

Review

第二型曲面积分的计算

- 方法一：化第二型曲面积为第一型曲面积分

$$\iint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

其中 $\vec{v} = (P, Q, R)$

- 方法二： $S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (PA + QB + RC) du dv.$$

其中 $A = \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, B = \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, C = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$

- 方法三 $S : z = f(x, y), (x, y) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) dx dy.$$

- 方法四: 直接化二重积分 S 在坐标面上的投影区域上的二重积分

$$\iint_S P dy \wedge dz = \pm \iint_{D_{yz}} P dy dz$$

$$\iint_S Q dz \wedge dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q dx dz$$

$$\iint_S R dx \wedge dy = \pm \iint_{D_{xy}} R dx dy$$



§ 5. Green公式及其应用

1. Green公式

Thm. (*Green*公式) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界区域, 其边界 ∂D 是逐段光滑的有向曲线. 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 内连续可微, 在闭区域 $\bar{D} = D \cup \partial D$ 上连续, 则

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

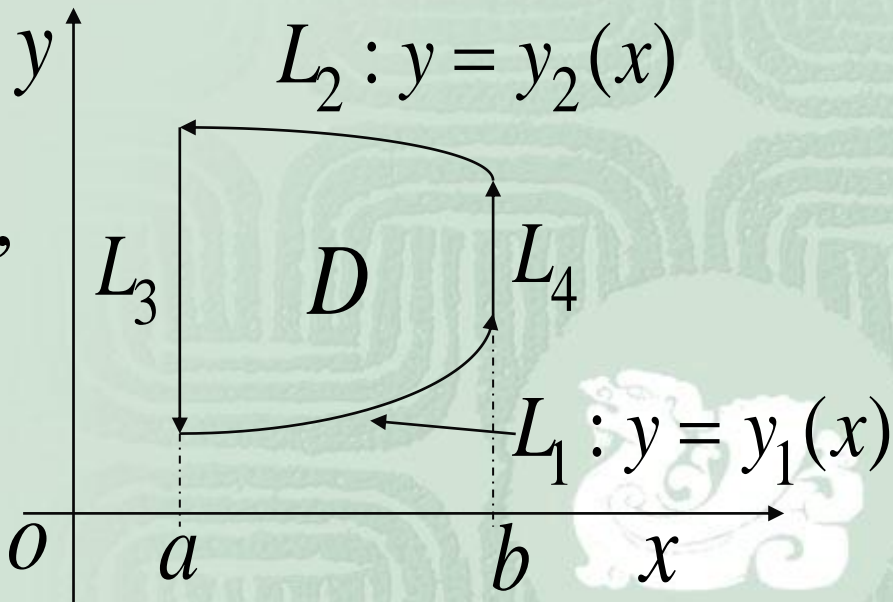
Remark: *Green*公式中 ∂D 为有向曲线, 沿 ∂D 的正向前进时, 区域 D 总在左侧.

Proof: 只要证明以下两式:

$$\oint_{\partial D} Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy, \quad \oint_{\partial D} Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

以下证第一式, 第二式同理可证.

Case1. 先考虑简单情形, 设 D 可表示为

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$
$$y_1, y_2 \in C[a, b].$$
$$\partial D = \bigcup_{i=1}^4 L_i$$


The diagram shows a region D in the xy -plane. The region is bounded by $x=a$ and $x=b$, and $y_1(x)$ and $y_2(x)$. The boundary is composed of four parts: L_1 (bottom curve), L_2 (top curve), L_3 (left vertical segment), and L_4 (right vertical segment). The origin is labeled O .

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

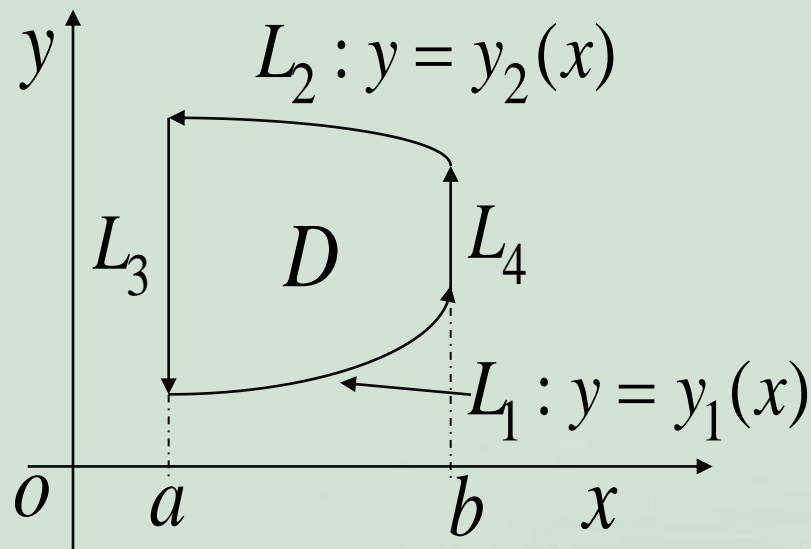
$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx$$

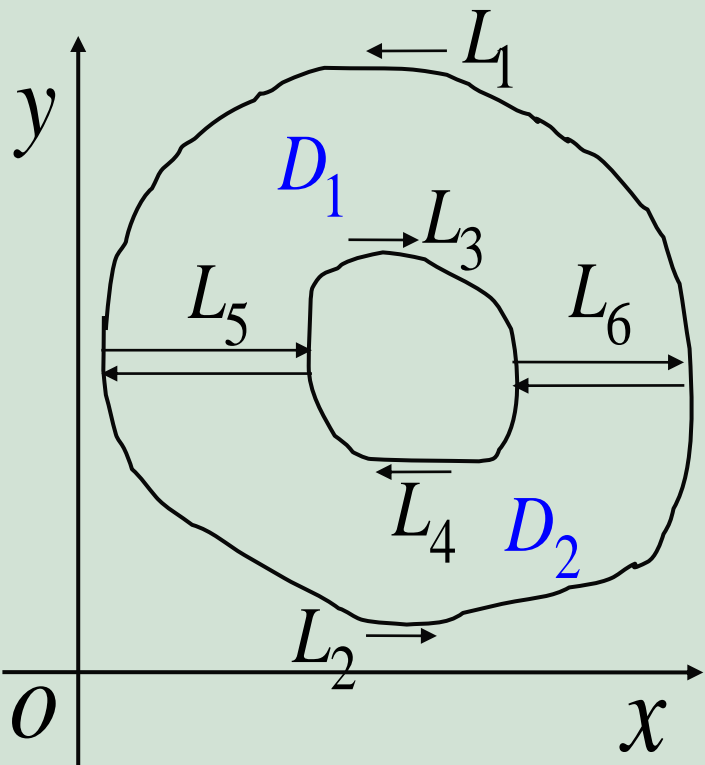
$$= -\int_{L_2} P(x, y) dx - \int_{L_1} P(x, y) dx.$$

注意到 $\int_{L_3} P(x, y) dx = \int_{L_4} P(x, y) dx = 0$, 于是

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\left(\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4} \right) P dx = -\oint_{\partial D} P dx.$$



Case 2. D 为多连通区域时, 可用辅助线将 D 分为若干个单连通区域 D_1, D_2, \dots, D_n . 不妨设添加辅助线 L_5, L_6 后, 可将区域 D 分成两个单连通区域 D_1, D_2 .



$$\begin{aligned}\partial D &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \\ \partial D_1 &= L_1 + L_3 + L_5 + L_6, \\ \partial D_2 &= L_2 + L_4 + \bar{L}_5 + \bar{L}_6.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} P dx &= \oint_{\partial D_1} P dx + \oint_{\partial D_2} P dx \\ &= -\iint_{D_1} P'_y dx dy - \iint_{D_2} P'_y dx dy \\ &= -\iint_D P'_y dx dy. \square\end{aligned}$$

Remark: *Green*公式是*Newton – Leibnitz*公式对于二元函数的某种推广.

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\oint_{\partial D} P dx,$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} Q dy.$$

Remark: 注意*Green*公式成立的条件: $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 内连续可微, 在闭区域 $\bar{D} = D \cup \partial D$ 上连续.

Remark. $\vec{v} = (P, Q)$, 利用梯度算子 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$,

定义旋度算子 $\nabla \times$, 记为

$$\text{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \triangleq \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{pmatrix},$$

则Green公式可写为

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_D \nabla \times \vec{v} dx dy.$$



例: 设 Ω 为 \mathbb{R}^2 中由分段连续可微曲线围成的闭区域. 则 Ω 的面积 $\sigma(\Omega)$ 可由以下各式计算.

$$\sigma(\Omega) = \oint_{\partial\Omega} xdy = -\oint_{\partial\Omega} ydx = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} xdy - ydx.$$

Proof: 由Green公式

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} xdy &= \iint_{\Omega} dxdy = \sigma(\Omega), \\ -\oint_{\partial\Omega} ydx &= \iint_{\Omega} dxdy = \sigma(\Omega). \square \end{aligned}$$



Remark: 设上例中 $\partial\Omega$ 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

则

$$\begin{aligned}\sigma(\Omega) &= \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} xdy - ydx \\ &= \pm \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt \\ &= \pm \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} dt\end{aligned}$$

实际计算时不必顾虑符号的选择, 只要对最后结果取绝对值即可.

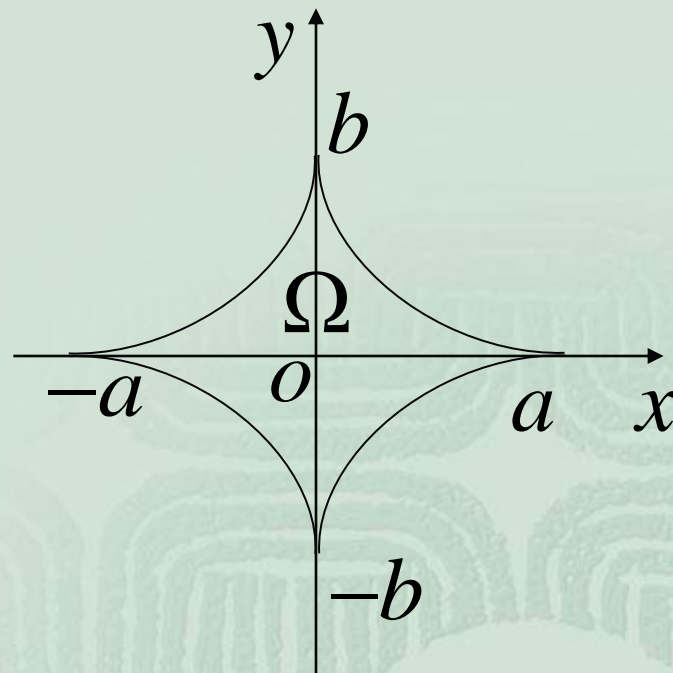
例: 求星形曲线 $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 所围成的平面图形 Ω 的面积.

解: $\sigma(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} xdy - ydx$

$$= \frac{3}{2} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

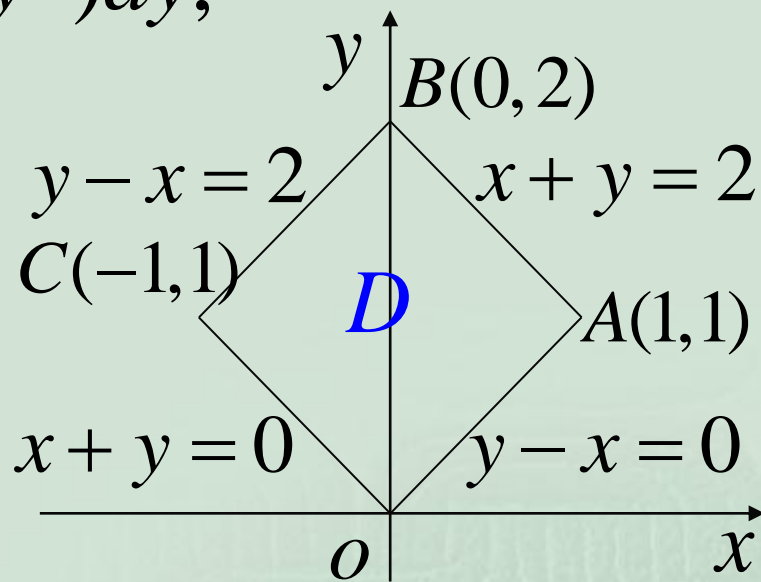
$$= \frac{3}{8} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt$$

$$= \frac{3}{16} ab \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3}{8} \pi ab. \square$$



例: $I = \oint_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy,$

L 是以 $OABC$ 为顶点的正方形 D 的边界 ∂D (逆时针方向).



解: 由Green公式

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \right) dx dy \\ &= 2 \iint_D (x - y) dx dy \quad (\text{令 } u = y - x, v = x + y) \\ &= 2 \iint_{0 \leq u, v \leq 2} -u \cdot \frac{1}{2} du dv = -\int_0^2 u du \int_0^2 dv = -4 \square \end{aligned}$$

例: $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, L 为椭圆周

$$x^2 + xy + y^2 = R^2 \text{ (逆时针).}$$

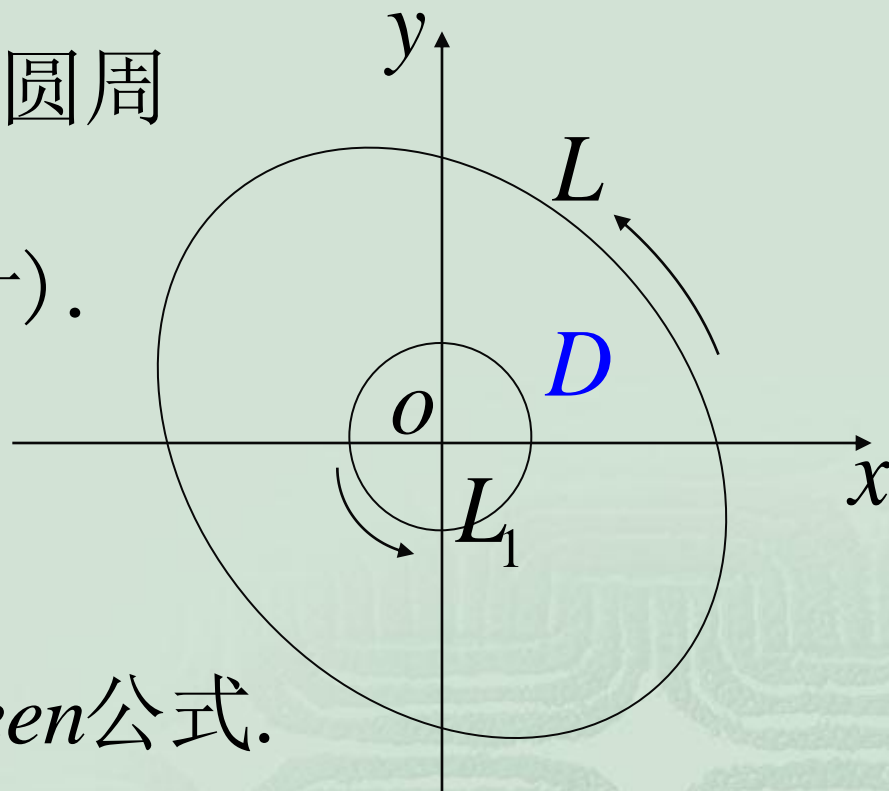
分析: 因为 P, Q 在原点无定义, 不能直接在椭圆

$x^2 + xy + y^2 = R^2$ 上用 *Green* 公式.

解: 设 L_1 为逆时针方向圆周 $x^2 + y^2 = r^2$, r 充分小, 从而 L_1 在 L 内部.

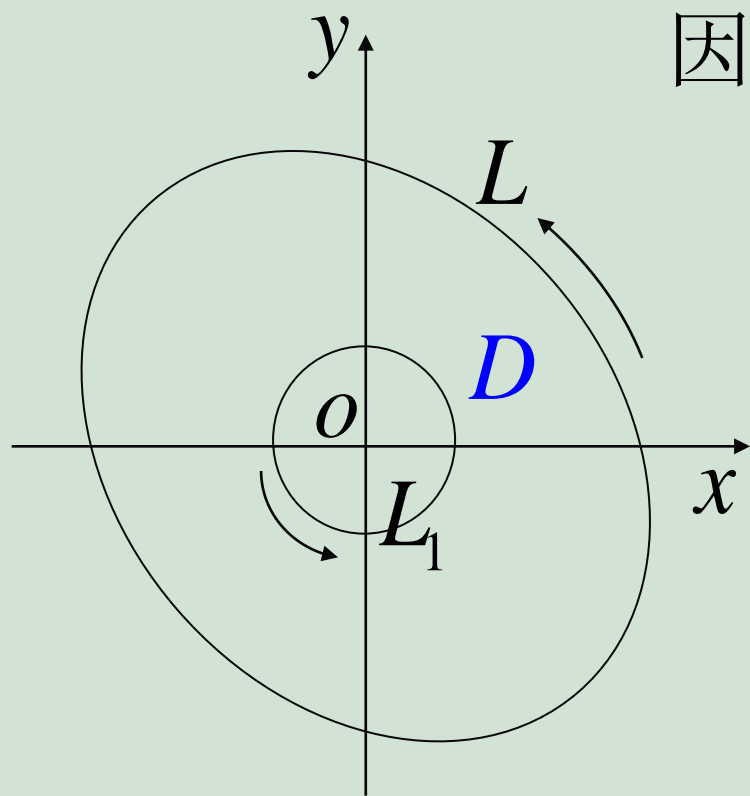
$$P = -y/(x^2 + y^2), Q = x/(x^2 + y^2),$$

在 L 与 L_1 围成的环形区域 D 上 $Q'_x - P'_y \equiv 0$.



由Green公式,

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \oint_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D 0dxdy = 0.$$



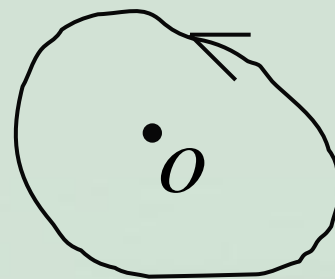
因此, $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

$$= \oint_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} d\theta$$
$$= 2\pi. \square$$

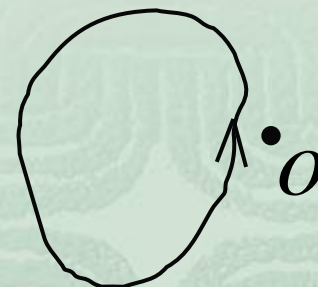


Remark: $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$

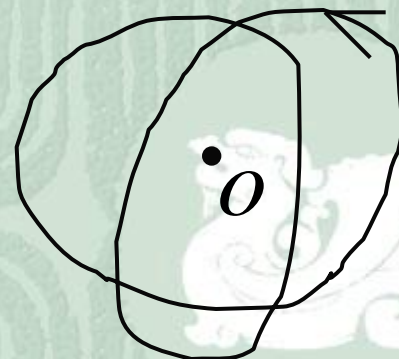
•若 L 为分段光滑简单正向闭曲线, 原点在其内部, 则 $I = 2\pi$;



•若 L 为分段光滑简单正向闭曲线, 原点在其外部, 则 $I = 0$;



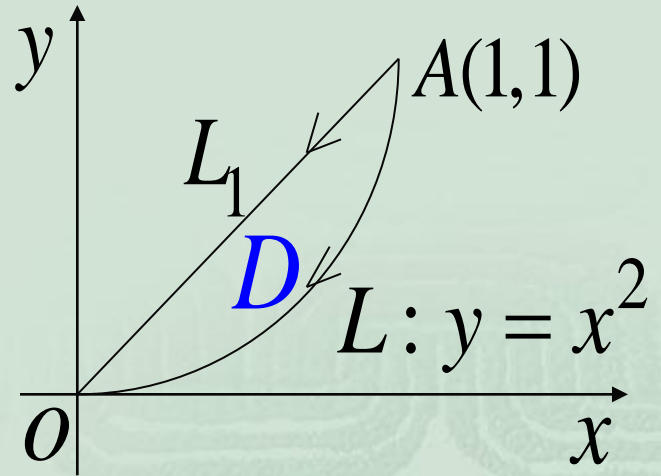
•若 L 为分段光滑正向闭曲线, 绕原点 n 圈, 则 $I = 2n\pi$.



例 $I = \int_L x e^{-(x^2-y^2)} (1-x^2-y^2) dx + y e^{-(x^2-y^2)} (1+x^2+y^2) dy.$

其中 L 为 $y = x^2$ 上从 $A(1,1)$ 到 $O(0,0)$ 的一段.

解: 设 L_1 为从 A 到 $O(0,0)$ 的有向
线段, 记 L_1 与 L 所围区域为 D . 令



$$P = x e^{-(x^2-y^2)} (1-x^2-y^2),$$

$$Q = y e^{-(x^2-y^2)} (1+x^2+y^2),$$

$$\text{则 } Q'_x = P'_y = -2xy(x^2+y^2)e^{-(x^2-y^2)}.$$

$$\text{由 Green 公式, } \int_{L \cup L_1} P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = 0.$$

$$\text{于是 } I = \int_L P dx + Q dy = \int_{L_1} P dx + Q dy = \int_1^0 2t dt = -1. \square$$

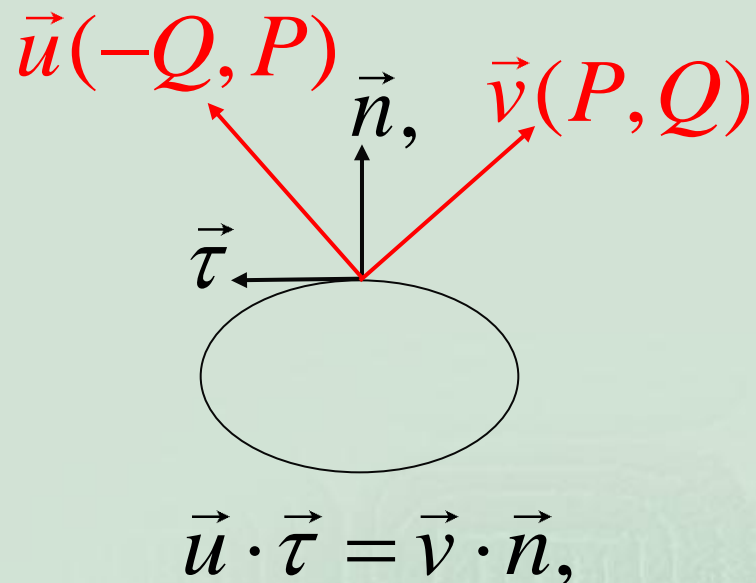
2. Green公式的变形

$$\vec{v} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

$$\vec{u} = -Q(x, y)\vec{i} + P(x, y)\vec{j},$$

$\vec{\tau}$ 为 ∂D 的单位正切向量,

\vec{n} 为 ∂D 的单位外法向量



$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \int_{\partial D} \vec{u} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y} \right) dx dy.$$

于是得到Green公式的等价形式



$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_D (P'_x + Q'_y) dx dy.$$

$\vec{v} = (P, Q)$, 利用梯度算子 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, 定义

散度算子 $\nabla \cdot$, 记为

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} \triangleq P'_x + Q'_y.$$

于是Green公式可记为

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_D \nabla \cdot \vec{v} dx dy.$$



例: 设 Ω 为平面区域, $u(x, y) \in C^2(\Omega)$. 证明:

$u(x, y)$ 是调和函数(即 $\Delta u \triangleq u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0$)

\Leftrightarrow 对 Ω 内任意圆(域) D , 有 $\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dl = 0$.

Proof. " \Rightarrow " 设 u 是调和函数, D 为 Ω 中圆, 由Green公式的等价形式

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dl &= \oint_{\partial D} \text{grad} u \cdot \vec{n} dl \\ &= \iint_D (u''_{xx} + u''_{yy}) dx dy = 0. \end{aligned}$$



" \Leftarrow ": (反证法) 设 $u''_{xx} + u''_{yy}$ 在 Ω 上不恒为 0. 则不妨设 $\exists (x_0, y_0) \in \Omega, s.t.$

$$u''_{xx}(x_0, y_0) + u''_{yy}(x_0, y_0) = a > 0.$$

由 u 的二阶连续可微性, $\exists \delta > 0$, 使得在

$$D = \{(x, y) \in \Omega \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2\}$$

上 $u''_{xx} + u''_{yy}$ 的值 $\geq a/2$. 于是

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dl = \iint_D (u''_{xx} + u''_{yy}) dx dy \geq (a/2) \cdot \pi \delta^2 > 0.$$

与已知矛盾. 故在区域 Ω 上 $u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0$. \square

例: $f(x, y) \in C^2(\mathbb{R})$, $f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

证明: (1) $\oint_{L_r} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dl = \pi(1 - e^{-r^2})$, $L_r : x^2 + y^2 = r^2$, 逆时针.

$$(2) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (xf'_x + yf'_y) dx dy = \frac{\pi}{2e}.$$

Proof. (1) $\oint_{L_r} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dl = \oint_{L_r} \text{grad} f \cdot \vec{n} dl$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (f''_{xx} + f''_{yy}) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= \pi(1 - e^{-r^2}).$$

(2) 由(1)得:

$$\begin{aligned}\pi(1 - e^{-r^2}) &= \oint_{L_r} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dl = \oint_{L_r} \text{grad} f \cdot \vec{n} dl \\ &= \oint_{L_r} \frac{x f'_x + y f'_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl = \int_0^{2\pi} (r \cos \theta f'_x + r \sin \theta f'_y) d\theta\end{aligned}$$

于是 $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x f'_x + y f'_y) dx dy$

$$= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} (r \cos \theta f'_x + r \sin \theta f'_y) d\theta$$

$$= \int_0^1 \pi(1 - e^{-r^2}) r dr = \frac{\pi}{2e} \cdot \square$$



3.平面向量场

Def: 若连续向量场 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ 在区域 D 内的第二型曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路线无关 (只与 L 的起点和终点有关), 则称 \vec{v} 为区域 D 内的保守场.

Def. 有势场 \vec{u} : $\exists f, s.t., \vec{u} = \nabla f$

无源场 \vec{u} : $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

无旋场 \vec{u} : $\nabla \times \vec{u} = 0$



Thm. 设 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ 为区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的连续向量场, 则以下命题等价:

(1) $\vec{v} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 是 D 上的保守场,

(2) 对于 D 中任意逐段光滑的有向闭曲线 L ,

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

(3) $\vec{v} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 为 D 上有势场, 即存在函数 $f(x, y)$, 使得 $\text{grad}f(x, y) = \vec{v}(x, y)$.

Proof. 易证 $(1) \Leftrightarrow (2)$, 下证 $(1) \Leftrightarrow (3)$.



(3) \Rightarrow (1): 设 \vec{v} 有势函数 f , $\vec{v} = \nabla f$, 即 $f'_x = P$, $f'_y = Q$.
任给逐段光滑的有向曲线 L , 设其起点为 A , 终点为 B , 其参数方程为 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, 且 $A = (x(\alpha), y(\alpha))$, $B = (x(\beta), y(\beta))$. 则

$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy &= \int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t)]dt \\&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} (f(x(t), y(t))) dt \\&= f(x(\beta), y(\beta)) - f(x(\alpha), y(\alpha)) \\&= f(B) - f(A).\end{aligned}$$

因此积分与路径无关.



(1) \Rightarrow (3) 任意取定 $(x_0, y_0) \in D$, 定义 D 上的二元函数

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy, \quad \forall (x, y) \in D.$$

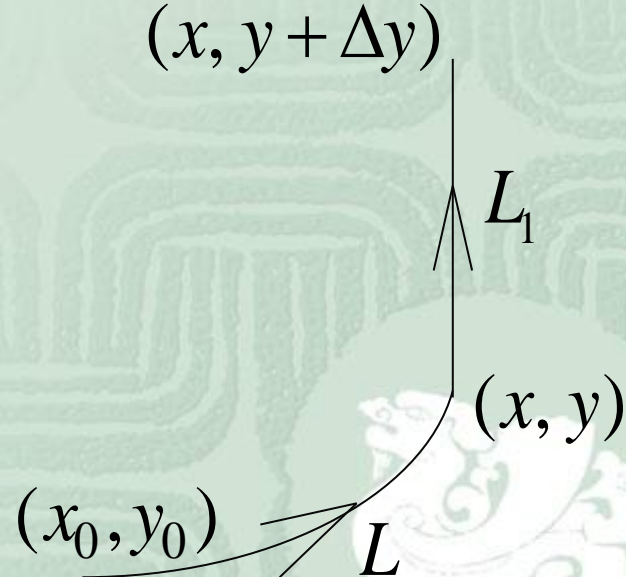
它表示 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ 在以 (x_0, y_0) 为起点, 以 (x, y) 为终点的逐段光滑有向曲线上的第二型曲线积分. 因 \vec{v} 为 D 上保守场, 积分与路径无关, 函数 $f(x, y)$ 有定义. 下证 f 为 \vec{v} 的势函数, 即 $f'_x = P, f'_y = Q$.

设 $(x, y), (x, y + \Delta y) \in D$, 则

$$\begin{aligned} & f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y + \Delta y)} Pdx + Qdy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \end{aligned}$$

因积分与路径无关,对后一积分任意取定一条以 (x_0, y_0) 为起点,以 (x, y) 为终点的逐段光滑曲线 L , 对前一积分,其积分曲线从 (x_0, y_0) 先沿 L 至 (x, y) , 再沿平行于 oy 轴的直线段 L_1 从 (x, y) 到 $(x, y + \Delta y)$.

于是

$$\begin{aligned} & f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \int_{L_1} Pdx + Qdy \\ &= \int_y^{y+\Delta y} Q(x, s)ds. \\ &= \int_0^{\Delta y} Q(x, y + t)dt. \end{aligned}$$


The diagram shows a coordinate system with a curve L starting at point (x_0, y_0) and ending at point (x, y) . From point (x, y) , a vertical line segment L_1 extends upwards to point $(x, y + \Delta y)$. The curve L is labeled with an arrow pointing towards (x, y) , and the segment L_1 is labeled with an arrow pointing upwards.

由积分中值定理,

$$\begin{aligned}\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} Q(x, y + t) dt \\ &= Q(x, y + \theta \Delta y) \quad (\text{其中 } 0 < \theta < 1) \\ &\rightarrow Q(x, y) \quad (\text{当 } \Delta y \rightarrow 0 \text{ 时.})\end{aligned}$$

即 $f'_y(x, y) = Q(x, y)$.

同理 $f'_x(x, y) = P(x, y)$. \square



Def: 若 $df(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, 则称 f 是微分形式 $Pdx + Qdy$ 的原函数.

Remark. f 是 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ 的势函数

$\Leftrightarrow f$ 是 $Pdx + Qdy$ 的原函数.

求向量场 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ 的势函数

\Leftrightarrow 求微分形式 $Pdx + Qdy$ 的原函数.

Remark. 并非所有的向量场都有势函数, 因此, 并非所有的微分形式都有原函数.

Remark. 势函数(原函数)不唯一, 任意两个势函数(原函数)之间只相差一个常数.

Remark: 若 $\vec{v} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 在区域 D 中有势函数 $f(x, y)$, 则对 D 中任意一条以 A 为起点, 以 B 为终点的逐段光滑有向曲线 L , 都有

$$\int_L Pdx + Qdy = f(B) - f(A).$$

Remark. 连续的保守场一定是有势场.

Remark. 连续可微的保守场一定是无旋场.

Proof. $\vec{v} = (P, Q)$ 为连续可微的保守场, 则 \vec{v} 为有势场, $\exists f \in C^2$, s.t. $\vec{v} = \nabla f$, 即 $P = f'_x, Q = f'_y$. 于是

$$\nabla \times \vec{v} = Q'_x - P'_y = f''_{xy} - f''_{yx} \equiv 0. \square$$



反之,无旋场不一定是保守场(例子?).下面的定理说明在一定的条件下,无旋场是保守场.

Def. 称 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为**单连通区域**,若 D 内任意一条简单闭曲线可以连续收缩为 D 内一个点;否则称 D 为**复连通区域**.

Thm. $D \subset \mathbb{R}^2$ 为**单连通**区域, $\vec{v} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 为 D 上**连续可微**的向量场.则以下命题等价:

(1) $\vec{v} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 为 D 上的保守场.

(2) $\vec{v} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 为 D 上的无旋场, 即

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0.$$



Proof. 前面的Remark已证 $(1) \Rightarrow (2)$.只要证 $(2) \Rightarrow (1)$.

任取 D 中逐段光滑的有向闭曲线 L ,因 D 为单连通区域, L 包围的区域 D_1 完全包含在 D 中.而 \vec{v} 为 D 中无旋场,因此在 D_1 上, $Q'_x - P'_y \equiv 0$.由Green公式得

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D_1} (Q'_x - P'_y) dxdy = 0.$$

故 \vec{v} 为 D 上保守场.□



例: 求微分形式 $2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ 的原函数.

解法一: (用第二型曲线积分求向量场的势函数)

$$P = 2xy^3, Q = 3x^2y^2, \quad Q'_x - P'_y = 6xy^2 - 6xy^2 \equiv 0.$$

即 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ 为 \mathbb{R}^2 上的无旋场, 从而为保守场. 存在 \vec{v} 的势函数 $f(x, y)$, 也即 $2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ 的原函数, 满足

$$f(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2xy^3dx + 3x^2y^2dy.$$

取积分曲线为折线段 $(0,0) \rightarrow (x,0) \rightarrow (x,y)$, 则

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{(0,0) \rightarrow (x,0)} 2xy^3dx + 3x^2y^2dy + \int_{(x,0) \rightarrow (x,y)} 2xy^3dx + 3x^2y^2dy \\ &= \int_0^x 0dt + \int_0^y 3x^2t^2dt = x^2y^3. \end{aligned}$$



故 $2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ 的原函数为 $x^2y^3 + C$.

解法二 (不定积分法) **分析:** 设 $df = Pdx + Qdy$, 则

$$f'_x(x, y) = P(x, y), f'_y(x, y) = Q(x, y).$$

对 x 求偏导数时, 将 y 视为常数, 按照一元函数求导法则运算. 反之, 若已知 $f'_x(x, y) = P(x, y)$, 要求 $f(x, y)$, 则应将 $P(x, y)$ 对 x 积分, 并将 y 视为常数. 因此

$$f(x, y) = \int P(x, y)dx + g(y).$$

两边对 y 求导, 有 $Q(x, y) = f'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx + g'(y)$.

于是 $g'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx$, 解出 g , 从而得 f .

对本例, $P = 2xy^3, Q = 3x^2y^2$.

$$f(x, y) = \int 2xy^3 dx + g(y) = x^2y^3 + g(y),$$

两边对 y 求导得

$$3x^2y^2 = Q(x, y) = f'_y(x, y) = 3x^2y^2 + g'(y),$$

$$g'(y) \equiv 0, g(y) \equiv C,$$

因此 $Pdx + Qdy$ 的原函数为 $f(x, y) = x^2y^3 + C$. \square

例. $\int_L 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$, L 是 $y = \sin x^2$ 从 $(0, 0)$ 到 $(1, \sin 1)$ 的一段.

解: 由上例, $2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$ 有原函数 $f(x, y) = x^2y^3$,

于是 $\int_L 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = f(1, \sin 1) - f(0, 0) = \sin^3 1$. \square

4. 恰当方程

Def. 称具有对称形式的一阶微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (*)$$

为恰当方程, 若方程左端是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \equiv du(x, y).$$

容易验证恰当方程 (*) 的解为 $u(x, y) = c$.

Question1. 如何判断 (*) 是否恰当方程? $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Question2. 如何求恰当方程的解?

一般方法: 积分与路径无关, 偏积分法



Remark: 通常判断方程是恰当方程后, 并不需要按上述一般方法来求解, 而是采取“分项组合”的办法, 先把那些本身已经构成全微分的项分出, 再把剩下的项凑成全微分. 这种方法要求熟记一些简单的二元函数的微分, 如

$$ydx + xdy = d(xy)$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan \frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$



例: $\left(\cos x + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$

解: 把方程分项组合, 得

$$\cos x dx + \frac{1}{y} dy + \frac{y dx - x dy}{y^2} = 0.$$

即 $d \sin x + d \ln |y| + d \left(\frac{x}{y} \right) = 0,$

$$d \left(\sin x + \ln |y| + \frac{x}{y} \right) = 0.$$

于是方程的通解为

$$\sin x + \ln |y| + \frac{x}{y} = c, c \in \mathbb{R}. \square$$



5. 积分因子

Def. 若存在连续可微的函数 $\mu = \mu(x, y)$, 使得

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad (**)$$

为恰当方程, 则称 $\mu(x, y)$ 为方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (*)$$

的积分因子.

若 (**) 为恰当方程, 则 $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$, 即

$$\mu P'_y + \mu'_y P = \mu Q'_x + \mu'_x Q$$

若 (*) 存在只与 x 有关的积分因子, 则 $\mu_y = 0$, 且

$$Q\mu'_x = \mu(P'_y - Q'_x), \quad \text{即} \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx.$$



Remark: (*) 存在只与 x 有关的积分因子 $\mu = \mu(x)$ 的充要条件是 $\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \varphi(x)$ 仅为 x 的函数. 此时

$$\mu(x) = \exp\left(\int \varphi(x) dx\right).$$

同理, (*) 存在只与 y 有关的积分因子 $\mu = \mu(y)$ 的充要条件是 $\frac{P'_y - Q'_x}{-P} = \psi(y)$ 仅为 y 的函数. 此时

$$\mu(y) = \exp\left(\int \psi(y) dy\right). \square$$



例: $(y \cos x - x \sin x)dx + (y \sin x + x \cos x)dy = 0$

解: $P = y \cos x - x \sin x, Q = y \sin x + x \cos x.$

$$P'_y = \cos x, Q'_x = y \cos x + \cos x - x \sin x, \frac{P'_y - Q'_x}{-P} = 1.$$

方程两边乘积分因子 $\mu = e^y$, 得

$$e^y (y \cos x - x \sin x)dx + e^y (y \sin x + x \cos x)dy = 0.$$

设 $dv(x, y) = e^y (y \cos x - x \sin x)dx + e^y (y \sin x + x \cos x)dy$, 则

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int e^y (y \cos x - x \sin x)dx + g(y) \\ &= e^y (y \sin x + x \cos x - \sin x) + g(y). \end{aligned}$$

两边对 y 求导, 得

$$e^y (y \sin x + x \cos x) = e^y (y \sin x + x \cos x) + g'(y), g'(y) = 0.$$

故 $v(x, y) = e^y (y \sin x + x \cos x - \sin x) + c.$

原方程的通解为 $e^y (y \sin x + x \cos x - \sin x) + c = 0. \square$

Remark: 先分组, 再找公共的积分因子, 往往能简化计算.

例: $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

解: 原方程等价于 $(x dx + y dy) + (y dx - x dy) = 0$.

两组都有积分因子 $\frac{1}{x^2 + y^2}$, 于是

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

即 $\frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) + d \arctan \frac{x}{y} = 0.$

原方程的通解为 $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} = C, C \in \mathbb{R}. \square$

例: $(3x^3 + y)dx + (2x^2y - x)dy = 0$

解: 分组得 $(3x^3dx + 2x^2ydy) + (ydx - xdy) = 0$.

第二组有积分因子 $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{x^2 + y^2}$. 如果同时照顾到第一组, 则 $\frac{1}{x^2}$ 是两组公共的积分因子, 从而

$$(3xdx + 2ydy) + \frac{ydx - xdy}{x^2} = 0.$$

即
$$d\left(\frac{3}{2}x^2 + y^2\right) - d\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

于是原方程的通积分为

$$\frac{3}{2}x^2 + y^2 - \frac{y}{x} = C, C \in \mathbb{R}. \square$$



例! 用积分因子法解 $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$

解: 把方程改写为 $[p(x)y + q(x)]dx - dy = 0$.

$$P = p(x)y + q(x), \quad Q = -1, \quad \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = -p(x).$$

方程两边乘积分因子 $\mu = e^{\int -p(x)dx}$, 得

$$p(x)e^{\int -p(x)dx} y dx - e^{\int -p(x)dx} dy + q(x)e^{\int -p(x)dx} dx = 0.$$

于是 $d\left(ye^{\int -p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int -p(x)dx} dx$.

原方程的通解为 $ye^{\int -p(x)dx} = \int q(x)e^{\int -p(x)dx} dx + C,$

即 $y = e^{\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int -p(x)dx} dx + C \right).$ \square

Remark: 将 $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$ 记为 $y'(x) - p(x)y(x) = q(x)$.

两边乘 $e^{\int_{x_0}^x -p(t)dt}$ 得 $\left(y(x)e^{\int_{x_0}^x -p(t)dt} \right)' = q(x)e^{\int_{x_0}^x -p(t)dt}$

两边从 x_0 到 x 积分, 得

$$y(x)e^{\int_{x_0}^x -p(t)dt} = y(x_0) + \int_{x_0}^x q(s)e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} ds,$$

于是

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \left(y(x_0) + \int_{x_0}^x q(s)e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right) \\ &= y(x_0)e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x q(s)e^{\int_s^x p(t)dt} ds. \square \end{aligned}$$

作业：习题4. 6

**No. 2 (3) (4), 4 (2),
8 (2) (3), 9–11**

