微积分A2第九次习题课讨论题参考解答　　　　　　　　　　杨利军　May 4-9, 2020

本次习题课讨论题主要涉及以下四个方面的内容

一. 利用对称性化简第一型曲线和曲面积分的计算;

二. 计算曲线和曲面积分;

三. 利用 Green 公式证明平面区域变换的面积公式;

四. Green 公式的应用.

一. 利用对称性化简第一型曲线和曲面积分的计算.

1. 计算线积分 $\oint_\Gamma (z+2)dl$, 其中 Γ 为圆周

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ z=1. \end{cases}$$

解：由于曲线 Γ 是平面 $z=1$ 上的圆周 $x^2+y^2=2$, 其长度(周长)为 2π, 并且在 Γ 上 $z=1$, 因此

$$\oint_\Gamma (z+2)dl = \oint_\Gamma (1+2)dl = 3|\Gamma| = 6\pi.$$

解答完毕.

2. 计算第一型面积分 $\oiint_\Sigma \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

解：根据曲面 Σ 的对称性不难看出

$$\oiint_\Sigma x^2 dS = \oiint_\Sigma y^2 dS = \oiint_\Sigma z^2 dS$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS = \frac{R^2}{3}|\Sigma| = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

于是

$$\oiint_\Sigma \Big(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\Big)dS = \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)\frac{4\pi R^4}{3} = \frac{13\pi R^4}{9}.$$

解答完毕.

3. 设 L 为椭圆曲线 $x^2/4+y^2/3=1$, 其周长设为 a. 求线积分 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl$.

解： 椭圆曲线 L 的方程可写作 $3x^2+4y^2=12$. 于是

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=\oint_L(12+2xy)dl=12a+2\oint_L xydl.$$

由对称性可知 $\oint_L xydl=0$. 故

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=12a.$$

积分 $\oint_L xydl = 0$ 也可以如下证明. 将椭圆曲线 L 可写作参数方程 $x = 2\cos\phi$, $y=\sqrt{3}\cos\phi$, $0\le\phi\le 2\pi$, 于是

$$\oint_L xydl=\int_0^{2\pi}(2\sqrt{3}\cos\phi\sin\phi)\sqrt{4\sin^2\phi+3\cos^2\phi}d\phi.$$

将上述积分分为两段 $[0,\pi]$ 和 $[\pi,2\pi]$, 即可知上述积分为零. 解答完毕.

4. 求 $\oiint_S(x+y+z)^2dS$, 其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

解: 将被积函数展开得

$$\oiint_S(x+y+z)^2dS=\oiint_S(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dS$$
$$=|S|+2\iint_S(xy+yz+zx)dS,$$

其中 $|S|$ 代表单位球面 S 的面积, 即 $|S|=4\pi$. 再根据对称性可知

$$\oiint_S xydS=\oiint_S yzdS=\oiint_S zxdS=0.$$

于是得原积分 $\oiint_S(x+y+z)^2dS=4\pi$. 解答完毕.

二. 计算曲线和曲面积分.

1. 求线积分 $\oint_L xydl$, 其中 L 是正方形 $|x|+|y|=a$ $(a>0)$ 的四条边.

解: 记正方形 $|x|+|y|=a$ 的四个顶点为 A, B, C, D, 它们的坐标分别为 $A=(0,-a)$, $B=(a,0)$, $C=(0,a)$, $D=(-a,0)$. 于是

$$L=\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CD}\cup\overline{DA}.$$

根据线积分的可加性有

$$\begin{aligned}\oint_L xydl &= \int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}+\int_{\overline{DA}}\\ &= \int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx+\int_0^a x(a-x)\sqrt{2}dx\\ &+\int_{-a}^0 x(x+a)\sqrt{2}dx+\int_{-a}^0 -x(x+a)\sqrt{2}dx=0\end{aligned}$$

(如果经验多了, 可以根据对称性看出积分为零.) 解答完毕.

2. 计算 $\iint_S(x^2+y^2)dS$, 其中 S 是锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界曲面.

解：分别记 S_1 和 S_2 为锥面和上底面，则

$$\iint_S(x^2+y^2)dS=\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{S_2}(x^2+y^2)dS.$$

根据锥面 S_1 的表示 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 可知

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS &= \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy\\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2 rdr=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

再由上底面的方程 $z=1$ 可知

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=dxdy.$$

于是

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2)dS = \iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2rdr = \frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\iint_S(x^2+y^2)dS = \iint_{S_1}(x^2+y^2)dS + \iint_{S_2}(x^2+y^2)dS = \pi\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

解答完毕.

3. 计算螺旋曲面 S 的面积, 其中 S 的参数方程为

$$(\rho,\phi)\to r = r(\rho,\phi) = (x,y,z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \rho\phi),$$

其中 $0\le\rho\le R$, $0\le\phi\le 2\pi$.

解：根据螺旋面的参数方程不难算得曲面 S 的 Gauss 系数如下:

$$E = |r_\rho|^2 = 1+\phi^2, \quad G = |r_\phi| = 2\rho^2, \quad F = r_\rho\cdot r_\phi = \rho\phi.$$

于是 $\sqrt{EG-F^2} = \rho\sqrt{2+\phi^2}$. 故所求曲面面积为

$$|S| = \iint_S dS = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]}\rho\sqrt{2+\phi^2}d\rho d\phi$$

$$= \int_0^R \rho d\rho\int_0^{2\pi}\sqrt{2+\phi^2}d\phi = \Big(\sqrt{2+4\pi^2}+\ln(\sqrt{2}\pi+\sqrt{1+2\pi^2}\Big)R^2/2.$$

解答完毕.

4. 求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被抛物柱面 $z=R^2-x^2$ 和平面 $z=0$ 所截部分 S 的面积.

解法一：回忆平面第一型曲线积分的几何意义是以平面曲线为母线且平行于 z 轴的柱面面积. 记空间曲线

$$\begin{cases} R^2-x^2 = z \\ x^2+y^2 = R^2 \end{cases}$$

在 xoy 平面上的投影为 L, 即平面上的圆周 $x^2+y^2=R^2$, 它有参数方程 $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$, 其弧长微分为 $dl=\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2}d\theta=Rd\theta$. 于是所求面积为

$$|S|=\int_L (R^2-x^2)dl=\int_0^{2\pi}(R^2-R^2\cos^2\theta)Rd\theta=\pi R^3.$$

解法二：(直接计算曲面积分). 注意到所截曲面关于 xoz 平面对称， 即点 $(x,y,z)\in S$ 当且仅当 $(x,-y,z)\in S$。 位于 $y>0$ 部分的曲面方程可写作 $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $(x,z)\in D$, D: $|x|\le R$, $0\le z\le R^2-x^2$. 于是所求面积为

$$\begin{aligned}|S|&=\iint_S dS=2\iint_D\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=2\iint_D\frac{Rdxdz}{\sqrt{R^2-x^2}}\\&=2R\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}\int_0^{R^2-x^2}dz=4R\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx=\pi R^3.\end{aligned}$$

解答完毕.

5. (课本第 187 页习题 4.3 题11) 设一元函数 $f(u)$ 于整个实轴上连续, S 代表单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 证明 Poisson 公式

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^1 f(\rho t)dt, \tag{1}$$

这里 $\rho=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 常数 a, b, c 不全为零.

为了证明 Poisson 公式 (1), 我们需要先建立一个 Lemma.

Lemma：设 Σ 是一个正则参数曲面. 记 Σ' 是 Σ 在一个正交变换（正交矩阵）P 下的象, 即 $\Sigma'=P(\Sigma)$. 记

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}. \tag{2}$$

则对任何 Σ 上连续函数 $g(X)=g(x,y,z)$, 我们有

$$\iint_\Sigma g(X)dS=\iint_{\Sigma'}g(P^TU)dS. \tag{3}$$

注：这个 Lemma 的意思是说, 曲面的面积元素关于正交变换是不变的.

证明：设 Σ 有如下的正则参数表示

$$X = X(s,t) = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix}, \quad (s,t) \in D,$$

D 为平面有界闭域. 于是曲面 Σ 关于上述参数表示的 Gauss 系数如下

$$E = X_s^T X_s,\ G = X_t^T X_t,\ F = X_s^T X_t.$$

由曲面 Σ 的参数表示 $X(s,t)$ 可导出曲面 Σ' 的一个参数表示 $U = U(s,t) := PX(s,t)$, $(s,t) \in D$. 曲面 Σ' 关于参数表示 $U = U(s,t)$ 的第一个 Gauss 系数为

$$E' = U_s^T U_s = X_s^T P^T P X_s = X_s^T X_s = E.$$

同理 $G' = G$, $F' = F$. 因此我们有 $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{E'G' - F'^2}$. 这表明面积元素在正交变换下不变. 于是

$$\iint_{\Sigma'} g(P^T U) dS = \iint_D g(P^T U(s,t)) \sqrt{E'G' - F'^2} dsdt$$

$$= \iint_D g(P^T U(s,t)) \sqrt{EG - F^2} dsdt = \iint_D g(X(s,t)) \sqrt{EG - F^2} dsdt = \iint_\Sigma g(X) dS.$$

等式 (3) 成立. 证毕.

Poisson 公式 (1) 的证明：取一个三阶正交矩阵 P, 使得 P 的第一行是 $(a,b,c)/\rho$. 作正交变换 $U = PX$, 其中记号 X, U 的意义同上式 (2). 于是 $ax + by + cz = \rho u$. 此外在这个正交变换 $U = PX$下, 单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 仍为单位球面 $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, 因为 $u^2 + v^2 + w^2 = U^T U = X^T P^T P X = X^T X = x^2 + y^2 + z^2$. 根据上述 Lemma 可知

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax + by + cz) dS = \iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u) dS.$$

根据单位球面 $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ 和函数 $f(\rho u)$ 的对称性可知

$$\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u) dS = 2 \iint_{w=\sqrt{1-u^2-v^2}} f(\rho u) dS.$$

我们来化简上式右边的积分. 简单计算可知曲面 $w=\sqrt{1-u^2-v^2}$ 的面积元素为

$$dS=\sqrt{1+w_u^2+w_v^2}dudv=\frac{dudv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_{w=\sqrt{1-u^2-v^2}} f(\rho u)dS &= \iint_{u^2+v^2\le 1} f(\rho u)\frac{dudv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\\ &= \int_{-1}^{1} f(\rho u)du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\\ &= 2\int_{-1}^{1} f(\rho u)du\int_{0}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.\end{aligned}$$

利用一个重要积分结论

$$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{2}. \qquad (*)$$

注意上述积分值与积分上限 $a>0$ 无关. 作一个简单的变换 $x=a\sin t$ 即可证明上述等式. 应用等式 (*) 可知

$$\int_0^{\sqrt{1-u^2}}\frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}=\frac{\pi}{2}.$$

注意上述积分与 u 无关. 于是

$$\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\rho u)dS=4\int_{-1}^{1} f(\rho u)du\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi\int_{-1}^{1} f(\rho u)du.$$

等式 (1) 成立. 证毕.

三. 利用 Green 定理证明平面面积变换公式.

回忆平面面积变换定理: 设 $T:(u,v)\to(x,y)=(f(u,v),g(u,v))$ 是平面一个开域到另一个开域的微分同胚, 即 T 是一一对应的连续可微映射, 且其逆也连续可微. 设有界闭域 D_0 属于 T 的定义域, 则闭域 D_0 在映射 T 下的象 $D_1=\phi(D_0)$ 的面积可表为

$$|D_1|=\iint_{D_0}\left|\det\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式. (注：如需要可以假设微分同胚 T 二阶连续可微.)

证明：记 $\Gamma_0=\partial D_0, \Gamma_1=\partial D_1$. 设 Γ_0 有 C^1 参数表示

$$u=u(t), \quad v=v(t), \quad a\le t\le b,$$

并且 Γ_0^+ 的正向与参数 t 增加的方向一致, 则 Γ_1 有相应的参数表示

$$x=x(t)\triangleq f(u(t),v(t)), \quad y=y(t)\triangleq g(u(t),v(t)), \quad a\le t\le b.$$

(注：可以证明微分同胚映内点为内点，映边界点为边界点。 因此 $\Gamma_1=\phi(\Gamma_0)$) 假设 ϕ 保持定向， 即它的 Jacobian 行列式在其定义域上恒大于零, $\det\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}>0$， 则 Γ_1^+ 的正向与参数 t 增加的方向一致. 于是根据 Green 公式可知 D_1 的面积为

$$|D_1|=\oint_{\Gamma_1^+} xdy=\int_a^b x(t)y'(t)dt$$

$$=\int_a^b f(u(t),v(t))[g_u u'(t)+g_v v'(t)]dt=\int_{\Gamma_0^+} f(u,v)g_u(u,v)du+f(u,v)g_v(u,v)dv.$$

对上式最后一个积分应用 Green 公式得

$$|D_1|=\iint_{D_0}\Big[(fg_v)_u-(fg_u)_v\Big]dudv=\iint_{D_0}(f_ug_v-f_vg_u)dudv=\iint_{D_0}\det\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}dudv.$$

证毕.

注：上述证明要求微分同胚 $T=(f,g)$ 为二阶连续可微.

四. Green 公式的应用

1. 计算曲线积分

$$I=\int_{L^+}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2},$$

其中定向曲线 L^+ 为以下三种情形

(i) L^+ 是椭圆周 $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$, 正定向为顺时针.

(ii) L^+ 是曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, 正定向为顺时针.

(iii) L^+ 是从点 $(2,0)$ 到点 $(4,4)$ 的有向直线段.

解：记平面向量场 $\vec{F}=(P,Q)$, 其分量为

$$P(x,y):=\frac{x-y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y):=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

则所考虑的积分可写作 $I=\int_{L^+}F\cdot dr$. 进一步, 简单计算表明

$$Q_x=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=P_y(x,y).$$

即向量场 $F=(P,Q)$ 无旋.

情形(i)： 闭曲线 L^+ 是椭圆周 $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$, 正定向为顺时针． 由于场 $\vec{F}=(P,Q)$ 在由闭曲线 L 所围闭区域内连续可微，根据 Green 公式得

$$\oint_{L^+}\frac{(x+y)dx+(x-y)dy}{x^2+y^2}=-\iint_{(x-2)^2+4(y-1)^2\leq 1}(Q_x-P_y)dxdy=0.$$

情形 (ii): L^+ 是曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, 正定向为顺时针． 以原点 $(0,0)$ 为圆心, 作以 $\varepsilon>0$ 为半径的圆周 L_ε: $x^2+y^2=\varepsilon^2$, 逆时针为正向．只要 $\varepsilon>0$ 充分小即可使得圆周 L_ε 被包含在曲线 L 所围区域的内部．显然场 $\vec{F}=(P,Q)$ 在由 L 和 L_ε 所围的闭环域记作 D_ε 上连续可微. 应用 Green 公式可知

$$\oint_{L^-\cup L_\varepsilon^-}Pdx+Qdy=\iint_{D_\varepsilon}(Q_x-P_y)dxdy=0.$$

上式表明

$$\oint_{L^+}Pdx+Qdy=-\oint_{L_\varepsilon^+}Pdx+Qdy.$$

很容易计算上式右边的积分

$$\oint_{L_\varepsilon^+}Pdx+Qdy=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon(\cos t-\sin t)(-\varepsilon\sin t)+\varepsilon(\cos t+\sin t)(\varepsilon\cos t)}{\varepsilon^2}dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

于是所求积分为

$$\oint_{L^+}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=\oint_{L^+}Pdx+Qdy=-\oint_{L_\varepsilon^+}Pdx+Qdy=-2\pi.$$

情形 (iii): L 是从点 $(2,0)$ 到点 $(4,4)$ 的有向直线段． 不难写出 L 的参数方程 $x=2+2t$, $y=4t$, $0\leq t\leq 1$. 将这个参数式代入线积分即可求得积分值. 但以下方式计算更简单.

在情形 (i) 的解答中, 已经证明向量场 $\vec{F}$ 无旋. 因此在右半平面(单连通域)上, 线积分 $\int_{L^+} F\cdot dr$ 积分与路径无关. 因此将积分路径 L 改为 $(2,0)$ 到 $(4,0)$ 的有向直线段 L_1, 以及从点 $(4,0)$ 到 $(4,4)$ 的有向直线段 L_2 的折线, 并不改变积分值, 而在 L_1 和 L_2 上的线积分更简单. 于是

$$\int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} = \Big\{\int_{L_1} *\Big\} + \Big\{\int_{L_2} *\Big\} = \int_2^4 \frac{xdx}{x^2} + \int_0^4 \frac{(4+y)dy}{4^2+y^2}$$

$$= \int_2^4 \frac{dx}{x} + 4\int_0^4 \frac{dy}{4^2+y^2} + \int_0^4 \frac{ydy}{4^2+y^2} = \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

解答完毕.

2. 设 $f(x,y)$ 在开单位圆盘 D_1: $x^2+y^2<1$ 上二次连续可微, 且满足方程 $f_{xx}+f_{yy}=f/2$, 且 $f(0,0)=1$. 试求极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x,y)dl,$$

这里 D_t 记开圆盘 $\{(x,y), x^2+y^2<t^2\}$, 符号 $\vec{n}$ 表示边界圆周 ∂D_t 的朝外的单位法向量.

解：对于任意 $t\in(0,1)$, 根据课本第215页习题4.6第8题(1)的结论得

$$\oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x,y)dl = \iint_{x^2+y^2\le t^2} (f_{xx}+f_{yy})dxdy.$$

由于函数 f 满足方程 $f_{xx}+f_{yy}=f/2$, 故有

$$\oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x,y)dl = \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy.$$

对上式右边的二重积分应用中值定理得

$$\oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x,y)dl = \frac{1}{2}\pi t^2 f(\xi_t,\eta_t),$$

其中点 $(\xi_t,\eta_t)\in D_t$. 于是

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x,y)dl = \frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1-\cos t}f(\xi_t,\eta_t) = \pi f(0,0).$$

解答完毕.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在上半平面 $D := \{(x,y), y>0\}$ 内具有连续偏导数, 并且是 -2 次齐次函数, 即 f 满足 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$, $\forall t>0$, $(x,y)\in D$. 证明对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L 成立

$$\oint_L yf(x,y)dx - xf(x,y)dy = 0.$$

证明：凡遇到齐次函数, 我们首先应该想到齐次函数的一个最重要的性质, 即齐次函数满足 Euler 公式. 对于本题目而言, 齐次函数 f 满足方程 $xf_x + yf_y = -2f$. 而这个条件正好是平面向量场 $(yf, -xf)$ 无旋的条件， 即 $(-xf)_x - (yf)_y = -(2f + xf_x + yf_y) = 0$. 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L 成立

$$\oint_L yf(x,y)dx - xf(x,y)dy = 0.$$

证毕.

4. 计算线积分

$$I = \oint_{\Gamma^+} \frac{xdy - ydx}{4x^2+y^2},$$

其中 Γ^+ 为 $|x|+|y|=1$, 即一个正方形的边界, 逆时针为正向.

解：记

$$P(x,y) = \frac{-y}{4x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{4x^2+y^2}.$$

不难验证

$$Q_x(x,y) = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2} = P_y(x,y).$$

这表明向量场 $\vec{F} = (P,Q)$ 是无旋场. 记 Γ_ε^+ 为椭圆周 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$, 逆时针为正向, 其中 $\varepsilon>0$ 充分小, 使得椭圆周 Γ_ε^+ 完全位于正方形 $|x|+|y|\le 1$ 的内部. 在由正方形 Γ^+ 和椭圆 Γ_ε^+ 所围成的有界域上, 应用 Green 公式的旋度形式得

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{xdy - ydx}{4x^2+y^2} = \oint_{\Gamma_\varepsilon^+} \frac{xdy - ydx}{4x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{\Gamma_\varepsilon^+} xdy - ydx.$$

对线积分

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon^+} xdy - ydx$$

再次应用 Green 公式的旋度形式得

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon^+} xdy - ydx = \iint_{4x^2+y^2\le\varepsilon^2} 2dxdy = 2\pi\frac{\varepsilon^2}{2} = \pi\varepsilon^2.$$

于是所求积分为 $I=\pi$. 解答完毕.

5. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为平面有界开区域, 它的边界 ∂D 为一条逐段光滑的封闭曲线, 逆时针为其正向, 记 $\vec{n}$ 为 ∂D^+ 的向外的单位法向量. 设函数 $f(x,y)$ 在闭域 $\overline{D}$ 上连续, 在开域 D 内为调和, 即

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x,y)\in D.$$

证明

(i) $\displaystyle\oint_{\partial D^+} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dl = 0$;

(ii) $\displaystyle\oint_{\partial D^+} f\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dl = \iint_{\overline{D}} \|\nabla f\|^2 dxdy$;

(iii) 若 $f(x,y)=0, \forall(x,y)\in\partial D$, 则 $f(x,y)\equiv 0, \forall (x,y)\in D$.

解：(i) 由于 $\Delta f=0$, 根据 Green 公式散度形式得

$$\oint_{\partial D^+} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dl = \oint_{\partial D^+} \nabla f\cdot\vec{n} dl = \iint_{\overline{D}} (\Delta f) dxdy = 0.$$

(ii) 仍然利用 Green 公式散度形式得

$$\oint_{\partial D^+} f\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dl = \oint_{\partial D^+} f\nabla f\cdot\vec{n} dl = \iint_{\overline{D}} [(ff_x)_x + (ff_y)_y] dxdy$$

$$= \iint_{\overline{D}} [(f_x^2+f_y^2) + f(f_{xx}+f_{yy})] dxdy = \iint_{\overline{D}} \|\nabla f\|^2 dxdy.$$

(iii) 由(ii)的结论可知, 若 $f(x,y)=0, \forall (x,y)\in\partial D$, 则 $\nabla f\equiv 0, \forall (x,y)\in D$. 因此 $f(x,y)$ 在域 D 上为常数. 由于函数 f 在边界 ∂D 上为零, 故 $f(x,y)\equiv 0, \forall (x,y)\in D$. 证毕.

6. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[-1,1]$ 上处处为正的连续可微函数, D 为圆心位于原点的单位开圆盘. 证明

$$\oint_{\partial D^+}\Big[xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\Big]=\oint_{\partial D^+}\Big[-yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy\Big]. \tag{4}$$

由此进一步证明

$$\oint_{\partial D^+}\Big[xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\Big]\geq 2\pi. \tag{5}$$

证明：对等式 (4) 的两边线积分, 分别应用Green公式的旋度形式得

$$\oint_{\partial D^+}\Big[xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\Big]=\iint_{\overline{D}}\Big[f(y)+\frac{1}{f(x)}\Big]d\sigma, \tag{6}$$

$$\oint_{\partial D^+}\Big[-yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy\Big]=\iint_{\overline{D}}\Big[f(x)+\frac{1}{f(y)}\Big]d\sigma.$$

由于积分区域 $\overline{D}$ 为闭单位圆盘, 故不难看出

$$\iint_{\overline{D}}f(x)d\sigma=\iint_{\overline{D}}f(y)d\sigma,\quad \iint_{\overline{D}}\frac{1}{f(x)}d\sigma=\iint_{\overline{D}}\frac{1}{f(y)}d\sigma. \tag{7}$$

由此立刻得到等式 (4). 根据式 (6) 和 (7) 可知

$$\oint_{\partial D^+}\Big[xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\Big]=\iint_{\overline{D}}\Big[f(y)+\frac{1}{f(x)}\Big]d\sigma=\iint_{\overline{D}}\Big[f(y)+\frac{1}{f(y)}\Big]d\sigma.$$

由于 $f(y)+f(y)^{-1}\geq 2$, 因此

$$\oint_{\partial D^+}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_{\overline{D}}\Big[f(y)+\frac{1}{f(y)}\Big]d\sigma\geq\iint_{\overline{D}}2d\sigma=2|\overline{D}|=2\pi.$$

证毕.

7. 设函数 $f(x)$ 在整个实轴 $\mathbb{R}$ 上二次连续可微, 满足 $f'(0)=0$, 且使得平面向量场

$$V(x,y)=\Big(f(x)+y[x-f(x)],f'(x)\Big) \tag{8}$$

为梯度场, 即存在连续可微函数 $F(x,y)$, 使得 $\nabla F=V$. 进一步假设

$$\int_{(0,0)}^{(\pi/2,\pi)}V\cdot dr=\frac{\pi^2}{8}, \tag{9}$$

求函数 $f(x)$.

注: 由于场 V 是全平面上的梯度场, 故场 V 在全平面上线积分与路径无关. 因此积分式 (9) 对于起点为 $A=(0,0)$, 终点为 $B=(\pi/2,\pi)$ 的任意路径, 积分值不变.

解：记 $V=(P,Q)$, 其中 $P=f(x)+y(x-f(x))$, $Q=f'(x)$. 由于 V 是梯度场, 故 $Q_x=P_y$, 即 $[f'(x)]_x=[f(x)+y(x-f(x))]_y$ 或 $f''(x)+f(x)=x$. 这是关于未知函数 $f(x)$ 的二阶常系数线性常微分方程. 根据线性常微分方程的一般理论知, 对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$. 另一方面不难看出方程 $y''+y=x$ 有一个特解 $y=x$. 因此方程 $y''+y=x$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x$. 可见 $f(x)$ 具有形式 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$, 这里 c_1 和 c_2 为两个待定常数. 为方便记 $f(x)=f_0(x)+x$, 其中 $f_0(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ 满足 $f_0''(x)+f_0(x)=0$. 于是微分式 $Pdx+Qdy$ 可写作

$$\Big\{f_0(x)+x+y[x-f_0(x)-x]\Big\}dx+[f_0'(x)+1]dy$$

$$\begin{aligned}
&=[f_0(x)+x-yf_0(x)]dx+[f_0'(x)+1]dy\\
&=d\Big[\frac{1}{2}x^2+y\Big]+f_0(x)(1-y)dx+f_0'(x)dy\\
&=d\Big[\frac{1}{2}x^2+y\Big]-f_0''(x)(1-y)dx+f_0'(x)dy\\
&=d\Big[\frac{1}{2}x^2+y\Big]+d\Big[f_0'(x)(y-1)\Big]\\
&=d\Big[\frac{1}{2}x^2+y+f_0'(x)(y-1)\Big].
\end{aligned}$$

这说明函数

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+y+f_0'(x)(y-1)=\frac{1}{2}x^2+y+(-c_1\sin x+c_2\cos x)(y-1) \tag{10}$$

是全微分式 $Pdx+Qdy$ 或向量场 V 的原函数(或称势函数). 因此对于场 V 平面上起点 A 到终点 B 的任意路径, 积分

$$\int_A^B V\cdot dr=F(B)-F(A). \tag{11}$$

我们来确定函数 $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$ 中的系数 c_1 和 c_2. 对 $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$ 求导得 $f'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + 1$. 故

$$f'(0) = c_2 + 1 = 0. \quad \text{即} \quad c_2 = -1. \tag{12}$$

于是 $f(x) = c_1 \cos x - \sin x + x$. 将其带入原函数 (10) 得

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y - (c_1 \sin x + \cos x)(y - 1).$$

简单计算得

$$F(B) = F(\pi/2, \pi) = \frac{\pi^2}{8} + \pi - c_1(\pi - 1), \quad F(A) = F(0, 0) = 1.$$

根据假设 (9)得 $F(B) - F(A) = \frac{\pi^2}{8}$, 即

$$\frac{\pi^2}{8} + \pi - c_1(\pi - 1) - 1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

由此得 $c_1 = 1$. 所求函数 $f(x) = \cos x - \sin x + x$. 解答完毕.