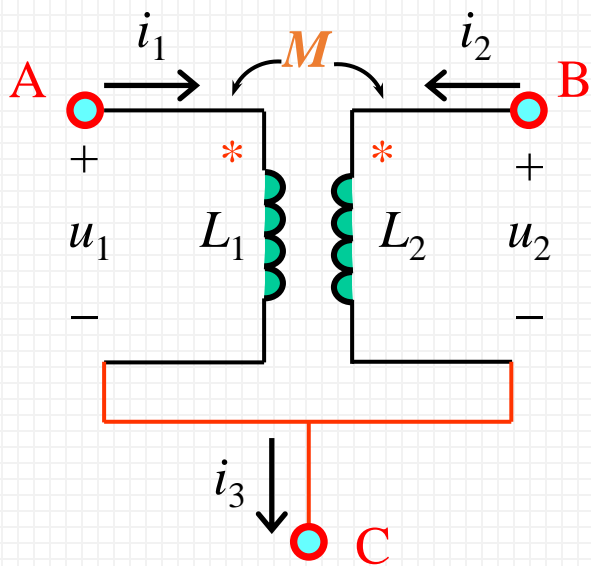
强调:

多了个节点D

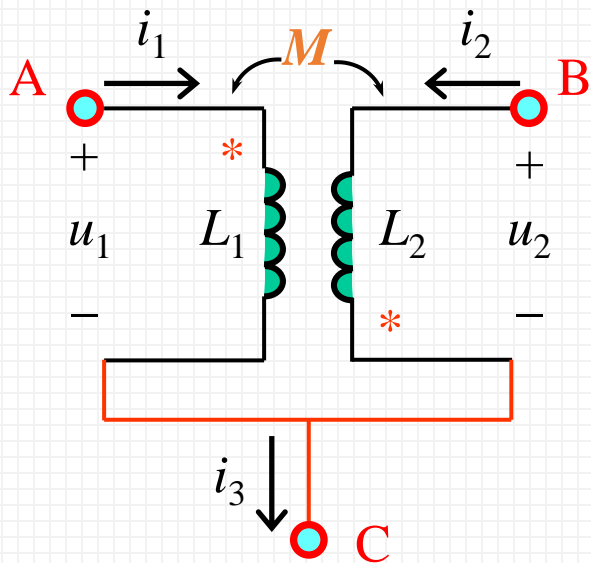
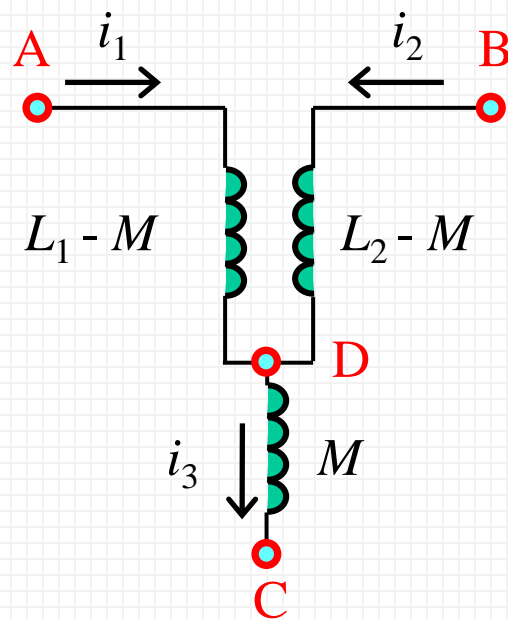
$$u_1 = u_{AC} \neq u_{AD}$$

$$u_2 = u_{BC} \neq u_{BD}$$

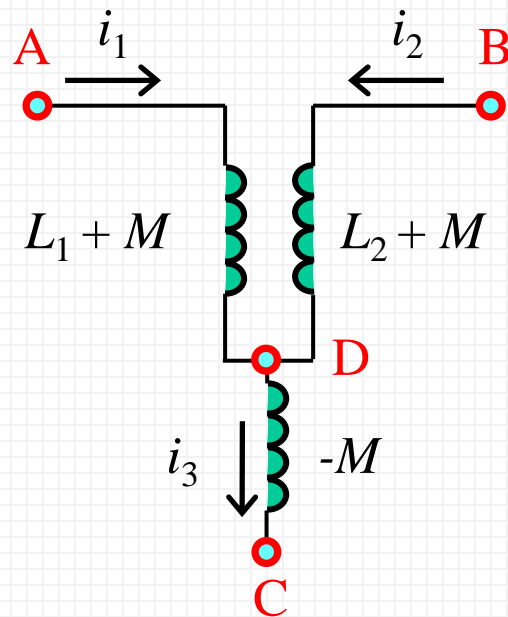
 $L_1 - M, L_2 - M, M$ 都不是真电感



2 个同名端都靠近
(远离) 公共节点

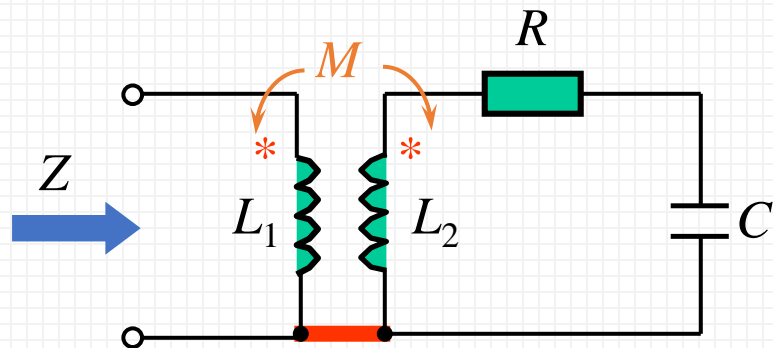


同名端1个靠近、
1个远离公共节点

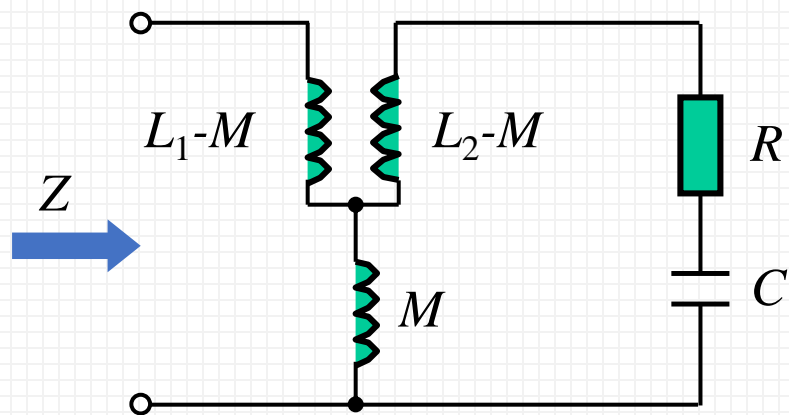




例1 已知如图，求入端阻抗 $Z=?$



法一 端口加压求流

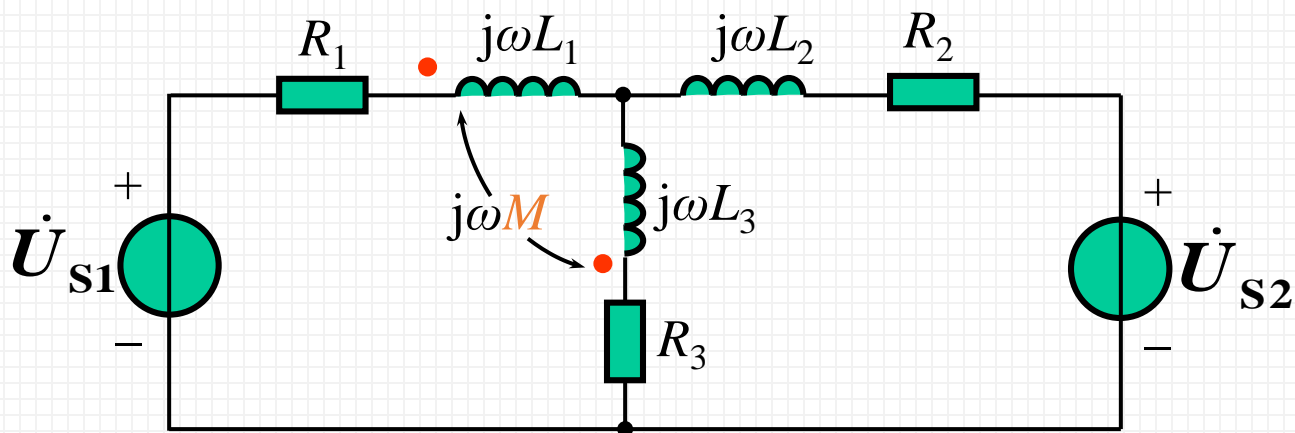


法二 去耦等效

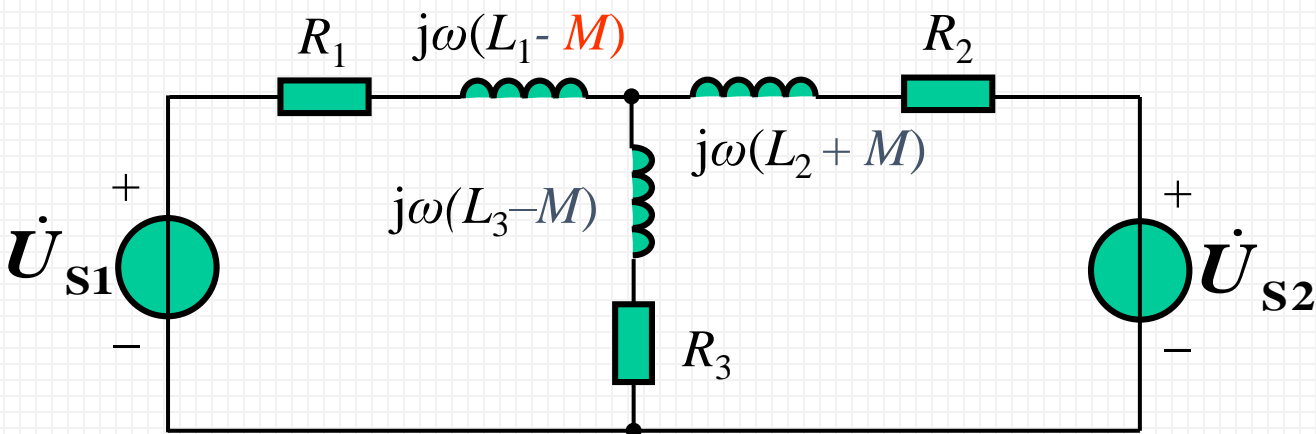




例2 画出下图电路的去耦等效电路。

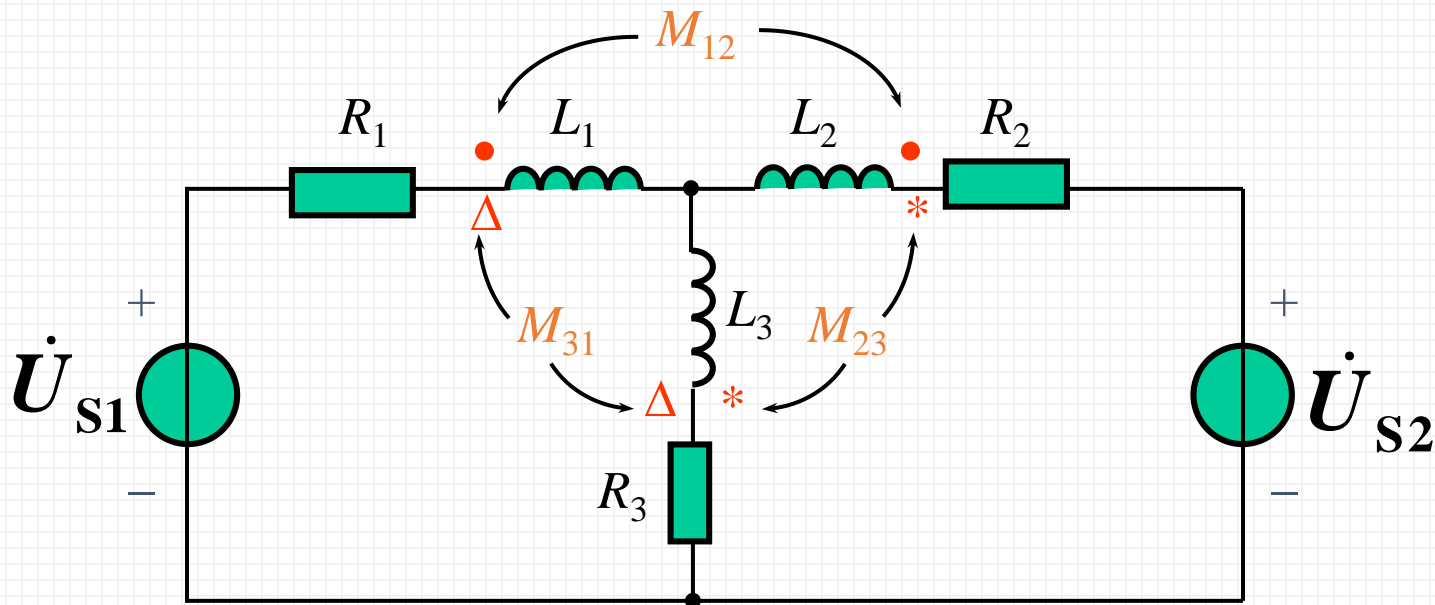


去耦等效电路



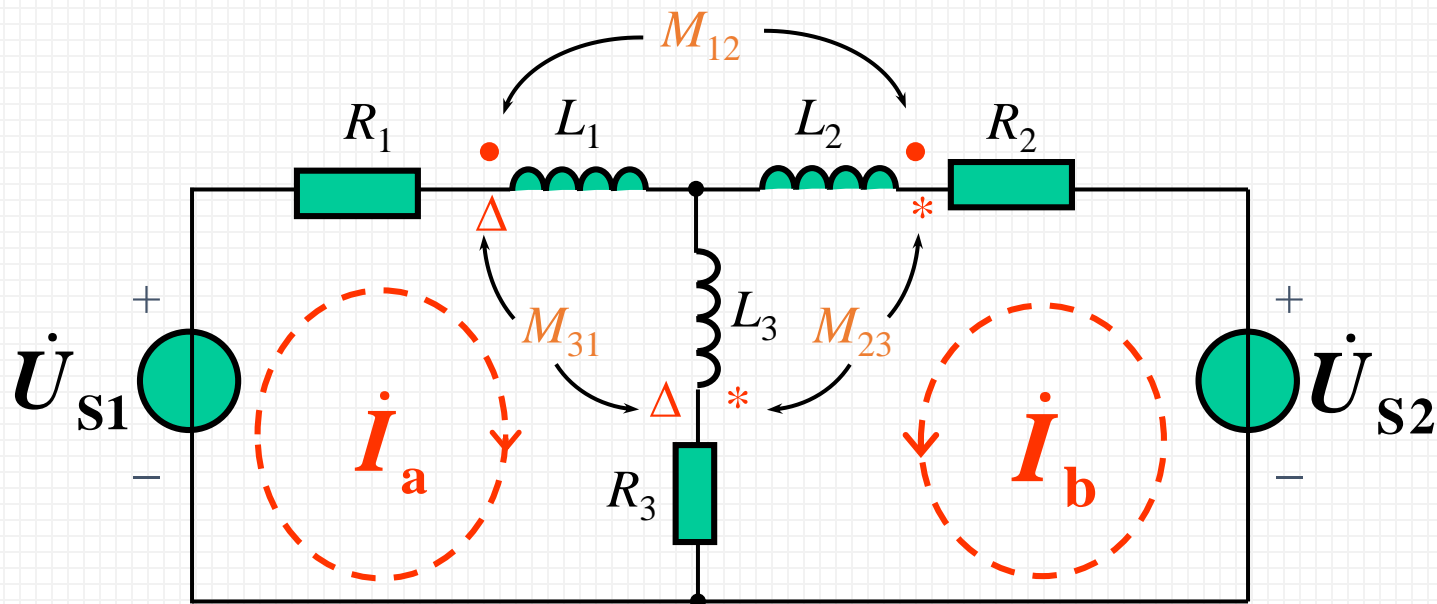


例3 列写电路的回路电流方程。



法1: 直接列写

法2: 去耦等效

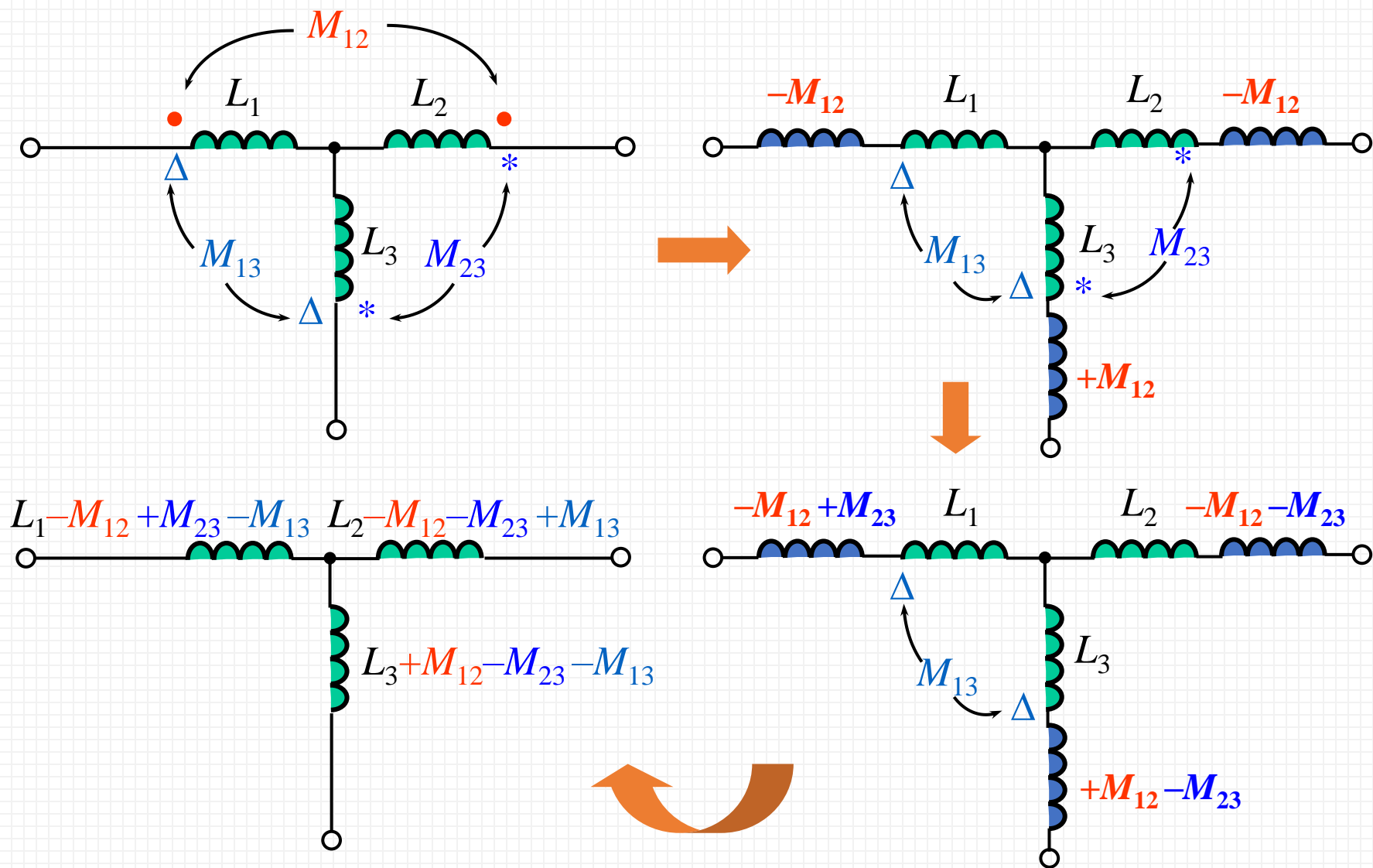


法1: 直接列写 先不考虑互感, 再补充互感电压

$$\begin{cases}
 (R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_3 + R_3) \dot{I}_a + (R_3 + j\omega L_3) \dot{I}_b \\
 -j\omega M_{31} \dot{I}_a - j\omega M_{31} \dot{I}_a + j\omega M_{12} \dot{I}_b - j\omega M_{23} \dot{I}_b - j\omega M_{31} \dot{I}_b = \dot{U}_{S1} \\
 (R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3 + R_3) \dot{I}_b + (R_3 + j\omega L_3) \dot{I}_a \\
 + j\omega M_{12} \dot{I}_a - j\omega M_{31} \dot{I}_a - j\omega M_{23} \dot{I}_a - j\omega M_{23} \dot{I}_b - j\omega M_{23} \dot{I}_b = \dot{U}_{S2}
 \end{cases}$$

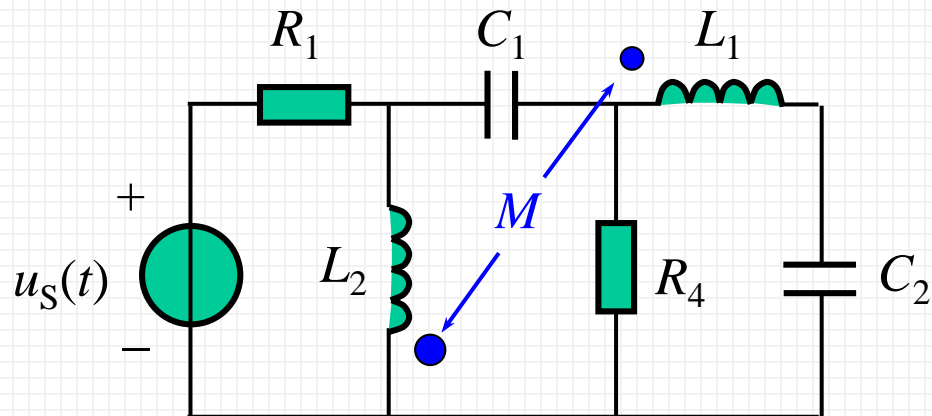
注意: ① 不丢互感电压项; ② 互感电压的正、负。

法2 去耦等效电路(一对一对消)





去耦等效不是万能的



没有公共点

怎么办？