SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Ejercicios Resueltos - Lecturas 4 y 5

LECTURA 4 - SISTEMAS MASA-RESORTE Y CIRCUITOS LRC

Resolver el ejercicio A o el ejercicio B (Solo uno de los dos):

A. Ecuación de movimiento para el sistema masa-resorte amortiguado

Datos:

- Peso (W) = 4 lb => Masa (m) = W/g = 4/32 = 1/8 slug
- Constante del resorte (k) = 6 lb/pie
- Fuerza de amortiguamiento (β) = 1 (numéricamente igual a la velocidad)
- Posición inicial x(0) = 1 pie (arriba del equilibrio, se toma como positivo)
- Velocidad inicial x'(0) = 9 pies/s (hacia abajo, se toma como positivo)

Ecuación diferencial:

$m x'' + \beta x' + k x = 0$

$(1/8)x'' + 1x' + 6x = 0$

Multiplicando por 8: $x'' + 8x' + 48x = 0$

Ecuación característica:

$r^2 + 8r + 48 = 0$

Resolviendo con la fórmula cuadrática:

$r = [-8 \pm \sqrt{8^2 - 4\times1\times48}] / 2 = [-8 \pm \sqrt{64 - 192}] / 2$

$r = [-8 \pm \sqrt{-128}] / 2 = [-8 \pm 8i\times\sqrt{2}] / 2 = -4 \pm 4i\times\sqrt{2}$

Solución general (caso subamortiguado):

$x(t) = e^{-4t} \times [C1 \cos(4\sqrt{2}t) + C2 \sin(4\sqrt{2}t)]$

Aplicando condiciones iniciales:

$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = C1$

$x'(0) = 9 \Rightarrow 9 = -4C1 + 4\sqrt{2}C2$

Sustituyendo $C1 = 1$: $9 = -4 + 4\sqrt{2}C2$

$13 = 4\sqrt{2}C2 \Rightarrow C2 = 13 / (4\sqrt{2}) = (13\sqrt{2}) / 8$

Ecuación de movimiento final:

$$x(t) = e^{-4t} \times \left[\cos(4\sqrt{2}t) + \frac{13\sqrt{2}}{8}\sin(4\sqrt{2}t)\right]$$

B. Función q(t) para el circuito LRC en serie

Datos:

- $L = 1/5$ h
- $R = 22\ \Omega$
- $C = 1/350$ f
- $E(t) = 0$ V
- $q(0) = 7$ C
- $i(0) = q'(0) = 0$ A

Ecuación diferencial:

$L q'' + R q' + (1/C) q = E(t)$

$(1/5)q'' + 22q' + 350q = 0$

Multiplicando por 5: $q'' + 110q' + 1750q = 0$

Ecuación característica:

$r^2 + 110r + 1750 = 0$

Resolviendo con la fórmula cuadrática:

$r = [-110 \pm \text{sqrt}(110^2 - 4\times1\times1750)] / 2 = [-110 \pm \text{sqrt}(12100 - 7000)] / 2$

$r = [-110 \pm \text{sqrt}(5100)] / 2 = -55 \pm 5\text{sqrt}(51)$

$r1 = -55 + 5\text{sqrt}(51)$

$r2 = -55 - 5\text{sqrt}(51)$

Solución general (caso sobreamortiguado):

$q(t) = C1\ e\hat{}(r1\ t) + C2\ e\hat{}(r2\ t)$

Aplicando condiciones iniciales:

$q(0) = 7 \Rightarrow C1 + C2 = 7$

$q'(0) = 0 \Rightarrow C1\ r1 + C2\ r2 = 0$

Resolviendo el sistema:

$C1 = (357 + 77\text{sqrt}(51)) / 102$

$C2 = (357 - 77\text{sqrt}(51)) / 102$

Función q(t) final:

$q(t) = [(357 + 77\text{sqrt}(51)) / 102] \times e\hat{}[(-55 + 5\text{sqrt}(51))t] + [(357 - 77\text{sqrt}(51)) / 102] \times e\hat{}[(-55 - 5\text{sqrt}(51))t]$

¿Alguna vez la carga en el capacitor es igual a cero?

No. Dado que q(0) = 7 y q'(0) = 0, la carga comienza en un máximo local. Ambas exponenciales decaen hacia cero, y aunque C1 es positivo y C2 es negativo, la función q(t) se mantiene positiva y asintóticamente se acerca a cero sin cruzarlo.

LECTURA 5 - TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Resolver todos los ejercicios siguientes:

1. Calcular la transformada de Laplace de $3 + t^4 + \sin(2t)$

$L\{3\} = 3/s$

$L\{t^4\} = 4! / s^{(4+1)} = 24 / s^5$

$L\{\sin(2t)\} = 2 / (s^2 + 2^2) = 2 / (s^2 + 4)$

Resultado:

$L\{3 + t^4 + \sin(2t)\} = 3/s + 24/s^5 + 2/(s^2 + 4)$

2. Calcular la transformada inversa de Laplace de $4 / (s^2 - 9)$

Sabemos que $L^{-1}\{a / (s^2 - a^2)\} = \sinh(at)$

En este caso, $a^2 = 9$, por lo tanto $a = 3$.

$L^{-1}\{4 / (s^2 - 9)\} = (4/3) \times L^{-1}\{3 / (s^2 - 3^2)\}$

Resultado:

$L^{-1}\{4 / (s^2 - 9)\} = (4/3)\sinh(3t)$

3. Resolver el problema de valores iniciales: $4y'' - y = 1$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/2$

Ecuación homogénea: $4y'' - y = 0$

- Ecuación característica: $4r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = 1/4 \Rightarrow r = \pm 1/2$
- Solución complementaria: $y_c(t) = C1\, e^{(t/2)} + C2\, e^{(-t/2)}$

Solución particular: Para $y_p = A$, tenemos $4(0) - A = 1 \Rightarrow A = -1$

- $y_p(t) = -1$

Solución general: $y(t) = C1\, e^{(t/2)} + C2\, e^{(-t/2)} - 1$

Aplicando condiciones iniciales:

- $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C1 + C2 - 1 \Rightarrow C1 + C2 = 1$
- $y'(0) = 1/2 \Rightarrow 1/2 = (1/2)C1 - (1/2)C2 \Rightarrow C1 - C2 = 1$
- Resolviendo el sistema: $C1 = 1$, $C2 = 0$

Solución final:

$y(t) = e^{(t/2)} - 1$

4. Resolver el problema de valores iniciales: $y'' - 3y' + 2y = 2e^{(2t)}$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$

Ecuación homogénea: $y'' - 3y' + 2y = 0$

- Ecuación característica: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r - 1)(r - 2) = 0 \Rightarrow r1 = 1, r2 = 2$
- Solución complementaria: $y_c(t) = C1\, e^t + C2\, e^{(2t)}$

Solución particular: Como $2e^{(2t)}$ es parte de la solución complementaria, proponemos $y_p = At\, e^{(2t)}$

- $y_p' = A e^{(2t)} + 2At\, e^{(2t)} = A(1 + 2t)e^{(2t)}$
- $y_p'' = A(4 + 4t)e^{(2t)}$
- Sustituyendo en la ecuación diferencial: $A = 2$
- $y_p(t) = 2t\, e^{(2t)}$

Solución general: $y(t) = C1\, e^t + C2\, e^{(2t)} + 2t\, e^{(2t)}$

Aplicando condiciones iniciales:

- $y(0) = 0 \Rightarrow C1 + C2 = 0$
- $y'(0) = 4 \Rightarrow C1 + 2C2 + 2 = 4 \Rightarrow C1 + 2C2 = 2$
- Resolviendo el sistema: $C1 = -2$, $C2 = 2$

Solución final:

$y(t) = -2e^t + 2e^{(2t)} + 2t\, e^{(2t)} = -2e^t + (2 + 2t)e^{(2t)}$

FÓRMULAS ÚTILES

Transformada	Función Original
L{1}	1/s
L{t^n}	n! / s^(n+1)
L{e^(at)}	1 / (s - a)
L{sin(at)}	a / (s² + a²)
L{cos(at)}	s / (s² + a²)
L{sinh(at)}	a / (s² - a²)
L{cosh(at)}	s / (s² - a²)