Review

一致收敛函数项级数和函数的性质

- 逐项求极限

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\text{在区间}I\text{上一致收敛} \\ f_n(x)\in C(I),\forall n\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\in C(I),\text{即}\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

- 逐项积分

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\text{在区间}[a,b]\text{上一致收敛} \\ f_n(x)\in C[a,b],\forall n\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \int_a^x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^x f_n(x)dx,\forall x\in[a,b].$$

- 逐项求导

$$\left.\begin{aligned} & f_n(x)\in C^1[a,b],\forall n \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\text{在}[a,b]\text{上一致收敛} \\ & \exists x_0\in[a,b],s.t.\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)\text{收敛} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\text{在}[a,b]\text{上一致收敛}; \\ (2)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x). \end{cases}$$

§3. 幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

内容：

- 幂级数的收敛性、收敛半径
- 幂级数和函数的性质
- C^{∞}函数的幂级数展开

1. 幂级数的收敛性

Thm (Abel第一定理) $x_0 \neq 0, \{a_n x_0^n\}$有界, 则$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$(-|x_0|, |x_0|)$上绝对收敛; 且$\forall r < |x_0|, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[-r, r]$上一致收敛(内闭一致收敛).

Proof. $|a_n x_0^n| \leq M$, 则$|x| \leq r < |x_0|$时,

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right| \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{r}{x_0}\right|^n.$$

故$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[-r, r]$上绝对收敛且一致收敛(Weierstrass).□

清华大学

Corollary.

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 上点点绝对收敛.

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $|x| > |x_0|$ 上点点发散.

(3) $\exists \rho \in [0, +\infty]$, s.t. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-\rho, \rho)$ 上点点绝对收敛, 在 $|x| > \rho$ 上点点发散. 称此 ρ 为幂级数的收敛半径.

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $\rho \geq |x_0|$.

$$(5)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径} \rho \le |x_0|.$$

$$(6)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n \text{条件收敛} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径} \rho = |x_0|.$$

$$(7)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{的收敛半径分别为} \rho_1, \rho_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n \text{ 的收敛半径} \rho \ge \min\{\rho_1, \rho_2\}; \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n \text{ 的收敛半径} \rho \ge \rho_1 \rho_2. \end{cases}$$

Proof. $\forall |x| < \rho_1\rho_2,\ \exists |x_1| < \rho_1, |x_2| < \rho_2,\quad \text{s.t. } x = x_1x_2.$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为ρ_1,则$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ 收敛, $\{a_n x_1^n\}$有界,

$\exists M > 0, s.t.\ |a_n x_1^n| \le M, \forall n.$ 继而有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n x^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_1^n b_n x_2^n| \le M \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n x_2^n|.$$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为ρ_2,则$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n x_2^n|$收敛, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n x^n|$收敛.

由$|x| < \rho_1\rho_2$的任意性, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n$的收敛半径$\rho \ge \rho_1\rho_2$.

Remark.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛域为区间, 且形如 $(-\rho,\rho),(-\rho,\rho],$

$[-\rho,\rho),[-\rho,\rho],(-\infty,+\infty)$ 或 $\{0\}$.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在其收敛域上内闭一致收敛.

(Abel第一、二定理)

Thm.(Abel第二定理) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间的端点$x=\rho$ (或$x=-\rho$)收敛,则$\forall 0<r<\rho$,该级数在$[-r,\rho]$(或$[-\rho,r]$)上一致收敛.

Proof. 设$\sum a_n\rho^n$ 收敛.$\forall x\in[0,\rho]$, $\sum a_n x^n=\sum a_n\rho^n\left(x/\rho\right)^n$,

$\{(x/\rho)^n\}$关于n单调, 且$\left|(x/\rho)^n\right|\le 1$,一致有界.由Abel判别法,

$\sum a_n x^n$在$[0,\rho]$上一致收敛.又$\forall r\in(0,\rho)$, $\sum a_n x^n$ 在$[-r,r]$上

一致收敛(Able第一定理), 故$\sum a_n x^n$在$[-r,\rho]$上一致收敛.$\square$

Thm. 记 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ρ.

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, 则 $\rho = 1/q$;

(2) 若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$, 则 $\rho = 1/q$;

(3) 若 $\varlimsup_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, 则 $\rho = 1/q$;

(4) 若 $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$, 则 $\rho = 1/q$;

这里, $\dfrac{1}{0} = +\infty$, $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

清華大學

例.求$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1+1/n)^{n^2}x^n$的收敛半径与收敛域.

解: $a_n=(1+1/n)^{n^2}$, $\sqrt[n]{a_n}=(1+1/n)^n\to e$, 则$\rho=1/e$.

$|x|=1/e$时,

$$|a_nx^n|=e^{n^2\ln(1+1/n)-n}=e^{n^2\left(1/n-1/2n^2+o(1/n^2)\right)-n}$$

$$=e^{-1/2+o(1)}\to e^{-1/2}\neq 0, n\to+\infty\text{时}.$$

因此$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1+1/n)^{n^2}x^n$在$x=\pm 1/e$处发散,其收敛域为

$(-1/e,1/e)$.□

例. 求$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{2^n}(x+1)^{2n}$的收敛半径与收敛域.

解: 令$a_n=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$, $y=\pm 2$时,

$$\left|a_n y^n\right|=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\to+\infty,$$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n y^n$ 的收敛域为$(-2,2)$. 于是$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x+1)^{2n}$的收敛域为

$(x+1)^2<2$, 即$x\in(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$, 收敛半径为$\rho=\sqrt{2}$.□

例.求 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 的收敛半径与收敛域.

解法一:记 x^n 的系数为 a_n,则 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1,\ \rho = 1.$

又 $\sum_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^{n^2}$ 发散, 故 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

解法二: $\forall |x| < 1,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left| x^{n^2} \right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n$ 收敛;

又 $\sum_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^{n^2}$ 发散, 故 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 的收敛域为 $(-1,1)$.□

2.函数和函数的性质

Thm. $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在其收敛域的内部$(-\rho,\rho)$连续;若幂级数在$x=\rho$收敛,则$S(x)$在$x=\rho$左连续;若幂级数在$x=-\rho$收敛,则$S(x)$在$x=-\rho$右连续.

Thm. 设$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为ρ,则

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad \forall x\in(-\rho,\rho),$$

且$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径为$\rho$.

Thm. $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为ρ,则$S(x)\in C^{\infty}(-\rho,\rho)$,

且$\forall x\in(-\rho,\rho),\forall k=1,2,\cdots$

$$S^{(k)}(x)=k!a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}x+\cdots+\frac{(k+n)!}{n!}a_{n+k}x^n+\cdots,$$

且$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(k+n)!}{n!}a_{n+k}x^n$的收敛半径为$\rho$.

Remark. 逐项积分和逐项求导后得到的新的幂级数的收敛半径与原级数相同.

Remark. 逐项积分后得到的新的幂级数的收敛域可能改变.例如,$\sum \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$, 逐项积分后的级数为

$\sum \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,收敛域为$[-1,1]$.

3.函数的幂级数展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \ \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

$$\Rightarrow \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), k = 1, 2, \cdots$$

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1}(x - x_0)$$

$$+ \cdots + \frac{(k+n)!}{n!} a_{n+k}(x - x_0)^n + \cdots$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad (\text{令} x = x_0)$$

Def. 称$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$为$f(x)$在$x_0$的Taylor级数; 当

$x_0=0$时, Taylor级数也称为Maclaurin级数.

Question. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$在点$x$处是否收敛?

Question. 若$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$在点$x$处收敛, 其和函数

是否一定是$f(x)$?

不一定

例. $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0; \\ 0 & x=0. \end{cases}$

$$f^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots,n.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\text{故} f(x)\neq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \forall x\neq 0. \square$$

Thm. 若$\exists M>0,\ s.t.$

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M,\ \forall x\in(x_0-\rho,x_0+\rho),\ n=1,2,\cdots$$

则$f(x)$在$(x_0-\rho,x_0+\rho)$内可以展开成Taylor级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Proof. $$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$$

(ξ介于x与x_0之间)

$$\le\frac{M}{(n+1)!}\rho^{n+1},\quad\forall x\in(x_0-\rho,x_0+\rho),\forall n.\ \square$$

Remark. 幂级数展开的唯一性.

例. e^x在$x_0=0$的幂级数展开. (公式法)

解: $\forall R>0$,在$(-R,R)$上,$\left|(e^x)^{(n)}\right|=e^x<e^R$有界. 故

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-R,R).$$

由R的任意性,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in\mathbb{R}.\square$$

例. $\left|(\sin x)^{(n)}\right| \le 1$, 故 (公式法)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \square$$

例. 上例中$\sin x$的幂级数展开式逐项求导得:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(逐项求导法)

例. $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1,1).$$

例. 求$\ln(1+x)$在$x_0=0$的幂级数展开.　　(逐项积分法)

解: $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

在$[0,x]$上积分得:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

上式右端幂级数在$x=1$处收敛, 其和函数在$x=1$处左连续. 故

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

□

例. 求 $\arctan x$ 在 $x_0=0$ 的幂级数展开. (逐项积分法)

解: $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+(-1)^n x^{2n}+\cdots,\ x\in(-1,1).$

两边在 $[0,x]$ 上积分得

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

注意到右边级数在 $x=\pm 1$ 收敛, 而 $\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 故

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad x\in[-1,1].$$

□

清華大學

例. 求$(1+x)^{\alpha}\ (\alpha\neq 0)$在$x_0=0$的幂级数展开.　(公式法)

解: $f(x)=(1+x)^{\alpha},\ f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\cdots,$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

一方面,由比值判别法得右端级数收敛半径$\rho=1$. 另一方面, 可以证明, $\forall x\in(-1,1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$ (要用到带积分余项的Taylor展开式, 证明略). 故上式对$\forall x\in(-1,1)$成立.

进一步可以证明

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^{2}+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots,$$

$\alpha\le -1$ 时, $x\in(-1,1)$;

$-1<\alpha<0$ 时, $x\in(-1,1]$;

$\alpha>0$ 时, $x\in[-1,1]$. □

例. 将$f(x)=\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$在$x_0=-1$处展开成幂级数.

分析: $\ln(1+t)=t-\dfrac{1}{2}t^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}t^n+\cdots,t\in(-1,1]$.

解: $f(x)=-\ln\left(1+(1+x)^2\right)$, (变量替换法)

$$=-\left((1+x)^2-\frac{(1+x)^4}{2}+\frac{(1+x)^6}{3}+\cdots\right) \qquad \left((1+x)^2\le 1\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1+x)^{2n}}{n}, \qquad x\in[-2,0].\square$$

例. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^3}$, 求$f^{(200)}(0)$.

解: $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^3}$

$$=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+2},\ x\in(-1,1).$$

令$3n+2=200$, 得$n=66$.

$$\frac{f^{(200)}(0)}{200\,!}=(-1)^{66},\qquad f^{(200)}(0)=200!\ \square$$

例. 求$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}x^{2n}$的收敛域与和函数.

解: $\rho=1$, 收敛域为$[-1,1]$.

$$S'(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}x^{2n-1},\qquad \forall x\in(-1,1),$$

$$S''(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2},\forall x\in(-1,1).$$

$$S'(0)=S(0)=0,\qquad S'(x)=2\arctan x,$$

$$S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1].\square$$

清华大学

例. 求$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!2^n}x^n$的收敛域与和函数.

解: $\frac{(n+1)^2}{(n+1)!2^{n+1}}\Big/\frac{n^2}{n!2^n}\to 0,\ \rho=+\infty$, 收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{(n-1)!2^n}=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!2^n}\triangleq xS_1(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\int_0^x S_1(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{nt^{n-1}\mathrm{d}t}{(n-1)!2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!2^n}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x/2)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{xe^{x/2}}{2},\ x\in\mathbb{R}.$$

(e^x展开的变量替换)

$$S_1(x)=\left(\frac{xe^{x/2}}{2}\right)'=\frac{1}{4}e^{x/2}(2+x),x\in\mathbb{R}.$$

$$S(x)=xS_1(x)=\frac{1}{4}e^{x/2}(2x+x^2),\forall x\in\mathbb{R}.\square$$

Remark. 逐项求导和逐项积分在幂级数求和以及C^∞函数的幂级数展开中的应用.

例. 求证: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1.$

解: 令$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$. 欲证$S(1)=1.$

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{nt^{n-1}\mathrm{d}t}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^x-1-x}{x},x\neq 0.$$

$S(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2},x\neq 0.$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=S(1)=1.$ □

清華大學

作业:习题6.3 No.1(单),2,3(单)