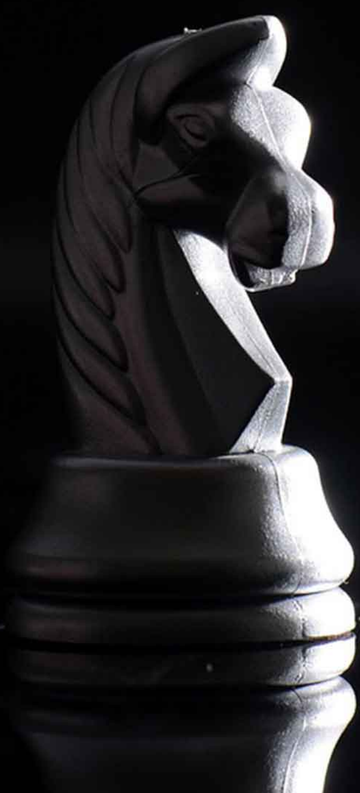
ریاضیات گسسته

درآمدی بر ریاضیات گسسته با رویکرد دانشگاهی



فهرست مطالب

فصل ۱

آنالیز ترکیبی

آنچه در این فصل مورد بحث قرار خواهد گرفت، مبحث شمارش است که به محاسبه‌ی تعداد حالات رخداد یک پدیده، بدون بررسی تک تک حالات می‌پردازد. از کاربردهای این فصل می‌توان به محاسبه‌ی احتمالات پیش‌آمدها، تخمین زمان اجرا و منابع مصرفی برنامه‌ها، برخی از تحلیل‌ها در گراف و ... اشاره کرد.

عکس از: بی‌نام ناشناس

اصل شمول و عدم شمول

همانطور که در توضیحات مربوط به اصل جمع نیز گفته شد، آن اصل فقط زمانی قابل استفاده است که حالات مختلف انجام یک عمل از دو مسیر، اشتراکی نداشته باشند. این اصل برای رفع این محدودیت ارائه شده است. منطق این اصل بسیار ساده است. اگر حالتی از انجام کار، در دو مسیر مشترک باشد، اگر از اصل جمع استفاده کنیم، این حالت دو بار شمرده می‌شود. برای حل این ضعف، به سادگی، این تعداد را یکبار از نتیجه کل کم می‌کنیم تا به تعداد حالات یکتا برسیم.

اگر بتوان فضای حالات عملی (مانند □ را به دو فضای A_1 و A_2 تقسیم کرد به نحوی که این دو فضا امکان اشتراک در اعضایشان را داشته باشند، آنگاه طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد اعضای فضای حالت کل برابر است با:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

اصل فوق قابلیت تعمیم دارد.

تعمیم اصل شمول و عدم شمول را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |\bigcap_{j \in \{i_1, \ldots, i_k\}} A_j|) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \le n} |A_{i_1}| \\ &- \sum_{1 \le i_1 < < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &- \cdots \end{aligned}$$

۱ **تعداد رشته‌های باینری**

چه تعداد رشته باینری به طول ۸ وجود دارد که یا با ۱ آغاز شود و یا با ۰۰ به پایان برسد؟

پاسخ از طریق اصل شمول و عدم شمول

اگر تعداد رشته‌هایی که با ۱ آغاز می‌شوند را با A_1 نشان دهیم، داریم (یک حالت برای بیت اول و ۲ حالت برای هر یک از ۷ بیت دیگر):

$$|A_1| = 1 \times 2^7$$

اگر تعداد رشته‌هایی که با ۰۰ به پایان می‌رسند را با A_0 نشان دهیم، داریم (یک حالت برای دو بیت آخر و ۲ حالت برای هر یک از ۶ بیت دیگر) :

$$|A_0| = 1^2 \times 2^6$$

تعداد رشته‌هایی که با ۱ آغاز می‌شوند و با ۰۰ به پایان می‌رسند (یک حالت برای بیت اول و دو بیت آخر و ۲ حالت برای هر یک از ۵ بیت دیگر) :

$$|A_1 \cap A_0| = 1^3 \times 2^5$$

بنابر اصل شمول و عدم شمول داریم :

$$|A_1 \cup A_0| = |A_1| + |A_0| - |A_1 \cap A_0| = 2^7 + 2^6 - 2^5$$

پریش

به هر جایگشتی از یک دنباله متناهی به نحوی که هیچ یک از اعضا در جایگاه اصلی خود قرار نگیرند، پریش گفته می‌شود.

برای نمونه، دنباله حروف $TKSAR$ یک پریش برای دنباله $STARK$ می‌باشد.

بیشتر بدانید: معادلات سیاله

معادله سیاله در ریاضیات، معادله‌ای چند جمله‌ای با متغیرهای صحیح (مجهولات فقط می‌توانند مقادیر صحیح اتخاذ کنند) است. شکل کلی این معادلات را می‌توان به شکل زیر نمایش داد که در آن، تنها x_iها مجهول هستند (ضرایب و توان‌ها می‌توانند هر مقداری حقیقی داشته باشند):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d_i}(a_{i,j} \times {x_i}^{j}) = s$$

کد

همچنین خوب است اگر به کد زیر نیز توجه کنید:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {
    int integer;
    cout << "Enter an integer:\t";
    cin >> integer;

    int c1, c2, c3, c4, c5;
    c1 = integer%10;
    integer /= 10;
    c2 = integer%10;
    integer /= 10;
    c3 = integer%10;
    integer /= 10;
    c4 = integer%10;
    c5 = integer/10;

    cout << c5 << " " << c4 << " " << c3 << " " << c2 << " " << c1;

    return 0;
}
```

مسائل

۲

سه مهره رخ متمایز و صفحه شطرنجی 8×8 داریم. به چند روش می‌توان این سه مهره را در سه خانه از این صفحه قرار داد به طوری که حداقل یک مهره وجود داشته باشد که توسط هیچ مهره‌ای تهدید نمی‌شود؟

پاسخ غلط

- کل حالات:

$$64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

$$64 \times 7 \times 20 \times 2$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - 64 \times 14 \times 20$$

پاسخ

- کل حالات: به دلیل تمایز رخ‌ها برابر است با:

$$P(64,3) = 64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید شوند. دو حالت داریم:

آ. رخ اول رخ دوم را تهدید کند:

$$64 \times 14 \times 20$$

ب. رخ اول رخ دوم را تهدید نکند:

$$64 \times 49 \times 2$$

- حالات مطلوب طبق اصل متمم(↩) برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - (64 \times 14 \times 20 + 64 \times 49 \times 2)$$

تمرینات

۱. سوال اول

۲. سوال دوم

۳. سوال سوم

فصل ۲

منابع

در این بخش می‌توانید معنای علائم اختصاری منابع را ملاحظه کنید.

عکس از: ؟

Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, 7th Edition (1969)