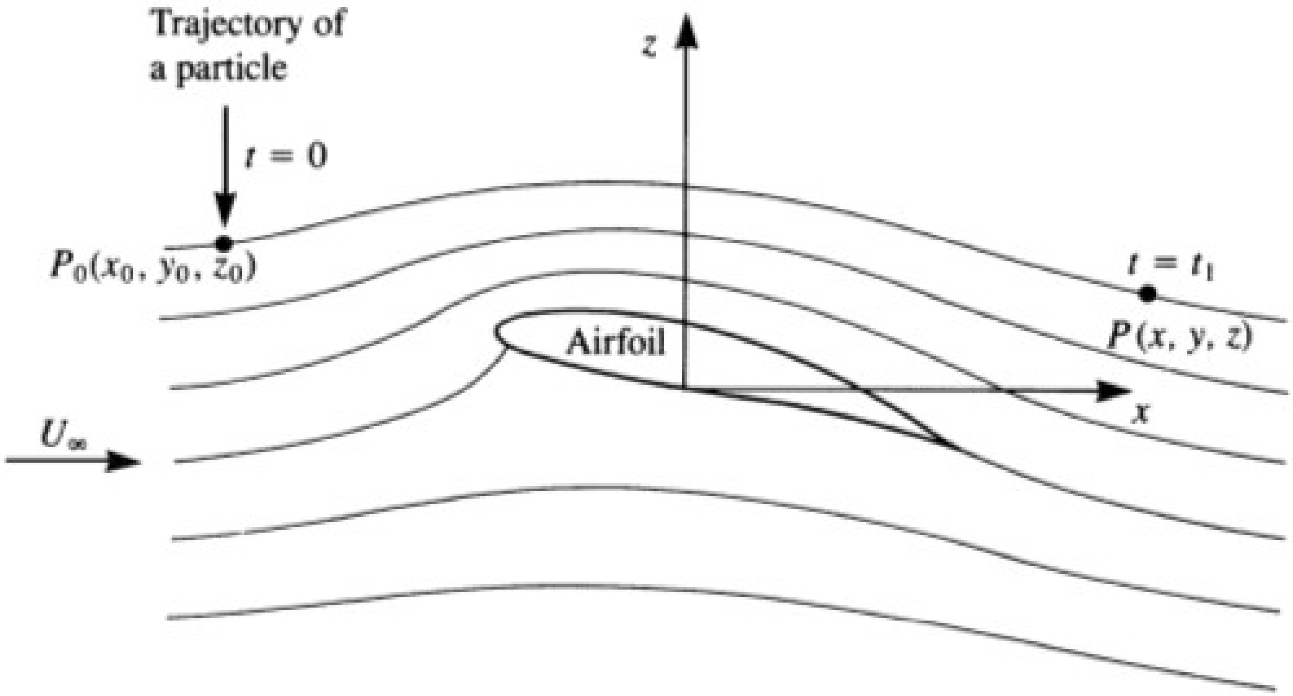
En aerodinámica el fluido estudiado se modela como un medio continuo y las regiones infinitesimalmente pequeñas, de masa constante, se denominan *elementos* o *partículas de fluido*. Como sabemos, el movimiento de cualquier medio continuo se puede expresar mediante dos formulaciones distintas: Lagrangeana y Euleriana, también conocidas como “material” y “espacial”, respectivamente. La primera adopta el punto de vista de la partícula y expresa el movimiento de partículas individuales. En cambio, la otra formulación se basa en un punto de vista del campo y describe las variables del flujo como funciones de la posición en el espacio y el tiempo.



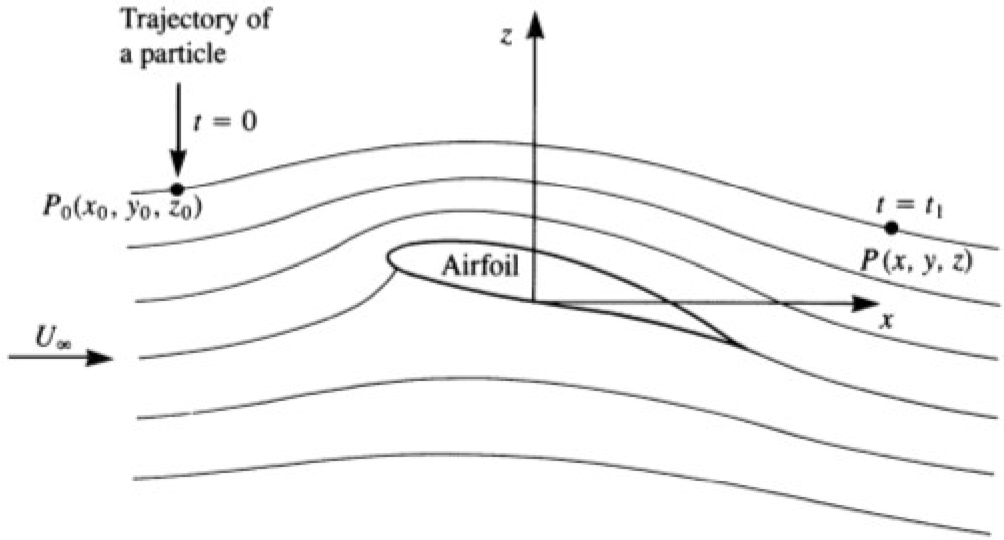
Para la formulación Lagrangeana, que es la que se suele utilizar en mecánica clásica, en un sistema de coordenadas Cartesianas, la posición de cualquier partícula de fluido P se escribe:

$$x = x_P(x_0, y_0, z_0, t)$$
$$y = y_P(x_0, y_0, z_0, t)$$
$$z = z_P(x_0, y_0, z_0, t)$$

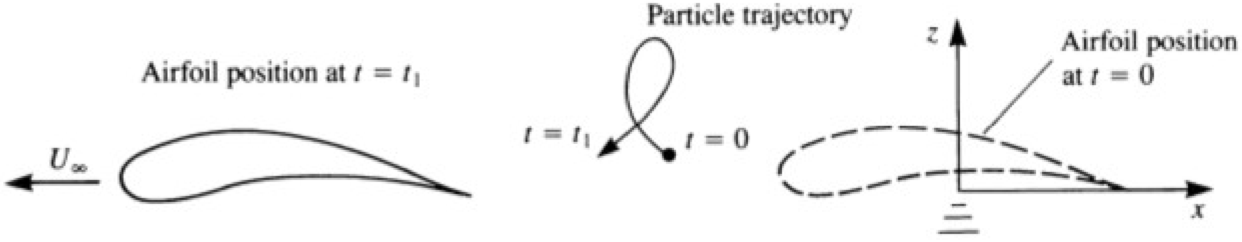
En cambio, para la formulación Euleriana, se expresan las variables del fluido como una distribución espacial. Entonces, las componentes del campo de velocidades se escriben como:

$$u = u(x, y, z, t)$$
$$v = v(x, y, z, t)$$
$$w = w(x, y, z, t)$$

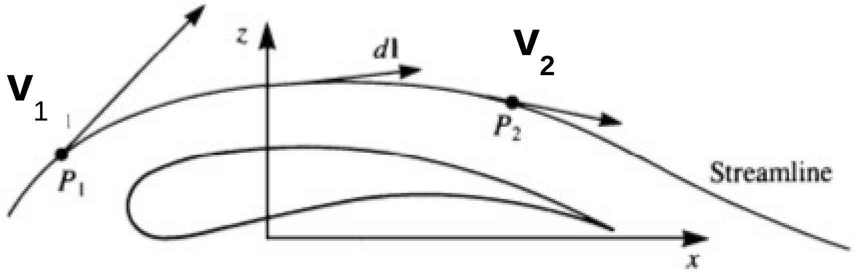
Sistema de coordenadas solidario al cuerpo en estudio:



Sistema de coordenadas fijo en el espacio (fluido en reposo):



Líneas de corriente (*streamlines*):



Definición matemática en forma vectorial:

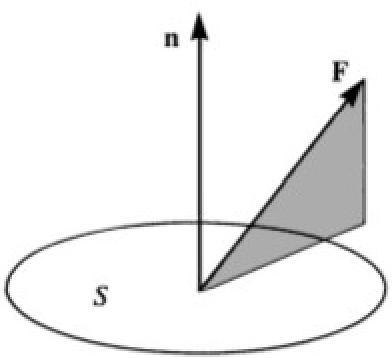
$$\mathbf{v} \times \, \mathbf{dl} = \mathbf{0}$$

En forma diferencial:

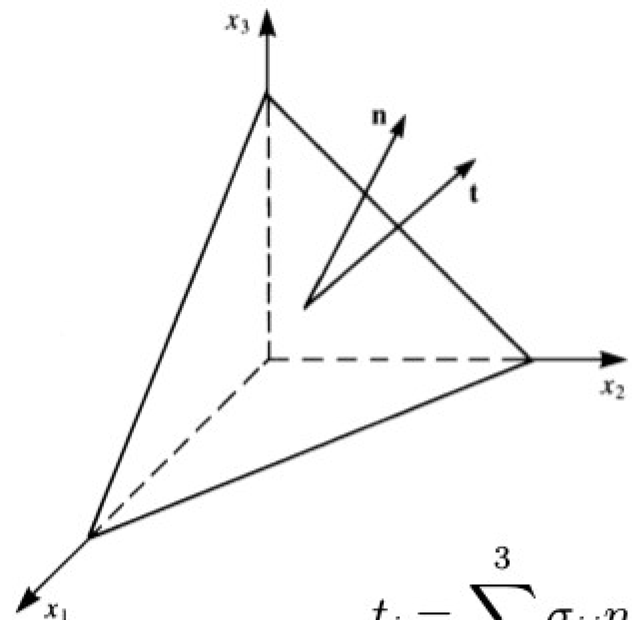
$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w}$$

Para el estudio de la dinámica de fluidos es necesario describir el tipo de fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido. Se consideran las *fuerzas másicas*, **f**, que son independientes de cualquier contacto del cuerpo inmerso con el fluido que lo rodea (e.g., fuerzas de origen magnético o gravitacionales) y su magnitud es proporcional a la masa de dicho elemento.

El otro tipo de fuerzas son aquellas definidas como *fuerzas superficiales* y derivan del *vector tracción* **t**. Para su definición, se considera:



$$\mathbf{t} = \lim_{S \to 0} \left(\frac{\mathbf{F}}{S} \right)$$

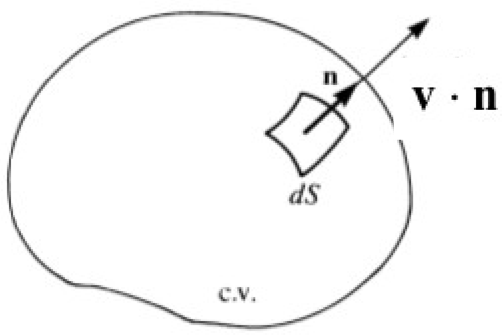


$$t_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Para un fluido Newtoniano (aquel en el cual las componentes σ_{ij} dependen linealmente de las derivadas de las componentes de la velocidad con respecto a las coordenadas), las componentes del tensor de tensiones están relacionados con el campo de velocidades de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = \left(-p - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

El desarrollo necesario para obtener las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido, en su forma integral y diferencial, se basa en analizar qué ocurre con las propiedades dentro de un volumen de control que es estacionario y está sumergido dentro del fluido. Las propiedades pueden ser la densidad, cantidad de movimiento, energía, etc., y cualquier cambio con el tiempo de ellas para el fluido que fluye a través de dicho volumen de control, es la suma de la *acumulación* de esa propiedad y la *transferencia* de la misma fuera del volumen a través de su contorno.



Consideremos como ejemplo el principio de conservación de la masa, que se puede plantear observando los cambios en la densidad del fluido en el volumen de control. La masa dentro de dicho volumen es:

$$m = \int_{vc} \rho \, \mathrm{d}V$$

La acumulación o variación en el tiempo de la cantidad de masa dentro del volumen de control:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \, \mathrm{d}V$$

Por otro lado, el cambio de masa a través del contorno del cuerpo por unidad de tiempo (se puede pensar como un caudal másico):

$$\dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = \int_{sc} \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}S$$

Como la masa se conserva y no se genera ni elimina material, entonces la suma de las dos últimas expresiones debe ser igual a cero:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \, \mathrm{d}V + \int_{sc} \rho \, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}S = 0$$

Expresión Integral del Principio de Conservación de la Cantidad de Masa

De una manera similar, se puede estudiar qué ocurre con la variación de la cantidad de movimiento del fluido que atraviesa el volumen de control en cualquier instante de tiempo: será la suma de la variación de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control más la variación a través del contorno. Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V + \int_{sc} \rho\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,\mathrm{d}S$$

Este cambio de cantidad de movimiento, según la Segunda Ley de Newton, debe ser igual a la sumatoria de fuerzas aplicadas al fluido dentro del volumen de control:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = \sum \mathbf{F}$$

Las fuerzas externas que actúan sobre el fluido son las fuerzas másicas y las fuerzas de superficie:

$$\left(\sum \mathbf{F}\right)_i = \int_{vc} \rho\, f_i\,\mathrm{d}V + \int_{sc} n_j\,\sigma_{ij}\,\mathrm{d}S$$

Finalmente, al igualar la primer y la última expresión para cumplir con Newton, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, v_i\,\mathrm{d}V + \int_{sc} \rho\, v_i\,(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,\mathrm{d}S = \int_{vc} \rho\, f_i\,\mathrm{d}V + \int_{sc} n_j\,\sigma_{ij}\,\mathrm{d}S$$

Expresión Integral del Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento

Si se quisiera disponer de las expresiones de los principios de conservación pero en forma diferencial, que para algunos casos es más útil trabajar de esta manera, las dos expresiones halladas se deben llevar a integrales de volumen. Para esta tarea, hacemos uso del Teorema de la Divergencia:

$$\int_S \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}V$$

$$\int_S T_{ij\ldots p} \, n_p \, \mathrm{d}S = \int_V \frac{\partial T_{ij\ldots p}}{\partial x_p} \, \mathrm{d}V$$

Entonces, aplicando el teorema a la expresión integral del principio de conservación de la masa:

$$\int_{vc} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \, \mathbf{v} \right) \, \mathrm{d}V = 0$$

Como la ecuación anterior se debe cumplir para un volumen de control arbitrario en cualquier ubicación del fluido, entonces el integrando también debe ser nulo. De esta manera se tiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \, \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Expresión Diferencial del Principio de Conservación de la Cantidad de Masa

La expresión diferencial del Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento se halla comenzando con aplicar el Teorema de la Divergencia en el segundo término de ambos miembros de la igualdad de la expresión integral:

$$\int_{sc} \rho\, v_i\, (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})\ \mathrm{d}S = \int_{vc} \nabla\cdot(\rho\, v_i\, \mathbf{v})\ \mathrm{d}V$$

$$\int_{sc} n_j\, \sigma_{ij}\, \mathrm{d}S = \int_{vc} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, \mathrm{d}V$$

Al reemplazar las anteriores en la expresión integral del principio de conservación y acomodando:

$$\int_{vc} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_i) + \nabla\cdot(\rho\, v_i\, \mathbf{v}) - \rho\, f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right] \mathrm{d}V = 0$$

Como se vio anteriormente, la expresión integral debe ser nula para cualquier volumen de control arbitrario y por lo tanto es válido decir que el integrando debe ser nulo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_i) + \nabla\cdot(\rho\, v_i\, \mathbf{v}) = \rho\, f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad i = 1, 2, 3$$

Al expandir el primer miembro y haciendo uso de la *ecuación de continuidad*:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) = v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \right) = \rho \frac{D v_i}{Dt}$$

Reemplazando finalmente se obtiene:

$$\rho \frac{D v_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Expresión Diferencial del Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento

Si consideramos un fluido Newtoniano y utilizamos la *relación constitutiva* vista anteriormente, podemos sustituir en la ecuación diferencial del Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento para obtener así las Ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \right) = \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \qquad i = 1, 2, 3$$

Muchos problemas admiten asumir que la viscosidad del fluido es constante, lo cual reduce la complejidad del tratamiento numérico de las Ecuaciones de N-S, adoptando la forma siguiente:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right)=\rho\,\mathbf{f}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{v}+\frac{\mu}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right)$$

Y al considerar flujo incompresible se reduce aún más:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right)=\rho\,\mathbf{f}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{v}$$

Para el hipotético caso de un fluido compresible pero sin viscosidad, se obtiene la Ecuación de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=\mathbf{f}-\frac{\nabla p}{\rho}$$

Otro caso particular es el de la Ecuación de Stokes, que aplica a problemas estacionarios y en los cuales las fuerzas de inercia del fluido son despreciables con respecto a las viscosas:

$$\rho\,\mathbf{f}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{v}=0$$

Queda por ver el Principio de Conservación de la Energía, el cual pone de manifiesto cómo es el balance de los intercambios de energía entre un sistema (en nuestro caso será el volumen de control) y el entorno que lo rodea (para nosotros será el campo de fluido). La hipótesis adoptada para este desarrollo es que el fluido no es conductor de calor y que los únicos procesos de intercambio de energía son solamente los del trabajo realizado por las fuerzas másicas y de superficie. Bajo estas aclaraciones, la ley de conservación de la energía se escribe como:

$$\frac{DE}{Dt} = W_1 + W_2$$

Donde E es la energía del fluido, W_1 es la tasa en la que se realiza trabajo en el volumen debido a las fuerzas másicas y W_2 es la tasa en la que se realiza trabajo en el volumen (sobre su superficie) causado por las fuerzas de superficie. La energía del fluido consta de una parte que es la energía interna del mismo y de la energía cinética. Si planteamos esto para un elemento de fluido:

$$E = \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \delta V$$

La tasa o velocidad con que las fuerzas másicas generan trabajo se escribe como:

$$W_1 = \rho \, \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, \delta V$$

En este análisis se asume que el fluido es no viscoso y, en consecuencia, las fuerzas de superficie son solamente debidas a fuerzas de presión. Por lo tanto:

$$W_2 = -\int_{sc} p\,\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = -\int_{vc} \nabla\cdot(p\,\mathbf{v})\;\mathrm{d}V \therefore W_2 = -\nabla\cdot(p\,\mathbf{v})\,\delta V$$

Escribiendo todas las expresiones juntas:

$$\frac{D}{Dt}\left[\rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\delta V\right] = \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,\delta V - \nabla\cdot(p\,\mathbf{v})\,\delta V$$

Como la masa del elemento de fluido se conserva, su derivada material es cero. Ahora si escribimos la anterior por unidad de volumen:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{v^2}{2}\right) = \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} - \nabla\cdot(p\,\mathbf{v})$$

Y si se desarrolla el último término:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{v^2}{2}\right) = \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\nabla p - p\nabla\cdot\mathbf{v}$$