清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　微积分A　（卷A）　2018年4月21日　下午13:30-15:30

系名 自动化　班级 自76　姓名 [illegible]　学号 2017011[illegible]

一．填空题（每空3分，共15题）（请将答案直接填写在横线上！）

1．设$f(u)$可导，$z=f(\ln x+\frac{1}{y})$，则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$ 0 .

2．曲面 $(x+y+z)e^{xyz}=3e$ 在点(1,1,1)处的切平面方程为 $x+y+z=3$.

3．设 $f(x,y)=x^2\cos y+y(x-1)arcsin(\tan x)$，则 $f_x'(1,0)=$ 2 .

4．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}=$ 0 .

5．极限 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=$ 0 .

6．极限 $\lim\limits_{y\to0^+}\int_0^1\frac{xdx}{(1+xy)^{1/y}}=$ $1-\frac{2}{e}$.

7．设 f(x) 可导，$J(y)=\int_0^y(x-y)f(x)dx$，则 $J''(y)=$ $-f(y)$.

8．计算累次积分 $I=\int_0^{+\infty}dx\int_1^2e^{-tx}dt=$ $\ln2$.

9．设 $z=\arccos\frac{z}{y}$，则其微分 dz = ________.

10．设$f(x,y)=x^yy^x$，则函数 f在点(1,1) 处的微分为 df(1,1) =________

11．曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\2x^2y+2y-z^2=0\end{cases}$ 在点(1,1,2)处的切线方程为________.

12．曲面$x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点(1,1,1)的法线方程为________.

13．函数$u=x^2-2xy+3y^2$在点(1, 1)处方向导数的最大值为________.

14．设$z=z(x,y)$是由方程$z^3-3xyz=1$所确定的隐函数，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

15．函数cos(x + y) 在点(0, 0)处带 Peano 余项 $o(x^2+y^2)$的 Taylor 展式为 cos(x + y) =

二 计算题（每题 10 分，共 4 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

1. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值和最小值.

2. 设 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$上连续可微. 记 $F(y)=\int_0^1 f(x)|y-x|dx$.

说明函数$F(y)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$上二次连续可微，并求 $F''(y)$.

3. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

回答以下问题，并说明理由. (i) f 在原点$(0,0)$处是否连续？ (ii) f 在原点$(0,0)$处的两个偏导数$f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$是否存在？存在时求出它(们)； (iii) 函数 f 在原点$(0,0)$处是否可微，若可微，求出 f 在原点$(0,0)$处的微分.

4. 计算广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\sin x dx$.

三. 证明题（请写出详细的证明过程！）

1. (8 分) 证明函数 $f(x,y)=x^2e^{-x^2-y^2}$ 在全平面 R^2 上存在最大值，即存在点$(x_0,y_0)\in R^2$，使得 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$，$\forall(x,y)\in R^2$. 进一步求出 $f(x,y)$所有的最大值点.

2. (7 分) 设 $f: R^2\to R$为二次连续可微的函数. 假设$f(x,y)$的 Hesse 矩阵处处正定，即实对称矩阵 $H_f(x,y)=\begin{bmatrix}f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{bmatrix}(x,y)$正定，$\forall(x,y)\in R^2$，证明函数$f(x,y)$至多有一个驻点.